

REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EQUIPEMENT
OFFICE DE LA TOPOGRAPHIE ET DU CADASTRE

**LA COMBINAISON DES
OBSERVATIONS TERRESTRES ET
DOPPLER
DANS LA COMPENSATION DES
RESEAUX GEODESIQUES
DE L'INGÉNIEUR GÉNÉRAL
ABDELMAJID BEN HADJ SALEM**

Mai 2013

Version 4.

OFFICE DE LA TOPOGRAPHIE ET DU
CADASTRE

INSTITUT GEOGRAPHIQUE NATIONAL
ECOLE NATIONALE DES SCIENCES
GEOGRAPHIQUES

**LA COMBINAISON DES
OBSERVATIONS TERRESTRES ET
DOPPLER
DANS LA COMPENSATION DES
RESEAUX GEODESIQUES**

**MÉMOIRE DE FIN D'ETUDES POUR L'OBTENTION
DU
DIPLOME D'INGENIEUR GEOGRAPHE CIVIL
PRÉSENTÉ PAR
ABDELMAJID BEN HADJ SALEM**

**Le 2 Octobre 1986 devant le Jury :
J.L. LE FLOC'H : Directeur Des Etudes
C. BOUCHER : Maitre de Stage
H. DUQUENNE : Professeur de Géodésie**

Département de Traitement de
L'Information Géodésique (S.G.N.M)
Janvier -Aout 1986

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier mon maître de stage Mr. C. Boucher d'avoir accepté de superviser ce travail ainsi que Mr. P. Marmounier pour les discussions que j'ai eues avec lui.

J'exprime ma gratitude à Mr. H.M. Dufour pour ses suggestions et commentaires relatives au sujet de ce mémoire.

Je remercie également tout le personnel du Département de Traitement de l'Information Géodésique qui m'a aidé à suivre le stage dans de bonnes conditions.

Enfin, je ne peux oublier les encouragements et l'appui de MM. C. Fezzani et M. Charfi, Ingénieurs en Chef Géographes à l'Office de la Topographie et de la Cartographie (Tunisie), tout au long de la durée de mes études au cycle des Ingénieurs Géographes de l'E.N.S.G. Qu'ils trouvent ici toute ma reconnaissance.

Table des matières

1	Introduction	7
2	Rappel des Résultats de la Méthode des Moindres Carrés	9
3	Relations entre les Coordonnées 3-D Géodésiques Terrestres et Doppler	15
3.1	Le choix des transformations entre les systèmes Doppler et géodésiques Terrestres	16
3.2	Les Transformations entre les coordonnées 3-D géodésiques et Doppler	16
3.2.1	En Coordonnées cartésiennes	16
3.3	Repères et Rotations	22
3.3.1	Matrice de passage du repère géodésique local au repère géodésique local au repère géodésique 3D	22
3.3.2	Expression du vecteur rotation dans le repère local	23
3.3.3	Expression de (dX, dY, dZ) en fonction de $(d\phi, d\lambda, dH)$	24
4	Compensation des Observations Terrestres et Doppler ..	27
4.1	Introduction	27
4.2	Les Données	28
4.3	Compensation des Observations Terrestres	29
4.4	Compensation des Coordonnées Doppler	30
4.5	Calcul des 7 Paramètres de la Transformation (s3-5) ...	30
4.6	Etude des Matrices Variance-Covariances	30

5	La Combinaison des Observations Terrestres et Doppler	33
5.1	Le Lien Fonctionnel Entre les Réseaux Doppler et Géodésique Terrestre	33
5.2	Les Modèles de Compensation	34
5.3	Les Coordonnées Doppler sont fixées	34
5.3.1	Modèle de compensation 3D-1	35
5.3.2	Modèle de compensation en 3D-2	36
5.3.3	Modèle de compensation 3D-3	38
5.3.4	Modèle de compensation 2-D-1	39
5.3.5	Modèle de compensation en 2D-2	41
5.3.6	Modèle de compensation 2D-3	42
5.3.7	Modèle de compensation 2D-4	43
5.4	Les Coordonnées Doppler ne sont pas Fixées	46
5.4.1	Modèle de compensation 3D-1	46
5.4.2	Modèle de compensation 3D-2	48
5.4.3	Modèle de compensation 3D-3	50
5.5	Amélioration des paramètres de l'ellipsoïde de référence	51
5.6	Détermination des paramètres de la transformation par la méthode des référentiels régionaux inverses	52
5.6.1	Présentation des référentiels régionaux inverses	52
5.6.2	Formules différentielles	55
5.6.3	Calcul des paramètres de la transformation	56
5.6.4	Exemple numérique	57
6	Modèles de Combinaison des Observations Doppler et Terrestres	61
6.1	Procédure de H. Wolf (1980,1982,1984)	61
6.1.1	Calcul des paramètres T et m	62
6.1.2	Transformation des coordonnées Doppler dans le système géodésique terrestre	62
6.1.3	Equations d'observations	62
6.1.4	Corrections des altitudes des stations Doppler	64
6.1.5	Calcul final des 7 paramètres de la transformation	64
6.1.6	Calcul des coordonnées géocentriques finales	65
6.1.7	Modèle de R.Kelm (1983)	65
6.2	Procédure de M. Baumker (1983)	67
6.3	Méthode de T. Vincenty (1982,1980)	68

7	La Combinaison des Observations Terrestres et Doppler de Plusieurs Campagnes	71
7.1	Les points Doppler sont fixés	72
7.1.1	Modèle de compensation 3D-1	72
7.1.2	Modèle de compensation 3D-2	72
7.1.3	Modèle de compensation	74
7.2	Les points Doppler ne sont pas fixés	74
7.2.1	Modèle de compensation 3D-1	75
7.2.2	Modèle de compensation 3D-2	76
8	Les Erreurs Systématiques dans la Combinaison des observations Doppler et Terrestres	79
8.1	Introduction	79
8.2	Origines des erreurs systématiques	79
8.3	Définitions	80
8.4	Analyse des erreurs systématiques dans les réseaux géodésiques terrestres	81
8.4.1	Sur L'Orientation du Réseau Géodésique Terrestre	81
8.4.2	Sur la mise à l'échelle d'un réseau géodésique ..	94
8.5	Les Erreurs Systématiques dans la Combinaison des Observations Doppler et Terrestres	99
8.5.1	Orientation du référentiel géodésique	100
8.5.2	Orientation du référentiel géodésique et mise en place du réseau géodésique	101
9	Le Choix d'un Modèle de Combinaison des Observations Doppler et Terrestres	109
9.1	Introduction	109
9.2	Le Choix de Modèle de Combinaison	110
9.2.1	Modèles de compensation du groupe G 1	110
9.2.2	Modèles de compensation pour le groupe G 2 ..	110
9.3	La Recherche de Modèles de Passage entre les Réseaux Doppler et Géodésiques Terrestres	111
9.3.1	Cas I : U dépend des paramètres classiques	111
9.3.2	Cas II : Cas général	114
10	Résumé et Conclusions	115
	Littérature	119

Bibliographie	122
Liste des Figures	122
Liste des Tables	124

Résumé

L'étude concerne la combinaison des données Doppler et les observations terrestres classiques dans la compensation des réseaux géodésiques. Des modèles de compensation sont présentés. Ils appartiennent à deux groupes : compensation combinée ; compensation commune.

Le modèle de Bursa-Wolf et les formules générales de Molodensky sont utilisées pour le calcul des 7 paramètres (translation, rotation et facteur d'échelle).

Les erreurs systématiques dans l'orientation et la mise à l'échelle des réseaux géodésiques terrestre sont traitées.

Summary

The investigation concerns the combination of Doppler data and terrestrial classical observations for the adjustment of geodetic networks and the determination of the 7 parameters (translation, rotation and scale) between terrestrial geodetic and Doppler networks.

Models of adjustment are presented. They are part of two groups : 1- a combined adjustment, 2- a common adjustment. Bursa-Wolf's model and Molodensky formulas are used to determine the parameters.

Systematic errors in orientation and scale of geodetic terrestrial networks are studied.

Zusammenfassung

Diese Arbeit behandelt die Kombination von Doppler daten mit klassischen terrestrischen Beobachtungen für die Ausgleichung der geodatischen Netze, und die Bestimmung der sieben Transformationsparameter (Translation, Rotation, Maßstab) zwischen terrestrischen und Doppler Netzen.

Ausgleichsmodelle werden beschrieben. Sie sind Teile von zwei Gruppen : 1- eine kombinierte Ausgleichung, 2- eine gemeinsame Ausgleichung. Bursa-Wolf Modelle und die Formeln von Molodensky werden für die Bestimmung der sieben Parameter verwendet.

Systematische Fehler in der Orientierung und im Maßstab, von terrestrischen Netzen werden untersucht.

Chapitre 1

Introduction

La combinaison des données satellites avec les observations terrestres s'était posée dès l'établissement des réseaux satellites (D.B Thomson, 1976).

Le développement de la géodésie Doppler dans l'établissement et le contrôle des réseaux géodésiques a contribué à faire appel à la combinaison des données spatiales, en particulier, les données Doppler avec les observations terrestres pour la compensation des réseaux géodésiques.

A l'heure actuelle, les nouvelles techniques (VLBI , GPS , Inertielle) et la nouvelle approche de la géodésie c'est-à-dire la Géodésie Intégrée ou Opérationnelle vont permettre de plus en plus la combinaison des observations terrestres avec d'autres données (spatiales, gravimétriques et inertielle).

Cependant, l'utilisation de la méthode Doppler est encore un moyen dans l'établissement des réseaux géodésiques, surtout pour les pays en voie de développement. Le projet ADOS (Africain Doppler Survey) est un exemple (I. Mueller, 1982).

Il se pose alors le problème de la combinaison des données Doppler avec les observations terrestres classiques pour la compensation des réseaux géodésiques et la détermination des 7 paramètres de la transformation entre les systèmes Doppler et géodésiques terrestres.

Le problème reste à l'ordre du jour, comme le souligne l'une des recommandations du 7ème Symposium International sur les calculs géodésiques (Cracovie, Pologne, 18-21 Juin 1985) : " Le développement de méthodes efficaces de compensation, en combinant toutes sortes d'observations, mêmes celles obtenues par les techniques modernes de mesures ". (BG, Vol 60 N°2, 1986).

Dans cette étude, on se limite à la combinaison des données Doppler avec les observations terrestres classiques pour la compensation des réseaux géodésiques terrestres et le calcul des paramètres (translation, rotation et échelle) entre les réseaux

Doppler et géodésiques terrestres ainsi que l'analyse des erreurs systématiques.

Les modèles choisis pour le calcul des paramètres cités ci-dessus sont le modèle de Bursa-Wolf et les formules générales de Molodensky.

Dans le chapitre 2, nous rappelons quelques résultats de la méthode des moindres carrés. Dans le troisième chapitre, on présente les relations entre les divers systèmes de coordonnées.

Le chapitre 4 contient des compensations des données Doppler et des observations terrestres séparément et le calcul des 7 paramètres la transformation entre les réseaux Doppler et géodésiques terrestres utilisant le modèle de Bursa-Wolf.

Dans le chapitre 5, on détaille le problème de la combinaison des données Doppler avec les observations terrestres en étudiant le lien fonctionnel entre les deux systèmes Doppler et géodésique terrestre ainsi que les modèles de compensation.

On passe en revue les principales méthodes proposées par H. Wolf, R. Kelm, M. Baumker et T. Vincenty dans le chapitre 6.

La combinaison des observations terrestres avec les données Doppler de plusieurs campagnes est traitée dans le chapitre 7.

Le chapitre 8 est consacré à l'étude des erreurs systématiques dans la combinaison des données Doppler avec les observations terrestres classiques. D'une part on analyse les erreurs systématiques dans les réseaux géodésiques sans l'introduction des données Doppler, d'autre part, en considérant la combinaison de ces dernières avec les observations terrestres classiques.

Dans le chapitre 9, on étudie la question du choix d'un modèle de combinaison des données Doppler avec les observations terrestres classiques. On pose le problème de la recherche par une nouvelle approche des transformations entre les coordonnées géodésiques terrestres et géocentriques.

Dans le chapitre 10, on présente un résumé et les conclusions de cette étude.

Nous terminons par donner la bibliographie et les annexes contenant les programmes FORTRAN qui ont servi pour les calculs numériques.

Chapitre 2

Rappel des Résultats de la Méthode des Moindres Carrés

Les équations d'observations s'écrivent sous la forme matricielle :

$$A.x = L + V \quad (2.1)$$

$A = A(n, r)$: matrice des coefficients de rang r .

$x = x(r, 1)$: le vecteur des inconnues, les corrections aux valeurs approchées.

$L = L(n, 1)$: le vecteur des observations.

$V = V(n, 1)$: le vecteur des résidus.

r : le nombre des inconnues.

n : le nombre des observations.

Soit P la matrice de poids des observations (matrice carrée symétrique et régulière), la solution de (2.1) telle que $V^T.P.V$ minimum (T désigne transposée) est :

$$\bar{x} = (A^T.P.A)^{-1}A^T.P.L = N^{-1}.A^T.P.L \quad (2.2)$$

La matrice variance-covariance de \bar{x} est :

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = (A^T.P.A)^{-1} = N^{-1} \quad (2.3)$$

On utilise plutôt :

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \bar{s}^2 N^{-1} \quad (2.4)$$

avec :

$$\bar{s}^2 = \frac{V^T.P.V}{n-r} \quad (2.5)$$

facteur de variance unitaire.

Le vecteur résidu est :

$$V = A.\bar{x} - L \quad (2.6)$$

ou encore en remplaçant \bar{x} par son expression (2.2) :

$$V = (A.(A^T.P.A)^{-1}.A^T.P - I).L = G.L \quad (2.7)$$

avec :

$$G = A.(A^T.P.A)^{-1}.A^T.P - I \quad (2.8)$$

On vérifie facilement que G est une matrice idempotente, donc non régulière. C'est une matrice de S -transformations (Mierlo, 1980 ; V. H Strang, 1980). De (2.2) on obtient la matrice variance du vecteur résidu :

$$\sigma_V^2 = G.\sigma_L^2.G^T = G.P^{-1}.G^T = P^{-1} - A.(A^T.P.A)^{-1}.A^T \quad (2.9)$$

V vérifie :

$$A^T.P.V = 0 \quad (2.10)$$

Etudions plus en détail les résultats précédents. On suppose que le vecteur x des inconnues est composé de 2 types d'inconnues qu'on note x_1 et x_2 ou encore :

$$x = (x_1, x_2)^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

De (2.11), la matrice A s'écrit :

$$A = (A_1, A_2) \quad (2.12)$$

L'équation (2.2) s'écrit :

$$A_1.x_1 + A_2.x_2 = L + V \quad (2.13)$$

De (2.2), on peut écrire :

$$\begin{pmatrix} A_1^T.P.A_1 & A_1^T.P.A_2 \\ A_2^T.P.A_1 & A_2^T.P.A_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^T.P.L \\ A_2^T.P.L \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

En posant :

$$\begin{aligned} N_{11} &= A_1^T.P.A_1 \\ N_{12} &= A_1^T.P.A_2 = N_{21}^T \\ N_{22} &= A_2^T.P.A_2, \quad p_1 = A_1^T.P.L, \quad p_2 = A_2^T.P.L \end{aligned} \quad (2.15)$$

(2.14) s'écrit :

$$\begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

En notant :

$$\begin{aligned} N_{11} &= A_1^T.P.A_1 \\ N_{12} &= A_1^T.P.A_2 = N_{21}^T \\ N_{22} &= A_2^T.P.A_2, \quad p_1 = A_1^T.P.L, \quad p_2 = A_2^T.P.L \end{aligned} \quad (2.17)$$

(2.14) s'écrit :

$$C = N^{-1} = \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

On a (Moritz H., 1980) :

$$\begin{aligned} C_{11} &= N_{11}^{-1} + N_{11}^{-1} \cdot N_{12} \cdot C_{22} \cdot N_{21} \cdot N_{11}^{-1} \\ C_{22} &= (N_{22} - N_{21} \cdot N_{11}^{-1} \cdot N_{12})^{-1} \\ C_{12} &= -N_{11}^{-1} \cdot N_{12} \cdot C_{22} \\ C_{21} &= C_{12}^T \end{aligned} \quad (2.19)$$

d'où \bar{x} :

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C_{11}p_1 + C_{12} \cdot p_2 \\ C_{21}p_1 + C_{22} \cdot p_2 \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

Développons l'équation (2.16) :

$$\begin{aligned} N_{11} \cdot x_1 + N_{12} \cdot x_2 &= p_1 \\ N_{21} \cdot x_1 + N_{22} \cdot x_2 &= p_2 \end{aligned} \quad (2.21)$$

La première équation de (2.21) donne :

$$\bar{x}_1 = N_{11}^{-1} \cdot (p_1 - N_{12} \cdot \bar{x}_2) \quad (2.22)$$

en utilisant la deuxième équation de (2.21), on obtient pour x_2 :

$$(N_{22} - N_{21} \cdot N_{11}^{-1} \cdot N_{12}) \cdot x_2 = p_2 - N_{21} \cdot N_{11}^{-1} \cdot p_1 \quad (2.23)$$

ou encore :

$$N'_2 \cdot \bar{x}_2 = p'_2 \quad (2.24)$$

avec :

$$p'_2 = p_2 - N_{21} \cdot N_{11}^{-1} \cdot p_1 \quad (2.25)$$

$$N'_2 = C_{22}^{-1} \quad (2.26)$$

L'équation (2.24) sera utile par la suite, elle représente l'équation vérifiée par x_2 en éliminant x_1 du système (2.21).

On suppose maintenant qu'on ajoute au système (2.1) d'autres équations d'observations sous la forme :

$$B \cdot x = L' - V' \quad (2.27)$$

et de matrice de poids Q .

Alors la solution de la combinaison de (2.2) et de (2.27) est donnée par (P. Hottier, 1984) :

$$\bar{x}' = \bar{x} - N^{-1}B^T(Q^{-1} + B.N^{-1}.B^T)^{-1}.(B.\bar{x} - L') \quad (2.28)$$

où \bar{x} est donnée par (2.2).

(2.28) s'écrit aussi :

$$(A^T.P.A + B^T.Q.B).\bar{x}' = A^T.P.L + B^T.Q.L' \quad (2.29)$$

Le coefficient de \bar{x}' n'est autre que la somme des équations normales des systèmes (2.1 et (2.27), de même $A^T.P.L + B^T.Q.L'$ est la somme des termes constants des équations normales (P. Meissl, 1982).

La matrice variance-covariance de \bar{x}' estimée par :

$$\bar{s}_{\bar{x}'}^2 = \bar{s}^2.(N + B^T.Q.B)^{-1} \quad (2.30)$$

avec :

$$\bar{s}^2 = \frac{V^T.P.V + V'^T.Q.V'}{n + m - r} \quad (2.31)$$

où m est le nombre des relations d'observations ajoutées.

Le vecteur résidu (2.6) s'écrit :

$$V = A.\bar{x}' - L = A.\bar{x} - L - A.N^{-1}.B^T.(Q^{-1} + B.N^{-1}.B^T)^{-1}.(B.\bar{x} - L') \quad (2.32)$$

Soit :

$$V = V_0 + DV \quad (2.33)$$

avec :

$$V_0 = A.\bar{x} - L \quad (2.34)$$

comme

$$V^T.P.V = V_0^T.P.V_0 + 2DV^T.P.V_0 + DV^T.P.DV \quad (2.35)$$

en négligeant le terme du second ordre $DV^T.P.DV$ et que $DV^T.P.V_0 = 0$ et en utilisant (2.9) puis (2.5), on arrive à la relation :

$$\bar{s}^2 = \frac{(n - r)\bar{s}_2^2 + V'^T.Q.V'}{n + m - r} \quad (2.36)$$

En utilisant les variables x_1, x_2 et en supposant que les relations d'observations ajoutées ne concernant que le vecteur x_2 , alors la matrice B s'écrit :

$$B = (0, B_2) \quad (2.37)$$

L'équation (2.28) devient :

$$\bar{x}'_1 = \bar{x}_1 - C_{21}B_2^T.(Q^{-1} + B_2.C_{22}.B_2^T)^{-1}.(B_2.\bar{x}_2 - L') \quad (2.38)$$

$$\bar{x}'_2 = \bar{x}_2 - C_{22}B_2^T.(Q^{-1} + B_2.C_{22}.B_2^T)^{-1}.(B_2.\bar{x}_2 - L') \quad (2.39)$$

On montre que \bar{x}'_2 est solution de :

$$(N'_2 + B_2^T \cdot Q \cdot B_2)x'_2 = p'_2 + B_2^T \cdot Q \cdot L' \quad (2.40)$$

On retrouve la propriété énoncée précédemment (2.29).

Chapitre 3

Relations entre les Coordonnées 3-D Géodésiques Terrestres et Doppler

A un point géodésique M de coordonnées géodésiques (φ, λ, h_e) où φ, λ et h_e sont respectivement la latitude géodésique, la longitude géodésique et l'altitude ellipsoïdique, on lui correspond ses coordonnées géodésiques tridimensionnelles (X, Y, Z) relatives à un datum donné (ellipsoïde de référence, point fondamental,...), par les formules :

$$X_g = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (N + h_e) \cos \varphi \cos \lambda \\ (N + h_e) \cos \varphi \sin \lambda \\ (N(1 - e^2) + h_e) \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

avec :

- a le demi grand axe de l'ellipsoïde de référence,
- e^2 le carré de la première excentricité :

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \quad (3.2)$$

avec b le petit demi-axe.

- N la grande normale ou le deuxième rayon de courbure de l'ellipsoïde de référence (E) :

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \quad (3.3)$$

On définit le premier rayon de courbure par :

$$\rho = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.4)$$

Au point M, on lui associe ses coordonnées 3-D géocentriques (X', Y', Z') qu'on note par X' , déterminées par Doppler dans un système bien défini.

3.1 Le choix des transformations entre les systèmes Doppler et géodésiques Terrestres

Dans notre étude, nous avons fait le choix de travailler avec le modèle de Bursa-Wolf comme lien entre les 2 systèmes de coordonnées cartésiennes Doppler et géodésiques terrestres, et les formules générales de Molodensky.

D.B Thomson (1976) a étudié en détail les divers types de modèles (Bursa-Wolf, Molodensky-Badekas, Veis,...). Le modèle de Bursa-Wolf est le plus adéquat à la combinaison des observations terrestres d'un réseau géodésique avec plusieurs réseaux Doppler. De plus, ce modèle permet de donner une interprétation géométrique des paramètres et c'est le plus simple à étudier et le plus utilisé en pratique. Cependant, il faut prendre des précautions dans le calcul de ses paramètres. En effet, les paramètres du modèle de Bursa-Wolf sont très corrélés si on travaille sur des petits réseaux (Adam, 1981).

En pratique, on adopte le calcul successivement de :

- la translation,
- la translation et l'échelle,
- la translation, l'échelle et la rotation rz ,
- la translation et les 3 rotations,
- l'ensemble des 7 paramètres.

L'utilisation des formules générales de Molodensky permet de dissocier les coordonnées horizontales (φ, λ) de l'altitude h_e .

3.2 Les Transformations entre les coordonnées 3-D géodésiques et Doppler

3.2.1 En Coordonnées cartésiennes

En utilisant le modèle de Bursa-Wolf (Thomson et Krakivsky, 1976), la relation matricielle entre (X', Y', Z') et $(X, Y, Z)_g$ est donnée par :

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Tx \\ Ty \\ Tz \end{pmatrix} + (1+m) \begin{pmatrix} 1 & rx & -ry \\ -rx & 1 & rz \\ ry & -rz & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_g \quad (3.5)$$

En négligeant les termes de second d'ordre de petitesse, on a :

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Tx \\ Ty \\ Tz \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_g + \begin{pmatrix} 0 & rx & -ry \\ -rx & 0 & rz \\ ry & -rz & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_g + \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_g$$

ou encore :

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Tx \\ Ty \\ Tz \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Y & -Z & 0 \\ -X & 0 & Z \\ 0 & X & -Y \end{pmatrix}_g \cdot \begin{pmatrix} rx \\ ry \\ rz \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_g + \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_g \quad (3.6)$$

et :

$$\begin{aligned} T &= (Tx, Ty, Tz)^T : \text{le vecteur translation} \\ 1 + m &: \text{le facteur d'échelle} \end{aligned} \quad (3.7)$$

$ROT = \begin{pmatrix} rx \\ ry \\ rz \end{pmatrix}$ vecteur des 3 rotations infinitésimales qui ramènent les axes du trièdre géodésique terrestre parallèles aux axes du trièdre géocentrique

(3.7) définit les 7 paramètres de la transformation (3.6). On peut écrire (3.6) sous la forme condensée :

$$X' = F \cdot x_4 + X_g \quad (3.8)$$

avec :

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & Y & -Z & 0 & X \\ 0 & 1 & 0 & -X & 0 & Z & Y \\ 0 & 0 & 1 & 0 & X & -Y & Z \end{pmatrix}_g \quad (3.9)$$

$$x_4 = (Tx, Ty, Tz, rx, ry, rz, m)^T \quad (3.10)$$

En déterminant une valeur approchée T_0 du vecteur T en prenant par exemple :

$$T_0 = \frac{\sum_{i=1}^k (X'_i - X_{g_i})}{k} \quad (3.11)$$

k : le nombre de couples (X', X_g) qu'on connaît. (3.8) s'écrit :

$$X' = F \cdot x_4 + X_g + T_0 \quad (3.12)$$

$$\text{avec } x_4 = (dTx, dTy, dTz, rx, ry, rz, m)^T \quad (3.13)$$

3.2.1.1 Calcul des éléments de la transformation

On pose :

$$X' = (X'_1, \dots, X'_i, \dots, X'_k)^T \quad (3.14)$$

avec :

$$X'_i = (X'_i, Y'_i, Z'_i)^T \quad (3.15)$$

de même pour X_g ,

$$F = (F_1^T, \dots, F_i^T, \dots, F_k^T)^T \quad (3.16)$$

où F_i est donnée par (3.9) et :

$$E = (I, I, \dots, I, \dots, I)^T \quad I \text{ matrice unité } (3,3) \quad (3.17)$$

Pour l'ensemble des k couples $(X', X_g)_i, i = 1, 2, \dots, k$, le vecteur x_4 vérifie l'équation matricielle des relations d'observations :

$$F \cdot x_4 = X' - X_g - E \cdot T_0 + V' \quad (3.18)$$

En posant :

$$L' = X' - X_g - E \cdot T_0 \quad (3.19)$$

L'équation (3.18) s'écrit :

$$F \cdot x_4 = L' + V' \quad (3.20)$$

La matrice de poids Q de (3.20) est définie à partir de la matrice de variance de (3.20) S par :

$$Q^{-1} = S^2 \quad (3.21)$$

et :

$$S^2 = \bar{E}(e \cdot e^T) = \bar{E}((e' - e_g)(e' - e_g)^T) \quad (3.22)$$

avec :

$$\begin{aligned} \bar{E}(\cdot) &: \text{valeur moyenne de } (\cdot) \\ e &: \text{erreur de mesure} = L' - \dot{L} \\ \dot{L} &= \text{valeur nominale de } L' \end{aligned} \quad (3.23)$$

De (3.19), on a :

$$e = e' - e_g \quad (3.24)$$

e' = erreur de mesure centrée des coordonnées Doppler.

e_g = erreur de mesure centrée des coordonnées géodésiques.

Pour notre modèle stochastique, on considère que :

$$\bar{E}(e' \cdot e_g^T) = \bar{E}(e_g \cdot e'^T) = 0 \quad (3.25)$$

Par suite :

$$S^2 = \bar{E}(e' \cdot e'^T) + \bar{E}(e_g \cdot e_g^T) = Q^{-1} \quad (3.26)$$

La solution de (3.20) par la méthode des moindres carrés donne :

$$\bar{x}_4 = (F^T \cdot Q \cdot F)^{-1} \cdot F^T \cdot Q \cdot L' \quad (3.27)$$

et :

$$S_{\bar{x}_4}^2 = (F^T \cdot Q \cdot F)^{-1} \quad (3.28)$$

ou encore :

$$S_{\bar{x}_4}^2 = \bar{s}^2 \cdot (F^T \cdot Q \cdot F)^{-1} \quad (3.29)$$

avec :

$$\bar{s}^2 = \frac{V'^T \cdot Q \cdot V'}{3k - 7} \quad (3.30)$$

De (3.29), on tire les valeurs des écart-types de :

$$Tx, Ty, Tz, rx, ry, rz \text{ et } m \quad (3.31)$$

Développons l'équation (3.20), en posant :

$$U = \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_i \\ \vdots \\ U_k \end{pmatrix}, \quad U_i = \begin{pmatrix} Y_i & -Z_i & 0 \\ -X_i & 0 & Z_i \\ 0 & X_i & -Y_i \end{pmatrix}_g \quad (3.32)$$

$$dT = (dT_x, dT_y, dT_z)^T \quad (3.33)$$

(3.20) s'écrit :

$$E \cdot dT + U \cdot ROT + X_g \cdot m = L' + V' \quad (3.34)$$

$V'^T \cdot Q \cdot V'$ minimum donne le système linéaire :

$$\begin{pmatrix} E^T \cdot Q \cdot E & E^T \cdot Q \cdot U & E^T \cdot Q \cdot X_g \\ \dots & U^T \cdot Q \cdot U & U^T \cdot Q \cdot X_g \\ \dots & \dots & X_g^T \cdot Q \cdot X_g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dT \\ ROT \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E^T \cdot Q \cdot L' \\ U^T \cdot Q \cdot L' \\ X_g^T \cdot Q \cdot L' \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

D'où :

$$\begin{pmatrix} dT \\ ROT \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E^T \cdot Q \cdot E & E^T \cdot Q \cdot U & E^T \cdot Q \cdot X_g \\ \dots & U^T \cdot Q \cdot U & U^T \cdot Q \cdot X_g \\ \dots & \dots & X_g^T \cdot Q \cdot X_g \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} E^T \cdot Q \cdot L' \\ U^T \cdot Q \cdot L' \\ X_g^T \cdot Q \cdot L' \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

3.2.1.2 Propagation des variances

Une fois déterminée les éléments de la formation (3.6). On peut calculer les matrices variances des coordonnées obtenues par (3.6).

