

# **Note sur la Méthode des Référentiels Inverses Régionaux en Géodésie**

- En hommage à mon professeur de topographie Raymond D'Hollander (1918-2013),  
ancien directeur de l'ENSG, IGN France -

---

**Abdelmajid BEN HADJ SALEM**

*6, Rue du Nil, Cité Soliman Er-Riadh, 8020 Soliman, TUNISIA.*

*E-mail: abenhadjsale@gmail.com*

ABSTRACT: Dans ce papier, on passe en revue la méthode des référentiels inverses régionaux et son application en géodésie pour la détermination des paramètres de passage d'un système à un autre.

Mai 2013

---

## Table des matières

1	Présentation des référentiels régionaux inverses	1
2	Formules différentielles	4
3	Détermination des paramètres de la transformation par la méthode des référentiels régionaux inverses	5
3.1	Calcul des paramètres de la transformation	5
3.2	Exemple numérique	6

---

## 1 Présentation des référentiels régionaux inverses

Dans deux articles, H.M. Dufour [1],[2] propose l'emploi des référentiels régionaux inverses faisant appel à la géodésie bidimensionnelle par le biais d'une représentation stéréographique plane et d'une troisième dimension proche des altitudes.

La méthode des référentiels régionaux inverses consiste à définir un référentiel  $(x, y, z)$  en un point  $O$  par une inversion de pôle l'antipode du point  $O$ , sur une sphère tangente en ce point à l'ellipsoïde. Les coordonnées  $(x, y, z)$  d'un point  $M$  dans ce référentiel appartiennent à 2 groupes, d'une part  $(x, y)$  sont les coordonnées d'une représentation stéréographique sur le plan tangent en  $O$  (H.M. Dufour,[3]) et d'autre part  $z$  est proche de l'altitude ellipsoïdique du point.

Soient  $(\varphi_0, \lambda_0)$  la latitude et la longitude géodésiques de  $O$  dans le système  $(X, Y, Z)_g$  géodésique terrestre relatif à un datum donné  $\mathcal{D}$  d'ellipsoïde  $E(a, e)$ , où  $a$  et  $e$  sont respectivement le demi grand-axe et la première excentricité. Soit  $N_0$  la valeur de  $N$  en  $O$  soit :

$$N_0 = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_0}} \quad (1.1)$$

Soient  $(X, Y, Z)_g$  les coordonnées 3-D géodésiques d'un point  $M$  dans le datum  $\mathcal{D}$ .

On considère le point  $I(0, 0, -N_0 e^2 \sin \varphi_0)_g$  dans  $(O, X, Y, Z)_g$ . Dans  $I(X_I, Y_I, Z_I)$  les coordonnées de  $M$  sont (Fig. 1) :

$$M : \begin{cases} X_I = X_g \\ Y_I = Y_g \\ Z_I = Z_g + e^2 N_0 \sin \varphi_0 \end{cases} \quad (1.2)$$

Les coordonnées de  $M$  dans  $(O, X_0, Y_0, Z_0)$  sont obtenues par (Fig.2) :

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} = R_0^T \cdot \begin{pmatrix} X_I \\ Y_I \\ Z_I \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ N_0 \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

