Uma crítica à solução de Otelbaev ao sexto problema do milênio (equações de Navier-Stokes)

Valdir Monteiro dos Santos Godoi
valdir.msgodoi@gmail.com

No dia 28/10/2015, uma quarta-feira, o professor Odilon Otávio me vê com cinco livros sobre as equações de Navier-Stokes no balcão da biblioteca do IME-USP e faz uma brincadeira comigo:

– Você quer ficar milionário é?

Eu lhe respondo: – Ah, eu quero (risos). – Só estou esperando!

E ele completa: – Mas você entendeu a minha pergunta? Sabe do que eu estou falando? Você entendeu por que eu fiz a pergunta?

Lá vamos nós: – Claro que sim, o problema do milênio, sobre as equações de Navier-Stokes. Eu resolvi o problema.

E etc.

A conversa chegou na solução dada pelo professor cazaquistanês Mukhtarbai Otelbaev ao mesmo problema, publicada em russo [1], e eu lhe digo que a solução dele não é uma solução completa para o problema do milênio [2], embora possa ser uma solução para um caso particular das equações de Navier-Stokes.

– Vê só – disse eu – todos estes livros. Tudo aqui é Navier-Stokes (onde se inclui dois Roger Temam e um Peter Constantin), mas nenhum deles traz uma solução para o problema do milênio, uma solução completa. São páginas e mais páginas de Navier-Stokes, aqui está cheio de Navier-Stokes, mas não têm o problema do milênio.

O professor Odilon (mais ou menos assim): – Mas o que o professor errou? O artigo dele foi publicado. Tem alguém olhando isso? Alguém leu o artigo dele e encontrou um erro? etc.

O matemático australiano (e reconhecidamente genial) Terence (Terry) Tao, de descendência chinesa, medalha Fields de 2006, encontrou um contraexemplo para a solução de Otelbaev, mas mesmo sem recorrer ao seu trabalho [3] quero expor meus próprios motivos para não concordar com a solução do matemático cazaquistanês.

Resumidamente falando, Otelbaev tratou do caso (B) do problema, existência e suavidade de soluções espacialmente periódicas para as equações de Navier-Stokes. Por um lado, permitiu o uso de densidade de força externa não nula, $f \neq 0$, periódica ou não, o que é uma ampliação e sofisticação do problema original, mas por outro lado limitou a velocidade inicial a $u^0 = 0$ e o domínio da solução ao cubo $Q \equiv (0, 2\pi)^3$ e tempo $(0, a), a > 0$, ao invés do domínio mais geral $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$. Além disso, o período espacial das funções velocidade e pressão que utilizou foi 2π, ao invés de 1, conforme o problema original, suas funções são de classe L_2 em $\Omega = (0, a) \times (0, 2\pi)^3$, sem precisar se são também de classe C^∞, e utilizou uma condição adicional para a pressão, $\int_Q p(t, x)dx = p_0 = const \geq 0$, um recurso que talvez esconda outras soluções possíveis para a pressão. Otelbaev também usou apenas o coeficiente de viscosidade $\nu = 1$, ao invés de qualquer $\nu > 0$.

Isto se verifica lendo-se o resumo em inglês ao final do artigo [1], conforme comentei com o professor Odilon, sem entrar em mais detalhes, agora descritos. Não fiz a leitura em russo, nem parece existir uma tradução completa para o inglês, infelizmente.

Em minha opinião, limitar a solução de tão importante problema à velocidade inicial nula, $u^0 = 0$, e concluir que a solução é única para todo f (pertencente a $L_2(\Omega)$), é de extrema falta de generalidade. Se voltarmos ao problema oficial, caso (B), que pede para ser $f = 0$ e não impõe nenhuma condição inicial e de contorno para a pressão, exceto sua periodicidade espacial de período unitário, nossa solução de escolha para a velocidade é trivial, $u = 0$, e a pressão obtida de $\nabla p = 0$ é uma constante, inclusive zero, podendo ser acrescida de alguma função do tempo bem comportada (limitada, contínua, C^∞), i.e., $p = p_0 + \theta(t)$. Essa seria também uma solução (única ou não) para o caso (A) do problema do milênio, *à moda de Otelbaev*, que escolheu uma única e simples velocidade inicial $u^0 = 0$.

Entendo que uma adequada solução para os casos (A) e (B) do problema referente às equações de Navier-Stokes deve levar em consideração todas as possíveis velocidades iniciais $u^0 \in C^\infty$, dentre outras condições necessárias, e não apenas uma única função u^0 específica.

A solução que eu proponho refere-se ao caso (C), *breakdown solutions*, e pode ser encontrada em [4], com seu desenvolvimento gradativo em [5]. Ela obedece a cada quesito mencionado na descrição do respectivo problema [2], e não pressupõe unicidade de soluções.

Referências

[1] Otelbaev, Mukhtarbai, *Existence of a Strong Solution of the Navier-Stokes Equation*, "Matematitcheski Jurnal", **13**, 4 (50) (2013).
http://www.math.kz/images/journal/2013-4/Otelbaev_N-S_21_12_2013.pdf

[2] Fefferman, Charles, *Existence and Smoothness of the Navier-Stokes Equation*, in http://www.claymath.org/sites/default/files/navierstokes.pdf (2000).

[3] Tao, Terence, *Finite time blowup for an averaged three-dimensional Navier-Stokes equation*, available in http://arxiv.org/abs/1402.0290 (2014).

[4] Godoi, Valdir M. S., *Breakdown of Navier-Stokes Solutions – Bounded Energy*, available in http://vixra.org/abs/1508.0152 (2015).

[5] Godoi, Valdir M. S., *Breakdown of Navier-Stokes Solutions*, available in http://vixra.org/abs/1505.0083 (2015).