En effet on écrit (3.6) sous la forme :

$$X' = T + (1 + m) \cdot J \cdot X \quad (3.37)$$

avec la matrice J :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & rx & -ry \\ -rx & 1 & rz \\ ry & -rz & 1 \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

On a alors :

$$\begin{aligned} S_{X'}^2 &= (1 + 2m) \cdot J \cdot S_X^2 \cdot J^T \\ S_X^2 &= (1 - 2m) \cdot J^T \cdot S_{X'}^2 \cdot J \end{aligned} \quad (3.39)$$

3.2.1.3 En Coordonnées Géodésiques

Appelons (φ', λ', H') les coordonnées géodésiques Doppler relatives à un ellipsoïde donné (WGS-72, NWL-9D,...) de paramètres d' et f' respectivement le demi-grand axe et l'aplatissement. Posons :

$$\begin{aligned} d\varphi &= \varphi' - \varphi \\ d\lambda &= \lambda' - \lambda \\ dH &= H' - H \\ da &= a' - a \\ df &= f' - f \end{aligned} \quad (3.40)$$

On a les expressions de $d\varphi, d\lambda$ et dH en fonction de $Tx, Ty, Tz, rx, ry, rz, m, da$ et df comme suit (C. Boucher, 1978) :

$$\begin{aligned} d\varphi &= \frac{-\sin\varphi \cdot \cos\lambda \cdot Tx}{\rho + H} + \frac{-\sin\varphi \cdot \sin\lambda \cdot Ty}{\rho + H} + \frac{\cos\varphi \cdot Tz}{\rho + H} \\ &\quad - \frac{(a \cdot W + H) \cdot \sin\lambda \cdot rx}{\rho + H} + \frac{(a \cdot W + H) \cdot \cos\lambda \cdot ry}{\rho + H} \\ &\quad - \frac{f \cdot (2 - f) \cdot N \cdot \sin\varphi \cdot \cos\lambda \cdot m}{\rho + H} + \frac{f \cdot (2 - f) \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot da}{W \cdot (\rho + H)} \\ &\quad + \frac{a \cdot (1 - f) \cdot (2 - f(2 - f) \cdot \sin^2\varphi) \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot df}{W^3 \cdot (\rho + H)} \quad (3.41) \\ d\lambda &= \frac{-\sin\lambda \cdot Tx}{(N + H) \cdot \cos\varphi} + \frac{\cos\lambda \cdot Ty}{(N + H) \cdot \cos\varphi} + \left(1 - \frac{f \cdot (2 - f) \cdot N}{N + H} \cdot \text{tg}\varphi\right) \cdot \cos\lambda \cdot rx + \\ &\quad \left(1 - \frac{f \cdot (2 - f) \cdot N}{N + H}\right) \cdot \text{tg}\varphi \cdot \sin\lambda \cdot ry - \quad (3.42) \\ dH &= \cos\varphi \cdot \cos\lambda \cdot Tx + \cos\varphi \cdot \sin\lambda \cdot Ty + \sin\varphi \cdot Tz + m \cdot (a \cdot W + H) \\ &\quad - f \cdot (2 - f) \cdot N \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot \sin\lambda \cdot rx + f(2 - f) \cdot N \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot \cos\lambda \cdot ry - W \cdot da \\ &\quad + \frac{a \cdot (1 - f) \cdot \sin^2\varphi \cdot df}{W} \quad (3.43) \end{aligned}$$

avec :

$$W^2 = 1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi$$

Au lieu d'utiliser $d\varphi, d\lambda$, on préfère $N \cdot \cos \varphi \cdot d\lambda$ et $\rho \cdot d\varphi$. On peut écrire les relations (3.41) à (3.43) matriciellement sous la forme :

$$\begin{pmatrix} N \cdot \cos \varphi \cdot d\lambda \\ \rho \cdot d\varphi \\ dH \end{pmatrix}_i = (AF)_i \cdot x_4 + (BF)_i \cdot \begin{pmatrix} da \\ df \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

avec $(AF)_i$, $(BF)_i$ 2 matrices (3×7) , (3×2) et x_4 le vecteur des paramètres $T_x, T_y, T_z, r_x, r_y, r_z$ et m .

(3.44) s'écrit aussi :

$$(AF)_i \cdot x_4 = \begin{pmatrix} N \cdot \cos \varphi \cdot d\lambda \\ \rho \cdot d\varphi \\ dH \end{pmatrix} - (BF)_i \cdot \begin{pmatrix} da \\ df \end{pmatrix} = l_i \quad (3.45)$$

3.2.1.4 Calcul des éléments de la transformation

Si on écrit (3.45) pour les k triplets $(d\varphi, d\lambda, dH)$ et en faisant intervenir les résidus, on obtiendra la relation :

$$AF \cdot x_4 = l + V \quad (3.46)$$

en notant :

$$\begin{aligned} AF &= ((AF)_1^T, \dots, (AF)_i^T, \dots, (AF)_k^T)^T \\ l &= (l_1^T, \dots, l_i^T, \dots, l_k^T)^T \\ V &= \text{le vecteur résidu} \end{aligned} \quad (3.47)$$

Soit Q la matrice de poids de (3.46), la solution des moindres carrés de (3.46) est :

$$\bar{x}_4 = (AF^T \cdot Q \cdot AF)^{-1} \cdot AF^T \cdot Q \cdot l \quad (3.48)$$

la matrice de poids Q est telle que :

$$Q = \bar{s}_0^2 \cdot S^{-2}$$

avec :

$$S^2 = S_{X'}^2 + S_X^2$$

où :

$S_{X'}^2$: matrice variance des coordonnées Doppler exprimées dans le repère 3D local $(N' \cdot \cos \varphi' \cdot d\lambda', \rho' d\varphi', dH')$.

S_X^2 : matrice variance des coordonnées terrestres exprimées dans le repère 3D local $(N \cdot \cos \varphi \cdot d\lambda, \rho \cdot d\varphi, dH)$.

\bar{s}_0^2 : facteur de variance unitaire.

3.3 Repères et Rotations

3.3.1 Matrice de passage du repère géodésique local au repère géodésique local au repère géodésique 3D

On a la relation :

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix}_g = \begin{pmatrix} -\sin\lambda & -\cos\lambda.\sin\varphi & \cos\lambda.\cos\varphi \\ \cos\lambda & -\sin\lambda.\sin\varphi & \sin\lambda.\cos\varphi \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dH \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

qui s'écrit matriciellement :

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix}_g = R \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dH \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

où R donnée par (3.49), représente la matrice de passage du repère géodésique local au repère géodésique 3D $(X, Y, Z)_g$, (fig.2). La matrice R vérifie :

$$R^{-1} = R^T$$

Fig. 2

Comme on a aussi :

$$\begin{aligned} dx &= (N + H)\cos\varphi.d\lambda \\ dy &= (\rho + H).d\varphi \\ dH &= dH \end{aligned} \quad (3.51)$$

où ρ est le rayon de courbure de la méridienne, (3.51) s'écrit :

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dH \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (N + H)/N & 0 & 0 \\ 0 & (\rho + H)/\rho & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} N.\cos\varphi.d\lambda \\ \rho.d\varphi \\ dH \end{pmatrix} \quad (3.52)$$

soit :

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dH \end{pmatrix} = K \cdot \begin{pmatrix} N.\cos\varphi.d\lambda \\ \rho.d\varphi \\ dH \end{pmatrix} \quad (3.53)$$

d'où :

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix}_g = R.K \cdot \begin{pmatrix} N.\cos\varphi.d\lambda \\ \rho.d\varphi \\ dH \end{pmatrix} \quad (3.54)$$

3.3.2 Expression du vecteur rotation dans le repère local

Au vecteur rotation $ROT = (rx, ry, rz)^T$, (fig.3) on peut lui faire correspondre un vecteur rotation $\Psi = (px, py, pH)^T$ autour des axes x, y, H du repères géodésique local d'un point particulier $M_0(\varphi_0, \lambda_0, H_0)$ en utilisant (3.50) avec :

$$dX = a_m \cdot rx, \quad dY = a_m \cdot ry, \quad dZ = a_m \cdot rz$$

où a_m le rayon moyen de la terre.

Ce qui donne :

$$\begin{pmatrix} rx \\ ry \\ rz \end{pmatrix} = R_0 \cdot \begin{pmatrix} \frac{dx_0}{a_m} \\ \frac{dy_0}{a_m} \\ \frac{dz_0}{a_m} \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

On a alors :

$$\begin{aligned} px &= \frac{dx_0}{a_m} = (N_0 + H_0) \cos \varphi_0 \cdot \frac{d\lambda_0}{a_m} \\ py &= \frac{dy_0}{a_m} = (\rho_0 + H_0) \cdot \frac{d\varphi_0}{a_m} \\ pH &= \frac{dH_0}{a_m} = -dA_0 \end{aligned} \quad (3.56)$$

avec dA_0 une variation d'azimut. (3.56) s'écrit aussi :

$$\begin{pmatrix} px \\ py \\ pH \end{pmatrix} = R_0^T \cdot \begin{pmatrix} rx \\ ry \\ rz \end{pmatrix} \quad (3.57)$$

Calculer (rx, ry, rz) revient à trouver (dx_0, dy_0, dA_0)

Fig. 3

L'équation (3.6) devient :

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix}_i = \begin{pmatrix} Tx \\ Ty \\ Tz \end{pmatrix} + U_i \cdot R_0 \cdot \begin{pmatrix} px \\ py \\ pH \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_i + \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_i \quad (3.58)$$

3.3.3 Expression de (dX, dY, dZ) en fonction de $(d\varphi, d\lambda, dH)$

Soient 2 points $M(\varphi, \lambda, H)$ et $M'(\varphi', \lambda', H')$ de coordonnées 3-D respectivement $(X, Y, Z)_g$ et $(X', Y', Z')_g$, on s'intéresse à l'expression de :

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X' - X \\ Y' - Y \\ Z' - Z \end{pmatrix} \quad (3.59)$$

en fonction de :

$$\begin{pmatrix} d\lambda \\ d\varphi \\ dH \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda' - \lambda \\ \varphi' - \varphi \\ H' - H \end{pmatrix} \quad (3.60)$$

En s'arrêtant aux termes du 2ème ordre, on a par exemple pour la composante X :

$$dX = X' - X = \frac{\partial X}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial X}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial X}{\partial H} dH + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 X}{\partial \lambda^2} d\lambda^2 + \frac{\partial^2 X}{\partial \varphi^2} d\varphi^2 + \frac{\partial^2 X}{\partial H^2} dH^2 + 2 \frac{\partial^2 X}{\partial \lambda \partial \varphi} d\lambda d\varphi + 2 \frac{\partial^2 X}{\partial \lambda \partial H} d\lambda dH + 2 \frac{\partial^2 X}{\partial \varphi \partial H} d\varphi dH \right) \quad (3.61)$$

(3.61) s'écrit matriciellement :

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix} = \bar{R} \cdot \begin{pmatrix} d\lambda \\ d\varphi \\ dH \end{pmatrix} + \frac{1}{2} o(\lambda, \varphi, H) \quad (3.62)$$

avec \bar{R} la matrice :

$$\bar{R} = \begin{pmatrix} -(N+H) \cdot \cos\varphi \cdot \sin\lambda & -(\rho+H) \cdot \cos\lambda \cdot \sin\varphi & \cos\lambda \cdot \cos\varphi \\ (N+H) \cdot \cos\lambda \cdot \cos\varphi & -(\rho+H) \cdot \sin\lambda \cdot \sin\varphi & \sin\lambda \cdot \cos\varphi \\ 0 & (\rho+H) \cdot \cos\varphi & \sin\varphi \end{pmatrix} \quad (3.63)$$

et $o(\lambda, \varphi, H)$ le vecteur de composantes $(ox, oy, oz)^T$:

$$\begin{aligned} ox &= a_1 \cdot d\lambda^2 + b_1 \cdot d\varphi^2 + c_1 \cdot dH^2 + d_1 \cdot d\lambda \cdot d\varphi + e_1 \cdot d\lambda \cdot dH + f_1 \cdot d\varphi \cdot dH \\ oy &= a_2 \cdot d\lambda^2 + b_2 \cdot d\varphi^2 + c_2 \cdot dH^2 + d_2 \cdot d\lambda \cdot d\varphi + e_2 \cdot d\lambda \cdot dH + f_2 \cdot d\varphi \cdot dH \\ oz &= a_3 \cdot d\lambda^2 + b_3 \cdot d\varphi^2 + c_3 \cdot dH^2 + d_3 \cdot d\lambda \cdot d\varphi + e_3 \cdot d\lambda \cdot dH + f_3 \cdot d\varphi \cdot dH \end{aligned} \quad (3.64)$$

avec :

$$\begin{aligned}
a_1 &= -(N+H)\cos\varphi\cos\lambda; & a_2 &= -(N+H)\cos\varphi\sin\lambda; & a_3 &= 0 \\
b_1 &= (H+k\rho)\cos\varphi\cos\lambda; & b_2 &= (H+k\rho)\cos\varphi\sin\lambda; & b_3 &= -(H+k'\rho)\sin\varphi \\
k &= 4-3.W^{-2}; & k' &= (1-3e^2+2e^2\sin^2\varphi)W^{-2}; & c_1 &= c_2 = c_3 = 1 \\
d_1 &= 2(\rho+H)\sin\varphi\sin\lambda; & d_2 &= -2(\rho+H)\sin\varphi\cos\lambda; & d_3 &= 0 \\
e_1 &= -2\cos\varphi\sin\lambda; & e_2 &= 2\cos\varphi\cos\lambda; & e_3 &= 0 \\
f_1 &= -2\sin\varphi\cos\lambda; & f_2 &= -2\sin\varphi\sin\lambda; & f_3 &= 2\cos\varphi
\end{aligned}$$

avec :

$$W^2 = 1 - e^2 \sin^2 \varphi$$

Chapitre 4

Compensation des Observations Terrestres et Doppler

4.1 Introduction

L'accroissement des données spatiales et surtout le Doppler a amené les spécialistes des réseaux géodésiques à faire appel à ces données pour améliorer la qualité des réseaux touchant le positionnement des points, l'orientation et la mise à l'échelle.

Le problème fondamental est comment combiner les données spatiales qui sont en 3-D avec les compensations en 2-D des observations terrestres classiques (V. Ashkenazi & Grist, 1981 ; R. Kelm, 1983 ; T. Vincenty, 1982) dans une seule compensation d'une manière rigoureuse.

Le problème a été posé aussi pour la phase III du Réseau Européen de Triangulation -Retrig- (C. Boucher, 1984,1985 ; H.M. Dufour,1980 ; Wolf 1980a,b, 1982b,c) et pour la redéfinition du Datum de l'Amérique du Nord NAD83 (Hothem et al, 1982).

Avant de voir les solutions proposées, la combinaison des réseaux terrestres classiques avec les données Doppler ou encore les réseaux Doppler posent les problèmes suivants :

- le lien fonctionnel entre 2 réseaux hétérogènes.
- les modèles de compensation.
- la modélisation des erreurs systématiques et accidentelles.

Une autre question qui apparaît est celle des poids à donner à chaque groupe d'observations (Ashkenazi 1987, Ehlert 1981 ; Welsh & Oswald, 1985).

Plusieurs réponses sont apportées à ces questions. Nous les détaillons par la suite. H. Wolf (1980a,b, 1982a,b,c) a proposé 2 procédures pour la phase III du Retrig. T. Vincenty (1982) utilise la méthode des altitudes figées. R. Kelm (1983) préfère

la compensation dans les systèmes géocentriques. M. Baumker (1983) présente la compensation commune des observations terrestres et Doppler en 3-D et expose les raisons du choix de la géodésie tridimensionnelle pour cette compensation. H. M. Dufour (1986a,b) développe l'utilisation des référentiels régionaux inverses.

Z. Zhou (1983) dans un travail de thèse de Docteur Ingénieur a étudié des modèles de transformations pour passer d'un réseau géodésique terrestre à un système géocentrique et la détermination des erreurs systématiques d'échelle et d'orientation des réseaux terrestres.

D. Ehlert (1981) utilisait une procédure de H. Wolf pour le calcul des coordonnées géocentriques du réseau géodésique de premier ordre de l'Allemagne Fédérale et il en a analysé les erreurs systématiques.

I. Gajderowicz (1981) a traité le problème dans le système défini par le réseau Doppler qu'il a appelé le système de référence Doppler. Par la transformation des 7 paramètres, il a introduit des observations fictives avec les coordonnées terrestres pour obtenir les coordonnées finales dans le système de référence Doppler. Il a aussi étudié la possibilité de définir un ellipsoïde Doppler de référence pour le réseau géodésique terrestre.

W. Welsh (1984) a traité le problème avec la condition que les relations entre les systèmes de référence des 2 réseaux terrestre et Doppler soient données ou inconnues. Il a présenté une variété de modèles (Bursa-Wolf, Molodensky-Badekas,...) de relations entre les deux réseaux hétérogènes ainsi quelques modèles de compensation.

K. Swiatek (1984) a présenté un exemple numérique de combinaison de données Doppler avec les observations terrestres classiques utilisant la procédure de H. Wolf (1980,1982) en 3D et 2D avec l'élimination géométrique et algébrique des altitudes. Les résultats obtenus indiquent une diminution des valeurs maximales des erreurs moyennes des coordonnées des points du réseau test considéré.

4.2 Les Données

On dispose d'observations terrestres classiques (angles horizontaux, distances, longitudes, latitudes, azimuts astronomiques et éventuellement des angles verticaux). k points M du réseau possèdent des observations Doppler appartenant à une même campagne.

Soit un réseau géodésique terrestre défini par un ensemble de points M_i de coordonnées géodésiques approchées $(\varphi, \lambda, H)_i$ et de ses coordonnées 3-D $(X, Y, Z)_{g_i}$

relatives à un datum donné.

Appelons $I = \{i/\text{le point } M_i \text{ a des observations Doppler}\}$ et soient :

x_1 : le vecteur des inconnues des points M_i $i \notin I$ et des inconnues autres que celles de position des points $M_i/i \in I$.

x_2 : le vecteur des inconnues de position des points $M_i/i \in I$.

x_3 : le vecteur des inconnues de position déterminées à partir du Doppler des points $M_i/i \in I$.

4.3 Compensation des Observations Terrestres

L'équation matricielle des relations des observations terrestres s'écrit sous la forme :

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = L + V \quad \text{poids } P$$

en utilisant les notations (??) à (??) on a les équations :

$$\bar{x}_1 = N_{11}^{-1} \cdot (p_1 - N_{12} \bar{x}_2) \quad (4.1)$$

$$N'_2 \cdot \bar{x}_2 = p'_2 \quad (4.2)$$

de (4.2), on obtient les coordonnées géodésiques 3-D compensées des points $M_i/i \in I$

$$\bar{X}_g = X_g + f(\bar{x}_2) \quad (4.3)$$

où f est une fonction de \bar{x}_2 suivant le modèle de compensation adopté (en 2-D, en 3-D, en représentation plane, ...).

A l'aide de (4.1) on détermine le vecteur \bar{x}_1 qui donne toutes les autres inconnues relatives aux points $M_i/i \notin I$ et les inconnues des stations Doppler .

Le vecteur résidu V est calculé à partir de :

$$V = A_1 \cdot \bar{x}_1 + A_2 \cdot \bar{x}_2 - L$$

Le facteur de variance unitaire a posteriori \bar{s}_0^2 est :

$$\bar{s}_0^2 = \frac{V^T \cdot P \cdot V}{n_r} \quad (4.4)$$

où n : est le nombre des relations d'observations.

r : est le nombre des inconnues.

Dans cette compensation, on suppose qu'on a analysé les résultats et éliminé les mauvaises observations.

On a les matrices variance-covariances des inconnues \bar{x}_1 et \bar{x}_2 comme suit, en utilisant les notations du chapitre 2 :

$$S_{\bar{x}_2}^2 = N_2'^{-1} \quad (4.5)$$

et :

$$S_{\bar{x}_1}^2 = N_{11}^{-1}(I + N_{12} \cdot S_{\bar{x}_2}^2 \cdot N_{21} \cdot N_{11}^{-1}) \quad (4.6)$$

4.4 Compensation des Coordonnées Doppler

Pour le calcul du vecteur x_3 , on élimine les paramètres physiques inconnues (df, dt, \dots) du système linéaire obtenu avec les équations des relations d'observations Doppler, par la méthode des moindres carrés.

On arrive à l'équation normale de x_3 :

$$D \cdot \bar{x}_3 = p_3' \quad (4.7)$$

d'où le vecteur position compensé des points $M_i/i \in I$:

$$\bar{X}' = X_0' + f(\bar{x}_3) \quad (4.8)$$

avec X_0' le vecteur de position approchée et f une fonction de \bar{x}_3 suivant le modèle de compensation choisi. On obtient aussi \bar{s}^2 le facteur de variance unitaire.

4.5 Calcul des 7 Paramètres de la Transformation (s3-5)

A l'aide des k couples (\bar{X}_g, \bar{X}') , on calcule les 7 paramètres de la transformation (3.6) en utilisant (3.11) à (3.36), (4.3) et (4.8) on arrive à :

$$\begin{pmatrix} E^T \cdot Q \cdot E & E^T \cdot Q \cdot U & E^T \cdot Q \cdot \bar{X}_g \\ \dots & U^T \cdot Q \cdot U & U^T \cdot Q \cdot \bar{X}_g \\ \dots & \dots & \bar{X}_g^T \cdot Q \cdot \bar{X}_g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dT \\ ROT \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E^T \cdot Q \cdot L' \\ U^T \cdot Q \cdot L' \\ \bar{X}_g^T \cdot Q \cdot L' \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

On étudie si les valeurs de m et du vecteur ROT sont significatives. Sinon on refait les calculs en gardant les paramètres ayant des valeurs significatives.

4.6 Étude des Matrices Variance-Covariances

Le calcul Doppler donne pour la matrice de variance de \bar{X}' :

$$S_{\bar{X}'}^2 = D^{-1} \quad (4.10)$$

ou

$$S_{\bar{X}'}^2 = \bar{s}'^2 . D^{-1} \quad (4.11)$$

avec \bar{s}'^2 le facteur de variance unitaire.

La compensation terrestre seule donne :

$$S_{\bar{X}_g}^2 = N_2'^{-1} \quad \text{ou encore} \quad S_{\bar{X}_g}^2 = \bar{s}_0^2 . N_2'^{-1} \quad (4.12)$$

En utilisant (3.38), on obtient pour le point M_i :

$$S_{X_i'}^2 = (1 + 2m) . J . \bar{S}_{X_{gi}}^2 . J^T \quad (4.13)$$

soit :

$$S_{X_i'}^2 = \bar{s}_0^2 . (1 + 2m) . J . \bar{S}_{X_{gi}}^2 . J^T \quad (4.14)$$

On peut donc comparer $S_{X_i'}^2$ à $\bar{S}_{X_{gi}}^2$, où les matrices $\bar{S}_{X_i'}^2$, $\bar{S}_{X_{gi}}^2$ sont des sous matrices extraites de $S_{\bar{X}'}^2$ et $S_{\bar{X}_g}^2$.

Chapitre 5

La Combinaison des Observations Terrestres et Doppler

Comme nous l'avons signalé dans l'introduction du chapitre 4 la combinaison des observations terrestres classiques avec celles du Doppler posent les deux problèmes ci-dessous :

- le lien fonctionnel entre le réseau terrestre et le réseau Doppler.
- les modèles de compensation.

5.1 Le Lien Fonctionnel Entre les Réseaux Doppler et Géodésique Terrestre

Le lien fonctionnel entre les réseaux Doppler et géodésique terrestre se rapporte aux relations entre les coordonnées Doppler et géodésiques des points communs. Ces relations sont étudiées dans les transformations entre les systèmes géodésiques. Celles-ci sont bien traitées dans la littérature géodésique (C. Boucher, 1979 ; Thomson & Krakiwsky, 1976 ; Vanicek & Wells, 1974 ; Leick & Gelder, 1975).

Les relations sont exprimées en coordonnées cartésiennes (modèles de Bursa-Wolf, Hotine, Molodensky ...) ou en coordonnées géodésiques (formules de Molodensky-DMA, Boucher, 1978).

Nous avons fait le choix pour le modèle de Bursa-Wolf en ce qui concerne les transformations entre les coordonnées cartésiennes - équations (3.6) - et les formules plus générales que celles de Molodensky-DMA en coordonnées géodésiques données par (3.41,3.42,3.43).

5.2 Les Modèles de Compensation

Les modèles de compensation appartiennent à 2 groupes :

- G1 : combinaison des observations terrestres avec des contraintes Doppler c'est-à-dire que les coordonnées Doppler sont calculées séparément et sont considérées fixes.
- G2 : combinaison des observations terrestres avec les données Doppler dans une seule compensation.

Pour les 2 groupes, on peut considérer que l'ellipsoïde du datum du réseau géodésique terrestre est invariant ou non.

A G1 ou G2, on associe les modèles de compensation suivants :

a/. compensation en 3-D :

- les inconnues de position sont (dX, dY, dZ) pour les stations Doppler et non Doppler (3D-1),
- les inconnues de position sont $(d\varphi, d\lambda)$ pour les stations non Doppler et $(d\varphi, d\lambda, dH)$ pour les stations Doppler (3D-2),
- les inconnues de position sont $(d\varphi, d\lambda, dH)$ avec des observations d'altitudes (3D-3).

b/. compensation en 2-D :

- les inconnues de position sont $(d\varphi, d\lambda)$, on élimine les altitudes des stations Doppler (2D-1),
- les inconnues de position sont $(d\varphi, d\lambda)$ en utilisant les formules de Molodensky (3.41,3.42) (2D-2),
- les inconnues de position sont (dX, dY, dZ) avec les altitudes figées ($dH = 0$) (2D-3),
- en représentation plane (2D-4).

5.3 Les Coordonnées Doppler sont fixées

Dans cette section, on traite les compensations du groupe G1. On donne les coordonnées Doppler compensées X' avec leur matrice variance-covariance. On effectue une compensation des observations terrestres avec des contraintes Doppler (les X' sont fixées).

Ceci correspond à un modèle de compensation appelé Modèle d'Estimation $n^{\circ}4$ par C. Boucher (1979).

5.3.1 Modèle de compensation 3D-1

L'équation des relations d'observations terrestres est :

$$A_1.x_1 + A_2.x_2 = L + V, \quad \text{matrice poids } P \quad (5.1)$$

avec :

$$x_2 = ((dX, dY, dZ)_{1g}, \dots, (dX, dY, dZ)_{ig}, \dots, (dX, dY, dZ)_{kg})^T \quad (5.2)$$

L'équation de lien entre les coordonnées Doppler et géodésiques terrestres est :

$$x_2 + F.x_4 = X' - E.T_0 + V' \quad (5.3)$$

ou encore :

$$x_2 + F.x_4 = L' + V', \quad \text{matrice poids } Q \quad (5.4)$$

Ici la matrice Q est égale à :

$$Q = D \quad (5.5)$$

$V^T.P.V + V'^T.Q.V'$ minimum donne :

$$\begin{aligned} (N'_2 + D).x_2 + D.F.x_4 &= D.L' + p'_2 \\ F^T.D.x_2 + (F^T.D.F).x_4 &= F^T.D.L' \end{aligned} \quad (5.6)$$

Si on fait intervenir x_3 dans L' , on aura :

$$\begin{aligned} L' &= X'_0 + \bar{x}_3 - X_g - E.T_0 = (X'_0 - X_g - E.T_0) + \bar{x}_3 \\ L' &= L'_0 + \bar{x}_3 \end{aligned} \quad (5.7)$$

Alors (5.6) devient :

$$\begin{pmatrix} N'_2 + D & D.F \\ F^T.D & F^T.D.F \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D.L'_0 + p'_2 + p'_3 \\ F^T.D.L'_0 + F^T.p'_3 \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

de (5.6), on obtient x_2 d'où :

$$\bar{X}_g = X_g + \bar{x}_{22} \quad (5.9)$$

Si on détaille le vecteur x_4 , on aura :

$$\begin{pmatrix} N'_2 + D & D.D.E & D.U & D.X_g \\ \dots & E^T.D.E & E^T.D.U & E^T.D.X_g \\ \dots & \dots & U^T.D.U & U^T.D.X_g \\ \dots & \dots & \dots & X_g^T.D.X_g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ dT \\ ROT \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D.L' + p'_2 \\ E^T.D.L' \\ U^T.D.L' \\ X_g^T.D.L' \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

(5.10) permet de calculer \bar{x}_2 et avec (4.1) on calcule \bar{x}_1 .

Si on considère que les éléments de la transformation sont connus, soit $x_4 = 0$, on aura alors :

$$(N'_2 + D).x_2 = D.L' + p'_2$$

d'où \bar{x}_2 :

$$\bar{x}_2 = (D + N'_2)^{-1} \cdot (D.L' + p'_2) \quad (5.11)$$

En utilisant la formule :

$$(A + B)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}(I + B.A^{-1})^{-1}.B.A^{-1}$$

et la valeur de x_2 sans les contraintes Doppler on a :

$$d\bar{x}_2 = \bar{x}_2 - x_2 = (D + N'_2)^{-1} \cdot D.(L' - x_2) \quad (5.12)$$

$d\bar{x}_2$ constitue l'apport des contraintes Doppler pour le vecteur correction x_2 . Quant au vecteur x_1 , on a l'apport $d\bar{x}_1$:

$$d\bar{x}_1 = -N_{11}^{-1} \cdot N_{12} \cdot d\bar{x}_2 \quad (5.13)$$

5.3.2 Modèle de compensation en 3D-2

Maintenant, on considère que les relations d'observations terrestres sont exprimées dans les plans horizontaux des repères géodésiques locaux. on a une relation du type :

$$A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot p = L + V; \quad P$$

où $p = ((dx, dy)_1, \dots, (dx, dy)_i, \dots)^T \quad (5.14)$

avec :

$$(dx, dy)_i = (N \cdot \cos \varphi \cdot d\lambda, \rho \cdot d\varphi)_i \quad (5.15)$$

le vecteur x_2 s'écrit alors :

$$x_2 = B \cdot p + \mathcal{L} \cdot dH \quad (5.16)$$

avec :

$$B = \text{Matrice diagonale } (B_1, \dots, B_i, \dots, B_k) \quad (5.17)$$

$$\mathcal{L} = \text{Matrice diagonale } (\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_i, \dots, \mathcal{L}_k) \quad (5.18)$$

et B_i, \mathcal{L}_i sont extraites de (3.49) :

$$B_i = \begin{pmatrix} -\sin\lambda & -\cos\lambda \cdot \sin\varphi \\ \cos\lambda & -\sin\lambda \cdot \sin\varphi \\ 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}_i \cdot \begin{pmatrix} \frac{N+H}{N} & 0 \\ 0 & \frac{\rho+H}{\rho} \end{pmatrix}_i \quad (5.19)$$

$$\xi_i = \begin{pmatrix} \cos\lambda \cdot \cos\varphi \\ \sin\lambda \cdot \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}_i$$

et :

$$dH = (dH_1, \dots, dH_i, \dots, dH_k)^T \quad (5.20)$$

L'équation (5.4) devient :

$$B \cdot p = \xi \cdot dH + F \cdot x_4 = L' + V' \quad (5.21)$$

La matrice de poids de (5.21) est toujours égale à $Q = D$. On note l'équation normale terrestre du vecteur p par :

$$N'_2 \cdot p = p'_2 \quad (5.22)$$

alors $V^T \cdot P \cdot V + V'^T \cdot Q \cdot V'$ minimum donne :

$$\begin{pmatrix} B^T \cdot D \cdot B + N'_2 & B^T \cdot D \cdot \xi & B^T \cdot D \cdot F \\ \dots & \xi^T \cdot D \cdot \xi & \xi^T \cdot D \cdot F \\ \dots & \dots & F^T \cdot D \cdot F \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ dH \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^T \cdot D \cdot L' + p'_2 \\ \xi^T \cdot D \cdot L' \\ F^T \cdot D \cdot L' \end{pmatrix} \quad (5.23)$$

Le système (5.23) peut améliorer les altitudes ellipsoïdiques des stations Doppler.

