知能と情報（日本知能情報ファジィ学会誌）Vol.21, No.4, pp.567－576（2009）

原著論文

証拠理論における条件則の一般化と証拠推論の新しい解釈†

キマラ ヴィラニー *1・山田 耕一 *2・畦原 宗之 *2

本稿では，最近提案された証拠理論における条件則の一般化について論じ，不確実な信念を条件とする新たな一般化条件則を提案する．また，既存の証拠推論が本論文で提案する一般化条件則によって解釈可能であることを示す．

最近キマラらによって提案された条件則は，以下の３つの要件を満足する．*a*）条件付基本確率の焦点要素は条件となる集合の部分集合に限られる，*b*）空集合でない任意の条件に対して条件付基本確率は定義される，*c*）条件が全体集合である条件付基本確率は条件なしの基本確率に等しい．これらの３つの要件すべてを満足する既存の条件則は存在しないが，証拠理論が人間の主観における不確実性を表現するとすれば，これらの要件は自然で妥当な要件と考えられる．また，条件に信頼度を導入することで，*a*）の要件を緩和する一般化条件則も提案されている．

本論文では，まず，キマラらの一般化条件則をさらに一般化する．本稿で提案する一般化条件則は，条件として基本確率の形で与えられる信念を用いる．同様な条件則は Ichihashi らや Dubois らによっても提案されているが，これらの一般化条件則はベイズ規則およびジェフリー規則の一般化であるため上記の要件*b*）を満たさない．本稿で提案する条件則は*a*）の要件を緩和したのみで，*b*）と*c*）の要件を共に満たす．

さらに，本論文では既存の証拠推論と一般化条件則の関係について論じる．証拠推論はベイズ推論の拡張として解釈することができるが，新たに，本稿では Smets らの移転可能信念モデル（Transferable Belief Model）における証拠の結合として解釈できること，および本稿で提案する一般化条件則によって解釈可能であることを示す．

キーワード：証拠理論，Dempster－Shafer 理論，条件則，一般化条件則，証拠推論

１．はじめに

本論文では，著者らによって最近新しく提案された証拠理論（Dempster-Shafer理論[1]）における条件則[2, 3]を一般化し，基本確率によって表現される不確実な信念を条件とする新しい条件則を提案する[4]．また，知識の不確実性を証拠理論によって表現する推論（証拠推論）についても論じ，既存の証拠推論の１つは本論文が提案する一般化された条件則として解釈可能であることを示す．

証拠理論の条件則は，Dempster 条件則[1]を始めとして数多く提案・研究されている[5-20]．本論文で提案する条件則と同様，条件自身が不確実性を含む場合の条件則も Ichihashi ら[8]や Dubois ら[11]により提案されている．事前の信念と条件の定義される全体集合が異なる場合の条件則に関する研究もある[20]．

我々は，前報[3]において，３つの要件を満たす条件則を新たに提案した．３つの要件とは，*a*)条件付基本確率の焦点要素は条件として与えられる集合の部分集合に限られる[19]，*b*)条件が空集合でない限り条件付基本確率は定義される，*c*)条件が全体集合である条件付基本確率は条件なしの基本確率に等しい，である．*a*)は与えられた条件を完全に信頼することを意味し，*b*)は証拠理論を頻度に関する不確実性ではなく，人間の信念の度合いを扱う理論とする解釈[16,21]に起因し，*c*)は全体集合が可能なものすべてを含むという事実から得られる．また，*a*)の条件を緩め，条件に[0,1]区間内の値を取る信頼度を導入した条件則も提案した．

本論文ではさらに拡張を一歩進め，[8,11]と同様に条件が基本確率で表現される信念である場合の条件則を提案する．ただし，[8]や[11]で提案された条件則はすべてベイズ規則の拡張である Jefferey 規則[22]の証拠理論へのさらなる拡張と理解できるが，本稿で提案する規則は上記要件 *b*)を満たすために Jeffrey 規則

† Generalization of Conditioning and New Interpretation of Evidential Reasoning
Vilany KIMALA, Koichi YAMADA and Muneyuki UNEHARA
＊1 長岡技術科学大学 制御・情報工学専攻
Nagaoka University of Technology, Infrmation Science and Control Engineering
＊2 長岡技術科学大学 経営情報系
Nagaoka University of Technology, Management and Information Systems Science

の拡張ではない．

不確実性を表す測度の条件則は，不確実な知識を表現するためによく用いられる．証拠理論によって不確実性を表現する証拠推論は，ルールを結合形式で表現する方法[15,23-31]と条件形式で表現する方法[32-37]に大別される．一般には，条件形式で表現されたルールの方が人間にとって理解しやすく，知識のデータ量が少なくてすむ利点がある[32,35]．本論文では，条件形式で表現されたルールを用いて，ベイズ推論を拡張する形で提案された既存の推論法[33]について議論し，その推論は，Smets らの移転可能信念モデル[38]における証拠の結合として，および本論文で提案する一般化条件則として解釈可能であることを示す．

本論文は，本節以降，２節で証拠理論と[3]で提案された条件則について簡単に述べる．[3]では明らかにされていない性質についても議論する．３節では，不確実な信念を条件とする条件則への一般化について述べ，類似の既存条件則[8,11]と比較する．４節では，条件形式でルールを表現する証拠推論[33]の解釈について論じ，既存の解釈の他，３節で提案した条件則による解釈が可能であることを示す．

本稿では，A が B の部分集合であること，真部分集合であることを，それぞれ $A \subseteq B$，$A \subset B$ で示す．$\bar{B}$ は B の補集合である．また，基本確率 $m(\bullet)$ およびそれによって定義される信念測度，妥当性測度を事前信念，条件 B に対する条件付基本確率 $m(\bullet\,|B)$ およびそれによって定義される信念測度あるいは妥当性測度を事後信念と呼ぶ．

2．証拠理論と条件則

本稿で必要となる証拠理論の基礎と，著者らにより提案された条件則[2,3]を簡単にまとめる．

2.1　証拠理論

U を有限離散な全体集合（識別フレーム）とする．証拠理論では，以下の性質を満足する関数 $m : 2^U \to [0,1]$ を U 上の基本確率（または質量関数）と呼ぶ．

$$m(\emptyset) = 0 \tag{1}$$

$$\sum_{A \in 2^U} m(A) = 1 \tag{2}$$

ただし，2^U は U のべき集合である．$m(A) > 0$ を満たす A は焦点要素と呼ばれる．$m(A)$ は U を定義域とする変数値が A 内にあると信じる程度だが，A の部分集合や要素については全く無知で，厳密に A と主張する信念の度合いを表す．