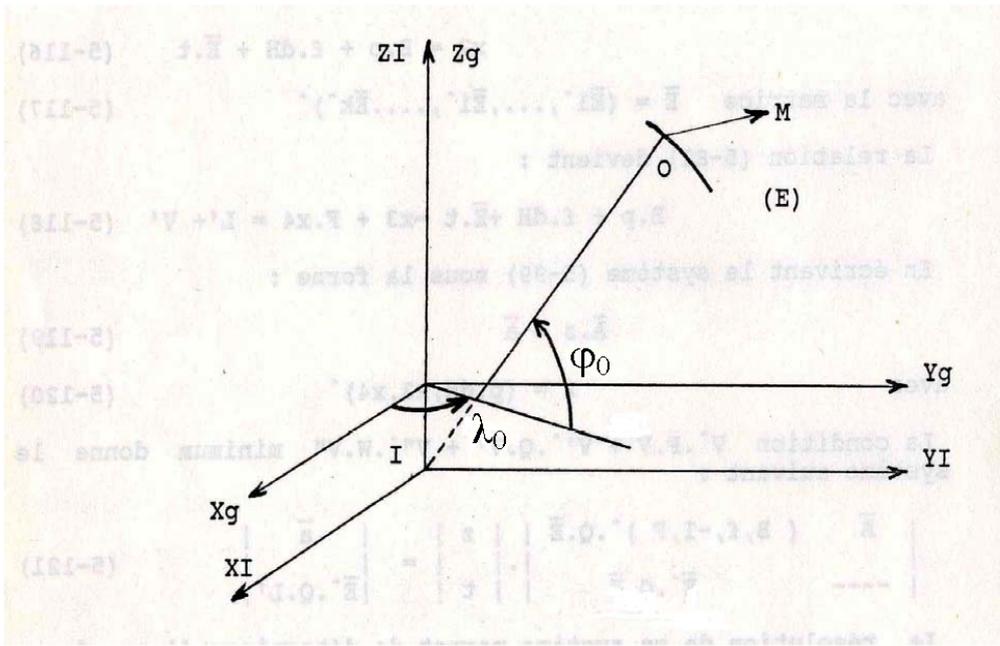


FIGURE 1. Les Repères  $(X_g, Y_g, Z_g)$  et  $I(XI, YI, ZI)$

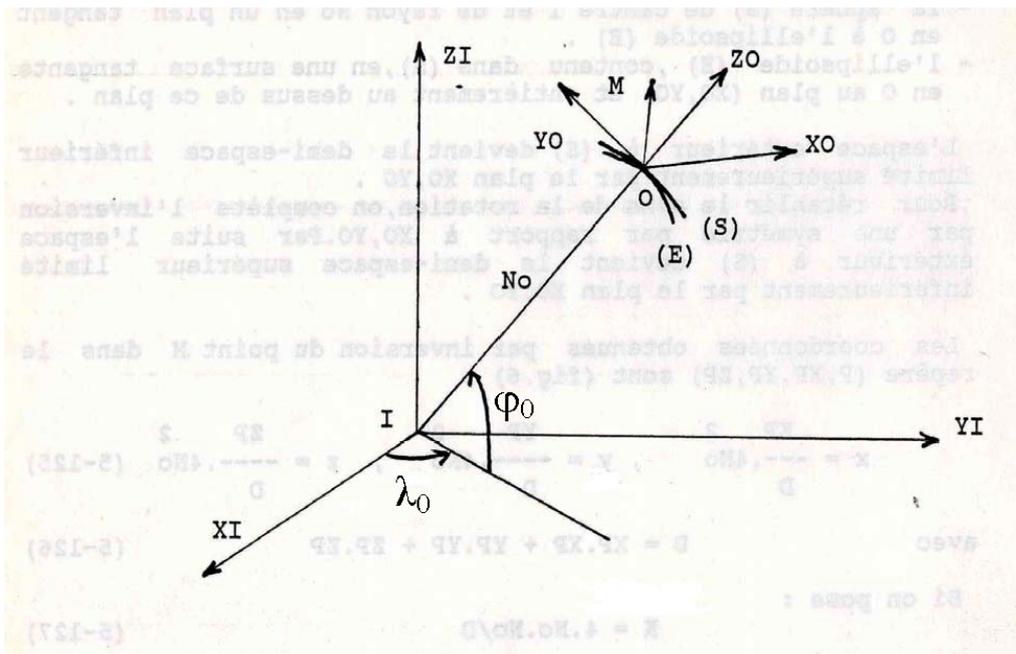


FIGURE 2. Le Repère Local en  $O (XO, YO, ZO)$

avec la matrice  $R_0$  donnée par :

$$R_0 = \begin{pmatrix} -\sin\lambda_0 & -\cos\lambda_0 \cdot \sin\varphi_0 & \cos\lambda_0 \cdot \cos\varphi_0 \\ \cos\lambda_0 & -\sin\lambda_0 \cdot \sin\varphi_0 & \sin\lambda_0 \cdot \cos\varphi_0 \\ 0 & \cos\varphi_0 & \sin\varphi_0 \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

