Министерство Высшего и среднего специального образования
РСФСР
Московский авиационный технологический
институт
К.т.н., доцент **БОЛОНКИН А.А.**

ЧАСТЬ 1

НОВЫЕ МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

(Диссертация на соискание ученой степени
достора технических наук)

NEW METHODS OF OPTIMIZATION AND THEIR APPLICATIONS
IN PROBLEMS OF DYNAMIC AND CONTROL SYSTEMS
(Thesis of next Ph.D.)

г. Москва
1969 г.

Содержание:

Абстракт

Настоящая диссертация состоит из двух частей. Первая часть посвящена математическим основам новых методов оптимизации, вторая часть – примеры и приложения этих методов к ряду технических задач.

В отличие от классической постановки задачи оптимизации:

а) Дан ункционал. Требуется найти его абсолютную минималь.

Эта задача в подавляющем большинстве случаев очень трудна и чаще всего неразрешима.

Поэтому в первой части рассматриваются также иные постановки задач:

б) Найти более «узкое» подмножество, содержащее абсолютную минималь.

в) Найти подмножество решений лучших, чем данное.

г) Найти оценки снизу данного функционала.

В настоящее время большинство исследователей, работающих в области оптимизации, заняты решением задачи в традиционной (классической) постановке – отысканием точной минимали (задача *а*). Инженера же, как правило, в реальных задачах интересует подмножество квазиоптимальных решений, выбирая из которого, он заранее уверен в получении функционала не хуже заданной величины (задача *в*) и оценки снизу, показывающих насколько далек он от точного оптимального оптимального решения (задача *г*). К тому же обычно у него есть много дополнительных соображений, которые нельзя учесть в математической модели или которые бы ее сильно усложнили. Постановка задачи в форме *в* дает ему определенную свободу выбора. Задача *г* имеет и самостоятельный интерес. Если есть оценка снизу, близкая к точной нижней грани функционала, то задачу оптимизации часто можно решить подбором квазиоптимального решения. Задача же *б* может существенно облекчить решение любой из перечисленных задач, так как сужает множество, на котором следует искать решение.

Перечисленные неклассические постановки задач потребовали новых методов решения, отличных от известных методов вариационного исчисления, принципа максимума или динамического программирования. Оказалось, что новые методы обладают значительной общностью и при попытке решить с их помощью одну из перечисленных задач можно в качестве побочного продукта получить решение другой задачи. Это может принести пользу. Так если получена хорошая оценка снизу, то, сравнивая с ней разные инженерные решения, часто удается получить решение, очень мало отличающееся от оптимального.

Излагаемый в первой части материал не сложен, но он опирается на ряд элементарных понятий и символику из теории множеств.

В диссертации принята двойная нумерация формул, теорем и рисунков. Первая цифра обзначает номер параграфа, вторая – номер формулы или теоремы в этом параграфе. Первая цифра в рисунках обозначает номер главы, вторая – номер рисунка в данной главе.

Краткое изложение (Автореферат диссертации, 28 стр.) есть в интнрнете http://viXra.org/abs/1503.0081, http://www.twirpx.com ,

Некоторые главы изложены более подробно в специальном учебном пособии «Новые методы оптимизации и их применение», Москва, Издательство МВТУ им.Баумана, 1972г., 220 стр. (См. РГБ, Российская Государственная Библиотека, Ф-801-83/869-6**)**. http://vixra.org/abs/1504.0011 **v4. ,** https://www.academia.edu/11054777/ Пособие содержит также большое число примеров, упражнений и задач.

Д.т.н. Б. Кругляк

Предисловие

Немного истории. У этой диссертации трудная судьба. В 1961г научный руководитель Болонкина заслуженный ученый, заведующий кафедрой «Динамика полета и управление» Московского авиационного института , д.т.н. И.В. Остославский попросил своего аспиранта Александра Болонкина дать заключение о претенденте на вакантное место преподавателя В.Ф. Кротове, опубликовавшего в «Известиях ВУЗов» к тому времени всего две работы по математике. Как пишет в своих воспоминаниях Болонкин, он видел, что «работы Кротова это мыльный пузырь», содержащий к тому же массу математических ошибок автора, не имевшего базового математического образования и не понимавшего толком существа исследуемого предмета. Тем не менее учитывая трудное положение Кротова и желая ему помочь, Болонкин дал положительное заключение.

Оказавшись на кафедре Кротов возомнил себя гением, создателем нового метода вариационного исчисления и организовал группу по проталкиванию себя и членов своей группировки в добывание ученых степеней и званий. Напомню, что в те времена ученая степень обеспечивала не только повышенную зарплату, но давала многочисленные льготы, например, позволяла получать в первую очередь квартиры повышенной площади. Поскольку группировка в достижении своих целей не брезговали никакими методами она в среде специалистов получила название «Банда Кротова».

Болонкин отказался вступать в его банду и получил смертельного врага.

В 1962г Кротов В.Ф. объявляет величайшем достижением, что к широко известному уравнению Р. Беллмана, являющемуся достаточным условием абсолютного минимума

$$\inf_u \left[f_0(t,x,u) - \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} f_i(t,x,u) \right] = 0, \qquad (1)$$

[где u – r-мерный вектор управления (например, руль направления, угол атаки у самолета, обороты двигателя), x - n-мерный вектор фазовых координат (например, дальность полета и высота полета самолета), t – независимая пременная (обычно время)], Кротов добавляет излишнее, ненужное с математической точки зрения, требование абсолютного минимума по фазовым координатам x и делает их разрывными (о чем радостно пишет сам автор).

$$\inf_{u,x} \left[f_0(t,x,u) - \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} f_i(t,x,u) \right] = 0, \qquad (2)$$

(обратите внимание на x под знаком инфинума).

Это сразу делает, как правило, задачу нерешаемой или приводит к идиотским техническим решениям. Например, что самолет может мгновенно переместится в любую точку Земли.

Недаром буквально все, кто пишет (чтобы не иметь Кротова врагом), что они решали задачу «Методом Кротова», пользовались только исходным уравнением Беллмана или принципом максимума Понтрягина.

Сам Кротов, решая своим методом задачу о минимуме расхода топлива двигателем внутреннего сгорания, получил, что с целью экономии топлива надо несколько раз в секунду включать и выключать двигатель. Обещает сэкономить для страны миллионы тонн бензина. Свой метод он преподносил как величайшее научное достижение и требовал себе сразу присвоения доктора физико-математических наук. Члены Ученого Совета, ошарашенные его требованием и потрясающими достижениями в незнакомой для них области, тем не менее согласились дать ему кандидата.

Говорят, что нашелся даже чудак, который решил на своем автомобиле опробовать метод Кротова. Израсходовал топливо, посадил аккумулятор , но не сдвинулся с места.

Кротов немедленно (за полгода), несмотря на преподавательскую работу, пишет докторскую диссертацию и решает в ней своим методом задачу о торможении космического аппарата при входе в земную атмосферу. Получает, что самолеты и космические аппараты тормозятся неправильно. Если пилот будет с максимальной частотой дергать ручку управления «вверх-вниз», то самолет будет тормозится быстрее, а космический корабль якобы сэкономить на теплозащите. То что эта проблема давно решена тупым носом у космического аппарата и воздушными тормозными щитками у самолета – Кротову невдомек. Поздние детальные технические расчеты показали, что торможение самолетов и космических кораблей (КК) происходит во много раз медленнее, космический корабль нуждается в более мощной теплозащите, аппарат и пилот получают неприемлемые (и ненужные) перегрузки и требуют большей прочности и веса. Космонавты теряют место посадки, а пилоты боевых самолетов (для пассажирских самолетов метод Кротова вообще неприемлем) теряют противника и становятся легкой добычей неприятеля.

Вслед за Кротовым потянулись и другие члены кротовской банды. Его верный ученик Владимир Гурман решает методом Кротова задачу изменения орбиты КК с двигателем малой тяги.
И приходит к выводу, что двигатель надо включать многократно на самое короткое время только в нижней точке орбиты. То что это приводит (даже без учета переходных процессов и расхода топлива на включение-выключения) к бсконечному времени маневра - ему невдомек.

Самым своим уникальным результатом Кротов и Гурман считают сокращение взлетной дистанции вертолета на 40-50%. В Википедии Кротов сам о себе пишет (2013г):

На этой основе (т.е. метода Кротова – примечание Кругляк) выполнен ряд крупных прикладных исследований, таких как оптимизация ориентационных маневров космических аппаратов (В. И. Гурман, А. М. Никулин), оптимизация взлетов вертолета с уникальным результатом — сокращением взлетной дистанции на 40-50 % (Гурман В. И., Чуклов Б. Т.) и др., в том числе по договорам с ведущими организациями аэрокосмического профиля. С фирмами С. П. Королева, М. К. Янгеля, В. Н. Челомея, А. С. Лавочкина, ЦНИИМаш и другими были заключены хоздоговора на выполнение НИР по отысканию оптимальных режимов и законов управления космическими объектами, которые готовились к запуску на этих предприятиях.

Известно, что вертолет взлетает вертикально, длина его разбега равна нулю. Даже если Кротов сократил дистанцию разгона это практически не дает экономии топлива! Что касается хоздоговоров с фирмами Королева, Янгеля, Челомея, Лавочкина и др., то все оказалось фикцией и Кротову пришлось это удалить.

Цель Кротова - стать академиком, а то и повыше, так и не осуществилась. Правда он купил звание академика в частной организации, громко именующей себя Российской Инженерной Академией, указал это в Википедии и сделал клик на государственную Российскую Академию Наук, но там его в списках не оказалось. Пришлось удалить.

Имея в своем распоряжении 4-х программистов, связанных с Википедией, Кротов развенулся во всю. Описание его «величайших» достижений там самое большое, просто гиганское. Что там академики, членкоры и доктора наук РАН, ИПУ, если даже описание достижений его непосредственного начальника - директора Института Проблем Управления (ИПУ) – академика С.Н. Васильева в 8-10 раз меньше, чем описание «достижений», самого выдающего ученого всего мира – В.Ф. Кротова!, с которым (как он пишет) сотрудничают Университеты США, Германии, Израиля, СНГ, др. стран (2013г). Правда в 2014г утверждения о договорах и сотрудничестве пришлось удалить, но наглой лжи осталось предостаточно.

Почему я об этом говорю? Дело в том, что после того как Александр Болонкин отказался стать членом банды Кротова, пахан решил продемонстрировать, что он раздавит любого, кто посмеет без его согласия и панегиреков в его адрес работать в области оптимального управления. К тому времени в его банде состояло несколько десятков человек (к настоящему времени, как он пишет, он воспитал и подготовил 20 кандидатов и 7 докторов наук (список представить отказался). Самый выдащийся, по его словам – это упомянутый выше В.И. Гурман.

В 1971г за два дня до защиты, Кротов узнает о защите докторской диссертации Болонкиным в Ленинградском Политехническом Институте. В течении суток он организует от членов своей банды чемодан отрицательных отзывов. Как видно из библиотечного формуляра ни сам Кротов, НИ ОДИН член его банды диссертации Болонкина не читал. Кротов командировал себя и членов своей банды в

Ленинград (по личным делам, но за казенный счет разумеется!) сорвал свои и чужие лекции студентам. На защите они устроили бардак.

Сначала Кротов утверждал, что все результаты Болонкина неверны, а затем что все списано у него На резонный вопрос, членов Совета: выходит Болонкин списал у Вас неверные результаты?- ответа не последовало. Ни на один конкретный вопрос по диссертации Кротов ответить также не смог (ибо ее не читал!). Не смог указать конкретно и ни одного неверного результата. В итоге члены Совета проголосовали за присвоение Александру Болонкина степени доктора наук.