上記の基本確率を用いて信念測度と妥当性測度が，それぞれ次のように定義される．

$$Bel(A) = \sum_{X \subseteq A} m(X) \tag{3}$$

$$Pl(A) = \sum_{X \cap A \neq \emptyset} m(X) \tag{4}$$

$m(\bullet)$，$Bel(\bullet)$，$Pl(\bullet)$ はそれぞれ相互に変換可能な関数である．

２つのそれぞれ独立な情報源から異なる信念 $m^{(1)}(\bullet)$，$m^{(2)}(\bullet)$ が得られるとき，これらを１つに結合するための Dempster 結合則が提案されている．

$$m_D(A) = \frac{\sum_{A = X \cap Y} m^{(1)}(X) \bullet m^{(2)}(Y)}{\sum_{X \cap Y \neq \emptyset} m^{(1)}(X) \bullet m^{(2)}(Y)} \tag{5}$$

ただし，$m_D(\emptyset) = 0$ で，分母が０のときは未定義である．

また，前述のように $m(\bullet) = m^{(1)}(\bullet)$ を事前信念とし，$m^{(2)}(B) = 1$ とすれば，上記の結合によって次の Dempster 条件則が得られる．

$$m_D(A \mid B) = \frac{\sum_{A = X \cap B} m(X)}{\sum_{X \cap B \neq \emptyset} m(X)} \tag{6}$$

なお，証拠理論の詳細は[1,39]を参照されたい．

2.2　キマラ・山田・畦原の条件則

キマラらは，事前信念 $m(\bullet)$ と100％確かな条件 B が与えられるとき，事後信念（条件則）$m(A \mid B)$ は，次の３つの要件を満足すべきとした[2,3]．

【要件１】$A \cap \bar{B} \neq \emptyset$ の時，$m(A \mid B) = 0$．

【要件２】条件が空の場合を除き，条件則は定義される．

【要件３】$m(A \mid U) = m(A)$．

それぞれの要件の意味は，「はじめに」で述べた通りである．よく知られる既存条件則の中で，３つの要件すべてを満たすものは存在しない．既存条件則がどの要件を満たし，どれを満たさないかについては前報[3]を参照されたい．

条件則は，上記の要件に基づき，次の質量再配置によって得る．

(a) 事前信念の焦点要素 X と条件 B が矛盾しない（$X \cap B \neq \emptyset$）場合には，X に制約 B を課し，$X \cap B$ に質量 $m(X)$ を再配置する．

(b) X と B が矛盾する（$X \cap B \neq \emptyset$）場合には，$m(X)$ を

一旦完全な無知を意味する U に割りあてる．その上で，条件 B による制約を課し，$U \cap B = B$ に質量 $m(X)$ を再配置する．

上記(a)，(b)の質量再配置を行い，事後信念を得る式は次で与えられる．

$$m_K(A \mid B) = \begin{cases} \sum_{A = X \cap B} m(X), \ if\ A \neq \emptyset, A \subset B, \\ \sum_{B \subseteq X} m(X) + \sum_{X \cap B = \emptyset} m(X), \ if\ A = B, \\ 0, \ otherwise\ . \end{cases} \quad (7)$$

ただし，$B \neq \emptyset$．

$m_K(A \mid B)$ が基本確率であること，事前信念と条件 B が全く矛盾しない(すべての焦点要素 X に対して $X \cap B \neq \emptyset$)場合に Dempster 結合則と一致することは容易に示される．また，この条件則が上述の 3 つの要件を満たすこと，および次の性質をもつことも示されている[3]．

$$Pl_K(A \mid B) \geq Pl_D(A \mid B) \geq Bel_D(A \mid B) \geq Bel_K(A \mid B) \quad (8)$$

ただし，$Bel_D(A \mid B)$，$Pl_D(A \mid B)$ はそれぞれ Dempster 条件則による条件付信念測度，妥当性測度で，$Bel_K(A \mid B)$，$Pl_K(A \mid B)$ は提案則によるものである．

前述の要件 1 は条件 B を完全に信じることを意味するが，条件に信頼度 $\lambda (0 \leq \lambda \leq 1)$ を導入することによって $m_K(A \mid B)$ を一般化した条件則も提案されている．

$$m_\lambda(A \mid B) = \begin{cases} \sum_{A = X \cap B} \lambda m(X) + (1-\lambda) m(A), \\ \qquad \text{if } B \supset A \neq \emptyset, \\ \sum_{A = B \subseteq X} \lambda m(X) + (1-\lambda) m(B) + \sum_{X \cap B = \emptyset} \lambda m(X), \\ \qquad \text{if } A = B, \\ (1-\lambda) m(A), \ \text{if } A \not\subset B, A \neq B, A \neq \emptyset \\ 0, \ \text{if } A = \emptyset. \end{cases} \quad (9)$$

ただし，$B \neq \emptyset$．

$\lambda = 1$ のとき，$m_\lambda(A \mid B)$ は $m_K(A \mid B)$ に等しい．また，$\lambda < 1$ のとき $m_\lambda(A \mid B)$ は要件 1 を満たさないが，要件 2 と 3 は満たすことが示されている．

【例題 1】ある車メーカの販売車種は，$U = \{a4s, a2h, b4s, b2h, b2c, c4S, c2c, d2u, d4u\}$ の 9 種とする．車種の 1 文字目(a, b, d, d)はブランド名，2 文字目の数字はドア数，3 番目(s, h, c, u)はタイプ(セダン, ハッチバック, クーペ, SUV)を表す．セールスマンがある顧客の購入車種として，ブランド a か c(0.4)，b(0.3)，2 ドア(0.2)，不明(0.1)の感触を得た．その後，その顧客からの電話でブランド $b = \{b4s, b2h, b2c\}$ に決めたとの伝言があった．この場合，事前信念は次のようになる．

$$m(\{a4s, a2h, c4s, c2c\}) = 0.4, \ m(b) = 0.3,$$
$$m(\{a2h, b2h, b2c, c2c, d2u\}) = 0.2, \ m(U) = 0.1.$$