Détaillons le système (5.23) :

$$(B^T \cdot D \cdot B + N'_2) \cdot p + B^T \cdot D \cdot \xi \cdot dH + B^T \cdot D \cdot F \cdot x_4 = B^T \cdot D \cdot L' + p'_2 \quad (5.24)$$

$$\xi^T \cdot D \cdot B \cdot p + \xi^T \cdot D \cdot \xi \cdot dH + \xi^T \cdot D \cdot F \cdot x_4 = \xi^T \cdot D \cdot L' \quad (5.25)$$

$$F^T \cdot D \cdot B \cdot p + F^T \cdot D \cdot \xi \cdot dH + F^T \cdot D \cdot F \cdot x_4 = F^T \cdot D \cdot L' \quad (5.26)$$

De (5.25) on tire dH :

$$dH = (\xi^T \cdot D \cdot \xi)^{-1} \cdot (\xi^T \cdot D \cdot L' - \xi^T \cdot D \cdot B \cdot p - \xi^T \cdot D \cdot F \cdot x_4) \quad (5.27)$$

en remplaçant (5.27) dans (5.24) et (5.26) et en posant :

$$M = D - D \cdot \xi \cdot (\xi^T \cdot D \cdot \xi)^{-1} \cdot \xi^T \cdot D \quad (5.28)$$

on obtient le système :

$$(N'_2 + B^T . M . B) . p + B^T . M . F . x_4 = p'_2 + B^T . M . L' \quad (5.29)$$

$$F^T . M . B . p + F^T . M . F . x_4 = F^T . M . L' \quad (5.30)$$

En posant :

$$\bar{M} = M - M . F . (F^T . M . F)^{-1} . F^T . M \quad (5.31)$$

on trouve \bar{p} :

$$\bar{p} = (N'_2 + B^T . \bar{M} . B)^{-1} . (p'_2 + B^T . \bar{M} . L') \quad (5.32)$$

et pour \bar{x}_4 :

$$\bar{x}_4 = (F^T . M . F)^{-1} . (F^T . M . L' - F^T . M . B . \bar{p}) \quad (5.33)$$

Ayant \bar{p} , on calcule \bar{x}_1 par (4.1). On calcule $d\bar{H}$ avec (5.27) ce qui donne pour un point $M_i, i \in I$ une correction de la hauteur du géoïde en ce point :

$$\bar{N}_i = \bar{N}_{oi} + d\bar{H}_i \quad (5.34)$$

avec \bar{N}_{oi} la hauteur du géoïde avant compensation.

5.3.3 Modèle de compensation 3D-3

On suppose qu'on a des observations d'altitudes telle que :

$$PH . dH = LH \quad (5.35)$$

soit l'équation normale des corrections des altitudes des points terrestres et :

$$N'_2 . p = p_2$$

soit l'équation normale des inconnues de position terrestres avec p donné par (5.14).

En utilisant l'ensemble des points $M_i/i \in I$ et en ordonnant le vecteur :

$$(\dots, (N . \cos\varphi . d\lambda, \rho . d\varphi, dH)_i, \dots)^T$$

on peut écrire avec (5.44) les 2 équations d'observations suivantes :

$$p + AF_1 . x_4 = L'_1 + V'_1, \quad \text{matrice poids } Q_1 \quad (5.36)$$

$$dH + AF_2 . x_4 = L'_2 + V'_2, \quad \text{matrice poids } Q_2 \quad (5.37)$$

Soit Q la matrice de poids de (5.36) et (5.37), on a :

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix} \quad (5.38)$$

avec :

$$Q_1^{-1} = S_{p'}^2, \quad \text{et} \quad Q_2^{-1} = S_{dH'}^2 \quad (5.39)$$

où p' et dH' sont les inconnues de position Doppler.

On obtient alors l'équation normale de (??) :

$$\begin{pmatrix} Q_1 & 0 & Q_1.AF_1 \\ \dots & Q_2 & Q_2.AF_2 \\ \dots & \dots & AF_1^T.Q_1.AF_1 + AF_2^T.Q_2.AF_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ dH \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1.L'_1 \\ Q_2.L'_2 \\ AF_1^T.Q_1.L'_1 + AF_2^T.Q_2.L'_2 \end{pmatrix} \quad (5.40)$$

d'où l'équation normale de la combinaison :

$$\begin{pmatrix} N'_2 + Q_1 & 0 & Q_1.AF_1 \\ \dots & PH + Q_2 & Q_2.AF_2 \\ \dots & \dots & AF_1^T.Q_1.AF_1 + AF_2^T.Q_2.AF_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ dH \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1.L'_1 + p'_2 \\ Q_2.L'_2 + LH \\ AF_1^T.Q_1.L'_1 + AF_2^T.Q_2.L'_2 \end{pmatrix} \quad (5.41)$$

5.3.4 Modèle de compensation 2-D-1

Pour les observations terrestres on a toujours :

$$A_1.x_1 + A_2.p = L + V$$

Pour la station i , on a :

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix}_{gi} + F_i.x_4 = L'_i + V'_i \quad (5.42)$$

On passe de $(dX, dY, dZ)_{gi}$ aux inconnues $(N.cos\phi.d\lambda, \rho.d\phi, dH)_i$ par (3.54) :

$$R_i.K_i \cdot \begin{pmatrix} N.cos\phi.d\lambda \\ \rho.d\phi \\ dH \end{pmatrix}_i + F_i.x_4 = L'_i + V'_i \quad (5.43)$$

d'où :

$$\begin{pmatrix} N.\cos\varphi.d\lambda \\ \rho.d\varphi \\ dH \end{pmatrix}_i + K_i^{-1}.R_i^T.F_i.x_4 = K_i^{-1}.R_i^T.L'_i + V''_i \quad (5.44)$$

La matrice de poids de (5.44) est $K_i^{-1}.R_i^T.S_i^{-2}.R_i.K_i^{-1}$ où S_i^2 est la matrice variance-covariance de X'_i .

Dans (5.44), on va garder les premières équations en utilisant la matrice de sélection MS_i donnée par :

$$MS_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.45)$$

d'où :

$$\begin{pmatrix} N.\cos\varphi.d\lambda \\ \rho.d\varphi \end{pmatrix}_i + MS_i.K_i^{-1}.R_i^T.F_i.x_4 = MS_i.K_i^{-1}.R_i^T.L'_i + W_i \quad (5.46)$$

En posant :

$$\begin{aligned} \bar{F}_i &= MS_i.K_i^{-1}.R_i^T.F_i, & \bar{L}'_i &= MS_i.K_i^{-1}.R_i^T.L'_i, & \bar{F} &= (\bar{F}_1^T, \dots, \bar{F}_i^T, \dots, \bar{F}_k^T)^T \\ \bar{L}' &= (\bar{L}'_1^T, \dots, \bar{L}'_i^T, \dots, \bar{L}'_k^T)^T & \bar{W} &= (W_1^T, \dots, W_i^T, \dots, W_k^T)^T \end{aligned} \quad (5.47)$$

on obtient :

$$p + \bar{F}.x_4 = \bar{L}' + \bar{W} \quad (5.48)$$

La matrice de poids de (5.48) est :

$$\bar{Q} = MS.K^{-1}.R^T.S^{-2}.R.K^{-1}.MS^T \quad (5.49)$$

avec :

$$R.K^{-1} = \text{Matrice diagonale } (R_1.K_1^{-1}, \dots, R_i.K_i^{-1}, \dots, R_k.K_k^{-1}) \quad (5.50)$$

$$MS = \text{Matrice diagonale } (MS_1, \dots, MS_i, \dots, MS_k)$$

et S^2 est la matrice variance-covariance de X^T soit D .

La condition $V^T.P.V + \bar{W}^T.\bar{Q}.\bar{W}$ minimum donne le système :

$$\begin{pmatrix} N'_2 + \bar{Q} & \bar{Q}.\bar{F} \\ \bar{F}^T.\bar{Q} & \bar{F}^T.\bar{Q}.\bar{F} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{Q}.\bar{L}' + p'_2 \\ \bar{F}^T.\bar{Q}.\bar{L}' \end{pmatrix} \quad (5.51)$$

Dans ce modèle, on a éliminé géométriquement les altitudes. La méthode a été utilisée par H. Wolf (1982a,b,c). L'élimination des altitudes va entraîner la détermination de 4 paramètres sur les 7. On peut choisir de calculer la translation (ou la rotation) et le facteur d'échelle ou de calculer en un point particulier M_0 la rotation pH autour de la normale de ce point et les composantes (tx, ty) de la translation dans le plan local géodésique. On obtient les composantes de la translation par :

$$\begin{pmatrix} Tx \\ Ty \\ Tz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\lambda & -\cos\lambda \cdot \sin\varphi \\ \cos\lambda & -\sin\lambda \cdot \sin\varphi \\ 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}_{M_0} \cdot \begin{pmatrix} tx \\ ty \end{pmatrix} \quad (5.52)$$

5.3.5 Modèle de compensation en 2D-2

L'équation des observations terrestres est :

$$A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot p = L + V, \quad \text{poids } P$$

avec p donné par (5.14). Les équations normales terrestre et Doppler sont :

$$N'_2 \cdot p = p'_2, \quad D \cdot p' = p'_3$$

Les relations entre les coordonnées $(\varphi, \lambda, H)_i$ et $(\varphi', \lambda', H')_i$ pour le point M_i sont données par (3.45) :

$$(AF)_{i,x_4} = \begin{pmatrix} N \cdot \cos\varphi \cdot (\lambda' - \lambda) \\ \rho \cdot (\varphi' - \varphi) \\ H' - H \end{pmatrix} - (BF)_i \cdot \begin{pmatrix} da \\ df \end{pmatrix}$$

En remplaçant φ, λ et H par $\varphi + d\varphi, \lambda + d\lambda$ et $H + dH$ avec (φ, λ, H) les coordonnées géodésiques approchées, on arrive à :

$$\begin{pmatrix} N \cdot \cos\varphi \cdot d\lambda \\ \rho \cdot d\varphi \\ dH \end{pmatrix}_i + AF_{i,x_4} = \begin{pmatrix} N \cdot \cos\varphi \cdot (\lambda' - \lambda) \\ \rho \cdot (\varphi' - \varphi) \\ H' - H \end{pmatrix} - BF_i \cdot \begin{pmatrix} da \\ df \end{pmatrix} \quad (5.53)$$

Posons L'_i le second membre de (5.53) et utilisons la matrice de sélection MS_i (5.45) en multipliant la relation (5.53), on obtient alors :

$$\begin{pmatrix} N \cdot \cos\varphi \cdot d\lambda \\ \rho \cdot d\varphi \end{pmatrix}_i + MS_i \cdot AF_{i,x_4} = MS_i \cdot L'_i \quad (5.54)$$

En écrivant (5.54) pour l'ensemble des points $M_i/i \in I$, on a :

$$p + AF \cdot x_4 = L' + V' \quad (5.55)$$

en notant

$$AF = ((MS_1.AF_1)^T, \dots, (MS_i.AF_i)^T, \dots)^T \quad (5.56)$$

$$L' = ((MS_1.L'_1)^T, \dots, (MS_i.L'_i)^T, \dots)^T$$

Soit Q la matrice de poids de (5.55). Elle vaut D . La condition $\min V^T.P.V + V'^T.D.V'$ donne le système :

$$\begin{pmatrix} N'_2 + D & D.AF \\ \dots & AF^T.D.AF \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D.L' + p'_2 \\ AF^T.D.L' \end{pmatrix} \quad (5.57)$$

Comme pour le modèle 2D-2, on ne peut déterminer que 4 paramètres.

5.3.6 Modèle de compensation 2D-3

On compense le réseau géodésique en 3-D en gardant les altitudes des points fixes et ceci en utilisant la relation entre $(dX, dY, dZ)_g$ et dH_g par :

$$dH_g = \cos\lambda.\cos\varphi.dX_g + \sin\lambda.\cos\varphi.dY_g + \sin\varphi.dZ_g \quad (5.58)$$

En considérant $dH_g = 0$, on a :

$$\cos\lambda.\cos\varphi.dX_g + \sin\lambda.\cos\varphi.dY_g + \sin\varphi.dZ_g = 0 \quad (5.59)$$

On décrit la relation matricielle des observations terrestres sous la forme :

$$A_0.x_0 + A_1.x_1 + A_2.x_2 = L + V, \quad P \quad (5.60)$$

où : x_0 : le vecteur des inconnues autres que de position.

x_1 : le vecteur des inconnues de position des points non Doppler.

x_2 : le vecteur des inconnues de position des stations Doppler.

En utilisant (5.59) pour l'ensemble des points géodésiques on a :

$$G_1.x_1 = 0 \quad (5.61)$$

$$G_2.x_2 = 0 \quad (5.62)$$

avec G_1, G_2 des matrices de la forme :

$$G = \begin{pmatrix} g_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & g_2 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & g_i & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & g_q \end{pmatrix} \quad (5.63)$$

où les g_i sont des matrices (1,3) du type :

$$g_i = (\cos\lambda \cdot \cos\varphi, \sin\lambda \cdot \cos\varphi, \sin\varphi)_i \quad (5.64)$$

Les équations des paramètres de transformation et la matrice de poids sont données par (5.4) et (5.5).

La condition $V^T \cdot P \cdot V + V'^T \cdot D \cdot V' + 2 \cdot u^T \cdot G_1 \cdot x_1 + 2 \cdot w^T \cdot G_2 \cdot x_2$ min donne (u, w sont des vecteurs multiplicateurs de Lagrange) :

$$\begin{pmatrix} A_0^T \cdot P \cdot A_0 & A_0^T \cdot P \cdot A_1 & A_0^T \cdot P \cdot A_2 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & A_1^T \cdot P \cdot A_1 & A_1^T \cdot P \cdot A_2 & 0 & G_1^T & 0 \\ \dots & \dots & D + A_2^T \cdot P \cdot A_2 & D \cdot F & 0 & G_2^T \\ \dots & \dots & \dots & F^T \cdot D \cdot F & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_4 \\ u \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0^T \cdot P \cdot L \\ A_1^T \cdot P \cdot L \\ D \cdot L' + A_2^T \cdot P \cdot L \\ F^T \cdot D \cdot L' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.65)$$

La résolution du système détermine $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2$ et \bar{x}_4 .

5.3.7 Modèle de compensation 2D-4

Si le réseau à compenser occupe une petite zone, on peut utiliser l'artifice de la représentation plane pour le compenser.

A un point $M(\varphi, \lambda, H)$ on lui associe son image le point $m(u, w)$ où u, w sont ses coordonnées cartésiennes planes définies par la donnée des fonctions u et w de la représentation utilisée :

$$\begin{aligned} u &= u(\varphi, \lambda) \\ w &= w(\varphi, \lambda) \end{aligned} \quad (5.66)$$

Les relations d'observations s'écrivent :

$$A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 = L + V, \quad P \quad (5.67)$$

avec :

$$x_2 = ((du, dw)_1, \dots, (du, dw)_j, \dots, (du, dw)_k)^T \quad (5.68)$$

Entre les coordonnées des images de (φ, λ) Doppler et $(\varphi, \lambda)_g$, on a la relation :

$$\begin{pmatrix} u' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tu \\ tw \end{pmatrix} + (1+h).r. \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}_g \quad (5.69)$$

où : $t = (tu, tw)^T$: le vecteur translation.

$1+h$: le facteur d'échelle.

$$r = \begin{pmatrix} 1 & -c \\ c & 1 \end{pmatrix} \quad (5.70)$$

est la matrice de rotation. On pose :

$$x_4 = (tu, tw, c, h)^T \quad (5.71)$$

De (5.66), on tire la relation :

$$\begin{pmatrix} du \\ dw \end{pmatrix}_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \varphi} & \frac{\partial u}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial w}{\partial \varphi} & \frac{\partial w}{\partial \lambda} \end{pmatrix}_i \cdot \begin{pmatrix} d\varphi \\ d\lambda \end{pmatrix}_i = J_i \cdot \begin{pmatrix} d\varphi \\ d\lambda \end{pmatrix}_i \quad (5.72)$$

où la matrice J_i est donnée par (5.72), matrice jacobienne de (5.66). La relation (5.69) s'écrit aussi :

$$\begin{pmatrix} u' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}_g + \begin{pmatrix} tu \\ tw \end{pmatrix} + c. \begin{pmatrix} -w \\ u \end{pmatrix}_g + h. \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}_g \quad (5.73)$$

soit pour la station Doppler i :

$$\begin{pmatrix} u' \\ w' \end{pmatrix}_i = \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}_i + f_i \cdot x_4 \quad (5.74)$$

avec

$$f_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u & -w \\ 0 & 1 & w & u \end{pmatrix}_{gi} \quad (5.75)$$

en prenant comme vecteur translation approché le vecteur de composantes (tu_o, tw_o) défini comme suit :

$$tu_o = \frac{\sum_{i=1}^k (u' - u^*)_i}{k}; \quad tw_o = \frac{\sum_{i=1}^k (w' - w^*)_i}{k} \quad (5.76)$$

où (u^*, w^*) sont des valeurs approchées de $(u, w)_g$ et

$$x_4 = (dtu, dtw, c, h)^T \quad (5.77)$$

On arrive en écrivant les résidus à :

$$f_i \cdot x_4 + \begin{pmatrix} du \\ dw \end{pmatrix}_i = \begin{pmatrix} u' \\ w' \end{pmatrix}_i - \begin{pmatrix} u^* \\ w^* \end{pmatrix}_i - \begin{pmatrix} tu_0 \\ tw_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} vu' \\ vw' \end{pmatrix}_i \quad (5.78)$$

soit :

$$f_i \cdot x_4 + \begin{pmatrix} du \\ dw \end{pmatrix}_i = l_i + v'_i \quad (5.79)$$

En écrivant (5.79) pour l'ensemble des points, on a :

$$x_2 + f \cdot x_4 = L' + V' \quad (5.80)$$

où :

$$\begin{aligned} f &= (f_1^T, \dots, f_i^T, \dots, f_k^T)^T \\ L' &= (l_1^T, \dots, l_i^T, \dots, l_k^T)^T \\ V' &= (v'_1{}^T, \dots, v'_i{}^T, \dots, v'_k{}^T)^T \end{aligned} \quad (5.81)$$

La matrice de poids Q de (5.80) est donnée par :

$$Q^{-1} = J \cdot S_{d\varphi, d\lambda}^2 \cdot J^T \quad (5.82)$$

avec pour la matrice J , la matrice obtenue à partir des matrices J_i définies par (5.72), telle que :

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & J_i & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & J_k \end{pmatrix} \quad (5.83)$$

et $S_{d\varphi, d\lambda}^2$ est obtenue en éliminant le vecteur inconnu dH et les autres paramètres physiques dans l'équation normales des observations Doppler, soit :

$$D \cdot x_3 = p_3$$

avec :

$$x_3 = ((d\varphi, d\lambda)_1, \dots, (d\varphi, d\lambda)_i, \dots, (d\varphi, d\lambda)_k)^T \quad (5.84)$$

d'où :

$$S_{d\varphi, d\lambda}^2 = D^{-1} \quad (5.85)$$

par suite la matrice de poids Q de (5.80) est obtenue par :

$$Q^{-1} = J \cdot D^{-1} \cdot J^T \quad (5.86)$$

La condition $V^T \cdot P \cdot V + V'^T \cdot Q \cdot V'$ minimum donne le système :

$$\begin{pmatrix} N'_2 + Q & Q.f \\ f^T.Q & f^T.Q.F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q.L' + p'_2 \\ f^T.Q.L' \end{pmatrix} \quad (5.87)$$

avec l'équation normale des observations terrestres sans Doppler :

$$N'_2.x_2 = p'_2$$

5.4 Les Coordonnées Doppler ne sont pas Fixées

Dans ce paragraphe, on traite les compensations du groupe G_2 . On effectue une compensation globale qui comprendra les coordonnées géodésiques, les 7 paramètres de la transformation (3.6) et les coordonnées Doppler. C'est une compensation commune (M. Baumker, 1983) des données Doppler et des observations terrestres.

5.4.1 Modèle de compensation 3D-1

On travaille en tridimensionnelle pour l'ensemble des réseaux terrestres et Doppler. On a les équations d'observations terrestres :

- observations terrestres : $A_1.x_1 + A_2.x_2 = L + V$, matrice poids P avec $x_2 = (\dots, (dX, dY, dZ)_{ig}, \dots)^T$.

- observations Doppler :

$$C_3.x_3 + C_5.x_5 = L'' + V'', \quad \text{poids } W \quad (5.88)$$

C_3, C_5 sont les matrices des coefficients et :

$$x_5 = (\dots, (dX', dY', dZ')_i, \dots)^T \quad (5.89)$$

le vecteur correction des coordonnées Doppler approchées.

x_5 : le vecteur des paramètres physiques ($Df, dt, \text{réfraction} \dots$)

- lien entre les coordonnées Doppler et géodésiques 3-D d'un point M_i :

$$\begin{pmatrix} X' + dX' \\ Y' + dY' \\ Z' + dZ' \end{pmatrix}_i = \begin{pmatrix} Tx \\ Ty \\ Tz \end{pmatrix} + (1+m) \begin{pmatrix} 1 & rz & -zy \\ -rz & 1 & rx \\ ry & -rx & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X + dX \\ Y + dY \\ Z + dZ \end{pmatrix}_{gi} + \begin{pmatrix} v'_X \\ v'_Y \\ v'_Z \end{pmatrix}_i$$

En négligeant les termes du second ordre de petitesse on arrive à :

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix}_{gi} - \begin{pmatrix} dX' \\ dY' \\ dZ' \end{pmatrix}_i + \begin{pmatrix} Tx \\ Ty \\ Tz \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{gi} + \begin{pmatrix} 0 & -Z & Y \\ Z & 0 & -X \\ -Y & X & 0 \end{pmatrix}_{gi} \begin{pmatrix} rx \\ ry \\ rz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X' - X \\ Y' - Y \\ Z' - Z \end{pmatrix}_i + \begin{pmatrix} v'_X \\ v'_Y \\ v'_Z \end{pmatrix} \quad (5.90)$$

où $(X', Y', Z')_i$ sont les coordonnées Doppler approchées.

$(X, Y, Z)_{gi}$ sont les coordonnées géodésiques approchées.

$(v'_X, v'_Y, v'_Z)^T$ les composantes du vecteur résidu.

En utilisant pour T le vecteur approché T_0 donné par (3.11), le vecteur L' par (3.19), le vecteur x_4 par (3.13) et en écrivant (5.90) pour tous les points $M_i/i \in I$, on a la relation :

$$x_2 - x_3 + F.x_4 = L' + V' \quad (5.91)$$

avec F donnée par (3.16).

La matrice de poids de l'équation (5.91) est liée à la matrice variance - covariance S par :

$$Q^{-1} = S^2 = \bar{S}_{X'}^2 + \bar{S}_{X_g}^2 \quad (5.92)$$

On a donc le système :

$$A_1.x_1 + A_2.x_2 = L + V, \quad P \quad (5.93)$$

$$x_2 - x_3 + F.X_4 = L' + V', \quad Q \quad (5.94)$$

$$C_3.x_3 + C_5.x_5 = L'' + V'', \quad W \quad (5.95)$$

Avec les mêmes notations, on a les équations normales :

- de (5.93) : $N'.x_2 = p'_2$.

- de (5.95) : $D.x_3 = p'_3$.

- et de (5.94) :

$$\begin{pmatrix} Q & -Q & Q.F \\ .. & Q & -Q.F \\ .. & .. & F^T.Q.F \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q.L' \\ -Q.L' \\ F^T.Q.L \end{pmatrix} \quad (5.96)$$

Le système (5.96) est singulier car le nombre des inconnues dépasse celui des relations d'observations.

On peut prendre pour Q :

$$Q^{-1} = D^{-1} + N_2'^{-1} \quad (5.97)$$

La compensation globale de (5.93)-(5.94)-(5.95) donne le système régulier :

$$\begin{pmatrix} Q + N'_2 - Q & Q.F \\ \dots & Q + D - Q.F \\ \dots & \dots & F^T.Q.F \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q.L' + p'_2 \\ -Q.L' + p'_3 \\ F^T.Q.L' \end{pmatrix} \quad (5.98)$$

La deuxième équation de (??) donne x_3 :

$$\bar{x}_3 = (D + Q)^{-1} \cdot (p'_3 + Q.x_2 + Q.F.x_4 - Q.L') \quad (5.99)$$

En faisant intervenir la valeur de x_3 s'il avait compensation du Doppler seul, on obtient :

$$\bar{x}_3 = (I + D^{-1}.Q)^{-1}.x_3 + (D + Q)^{-1} \cdot (Q.x_3 + Q.F.x_4 - Q.L') \quad (5.100)$$

En éliminant x_3 de (5.98), on a :

$$(N'_2 + \bar{Q}).x_2 + \bar{Q}.F.x_4 = \bar{Q}.L' + p'_2 + Q.(D + Q)^{-1}.p'_3 \quad (5.101)$$

$$F^T.\bar{Q}.x_2 + F^T.\bar{Q}.F.x_4 = F^T.\bar{Q}.L' + F^T.Q.(D + Q)^{-1}.p'_3$$

où :

$$\bar{Q} = Q - Q.(D + Q)^{-1}.Q \quad (5.102)$$

Le système (5.101) se transpose du système (5.8) en remplaçant D par \bar{Q} et p'_3 par $Q.(D + Q)^{-1}.p'_3$.

5.4.2 Modèle de compensation 3D-2

On considère que les relations d'observations terrestres sont exprimées dans les plans horizontaux des repères géodésiques locaux. On a une relation du type :

$$A_1.x_1 + A_2.p = L + V, \quad \text{poids } P \quad (5.103)$$

où :

$$p = (\dots, (dx, dy)_i, \dots)^T$$

avec :

$$(dx, dy)_i = (N.\cos\varphi.d\lambda, \rho.d\varphi)_i$$

Le vecteur x_2 s'écrit :

$$x_2 = B.p + \mathcal{E}.dH$$

avec B, \mathcal{E} et dH sont définies par les équations (5.17) à (5.20). L'équation (5.94) devient :

$$B.p = \mathcal{E}.dH - x_3 + F.x_4 = L' + V' \quad (5.104)$$

La matrice de poids Q de (5.104) est telle que :

$$Q^{-1} = S_{X'}^2 + S_{X_g}^2 \quad (5.105)$$

avec :

$$S_{X'}^2 = D^{-1} \quad (5.106)$$

et :

$$S_{X_g}^2 = B.N_2'^{-1}.B^T + \mathcal{L}.PH^{-1}.\mathcal{L}^T = (B, \mathcal{L}). \begin{pmatrix} N_2' & 0 \\ 0 & PH \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} B^T \\ \mathcal{L}^T \end{pmatrix} \quad (5.107)$$

avec PH la matrice de poids des altitudes ellipsoïdiques définie par :

$$PH.dH = LH \quad (5.108)$$

La condition $V^T.P.V + V'^T.Q.V' + V''^T.W.V''$ minimum donne le système suivant :

$$\begin{pmatrix} N_2' + B^T.Q.B & B^T.Q.\mathcal{L} & -B^T.Q.B^T.Q.F \\ \dots & \mathcal{L}^T.Q.\mathcal{L} & -\mathcal{L}^T.Q.\mathcal{L}^T.Q.F \\ \dots & \dots & Q + D & -Q.F \\ \dots & \dots & \dots & F^T.Q.F \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ dH \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_2' + B^T.Q.L' \\ \mathcal{L}^T.Q.L' \\ p_3' - Q.L' \\ F^T.Q.L' \end{pmatrix} \quad (5.109)$$

En posant :

$$\bar{Q} = Q - Q.\mathcal{L}(\mathcal{L}^T.Q.\mathcal{L})^{-1}.\mathcal{L}^T.Q \quad (5.110)$$

on a :

$$\bar{Q}^T = \bar{Q}$$

et en éliminant le vecteur dH , on obtient :

$$\begin{pmatrix} N_2' + B^T.\bar{Q}.B & -B^T.\bar{Q} & B^T.\bar{Q}.F \\ \dots & \bar{Q} + D & -\bar{Q}.F \\ \dots & \dots & F^T.\bar{Q}.F \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_2' + B^T.\bar{Q}.L' \\ p_3' - \bar{Q}.L' \\ F^T.\bar{Q}.L' \end{pmatrix} \quad (5.111)$$

On note que :

$$\bar{Q} = q.(I - \mathcal{L}.\mathcal{L}^T.Q.\mathcal{L})^{-1}.\mathcal{L}^T.Q = (I - Q.\mathcal{L}.\mathcal{L}^T.Q.\mathcal{L})^{-1}.\mathcal{L}^T.Q$$

où les matrices :

$$I - \mathcal{L}.\mathcal{L}^T.Q.\mathcal{L})^{-1}.\mathcal{L}^T.Q \quad \text{et} \quad I - Q.\mathcal{L}.\mathcal{L}^T.Q.\mathcal{L})^{-1}.\mathcal{L}^T.Q$$

sont des matrices de S -transformations (GL. Strang Van Hees, 1980).