Тогда Кротов решил прибегнуть к другим грязным методам. В КГБ (Комитет Государственной безопасности в бывшем СССР) поступила информация, что Болонкин читает и распространяет произведения писателя Солженицына и академика Сахарова. В 1972г Болонкин был арестован КГБ и провел 15 лет в тюрьмах и концлагерях КГБ, подвергался пыткам, истязаниям и издевательствам. Более 3-х лет его продержали в тюрьме особого режима и более года практически раздетого в холодном карцере с обледенелыми стенами на 400 гр черного хлеба и воде. КГБ, стремясь стереть о нем память,изъял книгу из библиотек. Его имя стало известно заграницей, о нем неоднократно передавали "Голос Америки" и "Свобода". Он был на учете в Амнисти Интернейшин, в его защиту неоднократно выступал академик Сахаров и видные ученые мира. Был освобожен в 1987г. в связи с перестройкой и сразу же был выдворен за границу. Поселился он в США. Четыре года работал в Главных лабораториях Военно-Воздушных Сил США в Дейтоне (Огайо), Эглин (Флорида) и два года в НАСА (NASA, DFRC, Калифорния) над важнейшими оборонными проектами США. Преподавал в американских университетах (NYU, NJIT, CUNY). Выступал на Международных космических конгрессах (1992,1994,1996, 2002 гг), два раза на Всемирных авиационных конгрессах (1998, 1999гг.) и много раз на общеамериканских научных конференциях в США.

Он автор более 250 научных работ, книг и 17 изобретений.

Трижды награждался Научным Советом Академии Наук США за оборонные научные разработки, грамотами Губернатора и Конгресса Нью-Йорка, а также награжден медалью Эйлера за достижения в области математики. Выступал на многих Международных Конгрессах.

Кротов и члены его банды всячески препятствовали публикации книг и работ Болокина в СССР и России, писали лживые аннотации. За время его заключения многие его научные разработки разворовали. Например, В 70-х годах Гурман В.И. опубликовал даже книгу по Принципу Расширения, «забыв» упомянуть, что принцип расширения был впервые опубликован Болонкиным в 1964г (Принцип расширения и условие Якоби вариационного исчисления. ДАН УССР, №7, 1964г.). На нем построена и данная диссертация. (Гурман написал только, что «*принцип расширения известен давно*»).

Аналогичная ситуация с самым уникальным и выдающимся результатом Кротова – Гурмана: сокращением взлетной дистанции ВЕРТОЛЕТА на 40-50%. Болонкин еще в 1965г в работе «Исследование динамики старта самолета с вертикальным взлетом» (Сборник «Исследования по динамике полета», М., Машиностроение, 1965г., стр. 119-147) показал, что при правильном вертикальном взлете самолета можно сэкономить до 40-50% горючего. Но Гурман-Чуклов «забыли» об этом упомянуть.

О «достжениях» и «методах» Кротова-Гурмана неоднократно писали и в прессе. См. например:

1. Газета “Dixi News” 12 апреля 2013г.
2.«Энергетика и промышленность России» No.11, 2001, Наука.
3.Научный портал KM.RU, Наука и техника
http://www.km.ru/nauka/C38C7EB22FA04269B6C102B6AAE3DE2C .
4. Журнал Биометрика http://biometrica.tomsk.ru/osan1.htm .

О качестве диссертации Болонкина и потоке новых идей и методов в ней читатель может судить по данному сканированному тексту 1971г. Рекомендую также книгу: Болонкин А.А., Новые методы оптимизации и их применение. МВТУ им. Баумана, 1972г., 220 стр. http://viXra.org/abs/1502.0137 .

Список (неполный) лиц, давших положительные отзывы о докторской диссертации Болонкина "Новые методы оптимизации и их применение в задачах динамики управляемых систем"

Имеются положительные отзывы на докторскую диссертацию А.А.Болонкина "Новые методы оптимизации и их применение в задачах динамики управляемых систем" следующих лиц:

1. А.Ю.Ишлинский.- Академик АН СССР. Заведующий кафедрой прикладной механики МГУ.
2. А.И. Лурье – Член-корреспондент АН СССР. Профессор. Заведующий кафедрой «Механика и процессы управления» Ленинградского политехнического Института.
3. Н.И. Камов - ГЕНЕРАЛЬНЫЙ КОНСТРУКТОР, Доктор технических наук.
4. Д.Д. Ивлев - д.ф-м.н., профессор, Зав.каф. "Высшая математика" МВТУ.
5. Парлов Л.П.-к.ф.м,н., доцент, руководитель семинара каф. «Высшая математика» МВТУ
6. Колесников К.С.- д.т.н.,, проректор по н/р МВТУ – утвердил положительное заключение МВТУ.
7. В. Андреев –д. ф.м.н,, профессор, официальный оппонент.
8. Л.И. Шатровский – Зав. Вычислительным центром Института Космических Исследований АН СССР, д.т.н. – ведущее предприятие.
9. Ходарев Ю.К. – Зам. Директора Института космических исследований АН СССР, д.т.н. - утвердил execute полодительное заключение ИКИ.
10. С.И. Зоншаин – д.т.н., профессор, зав.кафедрой «Аэродинамика и конструкция летательных аппаратов» Московского авиационного технологического института (МАТИ).
11. Г.Е. Кузьмак – д.т.н., ЦАГИ.
12. А.Н. Филатов – д.ф.м.н., профессор, зам. Директора по науке Института кибернетики ВЦ АН УзССР.

Диссертация есть в библиотеке ЛПИ: диссертация № 4775363, приложение № 4775373. автореферат № 592209 (Б 92209). По некоторым сведениям диссертация есть в ВНТИЦентре за № Д007744 (1986г).

Диссертация докладывалась на десятках научных семинаров в ведущих научных организациях и ВУЗах Москвы, Ленинграда и др. городах и на научных конференциях, в частности: в Институте Космических Исследований, Институте Проблем Управления (академик Петров), в Математическом иституте им. Стеклова (академик Моисеев), в ЦАГИ, МГУ, МВТУ, МАИ, МАТИ, ЛПИ и др.

ОГЛАВЛЕНИЕ ДИССЕТАЦИИ

ЧАСТЬ I

==

Министерство высшего и среднего специального образования

РСФСР

Московский авиационный технологический

институт

К.т.н., доцент БОЛОНКИН А.А.

К защите

Уч. секретарь Совета

НОВЫЕ МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

/Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук/

г. Москва

1969 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

1. КРАТКИЙ ОБЗОР СОСТОЯНИЯ МЕТОДОВ ОПТИМИЗАЦИИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЙ К ЗАДАЧАМ ДИНАМИКИ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

Со времени постановки в июне 1696 г. И. Бернулли задачи о брахистохроне вариационное исчисление развилось в большую самостоятельную математическую дисциплину, имеющую многочисленные выходы во многих областях. Большой вклад в его развитие внесли русские и советские математики, из которых нельзя не упомянуть о Л.А.Люстернике и Л.Э. Эльсгольце, применивших топологические методы в вариационных задачах. За рубежом в 40-е годы в этом направлении много работала группа американских математиков, получившая название школы Г.А.Блисса [24]. К началу второй мировой войны казалось, что данная область математики завершена почти полностью и готова к встрече с большинством технических задач.

Бурное развитие техники в 50-60-е годы, особенно авиации, космонавтики, создание весьма дорогостоящих ракетных комплексов, остро поставили вопрос об оптимизации проектирования, изготовления и эксплуатации таких систем. Появление быстродействующих электронно-вычислительных машин позволило проводить расчеты, которые раньше были просто немыслимы из-за своей трудоемкости.

И тут выяснилось, что классическое вариационное исчисление, которое раньше находило применение, главным образом, в задачах физики и развивалось с учетом специфики этих задач - очень плохо приспособлено к задачам техники и, в частности, к задачам автоматики и авиации. Особенность многих из этих задач заключалась, в частности, в том, что функции в них, как правило, были ограничены и разрывны, в то время как в классическом вариационном исчислении они брались в основном непрерывными и принимали значения в открытой области. Методы учета разрывности и ограниченности функции были настолько общи и неудобны, что приводили к сложным расчетам и затрудняли выявление структуры решения.

Создание в 1956 г. академиком Л.С. Понтрягиным и его учениками принципа максимума [28] явилось блестящим достижением советской математики. Принцип максимума получил большое распространение как у нас, так и за рубежом и с его помощью были решены многие задачи. Эта работа группы ученых, возглавляемых Л.С.Понтрягиным, была отмечена Ленинской премией.

Примерно в это же время известным американским математиком Р.Беллманом был предложен метод решения оптимальных задач, который получил название метода динамического программирования. Этот метод был применен как самим Беллманом, так и его последователями к многим задачам, в частности, к задачам экономики. Следует заметить, что строгое обоснование этого метода было проведено советским математиком В.Г. Болтянским.

Однако как принцип максимума, так и метод динамического программирования имели свои недостатки. В общем случае принцип максимума является только необходимым условием оптимальности и у исследователя нет уверенности, что найденное решение действительно является оптимальным. Кроме того, отыскание этого решения весьма часто упиралось в невозможность решить краевую задачу, к которой приводит принцип максимума, особенно, если размерность задачи достаточно велика.

В отличие от принципа максимума, метод динамического программирования дает сразу все поле оптимальных траекторий и не имеет отмеченных выше недостатков. Однако он применим, главным образом, к чисто дискретным проблемам и задачи размерности более 3-4, требуют такого объема оперативной памяти, какого в настоящее время не имеют лучшие ЭВМ. Этот недостаток метода сам Беллман назвал "проклятием размерности".

В 1962-63 гг. В.Ф. Кротовым был предложен принцип оптимальности [31], содержащий достаточные условия абсолютного минимума. В этом методе необходимо построить такую функцию, полная производная от которой сообщает абсолютный максимум определенным образом составленному подинтегральному выражению.

Появление новых задач, методов их решения дали сильный толчок развитию классического вариационного исчисления, теории оптимального управления, способствовали появлению новых численных методов. В связи с этим нельзя не упомянуть о работах Н.Н. Красовского, А.И. Лурье, А.А. Красовского, А.А. Фельдбаума, Н.Н. Моисеева, В.А. Троицкого, Л.И. Розоноэра, Л.И. Шатровского, А.А. Первозванского, К.А. Лурье, А.Г. Бутковского, Р. Габасова и др. Появилось ряд разработок вариационных задач и в функциональном анализе (А.А. Милютин, А.Я. Дубовицкий, Ю.В. Егоров). Однако состояние математических методов оптимизации к настоящему времени нельзя признать удовлетворительным. Главный недостаток существующих методов - их разобщенность, разные подходы, разные идеи, на базе которых они построены. Кроме того, для существующих методов характерны большие трудности в приложении, в решении краевых задач, неприменимость ко многим важным задачам техники.

Исследованием оптимальных задач динамики, наивыгоднейших режимов полета самолетов, ракет, космических кораблей занимались многие советские ученые, как например, А.А. Космодемьянский, Д.Е. Охоцимский, Т.М. Энеев, И.В. Остославский, Б.Т. Горощенко, Ю.Н. Иванов, Г.Л. Гродзовский, А.М. Тарасенков, В.А. Рулев, А.И. Зенкин и др., а также зарубежные исследователи, из которых следует особо упомянуть Миеле, Брэквелла, Лейтмана.

Большинство из них ограничивалось нахождением траекторий, удовлетворяющих только первому необходимому условию вариационного исчисления - уравнениям Эйлера, либо использовало принцип максимума. Однако, как уже отмечалось, принцип максимума (а тем более уравнения Эйлера) являются необходимым условием минимума и не гарантируют, что найденное решение является действительно оптимальным.