伝言後の事後信念は Dempster 条件則を用いると次のように得られる．

$$m_D(b \mid b) = \frac{0.3 + 0.1}{0.3 + 0.2 + 0.1} = 0.67,$$

$$m_D(\{b2h, b2c\} \mid b) = \frac{0.2}{0.3 + 0.2 + 0.1} = 0.33.$$

キマラらの条件則の場合は(7)式より，

$$m_K(b \mid b) = (0.3 + 0.1) + 0.4 = 0.8,$$
$$m_K(\{b2h, b2c\} \mid b) = 0.2.$$

また，伝言 b の信頼度が $\lambda = 0.7$ とすると，

$$m_\lambda(b \mid b) = 0.7 \times 0.8 + (1 - 0.7) \times 0.3 = 0.65,$$
$$m_\lambda(\{b2h, b2c\} \mid b) = 0.7 \times 0.2 = 0.14,$$
$$m_\lambda(\{a4s, a2h, c4s, c2c\} \mid b) = (1 - 0.7) \times 0.4 = 0.12,$$
$$m_\lambda(\{a2h, b2h, b2c, c2c, d2u\} = (1 - 0.7) \times 0.2 = 0.06,$$
$$m_\lambda(U \mid b) = (1 - 0.7) \times 0.1 = 0.03.$$

2.3　キマラらの条件則の性質

ここでは，文献[2,3]では触れられていない $m_K(A \mid B)$ および $m_\lambda(A \mid B)$ の性質について明らかにする．

まず，(7)式で定義された $m_K(A \mid B)$ は次のように簡略化して書くことが可能である．

$$m_K(A \mid B) = \sum_{A = X \cap B} m(X) + \sum_{\substack{X \cap B = \emptyset \\ A = B}} m(X) \quad (10)$$

ただし，$A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$ で，$m_K(\emptyset \mid B) = 0$．

また，(9)式で定義される $m_\lambda(A \mid B)$ については，次の定理が成立する．

【定理 1】$m_\lambda(A \mid B)$ は $m_K(A \mid B)$ と $m(A)$ を線形補完する次式によって与えられる．

$$m_\lambda(A \mid B) = \lambda m_K(A \mid B) + (1 - \lambda) m(A) \quad (11)$$

証明：$\lambda = 1$ のとき $m_\lambda(A \mid B) = m_K(A \mid B)$ であるのは明らか．$\lambda = 0$ のとき $m_\lambda(A \mid B) = m(A)$ も明らか．また，$A = \emptyset$ のとき(11)式が成り立つのも明らか．それ以外の時，(7)式より，

$$\lambda m_K(A\mid B)+(1-\lambda)m(A)$$
$$=\begin{cases}\sum_{A=X\cap B}\lambda m(X)+(1-\lambda)m(A), & if\ A\neq\emptyset, A\subset B,\\ \sum_{B\subseteq X}\lambda m(X)+\sum_{X\cap B=\emptyset}\lambda m(X)+(1-\lambda)m(A), & if\ A=B,\\ (1-\lambda)m(A), & otherwise.\end{cases}$$

が得られるが，これは(9)式に等しい．（証明終）

文献[1]では，情報源が完全に信頼できない場合に，焦点要素の質量から信頼できない割合に相当する量を差し引き，差し引いた量を全体集合に与える方法が提案されている．これを割引き(discounting)と呼ぶ．上記定理では，$m_K(A\mid B)$から条件 B を信頼できない割合$(1-\lambda)$の質量を差し引き，差し引いた割合に相当する質量を，全体集合を条件とする $m(A\mid U)=m(A)$で埋め合わせる．本定理は，条件則における一種の割引き(discounting)と解釈することができよう．

なお，$m_K(A\mid B)$はベイズ条件則の一般化ではない．(7)式より，事前信念がベイジアン(焦点要素がすべてシングルトン)でも，事後信念がベイジアンとは限らないことがわかる．つまり，事前信念がベイジアンでも，$Pl_K(A\mid B)\neq P(A\mid B)$，$Bel_K(A\mid B)\neq P(A\mid B)$である．

$m_K(A\mid B)$がベイズ条件則の一般化でない性質は，事前信念 m と条件 B が完全に矛盾する場合(すべての焦点要素 X に対して $X\cap B=\emptyset$，つまり$Pl(B)=0$)でも，B を100%信頼して $m_K(A\mid B)$を未定義にしないこと(要件１，要件２)の必然的結果である．ベイズ条件則では，$P(B)=0$ のとき $P(A\mid B)$が未定義である一方，キマラらの条件則では $Pl(B)=0$ のとき $m_K(B\mid B)=1$ であり，$Pl_K(B\mid B)=Bel_K(B\mid B)=1$ が得られる．

また，$m_K^B(A)=m_K(A\mid B)$, $m_K(A\mid B\mid C)=m_K^B(A\mid C)$と定義しよう．$m_K(A\mid B\mid C)$は $m_K(A\mid B)$を事前信念とみなし，さらに条件 C を与えたものである．このとき，本論文で提案する条件則は結合則を満たさない．つまり，$m_K(A\mid B\mid C)\neq m_K(A\mid C\mid B)\neq m_K(A\mid B\cap C)$である．これは，事前信念と条件の２つの情報に対する信頼の非対称性に起因する．事前信念(の焦点要素 X)と条件が矛盾する場合，要件１によって条件を100%信頼して(事前信念を信頼しない)行う質量再配置がこの性質を生む．

なお，Dempster 条件則は，焦点要素 X と条件 B が矛盾しない場合に双方を100％信頼し(信頼の対称性)，矛盾する場合には両方の情報を棄却する(不信頼の対称性)．Dempster 条件則のこの信頼と不信頼の対称性は結合則を満たす利点を与えるが，不信頼の対称性が要件２を満たさない原因となっている．

3．信念を条件とする条件則

3.1　キマラらの条件則の拡張

前節の条件則を，Ichihashi ら[8]や Dubois ら[11]のように，基本確率 m_b で表現される信念を条件とする条件則に拡張する．この場合の質量再配置は，先の(a),(b)に準じて次のように行う．

(a') 事前信念の焦点要素 X と条件となる基本確率 m_b の焦点要素 Y が矛盾しない($X\cap Y\neq\emptyset$)場合には，確信度 $m_b(Y)$で X に制約 Y を課し，$X\cap Y$ に質量 $m(X)\bullet m_b(Y)$を再配置する．

(b') X と Y が矛盾($X\cap Y\neq\emptyset$)する場合には，質量 $m(X)$を一旦完全な無知を意味する U に割りあてる．その上で，確信度 $m_b(Y)$で制約 Y を課し，$U\cap Y=Y$ に質量 $m(X)\bullet m_b(Y)$を再配置する．

上述の再配置によって得られる事後信念を $m_{KYU}(A\mid m_b)$で表現すると次のように書ける．

$$m_{KYU}(A\mid m_b)=\sum_{A=X\cap Y}m(X)\bullet m_b(Y)+\sum_{\substack{X\cap Y=\emptyset\\ A=Y}}m(X)\bullet m_b(Y)$$