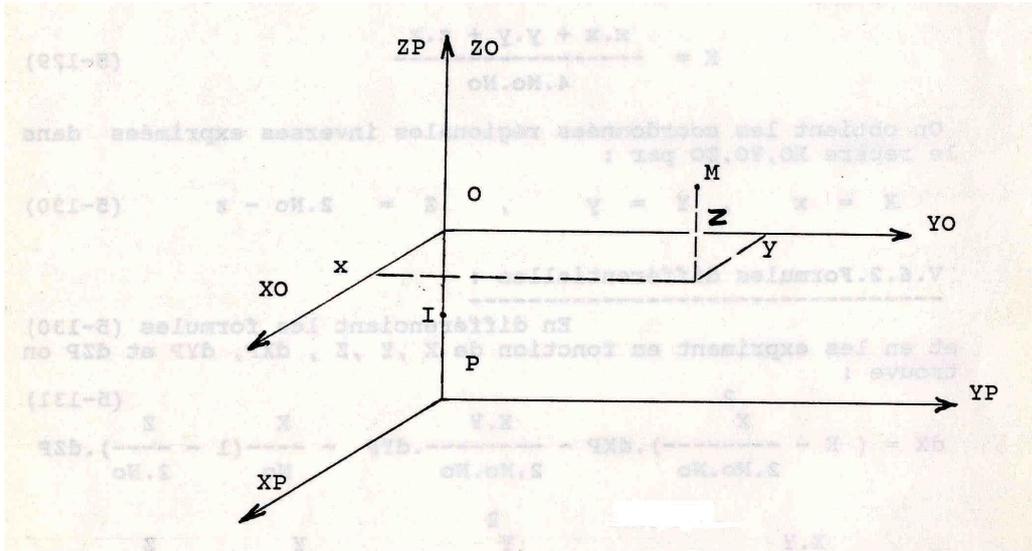


FIGURE 3. Le Centre d'inversion  $P$  l'antipode de  $O$

Soit  $P$  l'antipode de  $O$ , alors les coordonnées de  $M$  dans  $P(XP, YP, ZP)$  sont (Fig.3) :

$$M : \begin{cases} X_P = X_0 \\ Y_P = Y_0 \\ Z_P = Z_0 + 2.N_0 \end{cases} \quad (1.5)$$

On considère alors l'inversion de centre  $P$  et de puissance  $4.N_0^2$  qui transforme :

- la sphère ( $S$ ) de centre  $I$  et de rayon  $N_0$  en un plan tangent en  $O$  à l'ellipsoïde ( $E$ ),
- l'ellipsoïde ( $E$ ), contenu dans ( $S$ ), en une surface tangente en  $O$  au plan ( $XO, YO$ ) et entièrement au dessus de ce plan.

L'espace extérieur à ( $S$ ) devient le demi-espace inférieur limité supérieurement par le plan ( $XO, YO$ ).

Pour rétablir le sens de la rotation, on complète l'inversion par une symétrie par rapport au plan ( $XO, YO$ ). Par suite l'espace extérieur à ( $S$ ) devient le demi-espace supérieur limité inférieurement par le plan ( $XO, YO$ ).

Les coordonnées obtenues par inversion du point  $M$  dans le repère ( $P, XP, YP, ZP$ ) sont (Fig.3) :

$$x = \frac{X_P}{D} 4N_0^2, \quad y = \frac{Y_P}{D} 4N_0^2, \quad z = \frac{Z_P}{D} 4N_0^2 \quad (1.6)$$

avec :

$$D = X_P^2 + Y_P^2 + Z_P^2 \quad (1.7)$$

Si on pose :

$$K = \frac{4N_0^2}{D} \quad (1.8)$$

alors les coordonnées s'écrivent :

$$x = K.X_P, \quad y = K.Y_P, \quad z = K.Z_P \quad (1.9)$$

$K$  est appelé l'échelle tridimensionnelle. Il vérifie :

$$K = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{4N_0^2} \quad (1.10)$$