2. Краткое содержание диссертации.

I часть работы (гл. I-7) посвящена математическим основам предлагаемых методов оптимизации.

В гл. I в общем виде формулируется следующая проблема: на множестве X задан функционал $I(x)$. Связи и ограничения, наложенные на систему, выделяют из этого множества некоторое подмножество допустимых состояний $X^* \subset X$. Требуется решить одну из задач (либо их комбинацию): а) Найти абсолютную минималь функционала $I(x)$ на X^*, б) Выделить более "узкое" множество, содержащее абсолютную минималь, в) Найти подмножество, на котором $I(x) \leq C$, C -некоторое число, г) Найти оценки снизу $I(x)$ на X^*.

Для решения этих задач вводится понятие β - функционала и обобщенного функционала, конструируемого так, чтобы он был проще исходного функционала, формулируются и доказываются ряд теорем. Из этих теорем вытекают алгоритмы: № I - метод выделения подмножества, содержащего абсолютную минималь, № 2 - метод спуска по множеству лучших решений, № 3 - метод совмещения экстремумов. Эти методы применяются к теории экстремумов функций конечного числа переменных и задачам оптимизации, описываемым обыкновенными дифференциальными уравнениями. Эффективность предлагаемых методов иллюстрируется рядом примеров.

В гл. 2 подробно рассмотрен важный частный случай β – функционала – α – функционал. Показано как из решения обобщенного функционала можно либо получить минималь исходной задачи, либо оценку снизу, либо информацию о множествах, содержащих абсолютную минималь и лучшие решения. Предложен алгоритм № 4 для решения поставленных задач. Показано как методы α – функционала можно применить к известным задачам оптимизации и устанавливается связь между известными алгоритмами и методами α – функционала. Например, дается вывод метода "штрафа" из специального задания α – функционала. Предлагаются формы α – функционала для логических связей (двойной импликации, дизъюнкции, конъюнкции, отрицания). Предложен метод обратной подстановки, а метод совмещения экстремумов распространен на случай условного минимума.

В гл. 3 предложен центральный метод всей работы – метод максимина. Методы гл. 2 следуют из него как частный случай. Он дал ряд новых алгоритмов решения оптимальных задач: это алгоритм № 5 (максимина) с двумя модификациями, алгоритмы условного максимина (№ 6) относительно основного и вспомогательного неизвестного. Эти методы применены к задачам, описываемым обыкновенными дифференциальными уравнениями. Получены уравнения максимина в частных производных, из которых уравнение Беллмана следует как частный случай, а также новые необходимые условия и уравнения, которые не являются уравнениями Эйлера-Лагранжа и в отличие от последних дают не кривую подозрительную на экстремум, а абсолютную минималь. Показано, что метод максимина может выступать и в совершенно неожиданных амплуа: в исследовании устойчивости, в построении функций Ляпунова, как метод оценки решений обыкновенных дифференциальных уравнений для данной совокупности начальных условий.

Гл. 4 посвящена численной реализации некоторых алгоритмов α - функционала и методов максимина применительно главным образом к задачам, описываемым обыкновенными дифференциальными уравнениями. Предложенные численные методы обладают рядом существенных преимуществ перед известными методами Понтрягина, Шатровского, Брайсона, Келли. В них отсутствует краевая задача, учитываются ограничения на фазовые координаты, выполнены достаточные условия сильного относительного минимума, им не страшны вырожденные режимы. Разработан и новый численный метод для задач теории условных экстремумов функций конечного числа переменных.

Глава 5 посвящена детальному исследованию крайне малоизученного вопроса в теории оптимизации - так называемым импульсным режимам (терминология автора) или экстремалям с разрывами фазовых координат, которые могут быть реализованы допустимым управлением. Для исследования применены методы α - функционала. Показано, что могут быть фиксированные, "плавающие" и распределенные импульсы (разрывы), разработаны методы их выявления и расчета. Решена задача о наивыгоднейшей форме воздушного тормоза.

В главе 6 изучается один из сложнейших разделов оптимизации - так называемые специальные (особые, скользящие) экстремали. Предложены ряд понятий, которые являются фундаментом в классификации чрезвычайно разнообразных специальных экстремалей и в построении их теории. Выведены новые необходимые условия оптимальности особых экстремалей типа равенств и неравенств, доказаны теоремы о порядке вырождения особых экстремалей, теоремы об условиях входа на особые решения и схода. Создана фактически достаточно полная методика расчета специальных экстремалей, проделан синтез довольно общих систем. Показано, что особые экстремали с порядком сложности два будут иметь осциллирующий вход, а особенность может быть таковой, что минимум будет достигаться вообще на элементах, не являющихся функциями.

Следует отметить, что специальные экстремалы встречаются часто в прикладных задачах и не могут игнорироваться как это делалось до сих пор. Впрочем последнее обстоятельство, повидимому, было связано с отсутствием удовлетворительных методов их выявления, расчета и стыковки с обычными (регулярными) экстремалями.

В главе 7 демонстрируется важная роль особых, скользящих и импульсных режимов в разрешимости краевых задач оптимального управления. Предложены методы преодоления местных "ям", ликвидации разрывов функции "невязки", численного (машинного) выявления и расчета скользящих режимов. Главы 6, 7 снабжены большим числом примеров и небольших практических задач, для решения которых используются полученные результаты.

II часть диссертации (гл. 8–10) посвящена приложению новых методов к решению довольно крупных задач автоматики (гл.8), динамики полета, космонавтики (гл.9) и комбинаторики (гл.10).

В главе 8 методом максимина решается задача о минимизации энергии сигнала. Уже в этой задаче выявляется преимущество метода максимина перед всеми другими методами – порядок интегрируемой системы понижается вдвое. При этом попутно решается вопрос и об устойчивости системы. Еще более отчетливо проявляется это преимущество в задаче линейной относительно фазовых координат и нелинейной относительно управлений. При построении полного (т.е. для любых конечных условий) синтеза управления в этой задаче систему порядка $2n$ пришлось бы интегрировать бесконечное число раз, а при решении этой задачи методом максимина система порядка n интегрируется один раз. Здесь же рассмотрены и ряд других задач: задачи с неаналитическими (не дифференцируемыми и разрывными) функционалами (о точном регулировании, о минимуме расхода топлива, о минимуме максимального отклонения), а также проведено подробное исследование особых решений в задаче аналитического конструирования оптимального регулятора и задача построения предельного цикла или задача стабилизации колебаний.

В главе 9 решается ряд задач динамики полета. Так при помощи методов β - функционала решена задача о траекториях входа летательного аппарата в атмосферу планет, обеспечивающих количество интегрального тепла ниже некоторой величины. Интересно, что такой "коридор входа" удалось построить, не интегрируя сложную нелинейную систему уравнений движения. Кроме того, методом максимина построена довольно точная оценка максимальной горизонтальной дальности полета ракеты и самолета с двигателем постоянной тяги, а также оценка максимальной дальности самолета, дирижабля с двигателем постоянной мощности. Новые методы позволили построить эти оценки без интегрирования дифференциальных уравнений движения.

Последняя 10 глава посвящена применению новых подходов в молодой бурно развивающейся области теории оптимизации - в экстремальных задачах комбинаторики. Выведены достаточные условия абсолютного минимума и оценки снизу в ряде таких задач: задача о назначениях, задача целочисленного программирования, задача коммивояжера и др. Показано, что подобные задачи возникают и в авиационной технике.

В работе принята двойная нумерация формул (теорем). Первая цифра обозначает номер параграфа, вторая - номер формулы (теоремы). Все фигуры помещены в конце каждой главы.

3. Некоторые замечания о диссертации.

С момента возникновения вариационного исчисления и до настоящего времени, в течение почти двух столетий, задача оптимизации ставилась следующим традиционным образом: на некотором множестве дан функционал, - надо найти элемент на котором этот функционал имеет наименьшее значение.[I)] Т.е. ставилась задача отыскания отдельных минималей (оптималей). Однако во многих практических задачах, можно сказать в большинстве задач (например, в задачах динамики полета, ракетостроения и космонавтики), важно не столько знание отдельных минималей, как знание множества решений, достаточно близких к наивыгоднейшему решению. Связано это с тем, что реальные задачи описываются весьма схематизированными (хотя и весьма сложными для решения) математическими моделями и у инженера, как правило, масса побочных соображений, не учитываемых математической моделью. Из-за этих обстоятельств оптимальное решение во многих задачах оказывается просто не реализуемым. Поэтому автор наряду с традиционной постановкой задачи предлагает ставить задачу следующим образом: найти подмножество, на котором величина функционала меньше некоторой величины. К этой задаче примыкает и такие постановка: найти более "узкое" подмножество, содержащее абсолютную минималь, а также задача об отыскании оценки снизу величины минимума. Первая из этих задач предоставляет конструктору свободу выбора решений в некотором подмножестве, причем он заранее уверен, что не получит решений хуже данной оценки сверху. Две другие задачи могут быть полезны как в решении традиционной задачи, так и в решении первой задачи и в задаче квазиоптимизации.

Для решения поставленных задач автором разработаны несколько методов, которые объединены общей идеей - построение такого вспо-

---

I) Задача максимизации сводится к задаче минимизации путем изменения знака функционала.

могательного (обобщенного) функционала, который автоматически учитывал бы связи и ограничения, наложенные на систему, и отыскать минимум которого было бы проще, чем основного функционала. Оказалось, что эти методы тесно связаны между собой. При неудачной попытке решить одну из задач решение другой задачи часто выходит в качестве побочного продукта. Главным среди предложенных методов является метод максимина (гл.3), почти все остальные методы следуют из него как частные случаи. В этом методе при построении обобщенного функционала в него вводятся дополнительные переменные, которые выбираются таким образом, чтобы решение удовлетворяло предъявленным требованиям. Надо заметить, что после открытия уравнений Эйлера-Лагранжа и уравнения Гамильтона-Якоби, хотя и произошло расширение класса допустимых кривых (принцип максимума Л.С.Понтрягина), в течение всей истории развития вариационного исчисления фактически не появилось новых алгоритмов расчета экстремалей (если не считать численного метода градиентного спуска в пространстве ~~состояний~~ управлений Л.И.Шатровского).[I] Если исключить из этого списка уравнение Гамильтона-Якоби (Беллмана), т.к. это уравнение в частных производных решается в исключительных случаях, то практически остаются уравнения Эйлера-Лагранжа и принцип максимума, которые (особенно последний) и являются главным орудием исследования оптимальных задач в настоящее время.

Новые постановки задач оптимизации и новые методы исследования как традиционной, так и предложенных постановок оказались обильными в смысле новых алгоритмов. В общей сложности в работе предлагается около 5-ти новых алгоритмов (с модификациями – 8-ми).

I) Уравнения сопряженной системы в принципе максимума являются частным случаем уравнений Эйлера-Лагранжа, а уравнение Беллмана – частным случаем уравнения Гамильтона-Якоби.

Причем надо думать, что это только начало. Весьма существенно, что некоторые из этих алгоритмов выделяют решение не просто подозрительное на экстремум (как принцип максимума или уравнения Эйлера-Лагранжа), а абсолютную минималь. Другие выделяют сильную относительную минималь. Численные реализации ряда этих алгоритмов оказались удобны для машинного счета и ликвидируют такое понятие теории оптимизации как краевая задача.[1] Не являются помехой для них и вырожденные (особые), режимы, а простые ограничения на фазовые координаты могут быть точно учтены без дополнительных трудностей.