上式右辺の第１項は(a')によるものであり，第２項は(b')によるものである．(10)式を用いて右辺を整理すると次式が得られる．

$$m_{KYU}(A\mid m_b)=\sum_{Y}m_b(Y)\left(\sum_{A=X\cap Y}m(X)+\sum_{\substack{X\cap Y=\emptyset\\ A=Y}}m(X)\right)\quad(12)$$
$$=\sum_{Y\subseteq U}m_K(A\mid Y)\bullet m_b(Y)$$

なお，$m_{KYU}(\emptyset\mid m_b)=0$ は明らかで，すべての $A\subseteq U$ に対して $m_{KYU}(A\mid m_b)$の和を取ると１になることも明らかである．

式(12)は，不確実な信念 m_b による事後信念は，条件 Y を持つ $m_K(A\mid Y)$の $m_b(Y)$による重み付き和によって与えられることを示す．

さて，以下の定理より，$m_{KYU}(A\mid m_b)$は $m_\lambda(A\mid B)$の自然な拡張であることがわかる．

【定理２】条件 B の信頼度が λ であることを，$m_b(B)=\lambda$，$m_b(U)=1-\lambda$ の信念で表す．このとき，$m_{KYU}(A\mid m_b)=m_\lambda(A\mid B)$である．

証明：(11)式を用いると次のように証明される．

$$m_\lambda(A\mid B)=\lambda m_K(A\mid B)+(1-\lambda)m(A)$$
$$=\lambda m_K(A\mid B)+(1-\lambda)m_K(A\mid U)=m_{KYU}(A\mid m_b)$$

（証明終）

また，$m_{KYU}(A\,|\,m_b)$は2.2節の要件２と３に相当する次の条件を満足する．

(1)任意の信念 m_b に対し $m_{KYU}(A\,|\,m_b)$は未定義とならない(要件２に対応する条件)．

(2) $m_b(U)=1$ であるとき，$m_{KYU}(A\,|\,m_b)=m(A)$ (要件３に対応する条件)．

【定理３】$m_{KYU}(A\,|\,m_b)$は上述の条件(1)と(2)を満足する．

証明：条件(1)：$m_K(A\,|\,B)$は B が空でない限り未定義にならない．従って，(11)式より任意の A，m_b に対して $m_{KYU}(A\,|\,m_b)$を計算することができのは明らか．

条件(2)：$m_b(U)=1$ のとき，(11)式より $m_{KYU}(A\,|\,m_b)=m_K(A\,|\,U)=m(A)$．(証明終)

【例題２】例題１で与えられた事前信念に対し，不確かな事後情報として $m_b(b)=0.7$，$m_b(t)=0.3$が与えられたとする．ただし，b はブランド b の車種の集合，t は２ドアの車種の集合である．$m_K(\bullet\,|\,b)$は例題１のとおり得られ，$m_K(\bullet\,|\,t)$は次のようになる．

$m_K(\{a2h\}\,|\,t)=0.4$，$m_K(\{b2h,b2c\}\,|\,t)=0.3$，

$m_K(t\,|\,t)=0.2$，$m_K(\{d2u\}\,|\,t)=0.1$．

(12)式を用いると，$m_{KYU}(\bullet\,|\,m_b)$は以下のように得られる．

$m_{KYU}(b\,|\,m_b)=0.8\times 0.7=0.56$,

$m_{KYU}(\{b2h,b2c\}\,|\,m_b)=0.2\times 0.7+0.3\times 0.3=0.23$,

$m_{KYU}(\{a2h\}\,|\,m_b)=0.4\times 0.3=0.12$,

$m_{KYU}(t\,|\,m_b)=0.2\times 0.3=0.06$,

$m_{KYU}(\{d2u\}\,|\,m_b)=0.1\times 0.3=0.03$.

3.2 他の不確実な条件を持つ条件則との比較

Ichihashi らは本論文と同様に不確実な信念を条件とする３つの条件則を提案した[8]．

a) 妥当条件則(Plausible conditioning)

$$m_{pl}(A\,|\,m_b)=\sum_{A=X\cap Y}\frac{m(X)\bullet m_b(Y)}{1-\sum_{X\cap Y=\varnothing}m(X)} \tag{13}$$

ただし，$m_{pl}(\varnothing\,|\,m_b)=0$．また，$m_b$ の任意の焦点要素 Y に対して $\sum_{X\cap Y=\varnothing}m(X)<1$ が仮定され，満たされないときは未定義である．

b) 信頼条件則(Credible conditioning)

$$m_{cr}(A\,|\,m_b)=\sum_{A\subseteq Y}\frac{m(A)\bullet m_b(Y)}{1-\sum_{X\not\subset Y,X\neq Y}m(X)} \tag{14}$$

ただし，$m_{cr}(\varnothing\,|\,m_b)=0$．また，$m_b$ の任意の焦点要素 Y に対して $\sum_{X\not\subset Y,X\neq Y}m(X)<1$ が仮定され，満たされないときは未定義である．

c) 可能条件則(Possible conditioning)

$$m_{po}(A\,|\,m_b)=\sum_{A\cap Y\neq\varnothing}\frac{m(A)\bullet m_b(Y)}{1-\sum_{X\cap Y=\varnothing}m(X)}, \tag{15}$$

ただし，$m_{cr}(\varnothing\,|\,m_b)=0$．また，$m_b$ の任意の焦点要素 Y に対して $\sum_{X\cap Y=\varnothing}m(X)<1$ が仮定され，満たされないときは未定義である．

なお，Duboisら[11]はジェフリー規則からの連想として，(13) 式と全く同等な以下の条件則について議論した．

$$m_{DP}(A\,|\,m_b)=\sum_X m_D(A\,|\,X)\bullet m_b(X) \tag{13a}$$

$$Pl_{DP}(A\,|\,m_b)=\sum_X Pl_D(A\,|\,X)\bullet m_b(X) \tag{13b}$$

$$Bel_{DP}(A\,|\,m_b)=\sum_X Bel_D(A\,|\,X)\bullet m_b(X) \tag{13c}$$

事前信念 m がベイジアンで，m_b の焦点要素が全体集合 U を分割するとき，Ichihashi らの３つの条件則(Dubois らの条件則も含む)はすべてジェフリー規則に一致する．また，ある B に対して $m_b(B)=1$ であるとき，妥当条件則，信頼条件則，可能条件則は，それぞれ Dempster 条件則，幾何的条件則[5,11]，Planchet の条件則[7]に一致する．