En éliminant x_3 de (5.111) et en posant :

$$Q'' = \bar{Q} - \bar{Q}.(D + \bar{Q})^{-1}.\bar{Q} \quad (5.112)$$

on obtient le système :

$$\begin{pmatrix} N_2' + B^T \cdot Q'' \cdot B & B^T \cdot Q'' \cdot F \\ \dots & F^T \cdot Q'' \cdot F \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_2' + B^T \cdot \bar{Q} \cdot (D + \bar{Q})^{-1} \cdot p_3' + B^T \cdot Q'' \cdot L' \\ F^T \cdot Q'' \cdot L' + F^T \cdot \bar{Q} \cdot (D + \bar{Q})^{-1} \cdot p_3' \end{pmatrix} \quad (5.113)$$

5.4.3 Modèle de compensation 3D-3

L'équation des observations terrestres est :

$$A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot p = L + V, \quad \text{poids } P$$

qui donne l'équation normale :

$$N_2' \cdot p = p_2'$$

L'équation normale des observations Doppler peut se mettre sous la forme :

$$\begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p' \\ dH' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_3' \\ p_4' \end{pmatrix} \quad (5.114)$$

avec :

$$p' = (\dots, (N' \cdot \cos \varphi' \cdot d\lambda'_i, \dots))^T \quad (5.115)$$

et :

$$dH' = (dH'_1, \dots, dH'_i, \dots, dH'_k)^T \quad (5.116)$$

A partir des équations (3.41) -(3.42)-(3.43) liant $(d\varphi, d\lambda, dH)_i$ et $(d\varphi', d\lambda', dH')_i$ et pour l'ensemble des points $M_i/i \in I$ on peut écrire :

$$p - p' + AF_1 \cdot x_4 = L_1' + V_1', \quad \text{poids } Q_1 \quad (5.117)$$

$$dH - dH' + AF_2 \cdot x_4 = L_2' + V_2', \quad \text{poids } Q_2 \quad (5.118)$$

qui donnent l'équation normale singulière :

$$\begin{pmatrix} Q_1 & 0 & -Q_2 & 0 & Q_1 \cdot AF_1 \\ \dots & Q_2 & 0 & -Q_2 & Q_2 \cdot AF_2 \\ \dots & \dots & Q_1 & 0 & -Q_1 \cdot AF_1 \\ \dots & \dots & \dots & Q_2 & -Q_2 \cdot AF_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & AF_1^T \cdot Q_1 \cdot AF_1 + AF_2^T \cdot Q_2 \cdot AF_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ dH \\ p' \\ dH' \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1 \cdot L_1' \\ Q_2 \cdot L_2' \\ -Q_1 \cdot L_1' \\ -Q_2 \cdot L_2' \\ AF_1^T \cdot Q_1 \cdot L_1' + AF_2^T \cdot Q_2 \cdot L_2' \end{pmatrix} \quad (5.119)$$

d'où le système obtenu en combinant les observations terrestres et Doppler :

$$\begin{pmatrix} Q_1 + N'_2 & 0 & -Q_1 & 0 & Q_1.AF_1 \\ \dots & Q_2 & 0 & -Q_2 & Q_2.AF_2 \\ \dots & \dots & Q_1 + D_{11} & D_{12} & -Q_1.AF_1 \\ \dots & \dots & \dots & Q_2 + D_{22} & -Q_2.AF_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & AF_1^T.Q_1.AF_1 + AF_2^T.Q_2.AF_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ dH \\ p' \\ dH' \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p'^2 + Q_1.L'_1 \\ Q_2.L'_2 \\ p'_3 - Q_1.L'_1 \\ p'_4 - Q_2.L'_2 \\ AF_1^T.Q_1.L'_1 + AF_2^T.Q_2.L'_2 \end{pmatrix} \quad (5.120)$$

5.5 Amélioration des paramètres de l'ellipsoïde de référence

Dans les paragraphes précédents, on a considéré comme invariant les paramètres de l'ellipsoïde de référence du réseau géodésique terrestre. Si ce n'est pas le cas, la relation (3.49) devient (Jochemczyk, 1983) :

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix} = R_i \cdot \begin{pmatrix} (N+H).cos\varphi.d\lambda \\ (\rho+H).d\varphi \\ dH \end{pmatrix}_i + \bar{E}_i \cdot \begin{pmatrix} da \\ df \end{pmatrix} \quad (5.121)$$

où :

$$f = 1 - \sqrt{1 - e^2} \quad \text{l'aplatissement} \quad (5.122)$$

et \bar{E}_i la matrice ci-dessous : (5-114)

$$\bar{E}_i = \begin{pmatrix} \frac{(N+\rho sin^2\varphi)cos\varphi cos\lambda}{a} & \frac{\rho sin^2\varphi cos\varphi cos\lambda}{1-f} \\ (N+\rho sin^2\varphi)cos\varphi sin\lambda & \frac{\rho sin^2\varphi cos\varphi sin\lambda}{1-f} \\ \frac{-\rho sin^3\varphi}{a} & -\left(N(1-f) + \frac{\rho cos^2\varphi}{1-f}\right) sin\varphi \end{pmatrix} \quad (5.123)$$

Posons :

$$t = (da, df)^T \quad (5.124)$$

alors le vecteur x_2 s'écrit :

$$x_2 = B.p + \mathcal{L}.dH + \bar{E}.t \quad (5.125)$$

avec la matrice :

$$\bar{E} = (\bar{E}_1^T, \dots, \bar{E}_i^T, \dots, \bar{E}_k^T)^T \quad (5.126)$$

La relation (5.91) devient :

$$B.p + \mathcal{L}.dH + \bar{E}.t - x_3 + F; x_4 = L' + V' \quad (5.127)$$

En écrivant le système (5.109) sous la forme :

$$\bar{A}.z = \bar{a} \quad (5.128)$$

avec :

$$z = (p, dH, x_3, x_4)^T \quad (5.129)$$

La condition $V^T.P.V + V'^T.Q.V' + V''^T.W.V''$ minimum donne le système suivant :

$$\begin{pmatrix} \bar{A} & (B, \mathcal{L}, -I, F)^T.Q.\bar{E} \\ \dots\dots & \bar{E}^T.Q.\bar{E} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{a} \\ \bar{E}^T.Q.L' \end{pmatrix} \quad (5.130)$$

La résolution de ce système permet de déterminer d'une façon globale tous les paramètres de la transformation et de l'ellipsoïde de référence.

5.6 Détermination des paramètres de la transformation par la méthode des référentiels régionaux inverses

Dans deux articles récents, H.M. Dufour (1986a,b) propose l'emploi des référentiels régionaux inverses faisant appel à la géodésie bidimensionnelle par le biais d'une représentation stéréographique plane et d'une troisième dimension proche des altitudes.

5.6.1 Présentation des référentiels régionaux inverses

La méthode des référentiels régionaux inverses consiste à définir un référentiel (x, y, z) en un point O par une inversion de pôle l'antipode du point O , sur une sphère tangente en ce point à l'ellipsoïde. Les coordonnées (x, y, z) d'un point M dans ce référentiel appartiennent à 2 groupes, d'une part (x, y) sont les coordonnées d'une représentation stéréographique sur le plan tangent en O (H.M. Dufour, 1971) et d'autre part z est proche de l'altitude ellipsoïdique du point.

Soient (φ_0, λ_0) la latitude et la longitude géodésiques de O dans le système $(X, Y, Z)_g$ géodésique terrestre relatif à un datum donné d'ellipsoïde (E). Soit N_0 la valeur de N en O . Soient $(X, Y, Z)_g$ les coordonnées 3-D géodésiques d'un point M .

On considère le point $I(0, 0, -N_0 e^2 \sin \varphi_0)_g$ dans $(O, X, Y, Z)_g$. Dans (XI, YI, ZI) les coordonnées de M sont (Fig.5.1) :

$$M : (X_I = X_g, Y_I = Y_g, Z_I = Z_g + N_0 e^2 \sin \varphi_0) \quad (5.131)$$

Les coordonnées de M dans (O, XO, YO, ZO) sont obtenues par (Fig.5.2) :

5.6 Détermination des paramètres de la transformation par la méthode des référentiels régionaux inversés

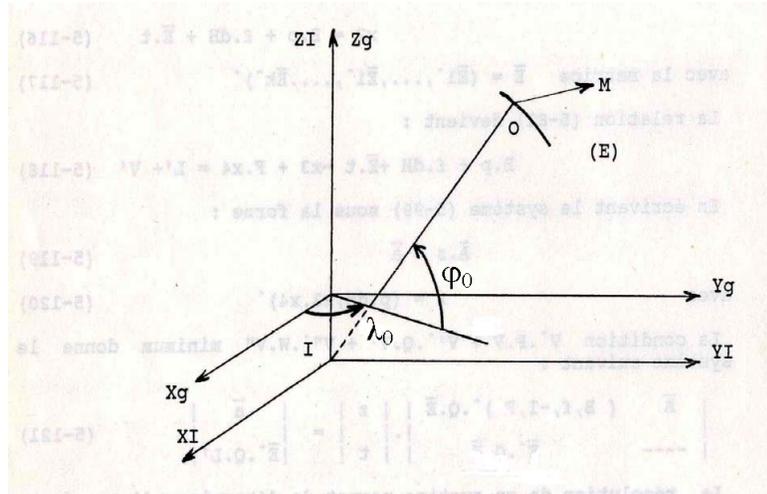


Fig. 5.1

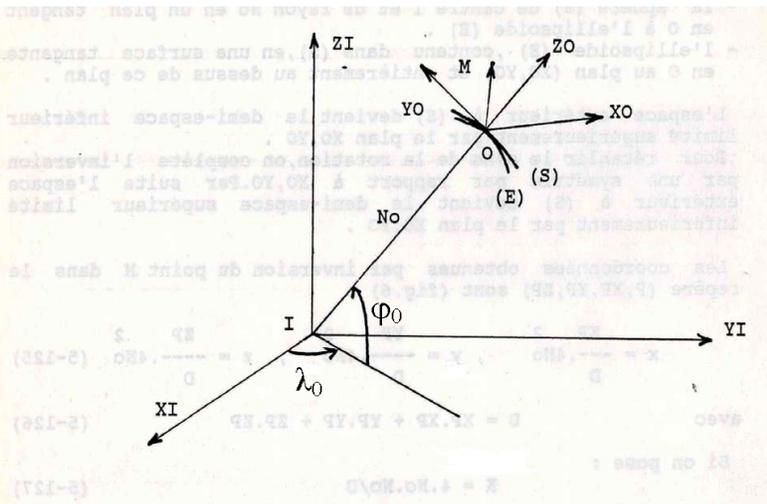


Fig. 5.2

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} = R_0^T \cdot \begin{pmatrix} X_I \\ Y_I \\ Z_I \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ N_0 \end{pmatrix} \quad (5.132)$$

avec la matrice R_0 donnée par (3.49).

Soit P l'antipode de O , alors les coordonnées de M dans $P(XP, YP, ZP)$ sont (Fig.5.3) :

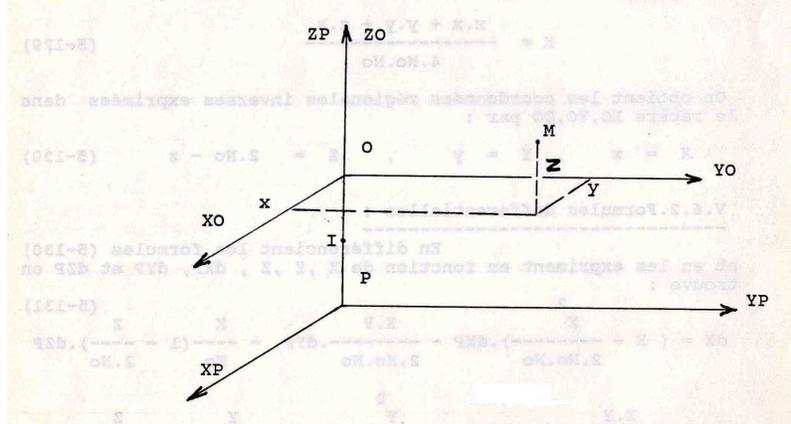


Fig. 5.3

$$M : (X_P = X_0, Y_P = Y_0, Z_P = Z_0 + 2.N_0) \quad (5.133)$$

On considère alors l'inversion de centre P et de puissance $4.N_0^2$ qui transforme :

- la sphère (S) de centre I et de rayon N_0 en un plan tangent en O à l'ellipsoïde (E),
- l'ellipsoïde (E), contenu dans (S), en une surface tangente en O au plan (XO, YO) et entièrement au dessus de ce plan.

L'espace extérieur à (S) devient le demi-espace inférieur limité supérieurement par le plan XO, YO .

Pour rétablir le sens de la rotation, on complète l'inversion par une symétrie par rapport à XO, YO . Par suite l'espace extérieur à (S) devient le demi-espace supérieur limité inférieurement par le plan XO, YO .

Les coordonnées obtenues par inversion du point M dans le repère (P, X_P, Y_P, Z_P) sont (Fig.5.3) :

$$x = \frac{X_P}{D} 4N_0^2, \quad y = \frac{Y_P}{D} 4N_0^2, \quad z = \frac{Z_P}{D} 4N_0^2 \quad (5.134)$$

avec :

$$D = X_P^2 + Y_P^2 + Z_P^2 \quad (5.135)$$

Si on pose :

$$K = \frac{4N_0^2}{D} \quad (5.136)$$

alors les coordonnées s'écrivent :

$$x = K.X_P, \quad y = K.Y_P, \quad z = K.Z_P \quad (5.137)$$

K est appelé l'échelle tridimensionnelle. Il vérifie :

$$K = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{4N_0^2} \quad (5.138)$$

On obtient les coordonnées régionales inverses exprimées dans le repère XO, YO, ZO par :

$$X = x, \quad Y = y, \quad Z = 2N_0 - z \quad (5.139)$$

5.6.2 Formules différentielles

En différenciant les formules (5.139) et en les exprimant en fonction de X, Y, Z et dX_P, dY_P, dZ_P on trouve :

$$\begin{aligned} dX &= \left(K - \frac{X^2}{2N_0^2} \right) dX_P - \frac{XY}{2N_0^2} dY_P - \frac{X}{N_0} \left(1 - \frac{Z}{2N_0} \right) dZ_P \\ dY &= -\frac{XY}{2N_0^2} dX_P + \left(K - \frac{Y^2}{2N_0^2} \right) dY_P - \frac{Y}{N_0} \left(1 - \frac{Z}{2N_0} \right) dZ_P \\ dZ &= \left(1 - \frac{Z}{2N_0} \right) \left(\frac{X}{N_0} dX_P + \frac{Y}{N_0} dY_P \right) + (2 - K) \left(1 - \frac{2Z}{N_0(2 - K)} \right) dZ_P \end{aligned} \quad (5.140)$$

en négligeant le terme $\frac{Z^2}{2N_0^2} dZ_P$ dans dZ et pour les points d'altitudes proches de O , on a $Z \ll N_0$.

On peut écrire ces relations sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix} = J \cdot \begin{pmatrix} dX_P \\ dY_P \\ dZ_P \end{pmatrix} \quad (5.141)$$

La matrice covariance de $X = (X, Y, Z)$ s'obtient à partir de celle de $X_P = (X_P, Y_P, Z_P)$ par :

$$S_X^2 = J \cdot S_{X_P}^2 \cdot J^T \quad (5.142)$$

Comme le vecteur $X_P = R_0^T \cdot X_g$ + vecteur constant, on a alors :

$$S_X^2 = J \cdot R_0^T \cdot S_{X_g}^2 \cdot R_0 \cdot J^T \quad (5.143)$$

Au vecteur de position Doppler X' on lui associe son image X'' et on a aussi :

$$S_{X''}^2 = J'' \cdot R_0^T \cdot S_{X'}^2 \cdot R_0 \cdot J''^T \quad (5.144)$$

avec J'' la matrice J calculée au point X'' .

5.6.3 Calcul des paramètres de la transformation

Au vecteur X on associe $(X_0, Y_0, Z_0)_1$ et au vecteur X' $(X_0, Y_0, Z_0)_2$, on peut écrire que :

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix}_1 + \begin{pmatrix} Tx \\ Ty \\ Tz \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m & -rz & ry \\ rz & m & -rx \\ -ry & rx & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix}_1 \quad (5.145)$$

$$T = (Tx, Ty, Tz)^T \quad \text{le vecteur translation dans } (O, XO, YO, ZO) \quad (5.146)$$

m l'échelle

$$ROT = (rx, ry, rz)^T \quad \text{le vecteur rotation}$$

En omettant les indices dans (5.145) on peut écrire :

$$\begin{pmatrix} dX_0 \\ dY_0 \\ dZ_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Tx \\ Ty \\ Tz \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m & -rz & ry \\ rz & m & -rx \\ -ry & rx & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} \quad (5.147)$$

En remplaçant dX_P, dY_P et dZ_P par dX_0, dY_0 et dZ_0 dans les formules (5.140) et en notant $N = N_0$, on trouve après un long calcul :

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & Z + \frac{X^2 - Y^2 - Z^2}{2N} & -Y & X(1 - \frac{Z}{N}) \\ J & Z + \frac{Y^2 - X^2 - Z^2}{2N} & 0 & Y(1 - \frac{Z}{N}) \\ Y(1 - \frac{Z}{N}) & -X(1 - \frac{Z}{N}) & 0 & Z + \frac{X^2 - Y^2 - Z^2}{2N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Tx \\ Ty \\ Tz \\ rx \\ ry \\ rz \\ m \end{pmatrix} \quad (5.148)$$

soit :

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix}_i = F_{i.x_4} = \begin{pmatrix} X - X'' \\ Y - Y'' \\ Z - Z'' \end{pmatrix}_i = l_i \quad (5.149)$$

avec :

$$x_4 = (Tx, Ty, Tz, rx, ry, rz, m)^T \quad (5.150)$$

En écrivant (5.150) pour les k points Doppler, on a avec les notations :

$$F = (F_1^T, \dots, F_i^T, \dots, F_k^T)^T \quad (5.151)$$

$$L = (l_1^T, \dots, l_i^T, \dots, l_k^T)^T \quad (5.151)$$

$$F.x_4 = L + V \quad (5.152)$$

La solution de (5.152) par la méthode des moindres carrés est :

5.6 Détermination des paramètres de la transformation par la méthode des référentiels régionaux inversés

$$\bar{x}_4 = (F^T . F)^{-1} . F^T . L \quad (5.153)$$

Si P est la matrice poids de (5.152) on a alors :

$$P^{-1} = S_X^2 + S_Y^2 \quad (5.154)$$

La solution de (5.152) devient :

$$\bar{x}_4 = (F^T . P . F)^{-1} . F^T . P . L \quad (5.155)$$

5.6.4 Exemple numérique

Dans ce paragraphe, on présente un calcul des paramètres de la transformation (5.145). On effectue les calculs avec 5 points utilisant l'ellipsoïde de Clarke Français 1880 et des coordonnées fictives Doppler dans le système NWL9D. La matrice de poids est la matrice unité.

On étudie les cas suivants :

- 3 paramètres : T_x, T_y et T_z .
- 4 paramètres : T_x, T_y, T_z et m .
- 5 paramètres : T_x, T_y, T_z, m et rz .
- 6 paramètres : T_x, T_y, T_z, rx, ry et rz .
- 7 paramètres .

Numéro du Point	$X_g(m)$	$Y_g(m)$	$Z_g(m)$
	$\varphi(gr)$	$\lambda(gr)$	H(m)
1	5 022 480.001	955 285.981	3 801 754.673
	40.9139 4833	11.9657 1090	638.790
2	5 081 670.850	771 787.642	3 765 024.278
	40.4550 1682	9.5954 4455	742.420
3	5 148 063.534	803 912.140	3 668 492.891
	39.2580 9749	9.8616 9173	1 315.150
4	5 220 829.640	772 127.642	3 569 820.799
	38.0627 4288	9.3474 4551	164.120
5	5 234 250.679	905 000.562	3 518 873.892
	37.4475 4070	10.8993 8173	128.260

Tableau 5.1 Les Coordonnées $(X, Y, Z)_g$ et $(\varphi, \lambda, H)_g$ terrestres

Les coordonnées du point O sont :

$$\varphi_0 = 39.0000 \text{ gr}; \quad \lambda_0 = 10.0000 \text{ gr}$$

Numéro du Point	$X_g(m)$	$Y_g(m)$	$Z_g(m)$
	$\varphi(gr)$	$\lambda(gr)$	$H(m)$
1	5 022 231.531 40.9155 2348	955 276.421 11.9661 7209	3 802 185.031 679.016
2	5 081 422.741 40.4566 2110	771 778.561 9.5957 9479	3 765 455.314 781.280
3	5 147 814.642 39.2597 5527	803 903.721 9.8620 5931	3 668 923.772 1 350.410
4	5 220 580.276 38.0644 5433	772 118.953 9.3477 8192	3 570 251.041 195.249
5	5 234 001.930 37.4492 8110	904 991.742 10.8997 8550	3 519 305.014 159.325

Tableau 5.2 Les Coordonnées (X', Y', Z') et (φ', λ', H') Doppler

Numéro du Point	$X(m)$	$Y(m)$	$Z(m)$	$H - Z(m)$
1	157 880.386	192 570.801	626.161	12.63
2	-32 663.491	145 358.343	735.021	7.40
3	-11 317.642	25 777.233	1 314.783	0.37
4	-54 098.724	-93 417.174	160.953	3.17
5	75 053.496	-154 694.354	119.510	8.75

Tableau 5.3 Les Coordonnées régionales inverses (X, Y, Z) transformées de (X', Y', Z') terrestres

Numéro du Point	$X''(m)$	$Y''(m)$	$Z''(m)$	$H' - Z''(m)$
1	157 908.504	193 063.399	687.238	-8.22
2	-32 633.382	145 851.548	792.323	-11.04
3	-11 268.946	26 271.577	1 362.292	-11.88
4	-54 067.948	-92 922.150	198.251	-3.00
5	75 083.233	-154 198.522	153.648	5.68

Tableau 5.4 Les Coordonnées régionales inverses (X'', Y'', Z'') transformées de (X', Y', Z') terrestres

Les résultats du tableau 5.3 montrent qu'en s'éloignant du point origine O , les différences $H - Z$ augmentent.

Les résultats du tableau 5.5 montrent que les composantes de la translation restent stables pour les 5 cas.

Les composantes (-30.10 m, -494.45 m, -45.57 m) sont données dans le référentiel local géodésique du point origine $O(OX, OY, OZ)$ (Fig.5.3).

Quant aux autres paramètres, leurs valeurs ne sont pas significatives.

5.6 Détermination des paramètres de la transformation par la méthode des référentiels régionaux inverses 63

Valeurs des paramètres et des écarts-types	Nbre des paramètres				
	3	4	5	6	7
Tx(m)	-30.104	-30.158	-30.190	-30.135	-30.190
$\sigma_{Tx}(m)$	0.447	0.454	0.459	0.452	0.459
Ty(m)	-494.451	-494.497	-494.460	-494.407	-494.454
$\sigma_{Ty}(m)$	0.447	0.452	0.459	0.454	0.459
Tz(m)	-45.567	-45.564	-45.564	-45.541	-45.537
$\sigma_{Tz}(m)$	0.447	0.447	0.447	0.474	0.474
rx(dmgr)				-0.814	-0.822
σ_{rx}				2.239	2.239
ry(dmgr)				-0.092	-0.056
σ_{ry}				3.786	3.787
rz(dmgr)			-0.890	-0.892	-0.892
σ_{rz}			1.839	1.839	1.839
m (10^{-6})		0.202	0.202		0.203
σ_m		0.289	0.289		0.289

Tableau 5.5 Les paramètres de la transformation

Chapitre 6

Modèles de Combinaison des Observations Doppler et Terrestres

Dans ce chapitre, nous passons en revue des modèles de combinaisons de données spatiales en particulier le Doppler avec les observations terrestres, proposés par divers géodésiens spécialistes des réseaux géodésiques.

6.1 Procédure de H. Wolf (1980,1982,1984)

H.Wolf a proposé 2 méthodes pour le calcul de la phase III, nous présentons celle-ci :

- transformation des coordonnées Doppler dans le système géodésique terrestre, ici Europe Datum 1979 dit ED79.
- compensation combinée avec les observations terrestres en 2D en éliminant les altitudes.
- retransformation de l'ensemble Doppler - terrestre après compensation dans le système géocentrique.

Il justifie qu'avec cette méthode, les éléments internes du réseau géodésique (l'orientation, l'échelle) ne subissent pas de modifications s'il y'a altération dans les paramètres de la transformation (facteur d'échelle, translation, orientation).

En effet H. Wolf détermine en utilisant le modèle Bursa-Wolf le vecteur translation T , le facteur d'échelle $l + m$ entre les réseaux Doppler et géodésique terrestre.

Il effectue la combinaison en 2D, en éliminant les altitudes, avec les coordonnées Doppler qui sont considérées fixes et détermine le vecteur rotation $(px, py, pH)^T$ en un point M_0 choisi au centre du réseau en utilisant les équations (3.55) à (3.57).

A l'aide de (3.58), il recalcule les nouvelles valeurs de T, m, px, py et pH . Par suite il applique (3.58) à l'ensemble des points géodésiques pour les transformer

dans le repère géocentrique.

H. Wolf (1985) a étudié les erreurs systématiques des hauteurs du géoïde et l'amélioration des altitudes des stations non Doppler par la méthode de collocation.

Nous détaillons ci-dessous la procédure de H. Wolf.

6.1.1 Calcul des paramètres T et m

Utilisant l'équation (3.36) on a avec les mêmes notations le système donnant T et m :

$$\begin{pmatrix} E^T . E & E^T . X_g \\ \dots & X_g^T . X_g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dT \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E^T . L' \\ X_g^T . L' \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

6.1.2 Transformation des coordonnées Doppler dans le système géodésique terrestre

Utilisant le modèle de Bursa-Wolf et les valeurs de (T, m) , on obtient X'_g les transformés des coordonnées Doppler X' dans le système géodésique terrestre par :

$$X'_g = X' - E.T - m.X' \quad (6.2)$$

A partir de $(X', Y', Z')_g$, on calcule les coordonnées géodésiques $(\varphi', \lambda', H')_g$ correspondantes par les formules inverses de (3-1).

6.1.3 Equations d'observations

Entre les coordonnées Doppler $(X', Y', Z')_i = X'_i$ et les coordonnées géodésiques $X_{gi} = (X, Y, Z)_{gi}$ on a la relation :

$$X_{gi} + \begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix}_i = X'_i - T - m.X'_i - U(X'_i).ROT \quad (6.3)$$

Comme :

$$X'_{gi} = X' - T - m.X'$$

l'équation (6.3) devient :

$$(X_{gi} - X'_{gi}) + U(X'_{gi}).ROT + \begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix}_i = V_i \quad (6.4)$$

L'équation ne changera pas si on remplace $U(X'_i)$ par $U(X_{gi})$ d'où : $(X_{gi} - X'_{gi}) + U(X_{gi}).ROT + \begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix}_i = V_i$

On passe des inconnues $(dX, dY, dZ)_i$ aux inconnues $(Ncos\phi d\lambda, \rho d\phi, dH)_i$ par (3-54), soit :

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix}_i = (R.K)_i \begin{pmatrix} Ncos\phi d\lambda \\ \rho d\phi \\ dH \end{pmatrix}_i \quad (6.5)$$

Mais, on peut écrire aussi :

$$X_{gi} - X'_{gi} = (R.K)_i \begin{pmatrix} Ncos\phi(\lambda - \lambda') \\ \rho(\phi - \phi') \\ H - H' \end{pmatrix}_{gi} \quad (6.6)$$

En cherchant le vecteur rotation Ψ autour d'un point particulier M_1 , et utilisant (6.5) et (6.6), l'équation (6.4) devient :

$$\begin{pmatrix} Ncos\phi d\lambda \\ \rho d\phi \\ dH \end{pmatrix}_i + (K.R^T)^{-1}.U(X_{gi}).R_0.\Psi = \begin{pmatrix} Ncos\phi(\lambda' - \lambda) \\ \rho(\phi' - \phi) \\ H' - H \end{pmatrix}_{gi} + V'_i \quad (6.7)$$

En multipliant à gauche (6.7) par la matrice de sélection $(MS)_i$ donnée par (5.45), on obtient :

$$\begin{pmatrix} Ncos\phi d\lambda \\ \rho d\phi \end{pmatrix}_i + (MS.(K.R^T)^{-1}.U(X_g))_i.R_0\Psi = \begin{pmatrix} Ncos\phi(\lambda' - \lambda) \\ \rho(\phi' - \phi) \end{pmatrix}_{gi} + \begin{pmatrix} V'_\lambda \\ V'_\phi \end{pmatrix}_i \quad (6.8)$$

Posons :

$$G_i = (MS.(K.R^T)^{-1}.U(X_g))_i.R_0 \\ G = (G_1^T, \dots, G_i^T, \dots, G_k^T)^T \quad (6.9)$$

et écrivons (6.8) pour l'ensemble des points Doppler, on arrive à :

$$p + G.\Psi = L' + V' \quad (6.10)$$

La matrice poids de (??) est :

$$Q = MS.K^{-1}R^T.S_{X'}^2.R.K^{-1}.MS^T \quad (6.11)$$

où les matrices MS et $R.K^{-1}$ sont données par (5.50) et :

$$S_{X'}^2 = D^{-1} \quad (6.12)$$

La condition $V'^T \cdot Q \cdot V'$ minimum donne le système :

$$\begin{pmatrix} Q & Q \cdot G \\ \dots & G^T \cdot Q \cdot G \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ \Psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q \cdot L' \\ G^T \cdot Q \cdot L' \end{pmatrix} \quad (6.13)$$

L'équation normale des inconnues terrestres de position est :

$$N'_2 \cdot p = p'_2$$

La combinaison des données Doppler avec les observations terrestres donne le système :

$$\begin{pmatrix} N'_2 + Q & Q \cdot G \\ \dots & G^T \cdot Q \cdot G \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ \Psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q \cdot L' + p'_2 \\ G^T \cdot Q \cdot L' \end{pmatrix} \quad (6.14)$$

Ayant p par la résolution de (6.14), on calcule les coordonnées compensées des stations non Doppler en utilisant (4.1).