Определенное внимание в работе уделено и только зарождающейся ветви теории оптимизации – импульсным (разрывным) режимам. В этой области имеется всего 2-3 работы по простейшему функционалу. В диссертации получены результаты для общего случая и теоретические исследования доведены до алгоритма расчета. Другая довольно сложная ветвь теории оптимизации – специальные (особые и скользящие) экстремали рассмотрена более подробно и достаточно богата новыми результатами. К ним относятся предложенная классификация особых экстремалей, новые необходимые условия оптимальности типа равенств и неравенств, условия входа и схода с особых решений, осцилляционный вход и сход и др.

Многочисленные приложения достаточно полно иллюстрируют преимущества новых методов. Это и понижение порядка интегрируемой системы уравнений вдвое в важном классе систем линейных относительно фазовых координат, построение оценок без интегрирования нелинейных уравнений, исследование устойчивости, достаточные условия абсолютного минимума в экстремальных задачах комбинаторики, выделение областей лучших решений в технических задачах и др.

I) Как показывает практика до 70-90% довольно сложных технических проблем не удается решить принципом максимума из-за краевой задачи.

ЧАСТЬ I

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРЕДЛАГАЕМЫХ МЕТОДОВ ОПТИМИЗАЦИИ

ГЛАВА I

МЕТОДЫ β - ФУНКЦИОНАЛА

§ I. Постановки задач. Основные теоремы. Алгоритм I.

I°. Пусть состояние системы характеризуется элементом x, совокупность которых образует множество X $(x \in X)$. На X определен функционал $I(x)$, ограниченный снизу. Связи и ограничения, наложенные на систему, выделяют из этого множества некоторое подмножество допустимых состояний X^*, $X^* \subseteq X$.

Традиционная постановка задачи оптимизации состоит в следующем:

а) Найти абсолютную минималь[I)] x^* функционала $I(x)$ на X^*.

Наряду с данной задачей мы будем рассматривать также следующие задачи:

б) Выделить более "узкое" подмножество $M \subset X^*$, содержащее абсолютную минималь $x^* \in X^*$.

в) Найти подмножество $N \subset X^*$, такое, что $I(x) \leq c$ на N, где c - некоторое число, $c \geq I(x^*)$.

г) Найти оценки снизу $I(x)$ на X^*.

Для простоты предполагается, что x^* на X^* существует и единственно. Это ограничение не является существенным, большинство результатов без труда обобщается на случай неединственности x^*.

2°. В настоящее время буквально все исследователи, работающие в области оптимизации, заняты традиционной постановкой задачи -

---

I) Для определенности мы будем рассматривать всюду задачу минимизации. Задача максимизации может быть сведена к задаче минимизации путем изменения знака у функционала.

отысканием отдельных минималей (задача "а"). Инженера же, как правило, в реальных задачах интересует именно подмножество $\Lambda \subseteq \Lambda^*$, выбирая из которого любое состояние он получит значение функционала не хуже заданной величины (задача "в") и оценки снизу – насколько далек он от оптимального решения (задача "г"). К тому же у него обычно есть много дополнительных соображений, которые нельзя учесть в математической модели или которые бы её сильно усложнили. Постановка задачи оптимизации в форме "в" предоставляет ему определенную свободу выбора. Задача "г" представляет и самостоятельный интерес. Если имеется оценка снизу, близкая к точной нижней грани функционала, то часто задача оптимизации может быть решена подбором квазиоптимального решения. Задача же "б" может существенно облегчить решение любой из перечисленных задач, т.к. сужает множество, на котором следует искать решение.

3°. Введем множество $Y=\{y\}$ и определим на $X \times Y$ ограниченный функционал[I)] $\beta(x,y)$. Назовем его β – функционалом. Построим обобщенный функционал $\mathcal{J}(x,y)=I(x)+\beta(x,y)$. Зафиксируем y. Назовем нашу исходную задачу отыскание x^* и $I(x^*)=\inf\limits_{x\in X^*} I(x)=m$ – задачей I, а задачу отыскания абсолютной минимали $\bar{x}$ и $\mathcal{J}(\bar{x},y)=\inf\limits_{x\in X}[I(x)+\beta(x,y)]$ – задачей 2. Предполагается, что $\bar{x}$ на $X \times Y$ – существует.

Теорема I.I. (выделение подмножеств, содержащих лучшие, худшие решения и абсолютную минималь). Пусть $X^* \equiv X$, $\bar{x}$ – абсолютная минималь задачи 2: $\bar{\mathcal{J}}=\inf \mathcal{J}(x,y)$, $x\in X$. Тогда: I. Абсолютная минималь задачи I находится в множестве $M=\{x: \beta(x,y)\geq\beta(\bar{x},y),\ y\in Y\}$ 2. Множество $N=\{x: \mathcal{J}+I\leq\bar{\mathcal{J}}+\bar{I},\ y\in Y\}$ содержит такие или лучшие решения (т.е. на N $I(x)\leq I(\bar{x})$). 3. Множество $P=\{x: \beta(x,y)\leq\beta(\bar{x},y),\ y\in Y\}$ содержит такие или худшие решения (т.е. на P $I(x)\geq I(\bar{x})$).

Доказательство: I, 3. Вычитая неравенства $I(x)+\beta(x,y)\geq I(\bar{x})+\beta(\bar{x},y)$ и $\beta(x,y)\leq\beta(\bar{x},y)$, получим $I(x)\geq I(\bar{x})$ на P.

I) Целесообразность введения множества Y будет видна из дальнейшего (см., в частности, гл.3).

Отсюда очевидным образом следует п.I теоремы. 2. Вычитая неравенства $\mathcal{J}+I\le\bar{\mathcal{J}}+\bar{I}$ и $\mathcal{J}\ge\bar{\mathcal{J}}$, получим $I(x)\le I(\bar{x})$ на N. Теорема I доказана. Следствия:

I. Элемент $\bar{x}$ является абсолютной минималью функционала $I(x)$ на множестве $P\subset X^*$.

2. $\bar{x}$ - является элементом, на котором достигается максимум функционала $I(x)$ на множестве $N\subset X$.

3. Если $X=X^*\subseteq P$, то $\bar{x}$ является абсолютной минималью задачи I на X^*. В этом случае $M=\{\bar{x}\}$. 4.Если $\beta=\beta(x)$, $x\in N$, то

$M=\{x:\ \beta(x)\ge\beta(\bar{x})\}$, $P=\{x:\ \beta(x)\le\beta(\bar{x})\}$, $N=\{x:\ \mathcal{J}+I\le\bar{\mathcal{J}}+\bar{I}\}$

Теорема I верна и для случая $X^*\ne X$, когда M, N , P содержат элементы из X^*. 5. Пусть $X^*\subset X$. Если $X^*\cap M=\varnothing$, то $I(\bar{x})$ есть оценка снизу $I(x)$ на X^* (ибо в этом случае $X^*\subseteq P$). 6. Пусть $X^*=X$. Если $X^*\subseteq N$, то имеет место оценка сверху: $I(x)\le I(\bar{x})$ на X^*. Множества M,N,P всегда содержат хотя бы один элемент из X^*, если $\bar{x}\in X^*$. Таким элементом является $\bar{x}$.

Замечания: I. Множество $N\subseteq M$.

Докажем это. Обозначим $\mathring{P}=P-\{\bar{x}\}$. $\mathring{P}\cap N=\varnothing$, ибо на $\mathring{P}$ $I(x)>I(\bar{x})$ на N $I(x)\le I(\bar{x})$. Но $N\subset X$ и $M=X\setminus\mathring{P}$. Следовательно, $N\subseteq M$, что и треб.доказать.

2. Пусть в определении множеств N, P (см.теорему I.I) фигурирует строгое неравенство. Тогда множество N будет содержать решения лучшие, чем $\bar{x}$, а множество P - худшие по сравнению с $\bar{x}$.

3. Зависимость множеств M , N , P от y может быть использована для изменения "размеров" этих множеств.

Теорема I.2 (Существования β - функционала). β - функционалы существуют и число их бесконечно.

Утверждение теоремы очевидно, ибо $\beta(x,y)$ ничем не ограничено на $X\times Y$ и может быть задано бесчисленным количеством способов.

Отсюда вытекает такой алгоритм I (метод выделения подмножества, содержащего абсолютную минималь или лучшие решения при помощи β - функционалов): Задается $\beta_i(x,y)$ такими, чтобы задача 2 решалась просто.

Находим множества M_i и N_i. Тогда $M=\bigcap_i M_i$ (оно всегда не пусто) есть множество, содержащее x^* [1], а $N=\bigcap_i N_i$ (если оно не пусто) есть множество заведомо содержащее $\min\{I(\bar{x}_i)\}$ или лучшие решения.

Теорема I.3 (оценка снизу). Пусть $\beta(x,y)$ определено и ограничено на $X \times Y$. Имеет место оценка снизу на X :

$$I(x) \geq I(\bar{x}) + \beta(\bar{x},y) - \sup_x \beta(x,y)\,. \qquad (I.I)$$

Доказательство: Складывая неравенства $I(x)+\beta(x,y) \geq I(\bar{x})+\beta(\bar{x},\bar{y})$ и $-\beta(x,y) \geq -\sup_x \beta(x,y)$ получим искомую оценку.

Замечания: 4. Для случая $\beta=\beta(x)$ оценка (I.I) принимает вид

$$I(x) \geq I(\bar{x}) + \beta(\bar{x}) - \sup_X \beta(x) \quad \text{или} \quad I(x) \geq \inf_X \mathcal{I}(x) - \sup_X \beta(x)\,. \qquad (I.I)'$$

5. Когда $X \neq X^*$. Оценка (I.I) справедлива и на X^*, ибо $X^* \subseteq X$. В этом случае можно использовать более точную оценку

$$I(x) \geq \inf_X \mathcal{I}(x) - \sup_{X^*} \beta(x) \qquad (I.I)''$$

или еще более точную

$$I(x) \geq \inf_{X^*} \mathcal{I}(x) - \sup_{X^*} \beta(x)\,. \qquad (I.I)'''$$

6. Зависимость оценки (I.I) от y может быть использована для её улучшения

$$I(x) \geq \sup_y \left[\inf_x \mathcal{I}(x,y) - \sup_x \beta(x,y) \right]. \qquad (I.I)^{IV}$$

При использовании оценок (I.I) – (I.I)''' приходится решать задачу $\hat{\beta}=\sup \beta$. Решение этой задачи может быть также использовано для отыскания множеств M, N, P. А именно имеет место

Теорема I.4. Пусть $X=X^*$, $\hat{x}$ – абсолютная максималь задачи $\hat{\beta}=\sup_X \beta(x,y)$. Тогда: I. Абсолютная минималь задачи I находится в множестве $M=\{x:\ I+\beta \leq \hat{I}+\hat{\beta},\ y\in Y\}$ 2. Множество $N=\{x:\ \beta-I \geq \hat{\beta}-\hat{I},\ y\in Y\}$ содержит такие или лучшие решения. 3. Множество $P=\{x:\ I+\beta \geq \hat{I}+\hat{\beta},\ y\in Y\}$ содержит такие или худшие решения.

Здесь $\hat{I}=I(\hat{x})$.

I) На этом более "узком" множестве найти x^* уже проще. Заметим, что сужение области поиска решения особенно важно в методе динамического программирования, т.к. приводит к резкому уменьшению потребной оперативной памяти и количества вычислений.

Доказательство: I, 3. Вычитая неравенства $I+\beta \geq \hat{I}+\hat{\beta}$ и $\beta \leq \hat{\beta}$, получим на P $I \geq \hat{I}$. Отсюда следует п.I. 2. Вычитая неравенства $\beta - I \geq \hat{\beta} - \hat{I}$ и $\beta \geq \hat{\beta}$ и умножая полученный результат на − I, получим, что на N $I \leq \hat{I}$. Теорема доказана.