本論文で新たに提案した $m_{KYU}(\bullet\,|\,m_b)$は，$m_b(B)=1$ であるとき $m_K(\bullet\,|\,B)$に一致するという意味で，$m_{pl}(\bullet\,|\,m_b)$，$m_{cr}(\bullet\,|\,m_b)$，$m_{po}(\bullet\,|\,m_b)$と同様に既存条件則の拡張であるが，m がベイジアンで，m_b の焦点要素が全体集合 U を分割するときでもジェフリー規則には一致しない．これは，$m_K(\bullet\,|\,B)$がベイス条件則の拡張でないことから明らかである．

しかし，$m_K(\bullet\,|\,B)$がベイズ条件則の拡張でなく，$m_{KYU}(\bullet\,|\,m_b)$がジェフリー規則の拡張でないことが，$m_K(\bullet\,|\,B)$と $m_{KYU}(\bullet\,|\,m_b)$の有用性を否定する訳ではない．2.2節の要件２および定理３における条件(1)は，事前信念と条件が完全に矛盾する場合でも何らかの事後信念を得ることを保証するが，ベイズ条件則の拡張として得られる条件則は未定義になる．現実世界における意思決定では，事前信念とは完全に矛盾する現実が与えられても「解なし」ではなく，なんらかの結論を出すことが求められる場合(例えば，知能ロボットが何らか決断を下さなければならない場合)も多いと思われる．

未定義の問題は，２つの信念 $m^{(1)}(\bullet)$と$m^{(2)}(\bullet)$を

(5)式の Dempster 結合則で結合する場合にも起きる．すべての X と Y の組合せが $X \cap Y \neq \emptyset$ であると分母が 0 になるからであるが，これを避けるために，$X \cap Y \neq \emptyset$ の場合に $m^{(1)}(X) \bullet m^{(2)}(Y)$ を全体集合 U に割りあてる方法[40]，$X \cup Y$ に割りあてる方法[31, 41]，X と Y に比例分配する方法[42]，$X \cap Y \neq \emptyset$ の場合も含めて $X \cap Y$，$\bar{X} \cap Y$，$X \cap \bar{Y}$ の 3 者に分配する方法[43]などが提案されている．

前報[3]では，Dempster 結合則から条件則を求める方法(2.1節参照)と同様にして，[40]と[31,41]を含む幾つかの結合則から条件則を求め，$m_K(\bullet|B)$ と比較している．これらの条件則は条件 B に含まれない集合に質量を再配置することがあるため要件 1 を満たさないが，上述の理由から要件 2 は満たす．逆に，既存条件則の多くは要件 1 を満たし要件 2 を満たさないが，[18]で提案された条件則は要件 2 , 3 を満たし，要件 1 を満たさない．

4．証拠推論の条件則による解釈

不確実性を証拠理論で表現する推論(証拠推論)の研究がある．本節では，既存研究について簡単にまとめたのち，証拠推論の 1 つが不確実な信念による条件則として解釈できることを示す．

典型的な知識として，次のように表現されるルールを考える．

$$\text{If} \quad y \in B, \text{then} \quad x \in A \quad \text{with weight} \quad \alpha \tag{16}$$

ただし，x, y はそれぞれ異なる全体集合 U_x, U_y の要素を値とする変数で，A, B は，U_x, U_y の部分集合である．重み $\alpha \in (0,1]$ は前件が成立したときに後件が成立する信念度である．

証拠推論を用いて上記ルールを数学的に表現する方法は，大きく結合形式と条件形式の 2 つに分けられる[32,35]．前者は直積 $U_y \times U_x$ 上の結合信念関数によってルールを表現する(例えば，[23-31])．後者は前件部による後件部の条件付信念関数によって表現する[32-37]．

一般に，結合形式による表現より条件形式による表現の方が人間にとって理解しやすく，知識のデータ量も条件形式の方が少ない利点がある．条件付信念関数値の数が $2^{|U_x|+|U_y|}$ であるのに対し，結合信念関数の値の総数は $2^{|U_x|\bullet|U_y|}$ である[32,35]．

条件形式でルール(16)を表現し，重みを信念度とする場合，重みの解釈として $\alpha = m(A|B)$ と $\alpha = Bel(A|B)$ があるが，本論文ではこれ以降 $\alpha = m(A|B)$ の解釈の下に議論する．

さて，上述のように解釈したルールの重み $m^{(r)}(A|B)$ と U_y 上の基本確率 $m^{(y)}$ が与えられて U_x 上の基本確率 $m^{(x)}$ を求める証拠推論は，次式で行う[33]．

$$m^{(x)}(A) = \sum_{Y \subseteq U_y} m^{(r)}(A \mid Y) \bullet m^{(y)}(Y) \tag{17}$$

また，上式における $m^{(x)}(A)$，$m^{(r)}(A|Y)$，$m^{(y)}(Y)$ を $U_y \times U_x$ 上に円筒拡張したものを，それぞれ $m^{(x_e)}(A_E)$，$m^{(r_e)}(A_E|Y_E)$，$m^{(y_e)}(Y_E)$ とする．ただし，$A_E = U_y \times A$，$Y_E = Y \times U_x$ である．これらを(17)式に代入すると次式が得られる．

$$m^{(x_e)}(A_E) = \sum_{\substack{Y_E = Y \times U_x \\ Y \subseteq U_y}} m^{(r_e)}(A_E \mid Y_E) \bullet m^{(y)}(Y_E) \tag{18}$$

(17)式と(18)式は同等と考えられるが，(17)式は以下に示すようにベイズ推論に基づいて正当化されている[33]．

(1)ベイズ推論に基づく解釈

全体集合 U 上の基本確率は，数学的には 2^U 上の確率分布として解釈可能である．したがって，$m^{(x)}(A)$，$m^{(y)}(Y)$ をそれぞれ 2^{U_x}，2^{U_y} 上の確率 $P_x(\{A\})$，$P_y(\{Y\})$，$m^{(r)}(A|Y)$ を $\{Y\} \subseteq 2^{U_y}$ が与えられた条件下での 2^{U_x} 上の確率 $P_r(\{A\}|\{Y\})$ と解釈すれば，ベイズ定理より，

$$P_x(\{A\}) = \sum_{Y \in 2^{|U_y|}} P_r(\{A\} \mid \{Y\}) \bullet P_y(\{Y\}) \tag{19}$$

が成立する．上述の解釈の下で，(17)式および(18)式と(19)式は同等である．

ベイズ推論に基づく解釈では，条件則は条件付確率と同様に定義されるはずである．(18)式の条件付基本確率の場合は次の定義になる．

$$m^{(r_e)}(A_E \mid Y_E) = \frac{m^{(r_e)}(A_E \cap Y_E)}{m^{(r_e)}(Y_E)} = \frac{m^{(r_e)}(Y \times A)}{m^{(r_e)}(Y \times U_x)} \tag{20}$$