6.1.4 Corrections des altitudes des stations Doppler

La correction de l'altitude ellipsoïdique de la station Doppler i s'obtient en utilisant la 3ème équation de (6.7), ou on prend pour H_i la valeur calculée H'_{gi} . On trouve après calcul :

$$\begin{aligned} dH_i &= e^2 N \sin \varphi \cos \varphi (\sin \lambda, -\cos \lambda, 0)_i \cdot ROT \\ dH_i &= e^2 N \sin \varphi \cdot \cos \varphi (rx \cdot \sin \lambda - ry \cdot \cos \lambda)_i \end{aligned} \quad (6.15)$$

soit en considérant le vecteur $\Psi = (px, py, pH)^T$ autour du point $M_1(\varphi_1, \lambda_1, H_1)$:

$$dH_i = e^2 N_i \cdot \sin \varphi_i \cdot \cos \varphi_i (px \cdot \sin \lambda'_i + (py \cdot \sin \varphi_1 - pH \cdot \cos \varphi_1) \sin \lambda'_i) \quad (6.16)$$

avec :

$$\lambda'_i = \lambda_i - \lambda_1$$

L'altitude ellipsoïdique du point M_i est :

$$\bar{H}_{gi} = H'_{gi} + dH_i \quad (6.17)$$

A partir de $(\bar{\varphi}, \bar{\lambda}, \bar{H})_i$, on calcule par (3-1) $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$.

6.1.5 Calcul final des 7 paramètres de la transformation

Entre X' , \bar{X}_g et les 7 paramètres, on a la relation :

$$E.T + U.R_0T.\Psi + m.\bar{X}_g = X' - \bar{X}_g + V' \quad (6.18)$$

On calcule les valeurs de \bar{T} , $\bar{\Psi}$ et \bar{m} par $V'^T.V'$ minimum. On obtient le vecteur $R\bar{O}T$ par $R\bar{O}T = R_0.\bar{\Psi}$

Les valeurs numériques de \bar{T} , $\bar{\Psi}$, $R\bar{O}T$ et \bar{m} doivent être testées ainsi que leur signification statistique.

6.1.6 Calcul des coordonnées géocentriques finales

On obtient les coordonnées géocentriques finales des points du réseau géodésique par :

$$\bar{X}''_g = \bar{X}_g + \bar{m}.\bar{X}_g + \bar{T} + U(\bar{X}_g).R\bar{O}T \quad (6.19)$$

6.1.7 Modèle de R.Kelm (1983)

R. Kelm préfère travailler dans les systèmes géocentriques et utiliser toute l'information sur les données Doppler et terrestres. La procédure repose sur les 4 objectifs :

- transformation des coordonnées géodésiques terrestres dans un système défini par la Géodésie Intégrée (G. Hein, 1981) exemple un système géocentrique terrestre moyen.
- utilisation des matrices covariances et leur propagation dans les différentes étapes du calcul comme moyen moderne de l'analyse et de l'estimation des erreurs.
- analyse des réseaux terrestres dans un datum non absolu défini par des données Doppler obtenues par divers modes (translocation,arc-court,...) dans des systèmes non absolus.
- éviter de faire appel aux calculs des inverses généralisées de matrice et les risques de confusion dans l'interprétation.

Pour les calculs, on a les données suivantes :

$X = (\dots, (X, Y, Z)_g, \dots)^T$ le vecteur coordonnées géodésiques terrestres approchées des stations Doppler.

$X' = (\dots, (X', Y', Z')_g, \dots)^T$ le vecteur coordonnées Doppler dans un datum non absolu.

$S_{X'}^2$ matrice variance-covariance de X' .

$X'' = (\dots, (X'', Y'', Z'')_g, \dots)^T$ le vecteur coordonnées absolues dans un système géocentrique.

$S_{X''}^2$ = matrice variance-covariance de X'' .

\bar{s}_0^2 = facteur variance unitaire du réseau géodésique terrestre.

N = la matrice normale des inconnues $(N \cos \varphi d\lambda, \rho d\varphi)_{gi}$.

PH = la matrice de poids des altitudes ellipsoïdiques.

A l'aide de X et X' , on calcule les 7 paramètres de la transformation (3-5), on obtient X'_l le transformé par (3-5) de X et en utilisant (3-39-a) la matrice covariance de X'_l .

Une analyse du réseau doit être faite indépendamment des 7 paramètres. Dans le cas où une présence d'altération des altitudes ellipsoïdiques, R. Kelm propose la transformation suivante :

$$X'_l = X + F.x_4 + G.K.da \quad (6.20)$$

avec :

$$da = (da_x, da_y)^T \quad (6.21)$$

et il modélise les altitudes comme suit :

$$\bar{H}_i = H_i + Dx_i.da_x + Dy_i.da_y \quad (6.22)$$

où :

$$Dx_i = N.cos\varphi.(\lambda - \lambda_0)_i \quad (6.23)$$

$$Dy_i = \rho(\varphi - \varphi_0)_i \quad (6.24)$$

et (φ_0, λ_0) les latitudes et les longitudes géodésiques en un point particulier situé au centre du réseau géodésique. les matrices G et K sont :

$$K = \begin{pmatrix} Dx_1 & Dy_1 \\ \vdots & \vdots \\ Dx_i & Dy_i \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}; G = \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 \cos\lambda_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots \\ \cos\varphi_1 \sin\lambda_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots \\ \sin\varphi_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \cos\varphi_i \cos\lambda_i & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \cos\varphi_i \sin\lambda_i & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \sin\varphi_i & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (6.25)$$

L'auteur effectue une compensation combinée dans le datum relatif, qui donne les coordonnées compensées dans ce datum par les formules :

$$\bar{X}' = X' + (S_{X'}^{-2} + S_{X'_l}^{-2})^{-1} . S_{X'_l}^{-2} . (X'_l - X') \quad (6.26)$$

Dans la compensation précédente, R. Kelm fixe quelques coordonnées, dans (6.26) les matrices covariances ne contiennent que l'information des points non fixés.

Enfin une compensation combine dans le système géocentrique, qui donne les coordonnées géocentriques compensées à savoir :

$$\bar{X}'' = X'' + (S_{X''}^{-2} + S_{\bar{X}'}^{-2})^{-1} \cdot S_{\bar{X}'}^{-2} \cdot (\bar{X}' - X'') \quad (6.27)$$

En fait au lieu d'utiliser $S_{\bar{X}'}^{-2}$ l'auteur utilise une S -transformée de $S_{\bar{X}'}^{-2}$ (Mierlo, 1980).

R. Kelm conclut pour la méthode :

- dans la compensation combinée des réseaux terrestres avec les données satellites, celles-ci doivent être classées suivant qu'elles soient relatives ou absolues. Les données satellites relatives seront compensées avec les observations terrestres dans un système relatif. Les coordonnées obtenues seront utilisées pour obtenir les coordonnées géocentriques dans le système absolu.

- l'analyse et la compensation par étape seront préférables à une méthode globale et peuvent être faites dans les systèmes relatifs en 3-D, c'est le cas de la Géodésie Intégrée.

- la compensation de 2 systèmes de coordonnées est préférable aux pures transformations car la première considère plus rigoureusement le comportement stochastique des données mises en jeu.

6.2 Procédure de M. Baumker (1983)

M. Baumker présente les raisons de la compensation combinées entre les observations terrestres classiques et les données Doppler en 3-D comme suit :

- les systèmes 3-D donnent des systèmes mondiaux de base à partir desquels, des systèmes de degrés inférieurs peuvent être dérivés.

- on n'a pas besoin de réduire les observations à la surface de référence.

- les défiances dans les rangs des matrices sont évitées.

Dans le cas où il n'y a pas de points fixés, M. Baumker introduit des équations de condition du type :

$$\sum_{i=1} dX_i = \sum_{i=1} dY_i = \sum_{i=1} dZ_i = 0 \quad (6.28)$$

ou s'il y a des azimuts :

$$\sum_{i=1} dA_{z_i} = 0 \quad (6.29)$$

Dans le cas où les altitudes ellipsoïdiques sont fixées, il pose les conditions :

$$\sum_{i=1} d\phi_i = \sum_{i=1} d\lambda_i = 0 \quad (6.30)$$

M. Baumker utilise la méthode de la collocation (H. Moritz, 1980) pour en déduire les altitudes des points du réseau géodésique à partir de points bien déterminés en altitudes.

L'auteur différencie entre la compensation combinée et la compensation commune des observations terrestres et Doppler.

Dans la première, chaque type de données est traité séparément de l'autre, dans la deuxième les données sont indissociables.

6.3 Méthode de T. Vincenty (1982, 1980)

T. Vincenty a analysé les modèles de combinaison des données spatiales, en général, avec les observations terrestres dans la compensation des réseaux géodésiques.

A chaque type de données spatiales (DOPPLER, LASER, VLBI, ...) on lui affecte la détermination de l'un des 7 paramètres (échelle, translation, rotation).

La méthode de Vincenty consiste à fixer les altitudes des points et ceci en utilisant un ellipsoïde auxiliaire en chaque point du réseau. L'équation de cet ellipsoïde au point (φ, λ, H) est :

$$X^2 + Y^2 + \frac{Z^2}{1 - e_0^2} = a_0^2 \quad (6.31)$$

avec :

$$e_0^2 = \frac{e^2}{1 + \frac{H}{N}} \quad (6.32)$$

$$N_0 = N + H; \quad a_0 = N_0(1 - e_0^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} \quad (6.33)$$

Si la compensation se fait dans le système $(X, Y, Z)_g$, l'équation de condition liant les corrections inconnues (dX, dY, dZ) sera :

$$XdX + YdY + \frac{Z}{1 - e_0^2} dZ = 0 \quad (6.34)$$

ce qui permet d'exprimer l'une des inconnues dX, dY ou dZ en fonction des 2 autres et de la remplacer dans les équations d'observations.

Avec cette méthode, les observations ne nécessitent aucune réduction.

Si on exprime les relations d'observations terrestres dans les plans horizontaux locaux, on utilisera plutôt les plans horizontaux physiques si on dispose d'observations astronomiques sinon on aura :

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\lambda & -\sin\varphi\cos\lambda \\ \cos\lambda & -\sin\varphi\sin\lambda \\ 0 & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \quad (6.35)$$

avec (dx, dy) le vecteur correction de la position du point M dans le plan horizontal local de M à l'altitude H .

Le calcul se fait par itérations comme suit :

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \xrightarrow{(6.35)} \begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \lambda : \operatorname{tg}\lambda = \frac{Y}{X} \\ N = a(1 + \frac{1}{2}e^2 \sin^2\varphi) \\ e_0^2 = e^2(1 + \frac{H}{N}) \\ \varphi : \operatorname{tg}\varphi = \frac{Z}{1-e_0^2}(X^2 + Y^2) \end{cases} \quad (6.36)$$

Dans la compensation combinée des observations terrestres avec les données Doppler, T. Vincenty utilise le modèle de Bursa-Wolf donné par (3.6) qu'il transforme dans le système géodésique local, soit :

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dH \end{pmatrix}_i + R^T \begin{pmatrix} Tx \\ Ty \\ Tz \end{pmatrix} + R^T \cdot U_i \begin{pmatrix} rx \\ ry \\ rz \end{pmatrix} + m \cdot R^T \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = R^T \cdot \begin{pmatrix} X' - X \\ Y' - Y \\ Z' - Z \end{pmatrix}_i + \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}_i \quad (6.37)$$

où R la matrice donnée par (3.49).

Avec (6.37) la matrice variance des coordonnées Doppler présente moins de corrélation (Hothem et al,1985).

Chapitre 7

La Combinaison des Observations Terrestres et Doppler de Plusieurs Campagnes

Dans ce chapitre, on va poser le problème de la combinaison des observations terrestres avec des données Doppler de plusieurs campagnes. On étudiera quelques modèles de compensation.

Utilisant le modèle de Bursa-Wolf, on a avec les mêmes notations :

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix}_{ij} = \begin{pmatrix} Tx \\ Ty \\ Tz \end{pmatrix}_j + m_j \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{ij} + \begin{pmatrix} 0 \\ -Z \\ Y \\ Z \\ 0 \\ -X \\ -Y \\ X \\ 0 \end{pmatrix}_{ij} \cdot \begin{pmatrix} rx \\ ry \\ rz \end{pmatrix}_j + \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{ij} \quad (7.1)$$

où j = indice de la campagne Doppler.

i = indice du point M .

On pose :

x_{2j} = le vecteur des corrections des positions des points M participant à la campagne Doppler j .

$x_{4j} = (dT_x, dT_y, dT_z, rx, ry, rz, m)^T$ les 7 paramètres de la transformation relative à la campagne Doppler j .

On peut écrire pour chaque x_{2j} :

$$x_{2j} = B_j \cdot x_2 \quad (7.2)$$

où B_j est une matrice de sélection de l'inconnue x_{2j} .

7.1 Les points Doppler sont fixés

7.1.1 Modèle de compensation 3D-1

L'équation des observations terrestres est :

$$A_1.X_1 + A_2.X_2 = L + V, \quad \text{poids } P \quad (7.3)$$

l'équation liant les paramètres x_{4j} et x_{2j} est :

$$x_{2j} + F_j.x_{4j} = L'_j + V'_j \quad \text{poids } D_j \quad (7.4)$$

avec D_j la matrice normale des coordonnées Doppler de la campagne j .

A l'aide de (7.2), l'équation (7.4) devient :

$$B_j.x_2 + F_j.x_{4j} = L'_j + V'_j \quad (7.5)$$

L'équation normale de (7.5) donne le système :

$$\begin{pmatrix} B_j^T.D_j.B_j & B_j^T.D_j.F_j \\ \dots\dots\dots & F_j^T.D_j.F_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_{4j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_j^T.D_j.L'_j \\ F_j^T.D_j.L'_j \end{pmatrix} \quad (7.6)$$

L'équation normale des observations terrestres est :

$$N'_2.x_2 = p'_2 \quad (7.7)$$

La combinaison des observations terrestres et des données Doppler de l'ensemble des campagnes donne le système suivant :

$$\begin{pmatrix} N'_2 + \sum_{j=1} (B_j^T.D_j.B_j) & \dots & B_j^T.D_j.F_j & \dots \\ \dots & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & F_j^T.D_j.F_j & \dots \\ \dots & \dots & 0 & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_{4j} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p'_2 + \sum_{j=1} (B_j^T.D_j.L'_j) \\ \vdots \\ F_j^T.D_j.L'_j \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (7.8)$$

La résolution de (7.8) détermine les 7 paramètres de chaque campagne Doppler et le vecteur x_2 . Avec (4.1) on calcule les autres inconnues exprimées par x_1 .

7.1.2 Modèle de compensation 3D-2

L'équation des observations terrestres est :

$$A_1.x_1 + A_2.p = L + V, \quad \text{poids } P \quad (7.9)$$

L'équation liant les paramètres x_{4j} et x_{2j} est :

$$x_{2j} + F_j \cdot x_{4j} = L'_j + V'_j, \quad \text{poids } D_j \quad (7.10)$$

On peut écrire (7.10) en faisant intervenir x_2 :

$$B_j \cdot x_2 + F_j \cdot x_{4j} = L'_j + V'_j \quad (7.11)$$

où B_j est la matrice de sélection de la variable x_{2j} . Comme x_2 est égale à :

$$x_2 = B \cdot p + \mathcal{L} \cdot dH$$

(7.11) devient :

$$(B_j \cdot B) \cdot p + (B_j \cdot \mathcal{L}) \cdot dH = L'_j + V'_j \quad (7.12)$$

On pose :

$$\begin{aligned} \beta_j &= B_j \cdot B \\ \mathcal{L}_j &= B_j \cdot \mathcal{L} \end{aligned} \quad (7.13)$$

L'équation normale de (7.12) est :

$$\begin{pmatrix} \beta_j^T \cdot D_j \cdot \beta_j & \beta_j^T \cdot D_j \cdot \mathcal{L}_j & \beta_j^T \cdot D_j \cdot F_j \\ \dots & \mathcal{L}_j^T \cdot D_j \cdot \mathcal{L}_j & \mathcal{L}_j^T \cdot D_j \cdot F_j \\ \dots & \dots & F_j^T \cdot D_j \cdot F_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ dH \\ x_{4j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_j^T \cdot D_j \cdot L'_j \\ \mathcal{L}_j^T \cdot D_j \cdot L'_j \\ F_j^T \cdot D_j \cdot L'_j \end{pmatrix} \quad (7.14)$$

L'équation normale des observations terrestres est :

$$N'_2 \cdot p = p'_2$$

d'où le système obtenu de la combinaison des observations terrestres avec les données Doppler de l'ensemble des campagnes :

$$\begin{pmatrix} N'_2 + \sum_{j=1} (\beta_j^T \cdot D_j \cdot \beta_j) & \sum_{j=1} (\beta_j^T \cdot D_j \cdot \mathcal{L}_j) & \dots & \beta_j^T \cdot D_j \cdot F_j & \dots \\ \dots & \sum_{j=1} (\mathcal{L}_j^T \cdot D_j \cdot \mathcal{L}_j) & \dots & \mathcal{L}_j^T \cdot D_j \cdot F_j & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & F_j^T \cdot D_j \cdot F_j & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ dH \\ \vdots \\ x_{4j} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p'_2 + \sum_{j=1} (\beta_j^T \cdot D_j \cdot L'_j) \\ \sum_{j=1} (\mathcal{L}_j^T \cdot D_j \cdot L'_j) \\ \vdots \\ F_j^T \cdot D_j \cdot L'_j \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (7.15)$$

7.1.3 Modèle de compensation

L'équation des observations terrestres est :

$$A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot p = L + V, \quad \text{poids } P$$

qui donne l'équation normale du vecteur p :

$$N'_2 \cdot p = p'_2$$

L'équation liant le vecteur p_j des inconnues de position terrestres de la campagne Doppler j et le vecteur x_{4j} des paramètres de la transformation (3.6) est :

$$p_j + \bar{F}_j \cdot x_{4j} = \bar{L}'_j + \bar{V}'_j, \quad \text{poids } \bar{Q}_j \quad (7.16)$$

où $\bar{F}_j, \bar{L}'_j, \bar{V}'_j, \bar{Q}_j$ sont données par (5.47) en utilisant les points de la campagne j .

Pour le vecteur p_j , on peut écrire que :

$$p_j = B_j \cdot p \quad (7.17)$$

où B_j est une matrice de sélection du vecteur inconnu p_j .

L'équation normale de (7.16) est :

$$\begin{pmatrix} B_j^T \cdot \bar{Q}_j \cdot B_j & B_j^T \cdot \bar{Q}_j \cdot \bar{F}_j \\ \dots & \bar{F}_j^T \cdot \bar{Q}_j \cdot \bar{F}_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ x_{4j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_j^T \cdot \bar{Q}_j \cdot \bar{L}'_j \\ \bar{F}_j^T \cdot \bar{Q}_j \cdot \bar{L}'_j \end{pmatrix} \quad (7.18)$$

Par suite, on obtient l'équation normale de la combinaison des données Doppler de l'ensemble des campagnes avec les observations terrestres donnée par :

$$\begin{pmatrix} N'_2 + \sum_{j=1} (B_j^T \cdot \bar{Q}_j \cdot B_j) & \dots & B_j^T \cdot \bar{Q}_j \cdot \bar{F}_j & \dots \\ \dots & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \bar{F}_j^T \cdot \bar{Q}_j \cdot \bar{F}_j & \dots \\ \dots & \dots & 0 & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ \vdots \\ x_{4j} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p'_2 + \sum_{j=1} (B_j^T \cdot \bar{Q}_j \cdot \bar{L}'_j) \\ \vdots \\ \bar{F}_j^T \cdot \bar{Q}_j \cdot \bar{L}'_j \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (7.19)$$

7.2 Les points Doppler ne sont pas fixés

Dans ce paragraphe on considère une compensation commune des observations terrestres et des données Doppler de l'ensemble des campagnes.

7.2.1 Modèle de compensation 3D-1

L'équation de lien entre les inconnues terrestres et Doppler de la campagne Doppler j est :

$$x_{2j} - x_{3j} + F_j \cdot x_{4j} = L'_j + V'_j, \quad \text{poids } Q_j \quad (7.20)$$

où x_j vecteur des inconnues de position Doppler des points M participant à la campagne j . et :

$$Q_j^{-1} = D_j^{-1} + N'_{2j} \quad (7.21)$$

avec N'_{2j} la matrice relative à x_{2j} extraite de N'_2 . Mais on peut écrire (7.20) sous la forme :

$$B_j \cdot x_{2j} - x_{3j} + F_j \cdot x_{4j} = L'_j + V'_j, \quad \text{poids } Q_j \quad (7.22)$$

L'équation normale de (7.22) est :

$$\begin{pmatrix} B_j^T \cdot Q_j \cdot B_j & -B_j^T \cdot Q_j & B_j^T \cdot Q_j \cdot F_j \\ \cdots & Q_j & -Q_j \cdot F_j \\ \cdots & \cdots & F_j^T \cdot Q_j \cdot F_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{2j} \\ x_{3j} \\ x_{4j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_j^T \cdot Q_j \cdot L'_j \\ -Q_j \cdot L'_j \\ F_j^T \cdot Q_j \cdot L'_j \end{pmatrix} \quad (7.23)$$

L'équation normale des observations Doppler de la campagne j est :

$$D_j \cdot x_{3j} = p'_{3j} \quad (7.24)$$

D'où le système de la compensation commune des observations terrestres et des données Doppler :

$$\begin{pmatrix} N'_2 + \sum_{j=1} (B_j^T \cdot Q_j \cdot B_j) & \cdots & -B_j^T \cdot Q_j & \cdots & B_j^T \cdot Q_j \cdot F_j & \cdots \\ \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & Q_j + D_j & \cdots & -Q_j \cdot F_j & \cdots \\ \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & 0 & \cdots & F_j^T \cdot Q_j \cdot F_j & \cdots \\ \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{2j} \\ \vdots \\ x_{3j} \\ \vdots \\ x_{4j} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p'_{2j} + \sum_{j=1} (B_j^T \cdot Q_j \cdot L'_j) \\ \vdots \\ p'_{3j} - Q_j \cdot L'_j \\ \vdots \\ F_j^T \cdot Q_j \cdot L'_j \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (7.25)$$

7.2.2 Modèle de compensation 3D-2

L'équation des observations terrestres est :

$$A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot p = L + V, \quad \text{poids } P$$

Entre les inconnues Doppler, terrestres et les 7 paramètres de la campagne j on a :

$$x_{2j} - x_{3j} + F_j \cdot x_{4j} = L'_j + V'_j, \quad \text{poids } Q_j \quad (7.26)$$

Comme on peut écrire :

$$x_{2j} = B_j \cdot x_2 = B_j \cdot (B \cdot p + \mathcal{L} \cdot dH)$$

soit :

$$x_{2j} = \beta_j \cdot \mathcal{L}_j \cdot dH \quad (7.27)$$

avec :

$$\begin{aligned} \beta_j &= B_j \cdot B \\ \mathcal{L}_j &= B_j \cdot \mathcal{L} \end{aligned} \quad (7.28)$$

et B, \mathcal{L} sont données par (5.17) et (5.18).

L'équation (7.26) devient :

$$\beta_j \cdot p + \mathcal{L}_j \cdot dH - x_{3j} + F_j \cdot x_{4j} = L'_j + V'_j \quad (7.29)$$

La matrice Q_j vaut :

$$Q_j = (D_j^{-1} + S_{x_{2j}}^2)^{-1} \quad (7.30)$$

où D_j : la matrice normale Doppler de la campagne j .

$S_{x_{2j}}^2$: la matrice variance-covariance du vecteur inconnu x_{2j} définie ci-dessous :

$$S_{x_{2j}}^2 = \beta_j \cdot N_2'^{-1} \cdot \beta_j^T + \mathcal{L}_j \cdot PH^{-1} \cdot \mathcal{L}_j^T \quad (7.31)$$

et PH la matrice de poids des altitudes.

L'équation normale de (7.29) est :

$$\begin{pmatrix} \beta_j^T \cdot Q_j \cdot \beta_j & \beta_j^T \cdot Q_j \cdot \mathcal{L}_j & -\beta_j^T \cdot Q_j & \beta_j^T \cdot Q_j \cdot F_j \\ \dots & \mathcal{L}_j^T \cdot Q_j \cdot \mathcal{L}_j & -\mathcal{L}_j^T \cdot Q_j & \mathcal{L}_j^T \cdot Q_j \cdot F_j \\ \dots & \dots & Q_j + D_j & -Q_j \cdot F_j \\ \dots & \dots & \dots & F_j^T \cdot Q_j \cdot F_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ dH \\ x_{3j} \\ x_{4j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_j^T \cdot Q_j \cdot L'_j \\ \mathcal{L}_j^T \cdot Q_j \cdot L'_j \\ p'_{3j} - Q_j \cdot L'_j \\ F_j^T \cdot Q_j \cdot L'_j \end{pmatrix} \quad (7.32)$$

d'où l'équation normale de la combinaison des données Doppler de toutes les campagnes avec les observations terrestres :

$$\begin{pmatrix} N'_2 + \sum_{j=1} (\beta_j^T \cdot Q_j \cdot \beta_j) & \sum_{j=1} (\beta_j^T \cdot Q_j \cdot \mathcal{L}_j) & \dots & -\beta_j^T \cdot Q_j & \dots & \beta_j \cdot Q_j \cdot F_j & \dots \\ \dots & \sum_{j=1} (\mathcal{L}_j^T \cdot Q_j \cdot \mathcal{L}_j) & \dots & -\mathcal{L}_j^T \cdot Q_j & \dots & \mathcal{L}_j^T \cdot Q_j \cdot F_j & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & Q_j + D_j & \dots & -Q_j \cdot F_j & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & F_j^T \cdot Q_j \cdot F_j & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ dH \\ \vdots \\ x_{3j} \\ \vdots \\ x_{4j} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p'2 + \sum_{j=1} (\beta_j^T \cdot Q_j \cdot L'_j) \\ \sum_{j=1} (\mathcal{L}_j^T \cdot Q_j \cdot L'_j) \\ \vdots \\ p'_{3j} - Q_j \cdot L'_j \\ \vdots \\ F_j^T \cdot Q_j \cdot L'_j \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (7.33)$$

Chapitre 8

Les Erreurs Systématiques dans la Combinaison des observations Doppler et Terrestres

8.1 Introduction

L'un des problèmes fondamentaux rencontrés dans la compensation des réseaux géodésiques est l'accumulation des erreurs systématiques. Pour les réseaux Doppler, le problème est de moins en moins présent avec l'amélioration des modèles de calcul et l'augmentation de la précision des résultats.

Les données Doppler sont nécessaires à la détection des erreurs systématiques d'orientation, de mise à l'échelle et de position des réseaux géodésiques terrestres (Thomson, 1976).

8.2 Origines des erreurs systématiques

Les sources des erreurs systématiques dans les réseaux géodésiques sont nombreuses (Ashkenazi, 1981 ; Thomson, 1976 ; T. Vincenty, 1985), nous citons les plus importantes :

- la non modélisation des erreurs systématiques des observations de directions, de distances et des distances zénithales.
- la réfraction atmosphérique.
- les erreurs sur les altitudes orthométriques et l'imprécision des hauteurs du géoïde et des composantes des déviations des verticales.
- la propagation des erreurs lors de la réduction des observations.
- la calibration des appareils de mesures.

8.3 Définitions

Dans ce paragraphe, nous rapellons quelques définitions sur les erreurs. Soit \mathcal{L} la valeur nominale d'une grandeur que nous cherchons à estimer (coordonnées, angles, distances, ...) et $\tilde{\mathcal{L}}$ un estimateur de \mathcal{L} .

L'erreur sur \mathcal{L} est :

$$e_{\mathcal{L}} = \tilde{\mathcal{L}} - \mathcal{L} \quad (8.1)$$

L'erreur $e_{\mathcal{L}}$ est la somme de 2 termes (Hottier, 1978) :

$$e_{\mathcal{L}} = e_A + b_{\mathcal{L}} \quad (8.2)$$

où :

e_A : erreur dite d'observation ou accidentelle,

$b_{\mathcal{L}}$: un biais dû au fait que la grandeur L est mal définie, aux caractéristiques du processus de mesure et à ses imperfections.

L'erreur accidentelle représente les fluctuations de l'estimateur ou de l'observable par rapport à la valeur moyenne de la grandeur, soit :

$$e_A = \mathcal{L} - E(L) \quad (8.3)$$

avec $E(\cdot)$ l'opérateur moyenne. De (8.3) on a :

$$E(e_A) = 0 \quad (8.4)$$

e_A : est appelée aussi le bruit de l'estimation ou erreur résiduelle de l'observation (P. Hottier, 1978).

Les erreurs accidentelles sont des erreurs centrées et qu'on suppose indépendantes. Par suite, le biais $b_{\mathcal{L}}$ s'écrit :

$$b_{\mathcal{L}} = E(L) - \mathcal{L} \quad (8.5)$$

Dans (8.5), on ne considère que les effets résiduels des erreurs systématiques, la partie principale de ces erreurs est supposée éliminée.

Le biais $b_{\mathcal{L}}$ est considéré plutôt comme une constante dépendante du système de mesure c'est-à-dire l'ensemble incluant la grandeur \mathcal{L} et l'instrument (l'observateur et la procédure et les conditions expérimentales).

8.4 Analyse des erreurs systématiques dans les réseaux géodésiques terrestres

Avant d'étudier les erreurs systématiques dans les réseaux géodésiques terrestres suite à la compensation des données Doppler avec les observations terrestres, on analyse les erreurs systématiques dans les réseaux géodésiques sans les données Doppler.

En gardant les mêmes notations, on a l'équation des observations terrestres :

$$A_1.x_1 + A_2.x_2 = L + V; \quad \text{poids } P \quad (8.6)$$

avec la matrice de variance :

$$\Sigma^2 = \sigma_0^2 . P^{-1} \quad (8.7)$$

et σ_0^2 le facteur de variance unitaire.

Les équations (8.6) et (8.7) constituent les modèles fonctionnel et stochastique.

En général les paramètres définissent l'échelle du réseau terrestre ou la calibration des appareils de mesure des distances sont introduits comme des inconnus dans l'équation (8.6).

Malgré cela, il reste des effets résiduels qui sont dûs à l'insuffisance du modèle stochastique ou encore à l'imprécision de la modélisation des erreurs entrant en jeu dans la compensation.

8.4.1 Sur L'Orientation du Réseau Géodésique Terrestre

8.4.1.1 Le choix de (φ, λ, H) au point fondamental

Au point fondamental d'un réseau géodésique, on a déterminé par des observations astronomiques la latitude et la longitude (φ_a, λ_a) astronomiques et l'azimut Az_a astronomique d'une direction donnée. En ce point, le choix des coordonnées géodésiques φ, λ et de l'azimut géodésique Az_g correspondant à Az_a est varié.