Пример I.I. Найти минимум функционала

$$I = -e^{-x^2}\cos x^2 - \frac{0{,}1}{x^2-0{,}2x+1} \qquad -\infty < x < \infty. \qquad (I.2)$$

Возьмем $\beta(x) = \frac{0{,}1}{x^2-0{,}2x+1}$. Тогда $J = I+\beta = -e^{-x^2}\cos x^2$. Минимум этого выражения найти легко: $\bar{x}=0$. Следовательно, согласно теоремы I.I абсолютная минималь исходного функционала находится в множестве $M=\{x: \beta(x) \geq \beta(0)\}$, т.е. $\frac{0{,}1}{x^2-0{,}2x+1} \geq 0{,}1$. Решая это неравенство, получим: $0 \leq x \leq 0{,}2$. В этом узком диапазоне найти абсолютный минимум уже нетрудно любым из известных методов. Оценка снизу (теорема I.3) дает: $J(0) - \sup\beta = -1-0{,}101 = -1{,}101$. Значение $I(0) = -1{,}100$, т.е. $I(x)$ при $x=0$ весьма мало отличается от абсолютного минимума.

Пример I.2. Найти минимум

$$I = -\frac{0{,}1}{x^2-2x+10} + \cos 4\pi x - 4\cos 2\pi x, \qquad -\infty < x < \infty. \qquad (I.3)$$

Возьмем $\beta(x) = -\cos 4\pi x + 4\cos 2\pi x$. $J = I+\beta = -\frac{0{,}1}{(x-1)^2+9}$, $\bar{x}=1$.

Это решение является абсолютной минималью задачи I на множестве $P=\{x: \beta(x) \leq \beta(1)\}$, т.е. $-\cos 4\pi x + 4\cos 2\pi x \leq 3$. Преобразуя это неравенство, получим[I]: $-8\sin^4 \pi x \leq 0$. Следовательно, $P=\{x: |x| < \infty\}$, т.е. множество P совпало с X^*. Таким образом (см.следствие I) $\bar{x}=1$ абсолютная (и единственная) минималь $I(x)$.

I) Бронштейн И.Н., Семендяев К.А., Справочник по математике, ГИТТЛ, 1954 г., стр.I84.

Пример I.3. Найти минимум

$$I=2x^4+x^2-2x+1 \qquad \text{на} \quad X^*=\{x:\ |x|<\infty\} \qquad (I.4)$$

Задается рядом $\beta_i(x)$ и по теореме I.I находим множества M.

I) $\beta_1=2x$, $\quad J=I+\beta=2x^4+x^2+1$, $\bar{x}=0$, $\beta\geq\bar{\beta}$, $M_1=\{x:\ x\geq 0\}$

2) $\beta_2=-x^2+2x$, $\quad J=2x^4+1$, $\bar{x}=0$, $\beta\geq\bar{\beta}$, $M_2=\{x:\ 0\leq x\leq 2\}$, $I(x^*)\geq 0$ теор.I.3.

3) $\beta_3=-2x^2+2x-\frac{1}{2}$, $\quad J=2x^4-x^2+\frac{1}{2}$, $\bar{x}_{1,2}=\mp\frac{1}{2}$, $M_3=\{x:\ -\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{3}{2}\}$, $M_4=\{x:\ \frac{1}{2}\leq x\leq\frac{1}{2}\}$

Мы видим, что диаметр множества $M=\bigcap M_i$ последовательно уменьшался пока оно не выходилось в точку $\bar{x}=1/2$. Следовательно. эта точка и есть единственная абсолютная минималь нашей задачи, $I(\bar{x})=3/8$.

4°. На фиг.I.I[I)] дается геометрическая иллюстрация теоремы I.I. Там нанесены кривые $I(x)$, $J(x)$, $\beta(x)$, $I(x)+\frac{1}{2}\beta(x)$ и точка $\bar{x}$. Множество P это совокупность x, для которых $\beta(x)\leq\beta(\bar{x})$, множество $M=X\setminus P$ и множество N – это совокупность x, для которых $I(x)+\frac{1}{2}\beta(x)\leq I(\bar{x})-\frac{1}{2}\beta(\bar{x})$. На фиг.I.1 в частности видно, что $N\subset M$.

На фиг.I.2 изображен случай, когда $I=I(x_1,x_2)$ – функция двух переменных. 5°. Рассмотрим условия сходимости $\inf\limits_{x\in X} J(x)$ и $\inf\limits_{x\in X^*} I(x)$ и $\bar{x}$ к X^* при применении алгоритма I, когда задана последовательность $\beta_i(x)$ $i=1,2,\ldots$. Эта последовательность порождает последовательность множеств M_i, N_i и значений функционала $J(\bar{x}_i)$. Последовательность $\{\inf\limits_i J_i(\bar{x}_i)\}$ при $i\to\infty$ монотонно убывает и ограничена снизу, поэтому она имеет предел. Если этот предел равен одной из нижних оценок, то $J_i(\bar{x})=I(x^*)$. Рассмотрим теперь последовательность диаметров $d(M), d(N)$ множеств $M=\bigcap\limits_i M_i$; $N=\bigcap\limits_i N_i$ – при $i\to\infty$. Эта последовательность монотонно убывает и ограничена снизу: $d\geq 0$. Следовательно, она также имеет предел. Отсюда вытекает следующий простой критерий сходимости.

Теорема I.5. Пусть абсолютная минималь $I(x)$ на $X=X^*$

I) Все фиг. даются в конце каждой главы.

– единственная. Если $d(M) \to 0$, то $\bar{x} = \lim_{i\to\infty} M(i) = X^*$

В самом деле в этом случае множество, содержащее абсолютную минималь: $M = \bigcap_i M_i$ стягивается в точку. Следовательно, эта точка и является абсолютной минималью задачи I.

Пусть $W_s(x)$ $s=1,2$ – некоторая последовательность функций. Возьмем $\beta_i(x)$ в виде

$$\beta_i(x) = \sum_{s=1}^{i} C_s W_s(x), \qquad (I.5)$$

где C_s – постоянные.

Будем постоянные C_s выбирать из условия

$$\Delta_i = \min_c | I(\bar{x}_i) - \inf_X J_i(x) + \sup_X \beta_i(x)|.$$

Величина Δ_i представляет собой разность между функционалом $I(x)$ и его оценкой снизу. Т.е. Δ показывает насколько значение $I(\bar{x}_i)$ отличается от оптимального. Условимся называть эту величину Δ – оценкой. Очевидно, что последовательность $\{\Delta_i\}$ монотонно убывает, ибо каждая последующая сумма $\sum_{s=1}^{i} C_s W_s(x)$ содержит предыдущую. В то же время она ограничена снизу $(\Delta_i \geq 0)$. Следовательно последовательность $\{\Delta_i\}$ сходится. Из определения Δ вытекает следующее утверждение:

Теорема I.6. Если $\Delta_i \to 0$, то $\inf_X J(x) \to \inf_{X^*} I(x)$.

Теорема I.7. Пусть $X = X^*$, $\beta_i = C_i \beta(x)$; $I(x)$, $\beta(x)$ – непрерывны и $\beta(x)$ – ограничено на X. Тогда при $C_i \to 0$, $J(\bar{x}) \to m = \inf I(x)$ на X^*.

Утверждение теоремы I.7 прямо вытекает из непрерывности $J(x)$.

Эта теорема может быть полезна при отыскании локальных минимумов $I(x)$ методом последовательных приближений. В самом деле, пусть $C_1 = I$ и задача $\inf J(x)$ решается просто. Тогда в силу непрерывности мы вправе ожидать, что при малых изменениях C минималь $\bar{x}_1$ сместится мало, т.е. $\bar{x}_1$ является хорошим начальным приближением для $C_2 < C_1$. Как известно, хорошее начальное приближение играет важную роль в скорости сходимости. Последовательно уменьш шая C до 0 , мы придем к x^*.

Предложенные критерии сходимости могут быть использованы при решении задач а, б, в, г.

Приложение I к § I.

Модификация теоремы I.I

В § I был рассмотрен случай, когда к функционалу $I(x)$ подбиралась такая добавка $\beta(x)$, чтобы задача 2 решалась проще. Иногда удобнее сразу задаваться такими функционалами $\mathcal{J}(x)$, чтобы задача $\inf \mathcal{J}(x)$ решалась просто. В этом случае теорему I.I удобнее сформулировать в следующем виде:

Теорема I.I$'$. Пусть $X \equiv X^*$, $\bar{x}$ - абсолютная минималь задачи $\bar{\mathcal{J}} = \inf \mathcal{J}(x)$. Тогда: I. Абсолютная минималь задачи I находится в множестве $M = \{x: \mathcal{J} - I \geq \bar{\mathcal{J}} - \bar{I}\}$, 2. Множество $N = \{x: \mathcal{J} + I \leq \bar{\mathcal{J}} + \bar{I}\}$ содержит такие или лучшие решения. 3. Множество $P = \{x: \mathcal{J} - I \leq \bar{\mathcal{J}} - \bar{I}\}$ содержит такие или худшие решения.

Приложение 2 к § I.

Метод спуска по множеству лучших решений. Алгоритм 2.

Теорема I.I позволяет построить следующий

Алгоритм 2 (метод спуска по множеству лучших решений). Берем любую точку x_1 из X^* и конструируем вспомогательный функционал $\mathcal{J}_1(x)$ таким образом, чтобы эта точка была его минималью. Находим множество таких или лучших решений N_1 . Берем из этого множества точку x_2 , по тому же принципу строим $\mathcal{J}_2(x)$, находим множество N_2 и т.д.

Очевидно, что $N_1 \supseteq N_2 \supseteq N_3 \supseteq \ldots$. Предположим, что в результате множество N_i выродилось в точку. Обозначим её x_N .

Теорема I. Пусть $I(x), \mathcal{J}_i(x)$ - непрерывны и дифференцируемы (по Фреше) на X^* . Если $N = x_N$, то точка x_N - является стационарной точкой функционала $I(x)$ на X^* .

Доказательство: Точка x_N минималь $\mathcal{J}(x)$, поэтому из непрерывности и дифференцируемости $\mathcal{J}(x)$ следует, что $\mathcal{J}'(x_N)=0$. Т.к. x_N единственная точка N_i на X^*, то на X^* имеет место неравенство $I(x)+\mathcal{J}(x)\geq I(x_N)+\mathcal{J}(x_N)$, т.е. $\mathcal{J}(x_N)=\inf_{x\in X^*}[I(x)+\mathcal{J}(x)]$. Вследствии непрерывности и дифференцируемости $I(x)$ $\mathcal{J}(x)$ получаем: $I'(x_N)+\mathcal{J}'(x_N)=0$. Учитывая, что $\mathcal{J}'(x_N)=0$, находим, что и $I'(x_N)=0$. Теорема доказана.

Замечание I. Теорема I также справедлива, если точка x_N – является изолированной точкой множества N.

Теорема 2. Если в точке x_N выполнено условие $\beta(x_N)-I(x_N)=\sup_{x\in X^*}[\beta(x)-I(x)]$, то точка x_N – является абсолютной минималью задачи I.

Доказательство: Вычитая неравенства $\beta-I\leq\beta_N-I_N$ и $\beta\geq\beta_N$, получим $I\geq I_N$ на X^*, что и треб. док.

Если условие теоремы 2 выполнено только по отношению к некоторой окрестности точки x_N, то точка x_N является относительной минималью задачи I.

Пример спуска по множеству лучших решений (для задачи условного экстремума) будет рассмотрен в § 4 (прим.13).