以下本節では，(17)式および(18)式の推論が，移転可能信念モデル[38]における証拠の結合として，および本論文で提案した不確実な信念による条件則として解釈可能であることを示す．

(2)証拠の結合に基づく解釈

Smets は，移転可能信念モデル(Transferable Belief Model)[38]において，論理積による証拠結合に基づく推論方法を提案した[32]．移転可能信念モデルとは，証拠理論から $m(\emptyset) = 0$ の制約を除き，U の網羅性を保証しない世界をモデル化する理論である．

論理積による証拠結合とは，(5)式の Dempster 結合則から正規化を取り除いたものである．

$$m_{\cap}(A')=\sum_{A'=X'\cap Y'} m^{(1)}(X')\bullet m^{(2)}(Y') \tag{21}$$

ここで，$m^{(1)}$，$m^{(2)}$ はそれぞれ独立な情報源を持つ同一全体集合 U 上の基本確率である．上式は，$X'\cap Y'=\emptyset$となる焦点要素 X'，Y' が存在すれば，$m_{\cap}(\emptyset)>0$となるため，標準的な証拠理論からは逸脱する．

(21)式は文献[5]によって次式と同一であることが証明されている．

$$m_{\cap}(A')=\sum_{Y'\subseteq U} m_{\cap}^{(1)}(A'\mid Y')\bullet m^{(2)}(Y') \tag{22}$$

ただし，$m_{\cap}(A\mid B)$は(6)式の Dempster 条件則から正規化を取り除いた条件則である．

Smets は(22)式を移転可能信念モデルにおける推論式としたが，(21)式と同様，$X'\cap Y'=\emptyset$となる $m^{(1)}$ と $m^{(2)}$の焦点要素 X'，Y' があると $m_{\cap}^{(1)}(\emptyset\mid Y')>0$ となり，その結果 $m_{\cap}(\emptyset)>0$となる．

しかし，(22)式の全体集合を $U=U_y\times U_x$とし，$m_{\cap}(A')$，$m_{\cap}^{(1)}(A'\mid Y')$，$m^{(2)}(Y')$が，それぞれ(17)式における $m^{(x)}(A)$，$m^{(r)}(A\mid Y)$，$m^{(y)}(Y)$の $U_y\times U_x$ 上への円筒拡張だとすると，空ではない任意の X,Y に対して $X'\cap Y'=(U_y\times X)\cap(Y\times U_x)=Y\times X\neq\emptyset$であるから，$m_{\cap}^{(1)}(\emptyset\mid Y')=0$，$m_{\cap}(\emptyset)=0$ が保証される．このとき，Dempster 条件則と Dempster 結合則の正規化は不要で，それぞれ $m_{\cap}(A\mid B)$，$m_{\cap}(A)$に等しくなる．また，(22)式は(18)式と全く同等と見なすことができるから，(18)式による推論は Dempster 結合則あるいは論理積結合則による２つの証拠の結合として解釈可能になる．

(3) *KYU* 条件則による解釈

(12)式で提案した *KYU* 条件則は，$m_K(\emptyset\mid Y)=0$，$m_{KYU}(\emptyset\mid m_b)=0$ であるため(22)式と異なるが，ほぼ同様にして解釈する．全体集合を $U=U_y\times U_x$とし，(12)式における$m_{KYU}(A\mid m_b)$，$m_K(A\mid Y)$，$m_b(Y)$を，それぞれ(17)式における $m^{(x)}(A)$，$m^{(r)}(A\mid Y)$，$m^{(y)}(Y)$の $U_y\times U_x$ 上への円筒拡張とする．具体的には，(12)式の U, A, Y をそれぞれ $U_y\times U_x$，$A_E=U_y\times A$，$Y_E=Y\times U_x$ に置き換えて，

$$m_{KYU}(A_E\mid m_b)=\sum_{Y_E} m_K(A_E\mid Y_E)\bullet m_b(Y_E) \tag{23}$$

を得る．ルールの重み α をキマラらの条件則により解釈し，U_y 上の基本確率 $m^{(y)}$を与えられた不確実な条件と解釈することによって，(23)式と(18)式は全く同等になる．つまり，証拠推論は本論文が提案する不確実な条件 m_b による条件則として解釈可能である．

また，空でない任意の A および Y に対して $A_E\cap Y_E\neq\emptyset$であるから，この場合は $m_K(A_E\mid Y_E)=m_D(A_E\mid Y_E)$ が成り立つ．よって，

$$m_{KYU}(A_E\mid m_b)=\sum_{Y_E} m_D(A_E\mid Y_E)\bullet m_b(Y_E) \tag{24}$$

となり，ルールの重みを Dempster 条件則と解釈することも可能である．

【例題３】ある車メーカの販売車種の集合を，顧客の年収分類の集合を U_y とし，メーカは顧客の年収と購入車種の関係について知識 $m^{(r)}(X\mid Y)$，$X\subseteq U_x$，$Y\subseteq U_y$ を持つとする．このとき，ある顧客についての年収情報 $m^{(y)}(Y)$が分かれば，(17)式によって顧客が購入する車種を推論することができる．この推論結果は次の３つの解釈が可能である．

(1) 年収と購入車種の関係に関する不確実な知識と顧客年収に関する不確実な知識を用いてベイズ推論を行った結果．

(2) 年収と購入車種の関係に関する不確実な知識と顧客年収に関する不確実な知識を論理積結合した結果．

(3) 顧客年収に関する不確実な知識を条件とする購入車種に関する条件付基本確率．

5．まとめ

本論文では，著者らによって最近提案された証拠理論における条件則を一般化し，基本確率によって表現される不確実な信念を条件とする新しい条件則を提案した．また，知識の不確実性を証拠理論によって表現する証拠推論についても論じ，既存の証拠推論の１つが本論文で提案する一般化条件則として解釈可能であることを示した．

文献[3]における著者らの提案は，条件を100%信頼できる場合に条件則が満たすべき３つの要件と，それらを満たす条件則であった．３つの要件とは，*a*) 条件付基本確率の焦点要素は条件である集合の部分集合に限られる，*b*) 空集合でない任意の条件に対して条件付基本確率は定義される，*c*) 条件が全体集合である場合は条件なしの基本確率に等しい，である．要件 *b*) は，証拠理論が頻度に関する不確実性ではなく，人間の信念の度合いを扱う理論であるならば，重要である．