Choix de φ, λ et Az_g

a - On peut choisir les valeurs de φ, λ proches de φ_a, λ_a et en déduire l'azimut géodésique Az_g en utilisant l'équation de Laplace généralisée soit :

$$\varphi \approx \varphi_a \quad (8.8)$$

$$\lambda \approx \lambda_a \quad (8.9)$$

$$Az_g = Az_a + (\lambda - \lambda_a) \sin \varphi + ((\lambda - \lambda_a) \cos \varphi \sin Az_a + (\varphi - \varphi_a) \sin Az_a) \cot g Z \quad (8.10)$$

$$z = Z + (\lambda - \lambda_a) \cos \varphi \sin Az_a - (\varphi - \varphi_a) \cos Az_a \quad (8.11)$$

Z et z sont des distances zénithales astronomique et géodésique.

b - On peut prendre :

$$Az_g \approx Az_a \quad (8.12)$$

$$\lambda \approx \lambda_a \quad (8.13)$$

et on obtient φ à partir de (8.10) soit :

$$\varphi = \varphi_a - (\lambda - \lambda_a) \left(\frac{\sin \varphi_a}{\sin Az_a \cot g Z} + \frac{\cos \varphi_a}{tg Az_a} \right) + \frac{Az_g - Az_a}{\sin Az_a \cot g Z} \quad (8.14)$$

$$\text{pour } \sin Az_a \cot g Z \neq 0 \quad (8.15)$$

c - On peut choisir :

$$Az_g \approx Az_a \quad (8.16)$$

$$\varphi \approx \varphi_a \quad (8.17)$$

$$\lambda = \lambda_a + \frac{(\varphi_a - \varphi) \sin Az_a \cot g Z + Az_g - Az_a}{\sin \varphi + \cos \varphi \cos Az_a \cot g Z} \quad (8.18)$$

$$\text{avec } \sin \varphi + \cos \varphi \cos Az_a \cot g Z \neq 0 \quad (8.19)$$

d - Les composantes de la déviation de la verticale au point fondamental sont :

$$\xi = \varphi_a - \varphi \quad (8.20)$$

$$\eta = (\lambda_a - \lambda) \cos \varphi \quad (8.21)$$

et la désorientation dans le plan horizontal local est :

$$\zeta = (\lambda_a - \lambda) \sin \varphi = \eta tg \varphi \quad (8.22)$$

Si on choisit φ , λ et Az_g telles que :

$$(\varphi_a - \varphi)^2 + (\lambda_a - \lambda)^2 + (Az_a - Az_g)^2 \quad \text{minimum} \quad (8.23)$$

avec l'équation de Laplace (8.10), on obtient :

$$\begin{aligned}
\varphi &= \varphi_a \\
\lambda &= \lambda_a \\
Az_g &= Az_a
\end{aligned} \tag{8.24}$$

En pratique ce sont les cas a et d qui sont choisis si on adopte un point fondamental.

Si on observait plusieurs points de Laplace dans le réseau géodésique, on obtient les azimuts géodésiques observés Az_{go} en utilisant (8.10), par le calcul on a les azimuts géodésiques calculés Az_{gc} . En l'absence d'erreurs dans les observations et le calcul, on obtient pour chaque point de Laplace :

$$Az_{gc} = Az_{go} \tag{8.25}$$

Malheureusement il ya des erreurs, l'équation (8.25) devient une équation d'observation et non plus une équation de condition dans la compensation du réseau géodésique, comme suit :

$$dAz_g = Az_{gc} - Az_{go} + v \tag{8.26}$$

où v est le résidu.

Au lieu de (8.26), il serait mieux d'écrire :

$$dAz_g - dAz_{go} = Az_{gc} - Az_{go} + v' \tag{8.27}$$

où dAz_{go} est une inconnue due aux erreurs inconnues dans les observations astronomiques de φ_a, λ_a et Az_a qui se propagent par l'équation (8.10).

Les effets de choix de (φ, λ, H) au point initial

Soit P le point initial ou fondamental d'un réseau géodésique ayant un ellipsoïde de référence $E(a, e)$ où a et e sont respectivement le demi-grand axe et la première excentricité.

On considère en ce point 2 choix des valeurs des coordonnées géodésiques :

$$\begin{aligned}
\text{choix a : } (\varphi, \lambda) &\xrightarrow{(8.10)} Az_g \\
H : \text{altitude ellipsoïdique(??)} &\Rightarrow (X, Y, Z) \quad H = h + \bar{N}
\end{aligned} \tag{8.28}$$

$$\begin{aligned}
\text{choix b : } (\varphi', \lambda') &\xrightarrow{(8.10)} Az'_g \\
H' : \text{altitude ellipsoïdique(??)} &\Rightarrow (X, Y, Z) \quad H' = h' + \bar{N}'
\end{aligned} \tag{8.29}$$

On considère que les altitudes orthométriques sont égales :

$$h = h'$$

On a les composantes de la déviation de la verticale :

$$\begin{aligned}\xi &= \varphi_a - \varphi \\ \eta &= (\lambda_a - \lambda) \cos \varphi \\ \xi' &= \varphi_a - \varphi' \\ \eta' &= (\lambda_a - \lambda') \cos \varphi'\end{aligned}\quad (8.30)$$

et les désorientations dans les plans horizontaux locaux de P :

$$\zeta = (\lambda_a - \lambda) \sin \varphi_a \quad (8.31)$$

$$\zeta' = (\lambda_a - \lambda') \sin \varphi_a \quad (8.32)$$

Posons :

$$\begin{aligned}dA_{z_g} &= A'_{z_g} - A_{z_g} \\ d\varphi &= \varphi' - \varphi \\ d\lambda &= \lambda' - \lambda\end{aligned}\quad (8.33)$$

alors :

$$dA_{z_g} = \sin \varphi_a d\lambda + (\cos \varphi \cos A_{z_a} d\lambda + \sin A_{z_a} d\varphi) \cot g Z \quad (8.34)$$

est la variation de l'équation de Laplace.

Posons :

$$\begin{aligned}d\xi &= \xi' - \xi \\ d\eta &= \eta - \eta'\end{aligned}\quad (8.35)$$

d'où :

$$\begin{aligned}d\xi &= -d\varphi \\ d\eta &= -\cos \varphi_a d\lambda\end{aligned}\quad (8.36)$$

alors :

$$\Theta = \sqrt{d\varphi^2 + \cos^2 \varphi_a d\lambda^2} \quad (8.37)$$

où Θ est l'angle des 2 normales au point P. On a aussi :

$$d\xi = \xi' - \xi = -dA_{z_g} = -\sin \varphi_a d\lambda \quad (8.38)$$

si on néglige le terme en $\cot g Z$ dans (8.34).

A partir des équations (8.28),(8.29),(8.31),(8.32) et (8.34) on peut énoncer que le choix des coordonnées géodésiques φ, λ et H au point fondamental du réseau affecte les valeurs numériques :

- du hauteur du géoïde éq. (8.28) et (8.29).
- des composantes de la déviation de la verticale éq. (8.29) et (8.30).
- de l'équation de Laplace éq. (8.34).

De plus, soit O'' l'origine du repère géocentrique, O et O' sont respectivement les positions de l'ellipsoïde E dans les choix a et b.

On a la relation vectorielle :

$$\mathbf{O'O} = \begin{pmatrix} X' - X \\ Y' - Y \\ Z' - Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dT_X \\ dT_Y \\ dT_Z \end{pmatrix} \quad (8.39)$$

en supposant que tous les repères ont les axes respectifs parallèles et qu'on néglige les échelles.

L'équation (8.39) montre une variation du vecteur translation du repère tridimensionnel géodésique au repère géocentrique.

Une question qui se pose : est ce que l'orientation du réseau est touchée ? Pour répondre à cette question, on transforme le problème du tridimensionnel en bidimensionnel par le biais des représentations planes conformes.

on considère ici une représentation plane conforme de l'ellipsoïde sur le plan :

$$K : \text{à } (\varphi, \lambda) \mapsto X = X(\varphi, \lambda), Y = Y(\varphi, \lambda) \quad (8.40)$$

où X, Y sont les fonctions définissant la représentation K . Aux azimuts géodésiques, on fait correspondre les gisements G . Soit P le point fondamental du réseau :

$$\left\{ \begin{array}{l} P(\varphi, \lambda) \mapsto p(X, Y) \in K \text{ image de E} \\ Az_g \mapsto G \text{ le gisement} \\ P(\varphi', \lambda') \mapsto p'(X', Y') \in K \text{ image de E} \\ Az'_g \mapsto G' \text{ le gisement} \end{array} \right.$$

On suppose qu'on a mesuré une distance PS dans la direction de l'azimut géodésique (Az_g, Az'_g) . Soit d cette distance réduite à la représentation. Les valeurs de $(\varphi; \lambda)$ et (φ', λ') étant très proches, d a la même valeur.

Les coordonnées des images du point S sont :

$$S \in K \begin{cases} X_S = X + d \sin G \\ Y_S = Y + d \cos G \end{cases} \quad S' \in K \begin{cases} X_{S'} = X' + d \sin G' \\ Y_{S'} = Y' + d \cos G' \end{cases} \quad \text{labels8 - 41} \quad (8.41)$$

de plus :

$$\begin{aligned} G &= Az_g + g + dV \\ G' &= Az'_g + g' + dV' \end{aligned} \tag{8.42}$$

où :

- g, g' : les gisements des images du méridiens passant par P .
 - dV, dV' : les corrections angulaires arc-corde.
- d'où en négligeant dV et dV' :

$$G' - G = Az'_g - Az_g + g' - g = dAz_g + g' - g \tag{8.43}$$

Dans le plan OXY (fig.7), on a les composantes des vecteurs \mathbf{ps} et $\mathbf{p's'}$:

$$\mathbf{ps} = \begin{pmatrix} d\sin G \\ d\cos G \end{pmatrix}; \quad \mathbf{p's'} = \begin{pmatrix} d\sin G' \\ d\cos G' \end{pmatrix} \tag{8.44}$$

Soit s'' un point de OXY telque $\mathbf{p's''}$ est parallèle à \mathbf{ps} , on a alors :

$$\mathbf{p's''} = \begin{pmatrix} d\sin G \\ d\cos G \end{pmatrix} \tag{8.45}$$

Entre $\mathbf{p's''}$ et $\mathbf{p's'}$ on a la relation :

$$\mathbf{p's''} = R(t) \cdot \mathbf{p's'} \tag{8.46}$$

où $R(t)$ est la matrice de rotation suivante :

$$R(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \tag{8.47}$$

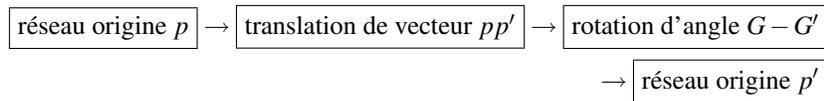
et :

$$t = G' - G$$

On a donc :

$$\mathbf{ps'} = \mathbf{pp'} + R(G - G') \cdot \mathbf{ps} \tag{8.48}$$

l'équation (8.48) montre que le réseau obtenu à partir du point p' est semblable à une rotation et une translation près à celui obtenu par p :



Le vecteur translation et la rotation ne dépendent que de $d\varphi$ et de $d\lambda$ (dAz_g est fonction de $d\varphi$ et $d\lambda$). Par suite on ne peut déceler une erreur d'orientation du réseau (Vincenty, 1985).

Variations des coordonnées géodésiques dues à une rotation autour de la normale d'un point

Soit P_0 le point de coordonnées géodésique $(\varphi_0, \lambda_0, H_0 = 0)$ et de coordonnées 3D $(X_0, Y_0, Z_0)_g$ calculées par (3-1). On considère un point $P(\varphi, \lambda, H = 0)$ sur l'ellipsoïde de référence et $(X, Y, Z)_g$ ses coordonnées 3D. Au point P_0 , soit le repère 3D local (P_0, x, y, z) . On note par $(x, y, z)^T$ les composantes de P_0P .

Si on effectue au point P_0 une rotation d'angle t autour de la normale à savoir l'axe P_0z , les composantes $(x, y, z)^T$ de P_0P deviennent (fig.8) :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (8.49)$$

t étant petit en général, on a :

$$\begin{aligned} x' &= x - ty \\ y' &= y + tx \\ z' &= z \end{aligned} \quad (8.50)$$

Les variations des composantes de P_0P sont :

$$dx = -ty; \quad dy = tx; \quad dz = 0 \quad (8.51)$$

Entre (dx, dy, dz) et $(dX, dY, dZ)_g$ on a la relation :

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix}_g = R_0 \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = R_0 \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8.52)$$

avec R_0 la matrice donnée par (3.49) appliquée au point P_0 . Mais on peut aussi écrire (3.50, 3.51) :

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix}_g = R \cdot \begin{pmatrix} N \cos \varphi d\lambda \\ \rho d\varphi \\ dH \end{pmatrix}_P \quad (8.53)$$

On obtient donc :

$$\begin{pmatrix} N \cos \varphi d\lambda \\ \rho d\varphi \\ dH \end{pmatrix}_P = R^T \cdot R_0 \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ 0 \end{pmatrix} = t \cdot R^T \cdot R_0 \cdot \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8.54)$$

Calculons (x, y) . Posons :

$$\begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix}_g = \begin{pmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{pmatrix}_g \quad (8.55)$$

on a alors la relation :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} R_0^T \cdot \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix}_g \quad (8.56)$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} x &= -\Delta X \sin \lambda_0 + \Delta y \cos \lambda_0 \\ y &= (-\Delta X \cos \lambda_0 - \Delta Y \sin \lambda_0) \sin \varphi_0 + \Delta Z \cos \varphi_0 \end{aligned} \quad (8.57)$$

Finalement en remplaçant (8.57) dans (8.54) et en calculant le produit matriciel $R^T \cdot R_0$, on obtient les variations des coordonnées géodésiques $(d\varphi, d\lambda, dH)$ par :

$$N \cos \varphi d\lambda = t((\Delta X \cos \lambda + \Delta Y \sin \lambda) \sin \varphi_0 - \Delta Z \cos \varphi_0 \cos \lambda) \quad (8.58)$$

avec :

$$l = \lambda - \lambda_0 \quad (8.59)$$

$$\begin{aligned} \rho \cdot d\varphi &= t(\Delta X(-\sin \varphi \sin \lambda \sin \varphi_0 - \cos \varphi \sin \lambda_0 \cos \varphi_0) \\ &+ \Delta Y(\sin \varphi \cos \lambda \cdot \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \lambda_0) + \Delta Z \sin \varphi \cos \varphi_0 \sin l) \end{aligned} \quad (8.60)$$

$$\begin{aligned} dH &= t(\Delta X(\cos \varphi \sin \lambda \sin \varphi_0 - \sin \varphi \sin \lambda_0 \cos \varphi_0) \\ &+ \Delta Y(-\cos \varphi \cos \lambda \cdot \sin \varphi_0 + \sin \varphi \cos \varphi_0 \cos \lambda_0) - \Delta Z \cos \varphi \cos \varphi_0 \sin l) \end{aligned} \quad (8.61)$$

Ces relations montrent que les variations $(d\varphi, d\lambda, dH)$ sont à un facteur multiplicatif fonctions de t angle de rotation de la normale au point P . t peut être considérée comme une variation d'azimut $t = -dAz$ (t et dAz sont de signes opposés).

Si on suppose que les points P_0 et P ne sont pas sur l'ellipsoïde de référence ($H \neq 0$), il suffit de remplacer dans les formules précédentes N par $N + H$, ρ par $\rho + H$ et tenir compte des altitudes ellipsoïdiques dans le calcul de $(X, Y, Z)_g$ et $(X_0, Y_0, Z_0)_g$.

Exprimons maintenant les variations $(dX, dY, dZ)_g$ des coordonnées 3D $(X, Y, Z)_g$ du point P . A l'aide de (8.52) on a :

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix}_g = R_0 \cdot \begin{pmatrix} -t \cdot y \\ t \cdot x \\ 0 \end{pmatrix} = t \cdot R_0 \cdot \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = t \cdot R_0 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (8.62)$$

ou encore :

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix}_g = t \cdot R_0 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot R_0^T \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix} \quad (8.63)$$

soit :

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix}_g = t \cdot \begin{pmatrix} 0 & -\sin\varphi_0 & \sin\lambda_0\cos\varphi_0 \\ \sin\varphi_0 & 0 & -\cos\lambda_0\cos\varphi_0 \\ -\sin\lambda_0\cos\varphi_0 & \cos\lambda_0\cos\varphi_0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix} \quad (8.64)$$

On peut écrire (8.64) sous la forme :

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix}_g = \begin{pmatrix} 0 & -\Delta Z & \Delta Y \\ \Delta Z & 0 & -\Delta X \\ -\Delta Y & \Delta X & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -t\cos\varphi_0\cos\lambda_0 \\ -t\cos\varphi_0\sin\lambda_0 \\ -t\sin\varphi_0 \end{pmatrix} \quad (8.65)$$

(8.65) exprime les variations des coordonnées dues à la rotation de vecteur $ROT = (rx, ry, rz)^T$ du repère tridimensionnel translaté au point P_0 . Le vecteur ROT est donnée par :

$$ROT = \begin{pmatrix} rx \\ ry \\ rz \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -t\cos\varphi_0\cos\lambda_0 \\ -t\cos\varphi_0\sin\lambda_0 \\ -t\sin\varphi_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dAz\cos\varphi_0\cos\lambda_0 \\ dAz\cos\varphi_0\sin\lambda_0 \\ dAz\sin\varphi_0 \end{pmatrix} \quad (8.66)$$

On retrouve les formules de T. Vincenty (1985).

On considère que P_0 est un point particulier du réseau géodésique terrestre, par exemple le point fondamental où on a défini un azimut géodésique initial à partir de l'observation d'un azimut astronomique Az_a . On suppose que cet azimut Az_a est entaché d'une erreur dAz_a . Pour corriger l'orientation de l'ellipsoïde de référence par rapport au repère géocentrique on effectue autour de la normale en P_0 la rotation d'angle :

$$t = -dAz$$

Cette rotation va "basculer" l'ellipsoïde initial sur un autre ellipsoïde (de mêmes dimensions) dont les axes $(X', Y', Z')_g$ se déduisent des anciens axes par la rotation de vecteur ROT donné par (8.66) et par une translation de l'origine O des axes donnés par :

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix}_O = \begin{pmatrix} 0 & Z & -Y \\ -Z & 0 & X \\ Y & -X & 0 \end{pmatrix}_{P_0} \cdot \begin{pmatrix} rx \\ ry \\ rz \end{pmatrix} \quad (8.67)$$

Pour calculer les coordonnées des points dans le nouveau repère il suffit d'ajouter les corrections $(d\varphi, d\lambda, dH)$ exprimées par les formules (8.58), (8.60) et (8.61).

En général les parties principales des erreurs sont corrigées mais il reste des effets résiduels qui font que le parallélisme entre les axes de l'ellipsoïde de référence du

réseau géodésique terrestre et ceux du référentiel géocentrique n'est jamais obtenu parfaitement (Vanicek & Carrera 1985).

8.4.1.2 Sur la variation de l'azimut

Dans ce paragraphe, on va étudier l'effet des rotations des axes de l'ellipsoïde de référence du réseau géodésique sur l'azimut géodésique.

Soit (O, X, Y, Z) le repère 3D géodésique où est défini l'ellipsoïde de référence. En un point P_0 du réseau géodésique, on a un azimut géodésique d'une direction P_0P . Dans (O, X, Y, Z) on a :

$$\begin{aligned} P_0(X, Y, Z)_0 &\rightarrow \boxed{\text{équation (3-1)}} \rightarrow (\varphi, \lambda, H)_0 \\ P(X, Y, Z) &\rightarrow \boxed{\text{équation (3-1)}} \rightarrow (\varphi, \lambda, H)_0 \end{aligned} \quad (8.68)$$

Posons :

$$\begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{pmatrix} \quad (8.69)$$

$$\begin{cases} x = -\sin\varphi_0(\Delta X \cos\lambda_0 + \Delta Y \sin\lambda_0) + \Delta Z \cos\varphi_0 \\ y = -\Delta X \sin\lambda_0 + \Delta Y \cos\lambda_0 \end{cases} \quad (8.70)$$

L'azimut calculé en P_0 est donné par :

$$\text{tg}(Az_g) = \frac{y}{x} \quad (8.71)$$

On suppose que les axes OX, OY, OZ , sont mal orientés. On fait subir au repère (O, X, Y, Z) trois rotations infinitésimales de vecteur $ROT = (rx, ry, rz)^T$ donné. Dans (O, X, Y, Z) on a Az_g , par suite on obtient dans (O, X', Y', Z') l'azimut $Az_g + dAz_g$. Nous allons calculer dAz_g . Nous allons calculer dAz_g en fonction de rx, ry, rz .

Dans (O, X', Y', Z') on a :

$$P_0 : \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix}_0 = \begin{pmatrix} X + dX \\ Y + dY \\ Z + dZ \end{pmatrix}_0 ; \quad \begin{pmatrix} \varphi' \\ \lambda' \\ H' \end{pmatrix}_0 = \begin{pmatrix} \varphi + d\varphi \\ \lambda + d\lambda \\ H + dH \end{pmatrix}_0 \quad (8.72)$$

avec :

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix}_0 = \begin{pmatrix} 0 & Z & -Y \\ -Z & 0 & X \\ Y & -X & 0 \end{pmatrix}_0 \cdot \begin{pmatrix} rx \\ ry \\ rz \end{pmatrix} = U_0 \cdot \begin{pmatrix} rx \\ ry \\ rz \end{pmatrix} \quad (8.73)$$

et :

$$\begin{pmatrix} (N+H)\cos\varphi d\lambda \\ (\rho+H).d\varphi \\ dH \end{pmatrix}_0 = R_0^T \cdot \begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix}_0 = R_0^T \cdot U_0 \cdot \begin{pmatrix} rx \\ ry \\ rz \end{pmatrix} \quad (8.74)$$

soit :

$$\begin{aligned} (N_0 + H_0)\cos\varphi_0 d\lambda_0 &= (\cos\lambda_0 rx + \sin\lambda_0 ry)Z - rz(N_0 + H_0)\cos\varphi_0 \\ (\rho_0 + H_0)d\varphi_0 &= (-rx\sin\lambda_0 + ry\cos\lambda_0)\left(\frac{a^2}{N_0} + H_0\right) \\ dH_0 &= (-rx\sin\lambda_0 + ry\cos\lambda_0)N_0 e^2 \sin\varphi_0 \cos\varphi_0 \end{aligned} \quad (8.75)$$

Pour le point P , on a dans (O, X', Y', Z') :

$$P : \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X + dX \\ Y + dY \\ Z + dZ \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \varphi' \\ \lambda' \\ H' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi + d\varphi \\ \lambda + d\lambda \\ H + dH \end{pmatrix} \quad (8.76)$$

avec :

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix} = U \cdot \begin{pmatrix} rx \\ ry \\ rz \end{pmatrix} \quad (8.77)$$

La différentielle de (8.74) donne :

$$d(Az_g) = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} \quad (8.78)$$

Le calcul de $x^2 + y^2$ donne :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \Delta X^2(1 - \cos^2\lambda_0 \cos^2\varphi) + \Delta Y^2(1 - \sin^2\lambda_0 \cos^2\varphi) + \Delta Z^2 \cos^2\varphi \\ &\quad - 2\Delta Y \sin\lambda_0 \cos\lambda_0 \cos\varphi - 2\Delta Y \Delta Z \sin\lambda_0 \sin\varphi \cos\varphi - 2\Delta Z \Delta X \cos\lambda_0 \sin\varphi \cos\varphi \end{aligned} \quad (8.79)$$

Le calcul de $xdy - ydx$ donne :

$$\begin{aligned} xdy - ydx &= \begin{pmatrix} -\Delta Z \cos\varphi_0 (\Delta X \cos\lambda_0 + \Delta Y \sin\lambda_0) + \sin\varphi_0 (\Delta X^2 + \Delta Y^2) \\ \cos\varphi_0 ((\Delta Y^2 - \Delta X^2) \sin\lambda_0 \cos\lambda_0 + \Delta X \Delta Y \cos 2\lambda_0) \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} d\lambda_0 \\ d\varphi_0 \\ dH_0 \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} \Delta Y \sin\varphi_0 - \Delta Z \sin\lambda_0 \cos\varphi_0 \\ -\Delta X \sin\varphi_0 + \Delta Z \cos\lambda_0 \cos\varphi_0 \\ -y \cos\varphi_0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} dX - dX_0 \\ dY - dY_0 \\ dZ - dZ_0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (8.80)$$

avec en utilisant (8.73) et (8.77) :

$$\begin{pmatrix} dX - dX_0 \\ dY - dY_0 \\ dZ - dZ_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\Delta Z & \Delta X \\ \Delta Z & 0 & -\Delta X \\ -\Delta & \Delta X & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} rx \\ ry \\ rz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ry\Delta Z + rz\Delta Y \\ rx\Delta Z - rz\Delta X \\ -rx\Delta Y + ry\Delta X \end{pmatrix} \quad (8.81)$$

Due à la rotation de vecteur $(rx, ry, rz)^T$, l'azimut géodésique dans la direction P_0P va varier de dAz_g . L'expression de dAz_g est de la forme :

$$dAz_g = a_1rx + a_2ry + a_3rz \tag{8.82}$$

où les coefficients a_1, a_2 et a_3 sont fonctions de $(\varphi_0, \lambda_0, H_0)$ et de (φ, λ, H) . On peut alors introduire dans chaque équation d'observation d'un azimut astronomique le terme :

$$- a_1rx - a_2ry - a_3rz \tag{8.83}$$

Dans (8.83), rx, ry et rz ne doivent être confondues avec les paramètres du modèle de Bursa-Wolf.

T. Vincenty (1982,1985) proposait l'introduction dans l'équation d'observation d'un azimut un terme similaire mais avec des coefficients différents obtenus avec une autre approche.

Z. Zhou (1983) a étudié les systématismes de l'orientation de l'ellipsoïde à partir de l'expression de l'azimut géodésique donnée par (8.71) et de (8.78).

Exemple numérique :

Dans le tableau 8.1 ci-dessous, on donne les variations de l'azimut géodésique dues à la rotation (rx, ry, rz) utilisant l'ellipsoïde de Clarke Français 1880. Ce ta-

$\varphi = 40\text{ gr}, \lambda = 10\text{ gr}$ $H = 100\text{ m}$ $Az_g = 56.6052\text{ gr}$	rx	ry	rz	dAz _g
	(dmgr)	(dmgr)	(dmgr)	(dmgr)
	1.00	0.00	0.00	1.32
	1.00	1.00	0.00	1.35
	1.00	1.00	1.00	1.35
	2.00	1.00	1.00	2.67
	2.00	2.00	1.00	2.70
	2.00	2.00	2.00	2.70
	3.00	0.00	0.00	3.96
	0.00	3.00	0.00	0.09
	0.00	0.00	3.00	0.00
	3.00	3.00	0.00	4.05
	0.00	5.00	0.00	0.15

Tableau 8.1 Les Variations de l'Azimut Géodésique

bleau montre qu'une rotation rz n'a pas d'effet sur l'azimut. Par contre une variation de rx fait varier l'azimut géodésique d'une quantité sensiblement égale.

8.4.1.3 Sur l'inconnue d'orientation

Parmi les inconnues qui jouent un rôle fondamental dans l'orientation d'un réseau géodésique terrestre sont celles d'orientation des observations angulaires azimutales.

Par manque d'observations d'azimuts astronomiques en chaque point du réseau géodésique, les inconnus d'orientation TH jouent le rôle d' "observations" d'azimuts géodésiques.

En l'absence des erreurs, l'inconnue d'orientation TH en une station et l'azimut géodésique d'une direction Az_g sont liés par une relation linéaire à savoir :

$$Az_{g_0} = TH + L \quad (8.84)$$

où :

L : différence de lectures angulaires horizontales réduites au plan horizontal géodésique local.

Az_{g_0} : l'azimut géodésique "observé" inconnu.

De (8.84) l'erreur sur l'azimut géodésique est composée de 2 erreurs : l'une provient de la détermination de TH par le calcul de la compensation, l'autre est due aux mesures et à la réduction des observations angulaires. On peut écrire :

$$e_{Az_g} = e_{TH} + e_L \quad (8.85)$$

e_L peut-être la résultante de 4 erreurs :

$$e_L = e_{L_s} + e_{L_o} + e_{L_v} + e_{L_r} \quad (8.86)$$

avec : e_{L_s} : erreurs dues à la mise en station et à l'appareil de mesures.

e_{L_o} : erreurs dues à l'observation.

e_{L_v} : erreurs dues au point visé (décentrage, excentrement, ...).

e_{L_r} : erreurs dans la réduction des observations.

En pratique, la partie principale de e_L est éliminée par les procédés connus, mais il reste toujours un effet résiduel.

En ce qui concerne l'erreur sur l'inconnue d'orientation TH on a :

$$e_{TH} = \bar{TH} - \mathbf{TH} \quad (8.87)$$

avec :

\bar{TH} : la valeur de TH déterminée par la compensation.

\mathbf{TH} : la valeur nominale de TH .

Généralement, on utilise une valeur moyenne TH_m comme valeur approchée de TH . On fixera un seuil t tel que :

$$\text{si } |TH_O - TH_c| > t \text{ la visée est rejetée}$$

E. Grafarend (1985) a montré que si on fixait dans un réseau géodésique l'échelle, l'orientation et la position d'un point et si on effectuait sur l'ensemble des points du réseau les observations angulaires azimutales et verticales, alors les éléments $(\varphi_a, \lambda_a, TH)$ seraient déterminés en tout point du réseau.

Ce résultat montre le rôle que peut jouer les inconnues d'orientation dans le calcul d'un réseau géodésique.

En négligeant les erreurs systématiques sur les lectures L , on peut écrire :

$$dTH = dAz_g \quad (8.88)$$

On peut donc inclure dans chaque équation d'observation angulaire horizontale les termes de systématismes d'orientation donnés par (8.83).

8.4.2 Sur la mise à l'échelle d'un réseau géodésique

8.4.2.1 Introduction

Avant de voir la question de la mise à l'échelle, nous revenons sur les définitions des facteurs d'échelle que P. Vanicek (1975) présentait dans son rapport sur les datums géocentriques et géodésiques.