Преимущество спуска по множеству лучших решений по сравнению с градиентным методом в том, что можно шагать крупно не рискуя получить худших значений функционала.

Приложение 3 к § I.

Обобщение теорем I.I, I.I', I.4

Т.к. абсолютная минималь у $\inf_X \kappa f(x)$, где $\kappa=const>0$ не зависит от κ, то теоремы I.I, I.I', I.4 будут верны и в следующих формулировках:

Теорема I.III. Пусть $X^*\equiv X$, $\bar{x}$ – абсолютная минималь задачи 2: $\inf_X \mathcal{J}(x,y)$ Тогда: Абсолютная минималь задачи I находится в множестве $M=\{x:\ \kappa\mathcal{J}-I\geq\kappa\bar{\mathcal{J}}-\bar{I},\ y\in Y\}$. 2. Множество

$N=\{x:\ \kappa\mathcal{J}+I\leq\kappa\bar{\mathcal{J}}+\bar{I},\ y\in Y\}$ содержит такие или лучшие решения.
3. Множество $P=\{x:\ \kappa\mathcal{J}-I\leq\kappa\bar{\mathcal{J}}-\bar{I},\ y\in Y\}$ содержит такие или худшие решения.

Теорема I.I'П. Пусть $X\equiv X^*$, $\bar{x}$ – абсолютная минималь задачи 2: $\inf\limits_X \mathcal{J}(x)$. Тогда: I. Абсолютная минималь задачи I находится в множестве $M=\{x:\ \kappa\mathcal{J}-I\geq\kappa\bar{\mathcal{J}}-\bar{I}\}$. 2. Множество $N=\{x:\ \kappa\mathcal{J}+I\leq\kappa\bar{\mathcal{J}}+\bar{I}\}$ содержит такие или лучшие решения. 3. Множество $P=\{x:\kappa\mathcal{J}-I\leq\kappa\bar{\mathcal{J}}-\bar{I}\}$ содержит такие или худшие решения.

Теорема I.4 П. Пусть $X=X^*$, $\hat{x}$ - абсолютная минималь задачи $\hat{\beta}=\sup\limits_X \beta(x,y)$. Тогда: I. Абсолютная минималь задачи I находится в множестве $M=\{x:\ I+\kappa\beta\leq\hat{I}+\kappa\hat{\beta},\ y\in Y\}$ 2. Множество $N=\{x:\ \kappa\beta-I\geq\kappa\hat{\beta}-\hat{I},\ y\in Y\}$ содержит такие или лучшие решения.
3. Множество $P=\{x:\ I+\kappa\beta\geq\hat{I}+\kappa\hat{\beta},\ y\in Y\}$ содержит такие или худшие решения.

Постоянная $\kappa>0$ подбирается таким образом, чтобы повлиять на интересующее нас множество в нужном направлении (расширить его или сузить).

Приложение 4 к § I.

Метод β - функционала в случае ограничений типа равенств и неравенств.

I°. Пусть на множестве X задан функционал $I(x)$ ограниченный снизу. Допустимое множество $X^*\neq\varnothing$ выделено из X при помощи функционалов

$$F_i(x)=0 \quad i=1,2,\dots,\kappa, \quad \Phi_j(x)\leq 0 \quad j=1,2,\dots,q. \tag{I}$$

Возьмем β - функционал в виде (по i,j – сумма)

$$\beta(x,y)=\lambda_i(x,y)F_i(x)+\omega_j(x,y)\Phi_j(x), \tag{2}$$

где $\lambda_i(x,y)$, $\omega_j(x,y)$ - некоторые функции $x, y, y\in Y$, причем $\omega_j(x,y)\geq 0$
Построим обобщенный функционал

$$\mathcal{J}(x,y)=I(x)+\lambda_i(x,y)F_i(x)+\omega_j(x,y)\Phi_j(x), \tag{3}$$

Теорема I. Пусть $x^* \in X^*$ – существует, y – фиксировано. Для того, чтобы $\bar{x}$ был абсолютной минималью функционала $I(x)$ на X^*, необходимо и достаточно существование функционала такого, что

I) $\mathcal{J}(\bar{x}, y) = \inf\limits_{x \in X} \mathcal{J}(x, y)$, 2) $\bar{x} \in X^*$, 3) $\omega_j(x, y) \geq 0$ на X, 4) $\beta(\bar{x}, y) = 0$ (4)

Доказательство: Достаточность. Из п.I (4) имеем: $I + \lambda_i F_i + \omega_j \Phi_j \geq \bar{I} + \bar{\lambda}_i \bar{F}_i + \bar{\omega}_j \bar{\Phi}_j$. Учитывая п. 4 (4) получаем: $I + \lambda_i F_i + \omega_j \Phi_j \geq \bar{I}$. Рассмотрим это неравенство на X^*. На X^* $\lambda_i F_i = 0$, $\omega_j \bar{\Phi}_j = 0$, т.е. $I(x) \geq I(\bar{x})$. Т.к. $\bar{x} \in X^*$, то это абсолютная минималь $I(x)$ на X^*.

Необходимость. (метод построения). Пусть $x^* \in X^*$ – существует. Построим $\beta(x, y)$ следующим образом. Положим $\lambda_i \equiv 0$ на X^*, а на $X - X^*$ функции λ_i, $\omega_j \geq 0$ выберем таким образом, чтобы $\mathcal{J}(x) > m$. Тогда $\mathcal{J}(x^*) = \inf\limits_{x \in X} \mathcal{J}(x)$, $x^* \in X^*$, $\omega_j \geq 0$, $\bar{\beta} = 0$ – по построению. Теорема доказана.

Достаточное заключение этой теоремы совпадает с теоремой I в [83].

Теорема 2 (оценка снизу). Пусть y – фиксировано, $\bar{x}$ – минималь $\mathcal{J}$ (I) при условии $\omega_j(x, y) \geq 0$. Тогда $\mathcal{J}(\bar{x}, y)$ – оценка снизу функционала $I(x)$ на X^*.

Доказательство. Теорема очевидна, ибо на X^* $\lambda_i F_i \equiv 0$, $\omega_j \Phi_j = 0$ (т.е. $\bar{\beta}(\bar{x}, y) \leq 0$) и поэтому на X^* $\mathcal{J}(\bar{x}, y) \leq I(x)$, что и тр. док.

Как и для всякого β – функционала в данном случае можно выделить множества

$$M = \{x : \beta \geq \bar{\beta}\}, \quad N = \{x : \mathcal{J} + I \leq \bar{\mathcal{J}} + \bar{I}\}, \quad F = \{x : \beta = \bar{\beta}\}. \qquad (5)$$

Свободу в выборе y можно использовать для улучшения нижней оценки и уменьшения размеров множеств M, N. Заметим только, что $\bar{x} = \bar{x}(y)$ и для каждого y соответствующее $\bar{x}$ надо находить по $\inf \mathcal{J}(x, y)$, $x \in X$.

Замечание I. β – функционал (2) можно строить в виде

$$\beta(x) = \frac{1}{2} a \sum_{i=1}^{k} F_i^2(x) + \sum_{j=1}^{q} a^{\Phi_j(x)}.$$

Можно показать, что при определенных условиях[1], когда $a \to \infty$, получим: $\bar{\mathcal{I}} \to m$, $\bar{x} \to x^*$.

Приложение 5к §1.

Частный случай алгоритма I.

В частности, когда $\beta \equiv 0$, получаем следующий частный случай алгоритма I: задаемся $x_1 \in X^*$, находим $I(x_1)$. Абсолютная минималь будет находиться в множестве $M_1 = \{x: I(x) \le I(x_1), x \in X^*\}$. Причем на M_1 имеет место оценка сверху: $I(x) \le I(x_1)$. Задаемся $x_2 \in M_1$, находим $I(x_2)$. Очевидно, что $I(x_2) \le I(x_1)$. Абсолютная минималь будет содержаться в множестве $M_2 = \{x: I(x) \le I(x_2), x \in X^*\}$, $M_2 \subseteq M_1$. Оценка сверху на M_2: $I(x) \le I(x_2)$ и т.д. В результате получим последовательность вложенных друг в друга множеств $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \ldots \supseteq M_i \supseteq \ldots$ и не возрастающих оценок сверху $I(x_1) \ge I(x_2) \ge \ldots \ge I(x_i) \ge \ldots$.

Пусть X^* – метрическое пространство. Если диаметр множества $d(M_i) \to 0$, то $x_i \to x^*$. Если к тому же $I(x)$ непрерывно на X^*, то $I(x_i) \to I(x^*)$ и оценки сверху стремятся к $I(x^*)$.

§ 2. Метод совмещения экстремумов. Алгоритм 3.

I°. Пусть даны две задачи:

I) Задача I: $I(x^*) = \inf I(x)$, $x \in X^*$.

2) Задача 2: $\mathcal{J}(\bar{x}) = \inf [I(x) + \beta(x)]$, $x \in X$.

Предположим, что x^*, $\bar{x}$ – существуют.

Назовем задачи I и 2 эквивалентными, если все соответствующие минимали этих задач совпадают между собой.

Теорема 2.I (Условие эквивалентности задач I и 2).

Пусть $X = X^*$. Для того, чтобы задачи I и 2 были эквивалентны ~~необходимо~~ достаточно, чтобы $\bar{x} = \hat{x}$, где $\beta(\hat{x}) = \sup \beta(x)$, $x \in X$.

I) $I(x)$, $\Phi_j(x)$, $F_i(x)$ непрерывны, X – компакт, X^* – замкнуто и не содержит изолированных точек, $x^* \in X^*$ – существует.

Доказательство. Пусть $\bar{x} = \hat{x}$. Тогда $\inf \mathcal{J}(x) - \sup \beta(x) = \mathcal{J}(\bar{x}) - \beta(\bar{x}) = I(\bar{x}) + \beta(\bar{x}) - \beta(\bar{x}) = I(\bar{x})$. Но с другой стороны $\inf \mathcal{J} - \sup \beta \leq \inf I$, т.е. $I(\bar{x}) \leq I(x^*)$. Т.к. x^* – абсолютная минималь и $X = X^*$, то может быть только $I(\bar{x}) = I(x^*)$, т.е. $\bar{x} = x^*$. Теорема доказана.

Замечания:

I. Если $\beta(\bar{x}) = 0$, то $\inf \mathcal{J}(x) = \inf I(x)$.

2. Если $\bar{x} = \hat{x}$, то оценка снизу (I.I) § I совпадает с точкой нижней гранью функционала.

Из теоремы 2.I вытекает следующий

Алгоритм 3 (метод совмещения экстремумов). Берем некоторый ограниченный функционал $\beta(x, \mathbf{y})$, где $\mathbf{y} \in Y$.
Решаем задачу $\inf\limits_{X^*} [I(x) + \beta(x, \mathbf{y})]$, находим минималь $\bar{x}_1 = \bar{x}_1(\mathbf{y})$.
Из условия $\sup\limits_{X^*} \beta(x, \mathbf{y})$ находим $\bar{x}_2 = \bar{x}_2(\mathbf{y})$. Приравниваем

$$\bar{x}_1(\mathbf{y}) = \bar{x}_2(\mathbf{y}) \qquad (2.I)$$

и из полученного уравнения находим корни $\mathbf{y}_i$. Эти корни определяют минималь задачи I: $\bar{x} = \bar{x}_1(\mathbf{y}_i) = \bar{x}_2(\mathbf{y}_i)$.

Таким образом задача отыскания абсолютной минимали сводится к задаче нахождения хотя бы одного корня уравнения совмещения экстремумов (2.I). Существование и трудности отыскания корней уравнения (2.I) зависят от того, насколько удачно выбран β – функционал и достаточную ли степень "свободы" дает в его деформации вектор $\mathbf{y}$.