本論文で提案した条件則は，条件が不確実性を含む信念である場合の条件則である．これは３要件のうちの１つである *a*)を棄てることを意味するが，*b*)と *c*)に相当する要件は満たしている．

Ichihashi ら[8]と Dubois ら[11]は，本論文と同様に不確実な信念に対する条件則を提案した．これらの

条件則は，ベイズ条件則の拡張であるJefferey規則をさらに証拠理論へ拡張したものと理解できる．しかし，ジェフリー規則(ベイズ条件則)の拡張であることと要件 *b*) は相反するため，これらの条件則は要件 *b*) を満足しない．

また， 本論文は，不確実性を条件付基本確率で表現する知識を用いて推論する方法について論じた．そして，ベイズ推論を拡張する形で提案された既存の推論法は，Smetsらが提案する移転可能信念モデルにおける証拠の結合として解釈可能であること，および本論文で提案する一般化条件則として解釈可能であることを示した．これまで，確率論の力を借りて定式化された証拠推論の一方法が証拠理論の枠組みの中で正当化されたという点で，証拠理論の体系化の一助になると思われる．

参 考 文 献

[1] G.A.Shafer : *Mathematical Theory of Evidence*, Princeton Univ.Press (1976)

[2] V. Kimala, K. Yamada: Another conditioning rule in Evidence theory, *Proc. 11th Int. Conf. on Humans and Computers*, 323/328 (2008)

[3] キマラ・ヴィラニー，山田耕一，畦原宗之：証拠理論における条件則が満たすべき条件と新たな条件則，日本知能情報ファジィ学会誌 (to appear)

[4] K.Yamada, V. Kimala, M. Unehara: A new conditioning rule, its generalization and evidential reasoning, IFSA 2009 (to appear)

[5] D. Dubois, H. Prade: On the unicity of Dempster rule of combination, *Int. J. of Intelligent Systems* **1**, pp.133-142 (1986)

[6] H. E. Kyburg, Jr. : Bayesian and non-Bayesian evidential updating, *Artificial Intelligence* **31**, pp.271-293 (1987)

[7] B. Planchet: Credibility and conditioning, *J. of Theoretical Probability* **2**, pp.289-299 (1989)

[8] H. Ichihashi, H. Tanaka: Jeffrey-like rules of conditioning for the Dempster-Shafer theory of evidence, *Int. J. of Approximate Reasoning* **3**, pp.143-156 (1989)

[9] L. M. De Campos, M.T. Lamata, S. Moral: The concept of conditional fuzzy measure, *Int. J. of Intelligent Systems* **5**, pp.237-246 (1990)

[10] S. Moral, L. M. de Campos: Updating uncertain information, *Uncertainty in Knowledge Bases : Proc. IPMU '90* (*Lecture notes in computer science* **521**, eds. B. Bouchon-Meunier, R.R. Yager, L.A. Zadeh), pp.58-67, Springer-Verlag. (1991)

[11] D. Dubois, H. Prade: Updating with belief functions, ordinal conditional functions and possibility measures, in *Uncertainty in Artificial Intelligence* **6** (eds. P. P. Bonissone, M. Henrion, L. N. Kanal, J. F. Lemmer), pp.311-329 (1991)

[12] J. Y. Halpern, R. Fagin : A new approach to updating beliefs, *in Uncertainty in Artificial Intelligence* 6 (eds. P. P. Bonissone, M. Henrion, L. N. Kanal, J. F. Lemmer), pp347-373 (1991)

[13] 前田，市橋：ベイズ定理の証拠理論への拡張について，システム制御情報学会論文誌 **5**-12，pp.481-490 (1992)

[14] D. Dubois, H. Prade: Evidence, knowledge, and belief functions, *Int. J. of Approximate Reasoning* **6**, pp.295-319 (1992)

[15] D. Dubois, H.Prade: Focusing versus updating in belief function theory, in the Dempster-Shafer theory, in *Advances in the Dempster-Shafer Theory of Evidence* (eds. R.R.Yager, M.Fedrizzi, and F.Kacprzyk), pp.71-95, John Wiley & Sons, Inc. (1994)

[16] P. Smets: What is Dempster-Shafer's model?, in *Advances in the Dempster-Shafer Theory of Evidence* (eds. R.R.Yager, M.Fedrizzi, and F.Kacprzyk), pp.5-34, John Wiley & Sons, Inc. (1994)

[17] L. Zhang, Representation, independence, and combination of evidence in the Dempster-Shafer theory, in *Advances in the Dempster-Shafer Theory of Evidence* (eds. R.R.Yager, M.Fedrizzi, and F.Kacprzyk), pp.51-69, John Wiley & Sons, Inc. (1994)

[18] 伊藤，稲垣：証拠理論における確信関数の更新と新たな条件付けの提案，計測自動制御学会論文集 **31**-12，pp.2011-2017 (1995)

[19] E. C.Kulasekere, et al. : Conditioning and updating evidence, *Int. J of Approximate Reasoning* **36**, 75-108 (2004)

[20] K. Premaratne, D.A.Dewasurendra, P. H. Bauer: Evidence updating in a heterogeneous sensor environment, *Proc. 2003 International Symposium on Circuits and Systems*, Vol.4 pp.824-827 (2003)

[21] G. Shafer: Perspective on the theory and practice of belief function, *Int. J of Approximate Reasoning* **4**, pp.323-362 (1990)

[22] R. Jeffrey: *The Logic of Decision*, McGraw-Hill, New York (1965)

[23] PP. Shenoy, G. Shafer: Propagating belief functions using local computations, IEEE Expert 1, pp.43-52 (1986)

[24] D. Dubois, H. Prade: The principle of minimum specificity as a basis for evidential reasoning, in *Uncertainty in Knowledge-based systems* (eds, B. Bouchon, R.R.Yager), *Lecture Notes in Compurter Science*, Vol.286, pp.75-84, Springer-Verlag (1986)

[25] W. F. Eddy, G. P. Pei: Structure of rule-based belief functions, *IBM J. of Res. and Develop*. 30, pp.93-101 (1986)

[26] P. Chatalic, D.Dubois, H.Prade: An approach to approximate reasoning based on the Dempster rule of combination, *Int. J. of Expert Systems*, *Research and Applications*, Vol.1, pp.67-85 (1987)

[27] G. Shafer, P.P. Shenoy, K. Mellouli : Propagating belief functions in qualitative Markov trees, *Int. J. of Approximate Reasoning* 1(4), pp.349-400 (1987)