On obtient les coordonnées régionales inverses exprimées dans le repère  $O(OX, OY, OZ)$  par :

$$X = x, \quad Y = y, \quad Z = 2N_0 - z \quad (1.11)$$

## 2 Formules différentielles

En différenciant les formules (1.11) et en les exprimant en fonction de  $X, Y, Z$  et  $dX_P, dY_P, dZ_P$  on trouve :

$$\begin{aligned} dX &= \left( K - \frac{X^2}{2N_0^2} \right) dX_P - \frac{XY}{2N_0^2} dY_P - \frac{X}{N_0} \left( 1 - \frac{Z}{2N_0} \right) dZ_P \\ dY &= -\frac{XY}{2N_0^2} dX_P + \left( K - \frac{Y^2}{2N_0^2} \right) dY_P - \frac{Y}{N_0} \left( 1 - \frac{Z}{2N_0} \right) dZ_P \\ dZ &= \left( 1 - \frac{Z}{2N_0} \right) \left( \frac{X}{N_0} dX_P + \frac{Y}{N_0} dY_P \right) + (2 - K) \left( 1 - \frac{2Z}{N_0(2-K)} \right) dZ_P \end{aligned} \quad (2.1)$$

en négligeant le terme  $\frac{Z^2}{2N_0^2} dZ_P$  dans  $dZ$  et pour les points d'altitudes proches de  $O$ , on a  $Z \ll N_0$ .

On peut écrire ces relations sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix} = J \cdot \begin{pmatrix} dX_P \\ dY_P \\ dZ_P \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

avec :

$$J = \begin{pmatrix} \left( K - \frac{X^2}{2N_0^2} \right) & -\frac{XY}{2N_0^2} & -\frac{X}{N_0} \left( 1 - \frac{Z}{2N_0} \right) \\ -\frac{XY}{2N_0^2} & \left( K - \frac{Y^2}{2N_0^2} \right) & -\frac{Y}{N_0} \left( 1 - \frac{Z}{2N_0} \right) \\ \left( 1 - \frac{Z}{2N_0} \right) \frac{X}{N_0} & \left( 1 - \frac{Z}{2N_0} \right) \frac{Y}{N_0} & (2 - K) \left( 1 - \frac{2Z}{N_0(2-K)} \right) \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

La matrice covariance de  $X = (X, Y, Z)$  s'obtient à partir de celle de  $X_P = (X_P, Y_P, Z_P)$  par :

$$S_X^2 = J \cdot S_{X_P}^2 \cdot J^T \quad (2.4)$$

Comme le vecteur  $X_P = R_0^T \cdot X_g +$  vecteur constant, on a alors :

$$S_X^2 = J \cdot R_0^T \cdot S_{X_g}^2 \cdot R_0 \cdot J^T \quad (2.5)$$

Au vecteur de position Doppler  $X'$  on lui associe son image  $X''$  et on a aussi :

$$S_{X''}^2 = J'' \cdot R_0^T \cdot S_{X'}^2 \cdot R_0 \cdot J''^T \quad (2.6)$$

avec  $J''$  la matrice  $J$  calculée au point  $X''$ .

### 3 Détermination des paramètres de la transformation par la méthode des référentiels régionaux inverses

#### 3.1 Calcul des paramètres de la transformation

Au vecteur  $X$  on associe  $(X_0, Y_0, Z_0)_1$  et au vecteur  $X'$   $(X_0, Y_0, Z_0)_2$ , on peut écrire que :

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix}_1 + \begin{pmatrix} Tx \\ Ty \\ Tz \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m & rz & -ry \\ -rz & m & rx \\ ry & -rx & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix}_1 \quad (3.1)$$

$$T = (Tx, Ty, Tz)^T \quad \text{le vecteur translation dans } (O, XO, YO, ZO),$$

$$m \quad \text{l'échelle,} \quad (3.2)$$

$$\Omega = (rx, ry, rz)^T \quad \text{le vecteur rotation.}$$

En omettant les indices dans (3.1), on peut écrire :

$$\begin{pmatrix} dX_0 \\ dY_0 \\ dZ_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Tx \\ Ty \\ Tz \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m & rz & -ry \\ -rz & m & rx \\ ry & -rx & m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