En effet, il y a 2 choix : soit de dire que le facteur d'échelle d'un système de coordonnées est donné indépendamment des mesures de distances ou qu'il soit déterminé à partir d'observations de distances. En d'autres termes l'échelle définie à partir de mesures (de distances) peut-être considérée comme le résultat d'une distorsion d'échelle du réseau géodésique (respectivement géocentriques) sans aucune influence du système des coordonnées géodésiques (respectivement géocentriques), ou qu'en moyenne la distorsion d'échelle peut être interprétée comme un influençant l'échelle du système de coordonnées.

Par exemple, considérons un système de coordonnées géodésiques $(O, X, Y, Z)_g$ ayant la base (E_X, E_Y, E_Z) telle que :

$$E_i^T \cdot E_j = \delta_{ij} \quad i, j = X, Y, Z \quad \delta_{ij} \text{ le symbole de Kroneker} \quad (8.89)$$

Dans ce système le facteur d'échelle s vaut 1. On définit dans ce système de coordonnées un réseau géodésique. Pour sa définition on introduit la condition :

distance observée entre 2 points A, B = distance calculée entre les points A,B

soit :

$$D_{Obs} = \left(\sum_{X,Y,Z} (X_A - X_B)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (8.90)$$

De (8.90), le facteur d'échelle en A et B vaut :

$$s(A,B) = 1 \quad (8.91)$$

La propagation des erreurs dans le réseau fait que le facteur d'échelle du système s passe de la valeur 1 à la valeur :

$$s = 1 + m \quad (8.92)$$

donc cette distorsion du facteur d'échelle va jouer sur le facteur d'échelle du système de coordonnées qui va se définir par :

$$E_i^T . E_j = (1 + m')^2 \delta_{ij} \quad (8.93)$$

où m' est l'échelle moyenne sur le réseau géodésique.

En utilisant les notations du chapitre 3, considérons la relation entre les vecteurs X_g et X' définis respectivement dans les systèmes géodésique et géocentrique, on a :

$$(1 + m'')X' = T + (1 + m) \begin{pmatrix} 1 & rz & -ry \\ -rz & 1 & rx \\ ry & -rx & 1 \end{pmatrix} . X_g \quad (8.94)$$

avec :

$1 + m''$ le facteur d'échelle dans le système géocentrique.

$1 + m$ le facteur d'échelle dans le système géodésique.

L'équation (8.94) décrit le cas où les réseaux respectifs ont le même facteur d'échelle que celui des systèmes de coordonnées .

L'équation (8.94) ne change pas si on écrit (le terme $m'' . T$ est négligable).

$$(1 + m'')(X' - T) = (1 + m)J(rx, ry, rz) . X_g \quad (8.95)$$

avec $J(rx, ry, rz)$ la matrice donnée dans (3-38).

Si on considère le point initial du réseau géodésique de rayon vecteur X_{g_0} dans le système de coordonnées géodésiques, on peut écrire vectoriellement :

$$X_g = X_{g_0} + \Delta X_g \quad (8.96)$$

L'équation (8.95) devient :

$$(1 + m'')(X' - T) = (1 + m)J.X_{g_0} + (1 + m).J.\Delta X_g \quad (8.97)$$

Si on interprète le facteur d'échelle $1 + m$ comme influençant seulement le réseau géodésique, on pourra écrire (8.97) comme suit :

$$(1 + m'')(X' - T) = J.X_{g_0} + (1 + m).J.\Delta X_g \quad (8.98)$$

En pratique, on calcule un seul facteur d'échelle :

$$s = 1 + n = \frac{1 + m}{1 + m''} \quad (8.99)$$

par :

$$X' = T + J.X_{g_0} + (1 + n).J.\Delta X_g \quad \text{ou} \quad X' = T + (1 + n).J.X_g \quad (8.100)$$

On considère que les 2 systèmes de coordonnées géocentriques et géodésiques ont un même facteur d'échelle égal à 1 et que n est une distorsion d'échelle dans le réseau géodésique (Vanicek, 1975).

8.4.2.2 Modélisation du facteur d'échelle dans la compensation du réseau géodésique

Afin de rendre homogène le facteur d'échelle sur l'ensemble du réseau géodésique, on introduit dans les équations d'observations de distances un facteur d'échelle correspondant à chaque type d'appareils utilisés comme suit :

$$dD + D_{Cal} - (1 + m)D_{Obs} = v$$

soit en 3-D :

$$\sum_{X,Y,Z} \left(\frac{\Delta X_{ij}}{D_{ij}} (dX_i - dX_j) \right) + mD_{ij} = D_{Obs_{ij}} - D_{Cal_{ij}} + v_{ij} \quad (8.101)$$

avec :

$$\Delta X_{ij} = X_i - X_j$$

Dans l'équation (8.101) m n'est pas l'échelle du réseau géodésique.

Entre 2 points M, M' du réseau, on peut définir le facteur d'échelle par :

$$s = 1 + m = \frac{D_{Cal}}{D_{Obs}} = 1 + \frac{D_{Cal} - D_{Obs}}{D_{Obs}} \quad (8.102)$$

avec :

D_{Cal} : la distance MM' calculée à partir des coordonnées géodésiques terrestres compensées. D_{Obs} : la distance MM' observée avec un instrument "parfait".

On désigne par un instrument "parfait" un instrument qui donne la distance D_{Obs} avec une erreur non sensible par le réseau géodésique.

Pour les grandes distances, la méthode Doppler est un instrument "parfait". D_{Obs} peut-être calculée à partir des coordonnées Doppler.

Pour les réseaux Doppler, le VLBI constitue un instrument "parfait".

(8.102) donne l'échelle du réseau par :

$$m = \frac{D_{Cal} - D_{Obs}}{D_{Obs}} \quad (8.103)$$

en omettent les indices on peut écrire :

$$m = \frac{dD}{D} \quad (8.104)$$

soit pour le couple (M, M') :

$$m(M, M') = \frac{1}{D^2} (\Delta X(dX' - dX) + \Delta Y(dY' - dY) + \Delta Z(dZ' - dZ)) \quad (8.105)$$

avec :

$$\Delta X = X' - X; \Delta Y = Y' - Y; \Delta Z = Z' - Z$$

supposant que le point M est exempt d'erreurs on a :

$$dX = dY = dZ = 0$$

l'échelle devient :

$$m = \frac{1}{D^2} (\Delta X dX' + \Delta Y dY' + \Delta Z dZ')$$

Pour le point M' , on suppose qu'il se trouve à l'intérieur d'un ellipsoïde d'erreurs avec dX', dY' et dZ' vérifiant l'équation :

$$\sum_{j=1}^{j=3} a_{jj} dX'^2 + 2 \sum_{i<j}^3 dX' dY' + c < 0 \quad (8.106)$$

où les coefficients a, c sont fonctions des éléments de la matrice variance du point M' .

la condition (8.106) limite les valeurs de l'échelle m .

8.4.2.3 Expression de l'échelle en fonction des coordonnées géodésiques (φ, λ, H)

On a :

$$D^2 = MM'^T . MM' \quad (8.107)$$

En différenciant (8.107), on obtient :

$$D.dD = MM'^T .(dM' - dM) = MM'^T .dM' - MM'^T .dM \quad (8.108)$$

On va exprimer les produits scalaires $MM'^T .dM'$ et $MM'^T .dM$ respectivement dans les repères géodésiques locaux de M' et de M .

Dans le repère géodésique local de M , on a :

$$dM = \begin{pmatrix} (N+H).cos\varphi d\lambda \\ (\rho+H).d\varphi \\ dH \end{pmatrix}; \quad MM' = R(M)^T . \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix} \quad (8.109)$$

Soit :

$$MM'^T .dM = (\Delta X, \Delta Y, \Delta Z)^T .R(M) . \begin{pmatrix} (N+H).cos\varphi d\lambda \\ (\rho+H).d\varphi \\ dH \end{pmatrix} \quad (8.110)$$

De même on obtient :

$$MM'^T .dM' = (\Delta X, \Delta Y, \Delta Z)^T .R(M') . \begin{pmatrix} (N'+H').cos\varphi' d\lambda' \\ (\rho'+H').d\varphi' \\ dH' \end{pmatrix} \quad (8.111)$$

L'expression (8.108) devient :

$$DdD = a'd\lambda' + b'd\varphi' + c'dH' - ad\lambda - bd\varphi - cdH \quad (8.112)$$

avec les coefficients a, b et c (resp a', b' et c') sont :

$$\begin{aligned} a &= (N+H)cos\varphi(-\Delta X sin\lambda + \Delta Y cos\lambda) \\ b &= -(\rho+H)(sin\varphi(\Delta X cos\lambda + \Delta Y sin\lambda) - \Delta Z cos\varphi) \\ c &= cos\varphi(\Delta X cos\lambda + \Delta Y sin\lambda) + \Delta Z sin\varphi \end{aligned} \quad (8.113)$$

d'où m :

$$m = \frac{1}{D^2} (a'd\lambda' + b'd\varphi' + c'dH' - ad\lambda - bd\varphi - cdH) \quad (8.114)$$

Si on fait intervenir la distance zénithale Z de M sur M' , on peut écrire m sous la forme :

$$m = m_H sin^2 Z + m_V cos^2 Z \quad (8.115)$$

avec :

$$m_H = \frac{1}{D_h^2}(a'd\lambda' + b'd\phi' - ad\lambda - bd\phi) \quad (8.116)$$

$$m_V = \frac{1}{D_v^2}(c'dH' - cdH) \quad (8.117)$$

et

$$D_h = D.\sin Z; \quad D_v = D.\cos Z \quad (8.118)$$

Ecrivons le facteur d'échelle s :

$$s = 1 + m = s_H.\sin^2 Z + s_V.\cos^2 Z \quad (8.119)$$

avec :

$$s_H = 1 + m_H; \quad s_V = 1 + m_V \quad (8.120)$$

s_H et s_V : sont des pseudo-facteurs d'échelle respectivement horizontal et vertical.

8.5 Les Erreurs Systématiques dans la Combinaison des Observations Doppler et Terrestres

Dans la section 8.4, on a traité les erreurs systématiques dans les réseaux géodésiques sans l'introduction des données Doppler. Nous verrons ci-après les erreurs systématiques dans les réseaux géodésiques obtenus par la combinaison des données Doppler avec les observations géodésiques classiques.

Entre les rayons vecteurs géocentriques Doppler X' et géodésiques X_g d'un point, on a la relation vectorielle en utilisant le modèle de Bursa-Wolf :

$$X' = T + (1 + m).J(rx, ry, rz).X_g \quad (8.121)$$

avec J la matrice définie dans (3.38).

Considérons les 2 cas suivants :

-i) Les points du réseau géodésique terrestre sont positionnés correctement dans le référentiel géodésique, mais ce dernier présente une désorientation par rapport au référentiel géocentrique.

-ii) Les points du réseau géodésique sont mal positionnés et que l'orientation interne du réseau n'est pas soignée dans le référentiel géodésique, lui-même parallèle convenablement au référentiel géocentrique Doppler.

En pratique, c'est le cas ii qu'on trouve. L'orientation du réseau est faite à partir d'observations astronomiques. Malgré l'utilisation de l'équation de Laplace,

l'orientation reste insuffisante.

Les données Doppler ont le rôle de :

- positionner les points du réseau géodésique terrestre.
- orienter le référentiel géodésique terrestre.
- améliorer la mise à l'échelle du réseau géodésique terrestre.

8.5.1 Orientation du référentiel géodésique

Dans ce paragraphe nous étudions le cas i. On suppose que les points M d'un réseau géodésique terrestre sont bien positionnés. On détermine les éléments de la transformation (3.6) et en particulier les angles de rotations (rx, ry, rz) . on peut trouver un point M_0 tel qu'en faisant la rotation autour de la normale en ce point, on va mettre l'ensemble du réseau dans un repère parallèle au repère géocentrique Doppler.

Entre (rx, ry, rz) et (px, py, pH) on a la relation (3.57) :

$$\begin{pmatrix} px \\ py \\ pH \end{pmatrix} = R_0^T \cdot \begin{pmatrix} rx \\ ry \\ rz \end{pmatrix}$$

avec R_0 donnée par (3.49).

On pose alors :

$$px = py = 0 \quad (8.122)$$

d'où :

$$pH = \sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2} \quad (8.123)$$

et :

$$\begin{pmatrix} px \\ py \\ pH \end{pmatrix} = R_0^T \cdot \begin{pmatrix} rx \\ ry \\ rz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ pH \end{pmatrix} \quad (8.124)$$

En notant :

$$p = \sqrt{rx^2 + ry^2} \quad (8.125)$$

et en résolvant (8.124), on trouve (Vincenty, 1985) :

$$\sin\varphi_0 = \frac{rz}{pH}; \quad \sin\lambda_0 = \frac{ry}{p}; \quad \cos\lambda_0 = \frac{rx}{p} \quad (8.126)$$

Sans tenir compte de la translation, on obtient les coordonnées des points dans le nouveau repère géodésique (parallèle au repère géocentrique) par :

$$\bar{X}_g = (1 + m) \cdot J(rx, ry, rz) \cdot X_g \quad (8.127)$$

Ayant \bar{X}_g , on calculera $(\bar{\varphi}, \bar{\lambda}, \bar{H})$, par les formules inverses de (3.1).

Il serait intéressant de voir les écarts de l'équation de Laplace appliquée aux points de Laplace du réseau géodésique.

8.5.2 Orientation du référentiel géodésique et mise en place du réseau géodésique

Ici, on étudie le cas ii. Les points du réseau géodésique sont mal positionnés. Au lieu d'avoir X_g on a X_{g_0} tel que :

$$X_g = X_{g_0} + dX_g = X_{g_0} + R_0 \cdot \begin{pmatrix} (N+H)\cos\varphi d\lambda \\ (\rho+H)d\varphi \\ dH \end{pmatrix}_0 \quad (8.128)$$

8.5.2.1 Influence de l'altitude ellipsoïdique sur les paramètres du modèle Bursa-Wolf

Dans ce cas, on a $d\lambda = d\varphi = 0$. La relation (8.128) devient :

$$X_g = X_{g_0} + dH \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi \cos\lambda \\ \sin\lambda \cdot \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}_0 \quad (8.129)$$

En remplaçant X_g donnée par (8.129) dans la relation (8.121) on obtient :

$$X' = T + (1+m) \cdot J \cdot X_{g_0} + dH \cdot (1+m) \cdot J \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi \cos\lambda \\ \cos\varphi \cdot \sin\lambda \\ \sin\varphi \end{pmatrix}_0 \quad (8.130)$$

Le terme $m \cdot J \cdot (\cos\lambda \cos\varphi, \sin\lambda \cos\varphi, \sin\varphi)_0^T$ est négligeable, l'équation (8.130) devient :

$$X' = T + (1+m) \cdot J \cdot X_{g_0} + dH \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi \cos\lambda \\ \cos\varphi \cdot \sin\lambda \\ \sin\varphi \end{pmatrix}_0 \quad (8.131)$$

Une correction de l'altitude ellipsoïdique en un point se traduit par une correction du vecteur translation T de :

$$dT = dH \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi \cos\lambda \\ \cos\varphi \cdot \sin\lambda \\ \sin\varphi \end{pmatrix}_0 \quad (8.132)$$

Numériquement, on a le tableau 8.2 qui donne les corrections des composantes du vecteur translation en fonction de celles de l'altitude ellipsoïdique pour $\varphi_0 = 40.00\text{ gr}$; $\lambda_0 = 10.00\text{ gr}$ et $H_0 = 100\text{ m}$.

Les résultats ci-dessus montrent que les composantes T_x et T_z sont les plus sensibles

$dH(m)$	$dT_x(m)$	$dT_y(m)$	$dT_z(m)$
0.001	0.001	0.000	0.001
0.010	0.008	0.001	0.006
0.100	0.080	0.013	0.059
0.200	0.160	0.025	0.018
0.500	0.400	0.063	0.294
0.750	0.599	0.095	0.441
1.000	0.799	0.127	0.588
1.500	1.199	0.190	0.882
1.750	1.398	0.221	1.029
2.000	1.598	0.253	1.176
5.000	3.995	0.633	2.939
10.000	7.991	1.266	5.878

Tableau 8.2 Les Variations du vecteur Translation

aux variations de l'altitude ellipsoïdique. D'où la nécessité d'avoir une information sur le géoïde.

8.5.2.2 Influence de la longitude géodésique

On suppose que $d\varphi = dH = 0$. L'équation (8.121) devient :

$$X' = T + (1+m) \cdot J(rx, ry, rz) \cdot X_{g_0} + (1+m) \cdot J \begin{pmatrix} -(N+H)\sin\lambda\cos\varphi d\lambda \\ -(N+H)\cos\lambda\cos\varphi d\lambda \\ 0 \end{pmatrix}_0$$

En négligeant les termes en $rx d\lambda$, $ry d\lambda$ et $rz d\lambda$, on obtient :

$$X' = T + (1+m) \cdot \begin{pmatrix} 1 & rz - d\lambda & -ry \\ -(rz - d\lambda) & 1 & rx \\ ry & -rx & 1 \end{pmatrix} \cdot X_{g_0} \quad (8.133)$$

Une correction dL de la longitude géodésique se traduit par une correction $-dL$ de l'angle de rotation rz .

8.5.2.3 Influence de la latitude géodésique

On considère que $d\lambda = dH = 0$. Détaillons l'expression de dX_g , on a :

$$dX_g = (\rho + H)d\varphi \cdot \begin{pmatrix} -\cos\lambda \sin\varphi \\ -\sin\lambda \sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}_0 \quad (8.134)$$

On peut écrire que :

$$\rho = N(1 - e^2) + DN \quad (8.135)$$

où :

$$DN = Nt(1 - e^2)(1 + t + t^2 + o(t^2)); \quad t = e^2 \sin^2 \varphi_0$$

Utilisant (8.135), l'équation (8.134) devient :

$$dX_g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\cos\lambda d\varphi \\ 0 & 0 & -\sin\lambda d\varphi \\ \cos\lambda d\varphi & \sin\lambda d\varphi & 0 \end{pmatrix}_0 \cdot X_{g_0} + d\varphi \cdot \begin{pmatrix} -DN \cdot \cos\lambda \sin\varphi \\ -DN \cdot \sin\lambda \sin\varphi \\ (DN - Ne^2) \cdot \cos\varphi \end{pmatrix}_0 \quad (8.136)$$

ou encore :

$$dX_g = dJ \cdot X_{g_0} + \bar{d}X_{g_0} \quad (8.137)$$

En remplaçant (8.137) dans (8.121), on obtient :

$$X' = T + (1 + m) \cdot (J + dJ) \cdot X_{g_0} + (1 + m) \cdot J \cdot \bar{d}X_{g_0} \quad (8.138)$$

(8.138) montre qu'une correction de $d\varphi$ fait changer les angles des rotations de :

$$\begin{cases} rx \implies rx - \sin\lambda d\varphi \\ rx \implies ry + \cos\lambda d\varphi \\ rz \implies rz \end{cases} \quad (8.139)$$

et le vecteur translation de $\bar{d}X_{g_0}$.

Avec les mêmes données, on obtient les valeurs numériques dans le tableau 8.3 ci-dessous. De ces valeurs, on remarque que les composantes de la translation varient seulement de quelques *cm*.

8.5.2.4 Expression des variations des paramètres du modèle de Bursa-Wolf

Dans ce paragraphe, on va étudier les variations des paramètres du modèle de Bursa-Wolf obtenus à partir des systèmes linéaires, en fonction des variations des éléments du réseau géodésique terrestre.

$d\varphi$ (dmgr)	dTx (m)	dTy (m)	dTz (m)	drx (dmgr)	dry (dmgr)
0.10	-0.001	0.000	-0.004	-0.016	0.099
0.50	-0.007	-0.001	-0.018	-0.078	0.494
1.00	-0.014	-0.002	-0.036	-0.156	0.988
1.50	-0.020	-0.003	-0.054	-0.235	1.482
2.00	-0.027	-0.004	-0.072	-0.313	1.975
2.50	-0.034	-0.005	-0.091	-0.391	2.469
3.00	-0.041	-0.006	-0.109	-0.469	2.963
4.00	-0.055	-0.009	-0.145	-0.626	3.951
5.00	-0.068	-0.011	-0.181	-0.782	4.983
10.00	-0.136	-0.022	-0.362	-1.564	9.877

Tableau 8.3 Influence de la latitude géodésique

la variation de l'échelle

On reprend le système linéaire (3.35) donnant les 7 paramètres de la transformation (3.6), on a avec les mêmes notations :

$$\begin{pmatrix} E^T \cdot Q \cdot E & E^T \cdot Q \cdot U & E^T \cdot Q \cdot X_g \\ U^T \cdot Q \cdot E & U^T \cdot Q \cdot U & U^T \cdot Q \cdot X_g \\ X_g^T \cdot Q \cdot E & X_g^T \cdot Q \cdot U & X_g^T \cdot Q \cdot X_g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dT \\ ROT \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E^T \cdot Q \cdot L' \\ U^T \cdot Q \cdot L' \\ X_g^T \cdot Q \cdot L' \end{pmatrix}$$

On pose :

$$Q' = Q - Q \cdot E \cdot (E^T \cdot Q \cdot E)^{-1} \cdot E^T \cdot Q \quad (8.140)$$

et

$$\bar{Q} = Q' - Q' \cdot U \cdot (U^T \cdot Q' \cdot U)^{-1} \cdot U^T \cdot Q' \quad (8.141)$$

On trouve pour m :

$$m = (X_g^T \cdot \bar{Q} \cdot X_g)^{-1} \cdot X_g^T \cdot \bar{Q} \cdot L' \quad (8.142)$$

Nous allons exprimer dm en fonction de dX_g , dU et dL' .

Différenciant (8.142), on obtient :

$$(X_g^T \cdot \bar{Q} \cdot X_g)^2 \cdot dm = (X_g^T \cdot \bar{Q} \cdot X_g) \cdot d(X_g^T \cdot \bar{Q} \cdot L') - (X_g^T \cdot \bar{Q} \cdot L') \cdot d(X_g^T \cdot \bar{Q} \cdot X_g) \quad (8.143)$$

Le calcul de $d(X_g^T \cdot \bar{Q} \cdot L')$ donne :

$$d(X_g^T \cdot \bar{Q} \cdot L') = dX_g^T \cdot \bar{Q} \cdot L' + X_g^T \cdot d\bar{Q} \cdot L' + X_g^T \cdot \bar{Q} \cdot dL' \quad (8.144)$$

La matrice poids Q et la matrice E sont constantes, on a $dQ' = 0$.

Comme la matrice $(U^T \cdot Q' \cdot U)$ est carrée et régulière, on peut écrire :

$$d(U^T \cdot Q' \cdot U)^{-1} = -(U^T \cdot Q' \cdot U)^{-1} \cdot d(U^T \cdot Q' \cdot U) \cdot (U^T \cdot Q' \cdot U)^{-1} \quad (8.145)$$

par suite :

$$d\bar{Q} = -\bar{Q} \cdot dU \cdot (U^T \cdot Q' \cdot U)^{-1} \cdot U^T \cdot Q' - Q' \cdot U \cdot (U^T \cdot Q' \cdot U)^{-1} \cdot dU^T \cdot \bar{Q} \quad (8.146)$$

$(X_g^T \cdot \bar{Q} \cdot X_g)$ étant un scalaire, on a :

$$d(X_g^T \cdot \bar{Q} \cdot X_g) = 2 \cdot X_g^T \cdot \bar{Q} \cdot dX_g + X_g^T \cdot d\bar{Q} \cdot X_g \quad (8.147)$$

Finalement, en utilisant l'expression de m par (8.142) et les relations ci-dessus, on obtient dm comme suit :

$$dm = \frac{(L' - 2mX_g)^T \cdot \bar{Q} \cdot dX_g + X_g^T \cdot \bar{Q} \cdot dL' + X_g^T \cdot d\bar{Q} \cdot (L' - mX_g)}{X_g^T \cdot \bar{Q} \cdot X_g} \quad (8.148)$$

(8.148) montre le systématisme de l'échelle en fonction des erreurs systématiques de positions géodésiques terrestres des stations Doppler.

Détaillons la valeur de m donnée par (8.142), on a :

$$m = \frac{X_g^T \cdot \bar{Q} \cdot L'}{X_g^T \cdot \bar{Q} \cdot X_g} = \frac{\langle X_g, L' \rangle}{\langle X_g, X_g \rangle} \quad (8.149)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un \bar{Q} produit scalaire.

comme $L' = X' - X_g - E \cdot T$, on a :

$$\langle X_g, L' \rangle = \langle X_g, X' - E \cdot T \rangle - \langle X_g, X_g \rangle$$

soit :

$$m = \frac{\langle X_g, X' - E \cdot T \rangle - \langle X_g, X_g \rangle}{\langle X_g, X_g \rangle} \quad (8.150)$$

Si on se place dans l'espace R^{3k} , muni du \bar{Q} produit scalaire, avec k le nombre des couples de coordonnées 3D géodésiques et Doppler (X_g, X') connues. Alors m s'écrit comme :

$$m = \frac{D_D^2 - D_T^2}{D_T^2} \quad (8.151)$$

avec :

D_T : la distance de l'origine au point X_g ,

D_D : la même distance par le Doppler.

On considère maintenant la détermination des 7 paramètres avec la compensation du réseau géodésique. Soit le modèle de compensation 3D-1 présenté dans la section 5.3.1. Avec les mêmes notations, on a le système :

$$(N'_2 + D).x_2 + D.F.x_4 = D.L' + p'_2$$

$$F^T.D.x_2 + F^T.D.F.x_4 = F^T.D.L'$$

En le détaillant, on trouve le système (5.6) :

$$\begin{pmatrix} N'_2 + D & D.E & D.U & D.X_g \\ \dots & E^T.D.E & ET.D.U & ET.D.X_g \\ \dots & \dots & U^T.D.U & U^T.D.X_g \\ \dots & \dots & \dots & X_g^T.D.x_g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ dT \\ ROT \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D.L' + p'_2 \\ E^T.D.L' \\ U^T.D.L' \\ X_g^T.D.L' \end{pmatrix}$$

On pose :

$$D' = D - D.(N'_2 + D)^{-1}.D \quad (8.152)$$

$$\bar{D} = D' - D'.E.(E^T.D'.E)^{-1}.E^T.D' \quad (8.153)$$

$$D^+ = \bar{D} - \bar{D}.U.(U^T.\bar{D}.U)^{-1}.U^T.\bar{D} \quad (8.154)$$

$$L'' = L' - D'^{-1}.D.(N'_2 + D)^{-1}.p'_2 = L' + (D^{-1} - D'^{-1}).p'_2 \quad (8.155)$$

La résolution du système ci-dessus donne pour m l'expression :

$$m = \frac{X_g^T.D^+.L''}{X_g^T.D^+.X_g} = \frac{X_g^T.D^+.L'}{X_g^T.D^+.X_g} + \frac{X_g^T.D^+.DL'}{X_g^T.D^+.X_g} \quad (8.156)$$

avec :

$$DL' = (D^{-1} - D'^{-1}).p'_2 \quad (8.157)$$

La relation (8.156) s'écrit :

$$m = m_1 + m_2 \quad (8.158)$$

où :

$$m_1 = \frac{X_g^T.D^+.L'}{X_g^T.D^+.X_g}; \quad m_2 = \frac{X_g^T.D^+.DL'}{X_g^T.D^+.X_g} \quad (8.159)$$

m_1 : constitue l'apport des données Doppler à l'échelle,

m_2 : constitue l'apport des observations géodésiques terrestres.

Etudions la variation de l'échelle en fonction des variations des éléments X_g, N'_2, p'_2 et L' . En différenciant (8.156), on obtient :

$$dm = \frac{(L'' - 2mX_g)^T.D^+.dX_g + X_g^T.D^+.dL'' + X_g^T.dD^+.L'' - mX_g}{X_g^T.D^+.X_g} \quad (8.160)$$

Comme la matrice normale D des données Doppler est fixée, alors $dD = 0$, on trouve pour dL'' :

$$dL'' = dL' + N'_2{}^{-1}.dN'_2.N'_2{}^{-1}.p'_2 + (D^{-1} - D'^{-1}).dp'_2 \quad (8.161)$$

L'expression (8.160) montre la variation de l'échelle en fonction des erreurs systématiques dues aux observations géodésiques terrestres (par dp'_2 et dN'_2) et aux coordonnées Doppler utilisées dans le modèle de Bursa-Wolf (par dL').

La variation du vecteur rotation

En posant :

$$\bar{D}'' = D - (X_g^T \cdot \bar{D} \cdot X_g)^{-1} \cdot \bar{D} \cdot X_g \cdot X_g^T \cdot \bar{D} \quad (8.162)$$

on obtient pour le vecteur rotation ROT :

$$ROT = (U^T \cdot D'' \cdot U)^{-1} \cdot U^T \cdot D'' \cdot L'' \quad (8.163)$$

En considérant les variations sur L'' seulement, on a :

$$dROT = (U^T \cdot D'' \cdot U)^{-1} \cdot U^T \cdot D'' \cdot dL''$$

ou encore :

$$dROT = (U^T \cdot D'' \cdot U)^{-1} \cdot U^T \cdot D'' \cdot (dL' + N_2'^{-1} \cdot dN_2' \cdot N_2'^{-1} \cdot p'_2 + (D^{-1} - D'^{-1}) dp'_2) \quad (8.164)$$

Les erreurs ci-dessus, montrent la complexité des effets des erreurs systématiques sur les paramètres du modèle de Bursa-Wolf.

Chapitre 9

Le Choix d'un Modèle de Combinaison des Observations Doppler et Terrestres

9.1 Introduction

L'utilisation des données Doppler dans un réseau géodésique est faite surtout pour l'amélioration de la qualité du réseau ou pour sa densification.

Comment utiliser les données Doppler dans la compensation du réseau géodésique pour l'améliorer ou le densifier de façon optimale ? Cette question trouve sa solution - du moins théoriquement - par la résolution des quatre problèmes de conception pour l'optimisation des réseaux (E. Grafarend, 1974 ; Schmitt, 1985) à savoir :

- le problème de conception d'ordre zéro (P.C.O.Z) : le choix du datum (réseau avec contraintes, réseau libre, ...),
- le problème de conception d'ordre un (P.C.O.U) : le choix des points et des observations,
- le problème de conception d'ordre deux (P.C.O.D) : le problème des poids des observations,
- le problème de conception d'ordre trois (P.C.O.T) : l'addition de nouvelles observations ou de points géodésiques pour l'amélioration ou la densification du réseau d'une manière optimale.