[28] P.Smets: Belief functions, in *Non-standard logics for automated reasoning* (eds. P.Sments, E.F. Mamdani, D. Dubois, H. Prade), pp.253-286, Academic Press (1988)

[29] T. Kämpke: About assessing and evaluating uncertain inferences within the theory of evidence, Decision Support Systems **4**, pp.433-439 (1988)

[30] PP. Shenoy: A valuation-based language for expert systems, *Int. J. of Approximate Reasoning* **3**, pp.383-411 (1989)

[31] H.Y.Hau, R. L. Kashyap: Belief Combination and Propagation in a Lattice-Structured Inference Network, *IEEE Trans. Systems, Man, Cybernet.*, **SME-20**(1), pp.45-58(1990)

[32] P. Smets: Belief functions: the disjunctive rule of combination and the generalized Bayesian theorem, *Int. J. of Approximate Reasoning* **9**, pp.1-35 (1993)

[33] W. Liu, J. G. Hughes, M. F. Mctear: Representing Heuristic knowledge and propagating beliefs in the Dempster-Shafer theory of evidence, in *Advances in the Dempster-Shafer Theory of Evidence*(eds. R.R.Yager, M. Fedrizzi and J. Kacprzyk), John Wiley & Sons, Inc.pp.441-471(1994)

[34] J. Yang, J. Liu, J. Wang, H. Sii, H. Wang: Belief rule base inference methodology using the evidential reasoning approach-RIMER, *IEEE Trans. on Sys. Man, and Cyber. -PartA: Systems and humans,* 36-2, pp.266-285(2006)

[35] B. B. Yaghlane, K. Mellouli: Inference in directed evidential networks based on the transferable belief model, *Int. J. of Approximate Reasoning* **48**,(2008)399-418.

[36] 山田耕一，キマラ・ヴィラニー，諸我潮，畦原宗之：ラフ集合による知識獲得と証拠理論による推論，日本知能情報ファジィ学会 合同シンポジウム～第17回北信越支部シンポジウム＆第32回関東支部ワークショップ＆第３回人間共生システム研究会，pp.49-52 (2008/11)

[37] K. Yamada : Uncertainty in Heuristic Knowledge and Reasoning, 11th Inter. Conf. on Humans and Computers, Nagaoka, pp.9-14(Nov. 2008)

[38] P. Smets, R. Kennes: The transferable belief model, *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **12**-5, 447-458(1990)

[39] G. J. Klir: *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications*, Prentice Hall PTR(1995)

[40] R.R. Yager: On the Dempster-Shafer framework and new combination rules, Information Sciences **41**, pp.93-137(1987)

[41] D. Dubois, H. Prade: Representation and combination of uncertainty with belief functions and possibility measures, Comput. Intelligence **1**/1, pp.244-264 (1988)

[42] F. Smarandache, J. Dezert: Proportional conflict redistribution rules for information fusion, in *Applications and Advances of DSmT for Information Fusion*, Vol.2(eds. F. Smarandache, J. Dezert)American Research Press, pp.3-68(2006)

[43] K. Yamada: A New Combination of Evidence Based on Compromise, Fuzzy Sets and Systems, Vol.159/13, pp.1689-1708(2008)

（2009年５月１日　受付）
（2009年６月16日　採録）

［問い合わせ先］
〒940-2188　新潟県長岡市上富岡町1603-1
長岡技術科学大学　制御・情報工学専攻
キマラ　ヴィラニー
TEL：02-5847-1611
E-mail：kimala@mis.nagaokaut.ac.jp

著者紹介

キマラ　ヴィラニー［非会員］

長岡技術科学大学院情報・制御工学2006年長岡技術科学大学院工学研究科経営情報システム工学専攻修了．現在，同大学博士後期課程在籍中．

山田（やまだ）　耕一（こういち）［正会員］

長岡技術科学大学・経営情報系・教授．1980年東京工業大学大学院総合理工学研究科(システム科学専攻)修了．三菱総合研究所，日本DEC，山武ハネウエル，長岡技術科学大学助教授を経て現職．1991-1993国際ファジィ工学研究所．博士(工学)．情報処理学会，人工知能学会，感性工学会，IEEE等の各会員．

畦原（うねはら）　宗之（むねゆき）［正会員］

2005年筑波大学大学院システム情報工学研究科修了．博士(工学)．同年長岡技術科学大学経営情報系助手．2007年同大学助教，現在に至る．人間の主観，感性を考慮した知的システム，生成的システム構築に関する研究に従事．知能情報ファジィ学会，感性工学会，人工知能学会，行動計量学会各会員．

Generalization of Conditioning and New Interpretation of Evidential Reasoning

by

Vilany KIMALA, Koichi YAMADA and Muneyuki UNEHARA

Abstract：

The paper discusses generalization of conditioning in Evidence theory proposed recently, and proposes a new generalized conditioning with an uncertain belief. It also shows that a conventional method of evidential reasoning could be interpreted by the proposed generalized conditioning.

A conditioning rule proposed recently by Kimala *et al.* satisfies the following three requirements: *a*) focal elements of conditional *basic belief assignment* are limited to subsets of the given condition, *b*) conditional *bba* must be defined for any condition except for the empty set, and *c*) conditional *bba* with condition of the universal set equals to *bba* with no condition. All those requirements are natural and appropriate with understanding that Evidence theory deals with subjective uncertainty of humans, though there are no conditioning rules satisfying all of the three requirements. They also proposed a generalized conditioning that loosens a requirement *a*) by introducing reliability of the condition.

The paper generalizes further Kimala *et al.*'s generalized conditioning. The proposed generalized conditioning uses a belief represented by a *bba* as the condition. Ichihashi *et al.* and Dubois *et al.* have already proposed similar conditioning rules. However, since they are extensions of Bayesian conditioning and Jeffrey's rule, they cannot satisfy the requirement *b*). The conditioning proposed in the paper satisfy both *b*) and *c*), though *a*) is lost because of the generalization.

The paper also discusses the relation between a conventional evidential reasoning and conditioning rules. The evidential reasoning is understood as an extension of Bayesian reasoning. In the paper we show that it could be interpreted as a combination of evidence in Transferable Belief Model proposed by Smets *et al.*, as well as the proposed generalized conditioning rule with an uncertain belief.

Keywords：Evidence theory, Dempster-Shafer theory, conditioning, generalized conditioning rule, evidential reasoning.

Contact Address：**Vilany KIMALA**

Nagaoka University of Technology, Information Science and Control

1603-1, Kami-tomioka, Nagaoka, Niigata, JAPAN, 940-2188

TEL ：02-5847-1611

E-mail ：kimala@mis.nagaokaut.ac.jp