En remplaçant  $dX_P, dY_P$  et  $dZ_P$  par  $dX_0, dY_0$  et  $dZ_0$  dans les formules (2.1) et en notant  $N = N_0$ , on trouve après un long calcul :

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix} = J \cdot \begin{pmatrix} Tx \\ Ty \\ Tz \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -Z - \frac{X^2 - Y^2 - Z^2}{2N} & Y & X(1 - \frac{Z}{N}) \\ -Z - \frac{Y^2 - X^2 - Z^2}{2N} & 0 & -X & Y(1 - \frac{Z}{N}) \\ -Y(1 - \frac{Z}{N}) & X(1 - \frac{Z}{N}) & 0 & Z + \frac{X^2 - Y^2 - Z^2}{2N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} rx \\ ry \\ rz \\ m \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

où la matrice  $J$  est donnée par (2.3), soit :

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix}_i = F_i \cdot x_4 = \begin{pmatrix} X - X'' \\ Y - Y'' \\ Z - Z'' \end{pmatrix}_i = l_i \quad (3.5)$$

avec :

$$x_4 = (Tx, Ty, Tz, rx, ry, rz, m)^T \quad (3.6)$$

En écrivant (3.6) pour les  $k$  points Doppler, on a avec les notations :

$$F = (F_1^T, \dots, F_i^T, \dots, F_k^T)^T$$

$$L = (l_1^T, \dots, l_i^T, \dots, l_k^T)^T \quad (3.7)$$

$$F \cdot x_4 = L + V \quad (3.8)$$

La solution de (3.8) par la méthode des moindres carrés est :

$$\bar{x}_4 = (F^T . F)^{-1} . F^T . L \quad (3.9)$$

Si  $P$  est la matrice poids de (3.8) on a alors :

$$P^{-1} = S_X^2 + S_{X''}^2 \quad (3.10)$$

La solution de (3.8) devient :

$$\bar{x}_4 = (F^T . P . F)^{-1} . F^T . P . L \quad (3.11)$$

### 3.2 Exemple numérique

Dans ce paragraphe, on présente un calcul des paramètres de la transformation (3.1). On effectue les calculs avec 5 points utilisant l'ellipsoïde de Clarke Français 1880 et des coordonnées fictives Doppler dans le système NWL9D. La matrice de poids est la matrice unité.

On étudie les cas suivants :

- 3 paramètres :  $T_x, T_y$  et  $T_z$ .
- 4 paramètres :  $T_x, T_y, T_z$  et  $m$ .
- 5 paramètres :  $T_x, T_y, T_z, m$  et  $r_z$ .
- 6 paramètres :  $T_x, T_y, T_z, r_x, r_y$  et  $r_z$ .
- 7 paramètres.

Numéro du Point	$X_g(m)$ $\varphi (gr)$	$Y_g(m)$ $\lambda (gr)$	$Z_g(m)$ $H(m)$
1	5 022 480.001	955 285.981	3 801 754.673
	40.9139 4833	11.9657 1090	638.790
2	5 081 670.850	771 787.642	3 765 024.278
	40.4550 1682	9.5954 4455	742.420
3	5 148 063.534	803 912.140	3 668 492.891
	39.2580 9749	9.8616 9173	1 315.150
4	5 220 829.640	772 127.642	3 569 820.799
	38.0627 4288	9.3474 4551	164.120
5	5 234 250.679	905 000.562	3 518 873.892
	37.4475 4070	10.8993 8173	128.260

**TABLE 1.** Les Coordonnées  $(X, Y, Z)_g$  et  $(\varphi, \lambda, H)_g$  terrestres

Numéro du Point	$X_g(m)$	$Y_g(m)$	$Z_g(m)$
	$\varphi (gr)$	$\lambda (gr)$	$H(m)$
1	5 022 231.531	955 276.421	3 802 185.031
	40.9155 2348	11.9661 7209	679.016
2	5 081 422.741	771 778.561	3 765 455.314
	40.4566 2110	9.5957 9479	781.280
3	5 147 814.642	803 903.721	3 668 923.772
	39.2597 5527	9.8620 5931	1 350.410
4	5 220 580.276	772 118.953	3 570 251.041
	38.0644 5433	9.3477 8192	195.249
5	5 234 001.930	904 991.742	3 519 305.014
	37.4492 8110	10.8997 8550	159.325