Sans entrer en détail dans le problème de l'optimisation et la conception des réseaux, qui dépasse le cadre de cette étude, on peut dire que le choix d'un modèle de combinaison des données Doppler avec les observations terrestres classiques va dépendre de :

- la qualité des observations (par une analyse a priori des observations),
- du type d'observations disponibles (zénithales, astronomiques azimutales, distances....),
- du réseau considéré (nouveau réseau, ancien réseau à améliorer opérations de densification),

Dans ce rapport, on a considéré seulement les réseaux non libres.

9.2 Le Choix de Modèle de Combinaison

Le modèle à choisir appartient à l'un des groupes suivants :

- G 1 : les modèles de compensations dans le cadre de réseaux géodésiques locaux (à condition que le pays ne soit pas très vaste),
- G 2 : les modèles de compensation dans le cadre de réseau continentaux ou inter-nationaux (exp : réseau Retrig).

En effet, suivant les dimensions du réseau géodésique, le nombre de paramètres de la transformation du système géodésique terrestre au système géocentrique va varier de 3 à 7 (en utilisant le modèle de Bursa-Wolf).

Dans les modèles du groupe G 1, on peut considérer que dans la compensation les coordonnées géocentriques des points Doppler sont fixes (§ V.3). Par contre, ceux du groupe G 2, les coordonnées géocentriques des points Doppler peuvent être considérées non constantes (§ V.4). Les paramètres de l'ellipsoïde de référence peuvent aussi être inclus comme des inconnues dans la compensation (§ V.5).

9.2.1 Modèles de compensation du groupe G 1

- Pour les réseaux "3-D c'est-à-dire que les points sont bien déterminés en altitudes", on choisit le modèle de compensation 3D-1 (§ V.3.1) avec le calcul de 3 ou 4 et au plus 5 paramètres à savoir la translation et (l'échelle ou/et la rotation rz).
- Pour les réseaux "faiblement 3-D", on peut adapter le modèle 3D-2 (§ V.3.2) avec le même nombre de paramètres 3, 4, ou 5.
- Pour les réseaux "2-D", on choisira le modèle 2D-1 (§ V.3.4) avec le calcul de 3 ou 4 paramètres (translation + échelle ou la rotation rz).

9.2.2 Modèles de compensation pour le groupe G 2

- Pour les réseaux "3-D", on propose le modèle 3D-1 (§ V.4.1) avec la possibilité de calculer les 7 paramètres, du moins les plus significatifs.
- Pour les réseaux "faiblement 3-D", le modèle 3D-2 (§ v.4.2) présente une amélioration des altitudes des stations Doppler.
- Pour une compensation globale incluant les paramètres de l'ellipsoïde de référence, le modèle de compensation (§ V.5) apporte une solution.

9.3 La Recherche de Modèles de Passage entre les Réseaux Doppler et Géodésiques Terrestres

L'un des problèmes de la combinaison des données Doppler, et généralement les données spatiales, avec les observations terrestres est de définir le lien fonctionnel entre ces types de données. Ce lien est généralement représenté par l'un des modèles classiques (Bursa-Wolf, Hotine, Veis,...). Ceux-ci ont révélé, pour certains réseaux, leur incapacité à interpréter des effets résiduels. D'où la nécessité de la recherche d'autres modèles qui améliorent la qualité des réseaux géodésiques.

C. Boucher (1984) a proposé pour le réseau Retrig l'adaptation d'un modèle 4-D en tenant compte du paramètre temps pour les points dont les coordonnées sont déterminées au niveau du cm.

R. Strauß (1985) a commencé l'étude des variations temporelles des paramètres de la transformation entre les systèmes GPS et géodésique terrestre Allemand.

G. Hein (1986) a présenté une esquisse d'un modèle 4-D pour la géodésie Intégrée.

Nous posons le problème de la recherche de la transformation ou le passage entre les coordonnées géodésiques terrestres X_g comme suit :

- on dispose de N triplets $(X', X_g, t)_j, j = 1, 2, \dots, N$, avec t le paramètre temps. Entre X' et X_g , on a une relation du type :

$$X' = F(X_g, U, t) \quad (9.1)$$

où :

$$F : \text{est une fonction à } (X_g, U, t) \rightarrow X' \quad (9.2)$$

U : le vecteur des paramètres qui peut dépendre de t et de la position

Le problème est la recherche de la fonction F et le vecteur paramètre vérifiant (9.1) et d'autres conditions à préciser.

9.3.1 Cas I : U dépend des paramètres classiques

Dans ce paragraphe on suppose que le vecteur U est fonction des trois paramètres classiques à savoir la translation, la rotation et l'échelle.

Une solution particulière de (9.1) est par exemple le modèle de Bursa-Wolf à une date t_0 qu'on peut prendre comme origine, on a alors :

$$X' = F_0(X_g, U_0) = F(X_g, U_0, t_0) \quad (9.3)$$

avec :

$$U_0 = (Tx, Ty, Tz, rx, ry, rz, m)^T \quad (9.4)$$

et :

$$F_0(X_g, U_0) = X_g + \bar{F}(X_g).U_0 \quad (9.5)$$

où \bar{F} désigne ici la matrice donnée par (3-9).

L'écriture générale de l'équation (9.1) est sous la forme :

$$X'(t) = F(X_g(a(t)), U(b(t)), t) \quad (9.6)$$

avec :

$$(9.7)$$

$X_g(a(t))$: le vecteur position géodésique terrestre, dépendant du temps par rapport à un système géodésique terrestre de référence.

$a(t)$: le paramètre définissant le changement de X_g avec le temps.

$U(b(t))$: le vecteur des paramètres dépendant du temps.

$b(t)$: le paramètre définissant le changement de U avec le temps.

A la date t_j , on observe $X'(t_j)$.

Comme G. Hein (1986), on décompose X_g et U comme suit :

$$\begin{cases} X_g(a(t)) = X_{g_0} + dX_g + \delta X_g(a(t)) \\ U(b(t)) = U_0 + dU + \delta U(b(t)) \end{cases} \quad (9.8)$$

où :

X_{g_0} : la position approchée géodésique terrestre à la date t_0 de référence .

dX_g : la correction de X_{g_0} pour avoir la vraie valeur de la position à t_0 .

$\delta X_g(a(t))$: la correction pour avoir la vraie position à la date t .

U_0 : le vecteur des valeurs approchées des paramètres à la date t_0 .

dU : le vecteur de correction à U_0 pour obtenir les vraies valeurs des paramètres à t_0 .

$\delta U(b(t))$: la correction pour avoir la vraie valeur de U à t .

L'équation (9.6) s'écrit alors :

$$X'(t) = F(X_{g_0} + dX_g + \delta X_g(a(t)), U(b(t)) = U_0 + dU + \delta U(b(t)), t) \quad (9.9)$$

On peut écrire (9.9) sous la forme :

$$X'(t) = F_0(X_{g_0} + dX_g + \delta X_g(a(t)), U(b(t))) = U_0 + dU + \delta U(b(t)), t) + f(X_g(a(t)), U(b(t)), t) \quad (9.10)$$

où le terme :

$$f(X_g(a(t)), U(b(t)), t) \quad (9.11)$$

représente l'anomalie de la transformation F_0 qui dépend de la position et du temps.

Développons $F_0(X_g(a(t)), U(b(t)))$, on obtient :

$$F_0(X_g(a(t)), U(b(t))) = F_0(X_{g_0}, U_0) + \left(\frac{\partial F_0}{\partial X_g} \right)_0 .dX_g + \left(\frac{\partial F_0}{\partial X_g} \right)_0 .\delta X_g(a(t)) + \left(\frac{\partial F_0}{\partial \delta X_g(a(t))} \right)_0 .\delta X_g(a(t)) + \left(\frac{\partial F_0}{\partial U} \right)_0 .dU + \left(\frac{\partial F_0}{\partial U} \right)_0 .\delta U(b(t)) \quad (9.12)$$

La fonction vectorielle $f(X_g(a(t)), U(b(t)), t)$ s'écrit en gardant les termes du premier ordre :

$$f(X_g(a(t)), U(b(t)), t) = f(X_{g_0}, U_0, t) \quad (9.13)$$

Si on linéarise (9.13) au voisinage de t_0 , on aura :

$$f(X_{g_0}, U_0, t) = f(X_{g_0}, U_0, t_0) + \left(\frac{\partial f(X_g, U, t)}{\partial t} \right)_0 .Dt \quad (9.14)$$

avec :

$$Dt = t - t_0 \quad (9.15)$$

L'équation d'observation de $X'(t)$ devient :

$$\left(\frac{\partial F_0}{\partial X_g} \right)_0 .dX_g + \left(\frac{\partial F_0}{\partial X_g} \right)_0 .\delta X_g(a(t)) + \left(\frac{\partial F_0}{\partial U} \right)_0 .dU + \left(\frac{\partial F_0}{\partial U} \right)_0 .\delta U(b(t)) + \left(\frac{\partial f(X_g, U, t)}{\partial t} \right)_0 .Dt = X'(t) - F_0(X_{g_0}, U_0) - f(X_{g_0}, U_0, t_0) + V(t) \quad (9.16)$$

où $V(t)$ est le résidu .

Les inconnues sont par ordre :

- dX_g et dU ,
- $\delta X_g(a(t))$ et $\delta U(b(t))$,
- $\frac{\partial f(X_g, U, t)}{\partial t}$ si $f(X_{g_0}, U_0, t)$ est approximativement une fonction linéaire du temps.

9.3.2 Cas II : Cas général

Dans ce paragraphe, on suppose que U peut dépendre d'autres paramètres que ceux utilisés au IX.3.1.

On écrit (9.6) sous la forme :

$$X'(t) = F'(X_g(a(t)), U(b(t)), u, t) \quad (9.17)$$

où la variable u contient les autres paramètres. u peut dépendre de la position et du temps.

On approche la fonction F' par :

$$F'(X_g, U, u, t) = F(X_g, U, t) + \psi(u, t) \quad (9.18)$$

où F peut-être prise comme solution du problème traité au IX.3.1. et ψ est la fonction perturbatrice.

Comme exemple, u peut dépendre du potentiel ou de ces dérivées. Là, on entre dans le domaine de la Géodésie Intégrée.

Chapitre 10

Résumé et Conclusions

Le but de ce rapport est l'étude de la combinaison des observations géodésiques terrestres classiques avec les données Doppler dans la compensation des réseaux géodésiques terrestres.

Après avoir rappelé les résultats de la méthode des moindres carrés et les relations entre les divers systèmes géodésiques, nous avons commencé par présenter les compensations des observations terrestres et Doppler séparément et le calcul des 7 paramètres (translation, rotation et échelle) du modèle de Bursa-Wolf.

Premièrement, nous avons considéré la combinaison des observations terrestres avec les données Doppler d'une même campagne. Nous avons détaillé les divers modèles de compensation utilisant le modèle de Bursa-Wolf et les formules générales de Molodensky. Ces modèles de compensation forment 2 groupes. Dans le premier, les coordonnées Doppler sont introduites comme contraintes c'est-à-dire qu'elles sont imposées. Dans le second groupe, les coordonnées Doppler sont déterminées avec les autres inconnues, à savoir les coordonnées géodésiques terrestres ainsi que les 7 paramètres cités ci-dessus.

Deuxièmement, d'autres méthodes de combinaison étudiées par H. Wolf, R. Kelm, M. Baumker et T. Vincenty ont été décrites. Nous avons détaillé celle de H. Wolf qui a beaucoup travaillé dans ce domaine de la combinaison des observations terrestres avec les données Doppler.

Troisièmement, nous avons traité le cas où les données Doppler provenaient de plusieurs campagnes. Nous avons présenté quelques modèles appartenant aux groupes mentionnés ci-dessus.

Quatrièmement, un grand chapitre a été consacré à l'étude des erreurs systématiques d'orientation et de mise à l'échelle dans la combinaison des données Doppler avec les observations terrestres.

Enfin, le problème du choix d'un modèle de compensation des données Doppler avec les observations terrestres classiques a été discuté. Une approche de la recherche d'un modèle du lien fonctionnel entre les réseaux terrestres et géocentriques a été présentée.

Les problèmes que pose la combinaison des données Doppler avec les observations géodésiques terrestres sont :

- le choix du lien fonctionnel et du modèle de compensation.
- le poids des observations ou les matrices variances à utiliser.
- la modélisation des erreurs systématiques.

Ainsi, depuis le Symposium International sur les problèmes liés à la définition du réseau géodésique de l'Amérique du Nord (Le Géomètre Canadien, 1974), les problèmes de la combinaison des observations terrestres avec d'autres données et en particulier les données Doppler ont trouvé un grand intérêt auprès des spécialistes des réseaux géodésiques (Thomson 1976, Thomson & Krakiwski 1976, Boucher 1979,

V.Ashkenazi & S.N.Grist (1981,1983) ont décrit les modèles 3D de compensation utilisant différentes approches (géométrique, opérationnelle et combinée).

A la question du lien fonctionnel, nous avons fait le choix du modèle de Bursa-Wolf et les formules générales de Molodensky.

Le modèle de Bursa-Wolf permet de comparer les coordonnées 3D cartésiennes. Quant aux formules de Molodensky, elles permettent de dissocier les coordonnées horizontales de l'altitude et de les utiliser dans les compensations 2D.

Cependant pour les autres modèles (Molodensky-Badekas, Hotine,...) la démarche reste similaire.

Quant aux modèles de compensation, nous avons présenté une variété de modèle allant des compensations 3D,2D, à la combinaison 3D,2D, sans oublier le modèle 2D utilisant les représentations planes. L'exemple du modèle 3D-2 (§ V.3) permet la combinaison des observations terrestres en 2D avec les données Doppler en 3, en introduisant le vecteur inconnu dH des altitudes des ellipsoïdiques des stations Doppler. Ce-ci va permettre d'améliorer les altitudes ellipsoïdiques et les hauteurs du géoïde en ces stations.

Dans tous ces modèles, parmi les inconnues figure le vecteur des paramètres (translation, rotation et échelle). néanmoins dans la pratique, il aura un choix à faire pour garder les paramètres les plus significatifs.

La combinaison des données Doppler avec les observations géodésiques terrestres peut apporter une amélioration à l'ellipsoïde de référence géodésique, en

considérant que les paramètres de l'ellipsoïde sont aussi des inconnus dans la compensation (§ V.5).

Enfin, on peut trouver les paramètres de la transformation liant les coordonnées 3D géocentriques et terrestres, par rapport au référentiel géodésique local d'un point situé au centre du réseau étudié utilisant la méthode des référentiels régionaux inverses (§ V.6). Les résultats numériques ne permettent pas de tirer les conclusions finales de cette méthode.

Concernant les matrices de poids à utiliser, nous avons adopté les matrices poids estimées à partir des matrices variances des coordonnées Doppler et géodésiques terrestres obtenues lors des compensations Doppler et des observations terrestres séparément. La loi de propagation des variances a été appliquée pour obtenir les matrices poids pour certains modèles.

Dans le cas de données Doppler provenant de plusieurs campagnes, nous avons étudié quelques modèles de compensation. Dans ces modèles, on détermine les paramètres du modèle de Bursa-Wolf pour chaque campagne. Dans le cas où les coordonnées Doppler ne sont pas fixées, les matrices variances partielles des coordonnées terrestres sont extraites de la matrice normale de toutes les coordonnées terrestres.

Un dernier point fondamental dans la combinaison des observations terrestres avec d'autres données, et dans notre cas les données Doppler, c'est l'analyse des erreurs systématiques.

Nous avons d'une part considéré ces erreurs dans les réseaux géodésiques terrestres et d'autre part après l'introduction des données Doppler.

Concernant le premier cas, nous avons étudié la question du choix des coordonnées initiales au point fondamental d'un réseau géodésique, ainsi que l'orientation de l'ellipsoïde de référence et la mise d'échelle du réseau terrestre. Comme résultat, on devrait introduire dans les équations d'observations des azimuts des termes de la forme :

$$-a_1.rx - a_2.ry - a_3.rz \quad (10.1)$$

où rx , ry et rz représentent les désorientations des axes de l'ellipsoïde de référence. Ce résultat a été trouvé par T. Vincenty (1985) par une autre approche.

Quant au deuxième cas, l'étude est plus complexe. En effet, on fait abstraction des erreurs systématiques dans les données Doppler et on étudie seulement celles des réseaux géodésique.

On a exprimé la propagation de ces erreurs sur les paramètres du modèle de Bursa-Wolf en considérant en premier lieu les observations terrestres et en second

lieu avec les données Doppler. Les formules obtenues montrent la complexité de la propagation des erreurs systématiques en fonction de celles des observations terrestres et des coordonnées Doppler.

Dans le dernier chapitre nous avons présenté le problème du choix d'un modèle de combinaison des données Doppler avec les observations terrestres classiques.

Cependant, le choix d'un modèle va dépendre de la qualité et du type des observations, de la nature du réseau et de l'information a priori connue et du brut recherché. Nous avons proposé des modèles 3D et 2D.

Enfin, une esquisse de la recherche de modèles de lien fonctionnel entre les coordonnées géodésiques terrestres et géocentriques a été présentée.

En conclusion, ce rapport a le but de présenter en détail des modèles de compensation des réseaux géodésiques par la combinaison des données Doppler avec les observations terrestres classiques ainsi que l'étude des erreurs systématiques.

Nous concluons cette étude par :

- La nécessité de tester les différents modèles présentés sur des réseaux tests.
- Elargir ces modèles aux autres types de transformation (Veis, Molodensky-Basekas, Hotine,...)
- Tester numériquement la méthode des référentiels régionaux inverses.
- Voir l'effet des matrices de poids sur les résultats.
- Continuer l'étude de la modélisation des erreurs systématiques.
- Poursuivre l'étude dans le cadre de la Géodésie Intégrée avec d'autres types de données (GPS, LASER, ISS, ...).

Littérature

- D.B. Thomson : 1976. Combination of geodetic networks. Technical report No 30, department of Surveying Engineering. University of new brunswick. Fredericton N.B.Canada.
- I.I. Mueller** : 1982. African Doppler Survey. Proceedings of the Third International Geodetic Symposium on Satellite Doppler Positioning. Las Cruces, Feb 8-12, vol 1, pp 637-656.
- J. Adam** : 1981. On the determination of similarity coordinate transformation parameters. Presented at the 8th Symposium on Mathematical Geodesy -5th HOTINE SYMPOSIUM- Italy, Sept 7-9. Bollettino Di Geodesia E Scienze Affini, No 3 Vol 41, p 283-290, 1982.
- V. Ashkenazi** : 1981. Models for controlling national and continental networks. BG Vol 55 No 1, pp 49-58.
- V. Ashkenazi, S.A. Crane & J.W. Williams** : 1981. The OSGB scientific network : combination of satellite and terrestrial data. Annale de Géophysique, tome 37 pp 49-54.
- V. Ashkenazi & S.N. Grist** : 1981. Inter-comparison of 3-D geodetic network adjustment models. Proceeding of the International Symposium on Geodetic Networks and Computations of the IAG, Munich, August 31 to september 5. DGK, série B No 258 Vol IV, 1982, pp 37-44.
- V. Ashkenazi & S.N. Grist** : 1983. 3-D Geodetic networks adjustment models : significance of different approaches. Symposium d, Proceedings of the IAG, Vol 2. Hambourg August pp 326 -346
- M. Baumker** : 1983. Common adjustment of terrestrial and satellite Doppler observing in three dimensions Symposium d, Proceedings of the IAG, vol 2. Hambourg, August, pp 224-256.
- C. Boucher** : 1978. Formulaire pour transformations de coordonnées 3-D cartésiennes ou géographiques entre deux systèmes géodésiques. IGN NT /G No 8.
- C. Boucher** : 1979. Investigations on geodetic applications of satellite Doppler observations for control networks. Proceedings of the Second International Geodetic Symposium on Satellite Doppler Positioning, Vol 2. Austin, USA, January 22-26, pp 1001-1025.
- C. Boucher** : 1984. Progress report on the use of space derived data for the Retrig phase III. Retrig Symposium, Copenhagen, October.
- C. Boucher** : 1985. The use of space data for the phase III of Retrig : a status report. Retrig Symposium, The Hague. C/C No 511, IGN 27405, December.
- H.M. Dufour** : 1971. La projection stéréographique de la sphère et de l'ellipsoïde. Sept, IGN/2, 26804.
- H.M. Dufour** : 1980. Evolutions possibles du calcul de Retrig Subcommission, publication No 13, pp 173-175.
- H.M. Dufour** : 1986a. Etude de l'utilisation de la projection stéréographique pour la comparaison de 2 réseaux tridimensionnels. Manuscrit. Février.
- H.M. Dufour** : 1986b. Les référentiels régionaux inverses : une synthèse possible entre la géodésie Tri et Bi-dimensionnelle. Cours de géodésie appliquée. CERN, 14-18 Avril.
- D. Ehler** : 1981. Combined least squares solution using terrestrial and Doppler observations. Proceeding of the International Symposium on Geodetic Networks and Computations of the IAG, Munich, August 31 to september 5, 1981. DGK série B, No 258 Vol V, 1982, pp 94-103.
- I. Gajderowicz** : 1981. Combined adjustment of Doppler and terrestrial nets in Doppler reference systems. Proceedings of the International symposium on Geodetic Networks and computations of the IAG, Munich, August 31 to september 5, 1981. DGK série B, No 258 Vol V. 1982, pp 98-113.
- Le Géomètre Canadien** : 1974. Communications du symposium International sur les problèmes liés à la définition du réseau géodésique de l'Amérique du Nord, Vol 28 No 4.
- E.W. Grafarend** : 1974. Optimization of geodetic networks. Bollettino Di Geodesia E Scienze Affini. Année 33 No 4 pp 351-406.
- E.W. Grafarend** : 1985. Estimability of astronomical longitude and latitude only from theodolite observations within three-dimensional networks of terrestrial type. BG Vol 59 No 2, pp 124-138.
- L. Grundig, M. Neureither & J. Bahndorf** : 1985. Including Macrometer - type observables

- into a standart 3-D adjustment program. Proceedings FIG, Inertial, Doppler and GPS measurements for National and Engineering Surveys. Joint Meeting of study Group 5B and 5C July 1-3. Publication UniBW No 20, Vol 2, October 1985, pp 377-390.
- G.W. Hein** : 1981. a contribution to 3D-operational geodesy : Part 1 : Principle and observational equations of terrestrial type, pp 31-64 ; Part 2 : concept of solution. pp 65-85. Proceedings of the International Symposium on Geodetic Networks and Computations of the IAG, Munich August 31 to September 5. BGK série B, No 258 Vol VIII, 1982.
- G.W. Hein** : 1986. Integrated Geodesy : State-Of-The-Art 1986 reference text. Lectures Notes. Fourth International Summer School in the Mountains, Admont Austria, August 25- september 5.
- L. Hothem, T. Vincenty & R.E. Moose** : 1982. Relationship between Doppler and other advanced geodetic system measurements based on global data. Proceedings of the Third International geodetic symposium on Satellite Doppler positioning. Las Cruces, Feb 8-12, Vol 1, pp 109-128.
- P. Hottier** : 1978. Théorie des erreurs à deux composantes bruit et silence. Vol 1, RT/G No 2. SGNM. Octobre.
- P. Hottier** : 1984. Analyse numérique, chapitre 1, cours ENSG.
- H. Jochemczyk** : 1983. Untersuchungen zur Kombination von geodatischen Punkthaufen. DGK, série C no 285.
- R. Kelm** : 1983. Estimating relative and absolute coordinates with terrestrial and satellite data Symposium d, Proceedings of the IAG, Vol 2. Hambourg, August, pp 347-371.
- C. Le Cocq et C. Boucher** : 1981. Mathematical model for network geometric adjustment. Proceedings of the International Symposium on Geodetic Networks and Computations of the IAG, Munich August 31 to September 5 ? 1981. DGK série B, No 258 Vol VI, pp 27-42. 1982.
- A. Leick & V. Gelder H.W.** : 1975. On similarity transformations and geodetic network distortions based on Doppler satellite observations. Ohio report No 235.
- P. Meissl** : 1983. Least squares adjustment : a modern approach. Mitteilung der geodatischen Institute der Technischen Universitat Graz, Folge 43.
- J.V. Mierlo** : 1980. Free network adjustment and S-transformations. DGK, série B No 252 pp 41-54.
- H. Moritz** : 1980. Advanced Physical Geodesy . Herbert Wichmann Verlag, Karlsruhe. Abacus Press Tunbridge wells Kent.
- G. Schmitt** : 1984. Review of networks designs : criteria, risk functions, design ordering. Third Course of The International School of Advanced Geodesy, Erice Italy, April 25-May 10, 1984. Optimization and Design of Geodetic Networks, pp 6-10. Edited by E.W.Grafarend and F.Sanso. Springer-Verlag 1985.
- R. Strauß** : 1985. On the variation of the transformation parameters between GPS and the German Horizontal Network. Proceedings FIG, Inertial Doppler and GPS Measurements for National and engineering Surveys. Joint Meeting of Study Group 5B and 5C, July 1-3. Publication UniBW No 20, October 1985, pp 545-552.
- G.L. Strang** : 1980. Variance - covariance transformations of geodetic networks. MG Vol 7, No 1, pp 1-20.
- K. Swiatek** : 1984. Anwendung von Doppler Satellitenmessungen zur genauigkeitsverbesserung geodatischer Netze. Zfv No 2, Fevrier, pp 65-75.
- D.B. Thomson & E.J. Krakiwski** : 1976. Concepts of the combination of geodetic networks. Proceedings of the First International Geodetic Symposium on Satellite Doppler Positioning. Las Cruces, Oct. Vol 2, pp 727-746.
- P. Vanicek** : 1975. Report on geocentric and geodetic datums. Technical report No 32. Department of Surveying Engineering. University of New Brunswick. Fredericton N.B.Canada.
- P. Vanicek & D.E. Wells** : 1974. Positioning of horizontal geodetic datums Symposium Readjustment NAD. Fredericton. The Canadian Surveyor, Vol 28 No 5, pp 531-538.
- P. Vanicek & G. Carrera** : 1985. Reference ellipsoid misalignment, deflection components and geodetic azimuths. The Canadian Surveyor, vol 39 no 2, pp 123-130.
- T. Vincenty** : 1980. Height - controlled three dimensional adjustment of horizontal networks. BG Vol 54 No 1, pp 37-43.

- T. Vincenty** : 1982. Methods of adjusting space systems data and terrestrial measurements. BG Vol 56 No 3, pp 231-241.
- T. Vincenty** : 1985. On the meaning of the geodetic orientation. BG Vol 59 No 2, pp 189-199.
- W. Welsch** : 1984. Kombinierte Ausgleichung von Doppler-Satellitennetzen und terrestrischen Netzen. Satelliten - Doppler Messungen. Beitrage Zum geodatischen Seminar 24 - 25 september. Publication UniBw No 15, December 1984, pp 155-191.
- W. Welsch & W. Oswald** : 1985. Variance analysis of satellite networks. Proceedings First International symposium on precise Positioning with the Global Positioning System. Vol 2, pp 667-676. Maryland. USA, April.
- H. Wolf** : 1980a. On the use of Doppler observations for improving the Retrig adjustment. IAG retrig Subcommission publication No 13, pp 176-183.
- H. Wolf** : 1980b. The Retrig's phase III : problems and solutions (Idem), pp 184-189.
- H. Wolf** : 1980c. Scale and orientation in combined Doppler and triangulation nets. BG Vol 54 No 1 pp 45-53.
- H. Wolf** : 1982a. Stochastic aspects in combined Doppler and triangulation nets. BG Vol 56 No 1, pp 63-69.
- H. Wolf** : 1982b. Alternate procedure to combine Doppler measurements with the Retrig adjustment phase III. IAG Retrig Subcommission publication No 14, pp 115-127.
- H. Wolf** : 1982c. Minutes on the combining procedure of Doppler observations with the Retrig phase III. IAG Retrig Subcommission publication no 14, pp 212-221.
- H. Wolf** : 1984. Satelliten - Dopplermessungen in der Berechnung des Europäischen Dreiecksnetzes Retrig. Satelliten-Doppler messungen, Beitrage zum Geodatischen seminar 24/25 September. Publication UniBW No 15. December 1984, pp 221-229.
- H. Wolf** : -1985. Das-lage und Hohen problem in grossen geodatischen netzen bei Einbeziehung von Satellitendopplermessungen. ZfV No 5, mai, pp 179-186.
- Z. Zhou** : 1983. Untersuchung der mathematischen modelle zur kombination eines terrestrischen Netzes mit einem satellitennetz. DGk, série C No 274.

Abréviations :

- AIG** : Association Internationale de Géodésie.
- BG** : Bulletin Géodésique, publié par L'AIG.
- DGK** : Publications de "Deutsche Geodatische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften". Munchen.
- ENSG** : Ecole Nationale des Sciences Géographiques (France).
- FIG** : Fédération Internationale des Géomètres.
- IAG** : International Association of Geodesy.
- IGN** : Institut Géographique National (France).
- MG** : Manuscripta Geodaetica publiée par Springer Verlag.
- Ohio** : Department of Geodetic Science, Ohio State University. Columbus.
- Retrig** : Réseau Européen de triangulation.
- UniBW** : Universität der Bundeswehr Munchen.
- ZfV** : Zeitschrift für Vermessungswesen publié par Verlag Konrad Wittwer, Stuttgart.

ANNEXES 1 : PROGRAMME REFRGINV

OBJET : Calcule les paramètres de transformation par la méthode des référentiels régionaux inverses, (Chapitre 5, paragraphe 6)

Abdelmajid BEN HADJ SALEM
Stage IG2, JANV-AOUT 1986
IGN (DTIG/SGNM)

Liste des figures

5.1	53
5.2	53
5.3	54

Liste des tables

5.1	Les Coordonnées $(X, Y, Z)_g$ et $(\varphi, \lambda, H)_g$ terrestres . . .	57
5.2	Les Coordonnées (X', Y', Z') et (φ', λ', H') Doppler . . .	58
5.3	Les Coordonnées régionales inverses (X, Y, Z) transformées de (X, Y, Z) terrestres	58
5.4	Les Coordonnées régionales inverses (X'', Y'', Z'') transformées de (X', Y', Z') terrestres	58
5.5	Les paramètres de la transformation	59
8.1	Les Variations de l'Azimut Géodésique	92
8.2	Les Variations du vecteur Translation	102
8.3	Influence de la latitude géodésique	104