Подчеркнем, что в отличие от обычного метода отыскания минимума функций конечного числа переменных, в котором берутся частные производные, приравниваются нулю и из полученной системы находятся стационарные точки, в данном методе мы находим не просто точки подозрительные на локальный экстремум (или точки перегиба), а абсолютные минимали. Т.е. существование решения у уравнения совмещенных экстремумов является достаточным условием абсолютного минимума у функционала I. По вопросам существования решения в математике сделано довольно много и уравнение (2.I) не только устанавливает связь между двумя различными проблемами, но и открывает определенные возможности в решении задач оптимизации. Отметим также, что уравнение (2.I) не требует, чтобы функционал был непрерывен и дифференцируем, т.е. оно имеет гораздо более широкую область применения.

Если минимали не выражаются явно, то уравнения совмещения экстремумов можно записать неявно в виде системы:

$$\varphi_1(x,c)=0 \qquad \varphi_2(x,c)=0, \qquad (2.I')$$

где функции φ_1, φ_2 получены из условий: $\inf\limits_x \mathcal{J}(x,c)$, $\sup\limits_x \beta(x,c)$.

Пример 2.I. Найти минималь функции:

$$I=2x^4+x^2-2x+1, \qquad -\infty<x<\infty.$$

Применим алгоритм 3. Возьмем $\beta=-cx^2+2x$. Тогда $\mathcal{J}=I+\beta=2x^4+(1-c)x^2+1$. Обозначим $x^2=w$ и подставим в $\mathcal{J}$: $\mathcal{J}=2w^2-(1-c)w+1$. Найдем минимум этой функции: $\mathcal{J}'_w=4w+(1-c)=0$, $\bar{w}=\bar{x}_1^2=\frac{1}{4}(c-1)$. Найдем теперь максимум функции: $\beta(x)=-cx^2+2x$, $\beta'_x=-2cx+2=0$, $\bar{x}_2=1/c$. Приравниваем экстремумы этих функций: $\bar{x}_1^2=\bar{x}_2^2$, $\frac{1}{4}(c-1)=1/c^2$, $c^3-c^2-4=(c-2)(c^2+c+1)$. Это уравнение имеет единственный корень: $\bar{c}=2$. Следовательно, $\bar{x}=1/c=1/2$.

§ 3. Замечание о γ - функционале.

I°. Если взять

$$\beta(x)=[\gamma(x)-1]\,I(x), \qquad (3.I)$$

то $\mathcal{J}(x) = I(x)\gamma(x)$. Такая форма обобщенного функционала оказывается в ряде случаев более удобной, т.к. позволяет подбирать такой множитель к $I(x)$, чтобы функционал $\mathcal{J}(x)$ принял более простой вид. Перенося некоторые из результатов по β - функционалу на данный случай, получим, что когда $X = X^*$ и найдена абсолютная минималь $\bar{x}$, задачи 2

$$\inf_X \mathcal{J}(x) = \inf_X I(x)\gamma(x) , \qquad (3.2)$$

то:

I) Множество $M = \{x: \mathcal{J} - I \geq \bar{\mathcal{J}} - \bar{I},\ x \in X\}$ содержит абсолютную минималь задачи I.

2) Множество $N = \{x: I\cdot\gamma \leq \bar{I}\cdot\bar{\gamma},\ x \in X\}$ содержит такие или лучшие решения задачи I (т.е. на N $I(x) \leq I(\bar{x})$).

3) Множество $P = \{x: \mathcal{J} - I \leq \bar{\mathcal{J}} - \bar{I}\ x \in X\}$ содержит такие или худшие решения задачи I (т.е. на P $I(x) \leq I(\bar{x})$).

Все эти утверждения следуют из (3.I) и теоремы I.I.

Оценка снизу (теорема I.3) с учетом (3.I) принимает вид:

$$I(x) \geq \inf_X \mathcal{J} - \sup_X (\mathcal{J} - I) \qquad (3.3)$$

Условие эквивалентности задач I и 2 (теорема 2.I) в данном случае таково $(X = X^*)$: $\bar{x}$ и $\hat{x}$ найденные соответственно из решения задач $\inf_{X^*} \mathcal{J}(x)$ и $\sup_{X^*} [\mathcal{J}(x) - I(x)]$ - должны совпадать.

Алгоритм 3 (метод совмещения экстремумов) переносится на данный случай без изменений.

2°. Однако для данного случая можно получить и ряд новых результатов. Рассмотрим общий случай. Пусть на $X \times Y$ определен функционал $\gamma(x,y) \neq 0$.

Назовем его γ - функционалом. Построим функционал $\mathcal{J}(x,y) = I(x)\gamma(x,y)$. В дальнейшем нам понадобятся следующие очевидные усиления неравенств:

а) Если $a \geq b \geq 0$ и $c \geq 1$, то $ac \geq b \geq 0$ и $a \geq \frac{b}{c} \geq 0$. (3.4)

б) Если $a \leq b \leq 0$ и $c \geq 1$, то $ac \leq b \leq 0$ и $a \leq \frac{b}{c} \leq 0$. (3.5)

<u>Теорема 3.I.</u> Пусть $X = X'$, $\bar{x}$ – абсолютная минималь задачи $\inf_{x} \mathcal{J}(x,y)$, где $\mathcal{J} = I(x)\cdot\gamma(x,y)$

$\bar{\text{I}}$. Если $\bar{I}(x) \geq 0$ на X, то

I) Множество $P = \{x: \gamma > 0,\ \gamma \leq \bar{\gamma},\ x \in X,\ y \in Y\}$ содержит такие или худшие решения задачи I (т.е. на P $I(x) \geq I(\bar{x})$).

2) Множество $N = \{x: \gamma < 0,\ \gamma \leq \bar{\gamma},\ x \in X,\ y \in Y\}$ содержит такие или лучшие решения задачи I (т.е. на N $\bar{I}(x) \leq I(\bar{x})$).

3) Абс. минималь находится в множестве $M = X \setminus \mathring{P}$, где $\mathring{P} = \{x: \gamma > 0,\ \gamma < \bar{\gamma},\ x \in X,\ y \in Y\}$

$\bar{\text{П}}$. Если $\bar{I}(x) \leq 0$ на X, то

I) Множество $P = \{x: \gamma > 0,\ \gamma \geq \bar{\gamma},\ x \in X,\ y \in Y\}$ содержит такие или худшие решения задачи I (т.е. на P $I(x) \geq I(\bar{x})$).

2) Множество $N = \{x: \gamma < 0,\ \gamma \overset{\leq}{\geq} \bar{\gamma},\ x \in X,\ y \in Y\}$ содержит такие или лучшие решения задачи I (т.е. на N $\bar{I}(x) \leq I(\bar{x})$).

3) Абсолютная минималь находится в множестве $M = X \setminus \dot{P}$, где $\mathring{P} = \{x: \gamma > 0,\ \gamma < \bar{\gamma},\ x \in X,\ y \in Y\}$.

<u>Доказательство:</u> $\bar{\text{I}}$. I) Пусть $\gamma > 0$. Умножая $I\gamma \geq \bar{I}\bar{\gamma} \geq 0$ на $1/\gamma > 0$, получим $\underbrace{I \geq \bar{I}\bar{\gamma}/\gamma \geq 0}_{\text{Примем } I=a,\ \bar{I}\bar{\gamma}/\gamma = b,\ \bar{\gamma}/\gamma = c.}$. Из (3.4) следует, что когда $\frac{\bar{\gamma}}{\gamma} \geq 1$, т.е. $\bar{\gamma} \geq \gamma$, имеем $I \geq \bar{I}$.

2) Пусть $\gamma < 0$. Умножая $0 \geq I\gamma \geq \bar{I}\bar{\gamma}$ на $1/\gamma < 0$, получим $\underbrace{0 \leq I \leq \bar{I}\bar{\gamma}/\gamma}_{\text{Примем } \bar{I}\bar{\gamma}/\gamma = a,\ I = b,\ \gamma/\bar{\gamma} = c.}$. Если $\frac{\bar{\gamma}}{\gamma} \geq 1$ (см. (3.4)), т.е. $\bar{\gamma} \geq \gamma$, то $\bar{I} \geq I$, т.к. $\bar{\gamma}/\gamma > 0$.

3) Данный пункт очевидным образом следует из п.I).

$\bar{\text{П}}$. I) Пусть $\gamma > 0$. Умножая $0 \geq I\gamma \geq \bar{I}\bar{\gamma}$ на $\frac{1}{\gamma} > 0$, получим $0 \geq I \geq \bar{I}\bar{\gamma}/\gamma$
Если $\frac{\bar{\gamma}}{\gamma} > 1$, т.е. $\gamma \leq \bar{\gamma}$ (см. (3.5)), то $\bar{I} \leq I$.

2) Пусть $\gamma < 0$. Умножая $I\gamma \geq \bar{I}\bar{\gamma} \geq 0$ на $\frac{1}{\gamma} < 0$, получим $I \leq \bar{I}\,\frac{\bar{\gamma}}{\gamma} \leq 0$
Если $\frac{\bar{\gamma}}{\gamma} \geq 1$ (см. (3.5)), т.е. $\bar{\gamma} \overset{\geq}{\leq} \gamma$, то $I \leq \bar{I}$.

3) Данное утверждение вытекает из $\bar{\text{П}}$ п.I). Теорема доказана.

<u>Пример 3.I.</u> Дан функционал

$$I = \frac{x^2 - \cos x + 1}{-x^2 + 0{,}2x - 1} \qquad -\infty < x < \infty .$$

Возьмем $\gamma = -x^2 + 0{,}2x - 1$. Тогда $\mathcal{J} = I(x)\gamma(x) = x^2 \cos x + 1$, $\bar{x} = 0$. (т.к. $I(x) < 0$ и $\gamma(x) < 0$ на $-\infty < x < \infty$, то согласно теоремы 3.I лучшие решения в области $\gamma(x) \geq \gamma(\bar{x})$ или $(x-0{,}1)^2 + 0{,}99 \leq 1$, $(x-0{,}1) \leq 0{,}1$, $0 \leq x \leq 0{,}2$

§ 4. Применение β – функционала к теории экстремумов функций конечного числа переменных и задачам оптимизации описываемым обыкновенными дифференциальными уравнениями.

I°. Пусть дан функционал

$$I = f_0(x)\,, \tag{4.I}$$

где x - n – мерный вектор, удовлетворяющий независимым уравнениям

$$f_i(x) = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, m \leq n. \tag{4.2}$$

Функции $f_i(x)$ определены в некоторой открытой области n -мерного векторного пространства X. Допустимое подмножество X^* выделено из X при помощи уравнений (4.2).

Возьмем какой-нибудь функционал $\beta(x)$ такой, чтобы найти $\inf[f_0(x) + \beta(x)]$ на X^* было проще. Тогда из решения этой задачи 2 согласно теоремам § I можно извлечь следующую информацию о задаче I:

I) Абсолютная минималь находится в множестве $M = \{x : \beta(x) \geq \beta(\bar{x})\}$.

2) Множество $N = \{x : 2f_0 + \beta \leq 2\bar{f}_0 + \bar{\beta}\}$ заведомо содержит такие или лучшие решения (т.е. на N $f_0(x) \leq f_0(\bar{x})$).

3) Множество $P = \{x : \beta(x) \leq \beta(\bar{x})\}$ содержит такие или худшие решения, т.е. на P $f_0(x) \leq f_0(\bar{x})$ – (теорема I.I).