**TABLE 2.** Les Coordonnées  $(X', Y', Z')$  et  $(\varphi', \lambda', H')$  Doppler

Les coordonnées du point O sont :

$$\varphi_0 = 39.0000 \text{ gr}; \quad \lambda_0 = 10.0000 \text{ gr}$$

Numéro du Point	$X(m)$	$Y(m)$	$Z(m)$	$H - Z(m)$
1	157 880.386	192 570.801	626.161	12.63
2	-32 663.491	145 358.343	735.021	7.40
3	-11 317.642	25 777.233	1 314.783	0.37
4	-54 098.724	-93 417.174	160.953	3.17
5	75 053.496	-154 694.354	119.510	8.75

**TABLE 3.** Les Coordonnées régionales inverses  $(X, Y, Z)$  transformées de  $(X, Y, Z)$  terrestres

Les résultats du tableau 3 montrent qu'en s'éloignant du point origine O, les différences  $H - Z$  augmentent.

Les résultats du tableau 5 montrent que les composantes de la translation restent stables pour les 5 cas.

Les composantes  $(-30.10 \text{ m}, -494.45 \text{ m}, -45.57 \text{ m})$  sont données dans le référentiel local géodésique du point origine  $O(XO, YO, ZO)$  (Fig.3).

Numéro du Point	$X''(m)$	$Y''(m)$	$Z''(m)$	$H' - Z''(m)$
1	157 908.504	193 063.399	687.238	-8.22
2	-32 633.382	145 851.548	792.323	-11.04
3	-11 268.946	26 271.577	1 362.292	-11.88
4	-54 067.948	-92 922.150	198.251	-3.00
5	75 083.233	-154 198.522	153.648	5.68

**TABLE 4.** Les Coordonnées régionales inverses ( $X''$ ,  $Y''$ ,  $Z''$ ) transformées de ( $X'$ ,  $Y'$ ,  $Z'$ ) terrestres

Valeurs des paramètres et des écarts-types	Nbre des paramètres				
	3	4	5	6	7
$T_x(m)$	-30.104	-30.158	-30.190	-30.135	-30.190
$\sigma_{T_x}(m)$	0.447	0.454	0.459	0.452	0.459
$T_y(m)$	-494.451	-494.497	-494.460	-494.407	-494.454
$\sigma_{T_y}(m)$	0.447	0.452	0.459	0.454	0.459
$T_z(m)$	-45.567	-45.564	-45.564	-45.541	-45.537
$\sigma_{T_z}(m)$	0.447	0.447	0.447	0.474	0.474
$rx(dmgr)$				0.814	0.822
$\sigma_{rx}$				2.239	2.239
$ry(dmgr)$				0.092	0.056
$\sigma_{ry}$				3.786	3.787
$rz(dmgr)$			0.890	0.892	0.892
$\sigma_{rz}$			1.839	1.839	1.839
$m(10^{-6})$		0.202	0.202		0.203
$\sigma_m$		0.289	0.289		0.289

**TABLE 5.** Les paramètres de la transformation

## Références

- [1] **H.M. Dufour.** 1986a. Les référentiels régionaux inverses : une synthèse possible entre la géodésie Tri et Bi-dimensionnelle. Cours de géodésie appliquée. CERN, 14-18 Avril.
- [2] **H.M. Dufour.** 1986b. Etude de l'utilisation de la projection stéréographique pour la comparaison de 2 réseaux tridimensionnels. Manuscrit. Février.
- [3] **H.M. Dufour.** 1971. La projection stéréographique de la sphère et de l'ellipsoïde. Sept, IGN/2, 26804.
- [4] **A. Ben Hadj Salem.** 1986. La Combinaison des Données Doppler et les Observations Terrestres Classiques dans la Compensation des Réseaux Géodésiques. Mémoire de fin d'études présenté en octobre 1986 pour l'obtention du diplôme d'Ingénieur Géographe Civil de l'Ecole Nationale des Sciences Géographiques (ENSG/IGN France).