4) Если $x = \bar{x} \in P$, то $\bar{x}$ – абсолютная минималь задачи I (следствие 3 § I).

Предположим, что стремясь упростить процесс решения, мы тем или иным способом расширили множество X^* (например, отбросили часть связей (4.2)). Тогда помимо п.I–4 получаем:

5) Если $X^* \cap M = \varnothing$, то $\mathcal{J}(\bar{x})$ - оценка снизу $f_0(x)$ на X^* (следствие 5, § I).

Иногда удобнее сразу задаться подходящим $\mathcal{J}(x)$ и найти минималь задачи $\inf \mathcal{J}(x)$ на X^*. Тогда соответствующие множества будут (теорема I.I)

$$M=\{x:\ \mathcal{J}-I \geq \bar{\mathcal{J}}-\bar{I}\},\quad N=\{x:\ \mathcal{J}+I \leq \bar{\mathcal{J}}+\bar{I}\},\quad P=\{x:\ \mathcal{J}-I \leq \bar{\mathcal{J}}-\bar{I}\}$$

Решим задачу $\beta(\hat{x})=\sup \beta(x)$ на $X_1 \supseteq X^*$, получим еще одну оценку снизу:

$$f_0(x) \geq f_0(\bar{x})+\beta(\bar{x})-\beta(\hat{x})$$

(теорема I.3) и множества:

$$M=\{x:\ f_0+\beta \leq \hat{f}_0+\hat{\beta}\},\quad N=\{x:\ \beta-f_0 \geq \hat{\beta}-\hat{f}_0\},\quad P=\{x:\ f_0+\beta \geq \hat{f}_0-\hat{\beta}\}$$

(теорема I.4)

Задаваясь рядом β_i можем получить решение одной из поставленных задач а, б, в, г (§ I) или облегчить решение задачи а.

Примеры, когда множество $X^*=X$ приводились ранее (см.гл.I, §I, прим.11-13). Поясним на ряде простых примеров как можно применять метод β – функционала к случаю, когда $X^* \neq X$, т.е. задачам условного экстремума.

<u>Пример 4I.</u> Найти минимум функции

$$I=x \qquad \text{на} \qquad x^2+y^2-1=0.$$

Возьмем какую-нибудь допустимую точку, например $\bar{x}_0=1,\ \bar{y}_0=0$, и в качестве $\mathcal{J}(x)$ – функцию $\mathcal{J}_1=(x-x_0)^2$. Минимум этой функции очевиден. Тогда множество, содержащее абсолютную минималь M, отделится неравенством: $\mathcal{J}-I \geq \bar{\mathcal{J}}-\bar{I}$, т.е.

$$(x-1)^2-x \geq -1 \qquad \text{или} \qquad |x-\tfrac{3}{2}| \geq \tfrac{3}{2}.$$

Границы этого неравенства вместе с допустимым подмножеством (окружность) нанесены на фиг.I.3а. Мы видим, что абсолютная минималь находится где-то на левой половине окружности. Возьмем теперь допустимую точку $\bar{x}_0=-I,\ y=0$ и $\mathcal{J}$ – функционал в более общем виде: $\mathcal{J}_2=C(x-x_0)^2$, где $C>0$. Тогда множество M отделится неравенством: $Cx^2+2Cx+C-x \geq 1$. Беря $c=1/2$ получим $|x| \geq 1$ (фиг.I.3 б). Множество M содержит только две допустимые точки: $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$. Но $x = 1$ как следует из задания $\mathcal{J}_1$, не является абсолютной минималью, следовательно, абсолютная минималь $\bar{x} = -1$, $\bar{y} = 0$.

Пример 4.2. Пусть дан функционал и связь

$$I = x^2 - x + y^2 - 2y + 1, \qquad y - \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1}) = 0$$

Возьмем $\mathcal{J} = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$. Множество M отделится неравенством: $\mathcal{J} - I \geq \bar{\mathcal{J}} - \bar{I}$ или $2y(1 - y_0) \geq (2x_0 - 1)x + a$, где $a = x_0 - 2x_0^2 - 2y_0 - 2y_0^2$.

Возьмем допустимые: $x_0 = 1$, $y_0 = 0$. Тогда $M = \{x, y :\ y \geq \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\}$ (фиг.I.4). Из фигуры видно, что множество, на котором надо искать абсолютную минималь, резко сузилось и найти минимум на нем уже проще.

Пример 4.3. Дан функционал и связь

$$I = 2x + 2y, \qquad \ln x = y^2 - y.$$

Возьмем $\mathcal{J} = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$, где x_0, y_0 – некоторая допустимая точка. Множество N согласно теоремы I.I, отделится неравенством: $\mathcal{J} + I \leq \bar{\mathcal{J}} + \bar{I}$, т.е. $[x - (x_0 - 1)]^2 + [y - (y_0 - 1)]^2 \leq 2$. Это внутренность круга (фиг.I.5). Пусть центр этого круга совпадает с точкой A (фиг.I.5). Тогда множество N пересекается с допустимой кривой $\ln x = y^2 - y$. Беря точки x_0, y_0 из этого пересечения, мы будем спускаться по этой кривой пока множество N не выродится в точку. Это произойдет в точке B, в которой касательная к допустимой кривой наклонена под углом -45^0 (ибо центр окружности смещен от x_0, y_0 на -I, -I, т.е. под $+45^0$ (фиг.I.5)). Любое смещение от этой точки будет нас возвращать в неё. Можно показать, что точка B есть абсолютная минималь.

Обратим внимание, что при применении методов гл.I в отличие от известных методов не требуется непрерывности и дифференцируемости ни функционала (4.I), ни связей (4.2).

2°. Рассмотрим как можно применить методы § I к задачам оптимизации, описываемым обыкновенными дифференциальными уравнениями. Ниже формулируется постановка задачи, которой мы часто будем пользоваться в дальнейшем.

Пусть поведение объекта описывается системой независимых дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = f_i(t,x,u) \quad i=1,2,\dots,n, \quad t\in T=[t_1,t_2]. \qquad (4.3)$$

где $x(t)$ - n - мерная непрерывная кусочно-дифференцируемая функция, $x\in G(t)$; $u(t)$-r- мерная функция, непрерывная всюду на T , за исключением конечного числа точек, где она может иметь разрывы I-го рода, $u\in U$.

Граничные значения t_1, t_2 - заданы, $x(t_1)\in G(t_1)$, $x(t_2)\in G(t_2)$.

Качество процесса оценивается функционалом

$$I = F(x_1,x_2) + \int_{t_1}^{t_2} f_0(t,x,u)\,dt, \quad x_1=x(t_1),\ x_2=x(t_2). \qquad (4.4)$$

Функции $F(x_1,x_2)$, $f_i(t,x,u)$ $i=0,1,\dots,n$ - непрерывны на $T\times G\times U$. Совокупность непрерывных почти всюду дифференцируемых функций $x(t)$ с $x\in G(t)$, обозначим D . Совокупность кусочно-непрерывных функций $u(t)$, могущих иметь конечное число разрывов I-го рода и таких, что $u\in U$, обозначим V . Совокупность пар $x(t)$, $u(t)$, обладающих перечисленными выше свойствами и почти всюду удовлетворяющих уравнениям (4.3), назовем допустимыми и обозначим Q, $Q\subset D\times V$.

Ставятся задачи: а) Найти пару $u^*(t), x^*(t)\in Q$, доставляющую минимум функционалу (4.4) (традиционная постановка).

в) Найти подмножество $N\subset G\times U\times T$, такое, что на любой допустимой траектории из N $I(x)\le C$, где C - некоторое число.

г) Найти оценки снизу $I(x)$ на Q .

Введем функционал $\int_{t_1}^{t_2}\beta(t,x,u)\,dt$ с $\beta(t,x,u)$ определенной и непрерывной на $T\times G\times U$.

Теорема 4.I. Пусть $F\equiv 0$, ~~концы $x(t)$ фиксированы~~ и решена задача 2: $J(\bar{x},\bar{y}) = \inf J(x,u)$ на Q , где $J=\int_{t_1}^{t_2}[f_0(t,x,u)+\beta(t,x,u)]dt$. Тогда:

I) Множество $N=\{t,x,u:\ 2f_0+\beta\leq 2\bar{f}_0+\bar{\beta},\ t\in T\}$ содержит такие или лучшие решения задачи I. 2) Множество $P=\{t,x,u:\ \beta\leq\bar{\beta},\ t\in T\}$ содержит такие или худшие решения задачи I.

Доказательство: I. На Q из N имеем $\int_{t_1}^{t_2}(2f_0+\beta)dt\leq\int_{t_1}^{t_2}(2\bar{f}_0+\bar{\beta})dt$. Вычитая из этого неравенства неравенство

$$\int_{t_1}^{t_2}(f_0+\beta)dt\geq\int_{t_1}^{t_2}(\bar{f}_0+\bar{\beta})dt \tag{4.5}$$

получим, что на Q из N $\int_{t_1}^{t_2} f_0 dt\leq\int_{t_1}^{t_2}\bar{f}_0 dt$. 2. Аналогично вычитая неравенства $\int_{t_1}^{t_2}\beta dt\leq\int_{t_1}^{t_2}\bar{\beta}dt$ и (4.5) получим, что на Q из P $\int_{t_1}^{t_2} f_0 dt\geq\int_{t_1}^{t_2}\bar{f}_0 dt$. Теорема доказана.

Множества N, P не пусты. Они содержат по крайней мере одну траекторию из Q . Этой траекторией является $\bar{x}(t),\bar{u}(t)\in Q$.

Если в дополнение к задаче $\inf\limits_{Q}\int_{t_1}^{t_2}(f_0+\beta)dt$ решить задачу $\sup\limits_{Q}\int_{t_1}^{t_2}\beta dt$, то получим дополнительную информацию о множествах и оценку снизу. А именно:

Теорема 4.2. Пусть $F\equiv 0$, ~~концы $x(t)$ фиксированы~~ и решена задача: $\sup\int_{t_1}^{t_2}\beta(t,x,u)dt$ на Q . Тогда: I) Множество $N=\{t,x,u:\ \beta-f_0\geq\hat{\beta}-\hat{f}_0,\ t\in T\}$ содержит такие или лучшие решения. 2) Множество $P=\{t,x,u:\ f_0+\beta\geq\hat{f}_0+\hat{\beta},\ t\in T\}$ содержит такие или худшие решения.

Здесь $\hat{f}_0=f_0(t,\hat{x},\hat{u})$, $\hat{x}(t)$, $\hat{u}(t)$ – абсолютная максималь задачи $\sup\int_{t_1}^{t_2}\beta dt$ на Q .

Доказательство: I. На Q из N имеем $\int_{t_1}^{t_2}(\beta-f_0)dt\geq\int_{t_1}^{t_2}(\hat{\beta}-\hat{f}_0)dt$. Вычитая неравенство $\int_{t_1}^{t_2}\beta dt\leq\int_{t_1}^{t_2}\hat{\beta}dt$, получим $\int_{t_1}^{t_2}f_0 dt\leq\int_{t_1}^{t_2}\hat{f}_0 dt$.
2. Аналогично вычитая неравенства $\int_{t_1}^{t_2}(f_0+\beta)dt\geq\int_{t_1}^{t_2}(\hat{f}_0+\hat{\beta})dt$ и $\int_{t_1}^{t_2}\beta dt\leq\int_{t_1}^{t_2}\hat{\beta}dt$, получим $\int_{t_1}^{t_2}f_0 dt\geq\int_{t_1}^{t_2}\hat{f}_0 dt$. Теорема доказана.

Теорема 4.3. (Оценка снизу). Пусть $F\equiv 0$, концы $x(t)$ фиксированы , $\beta(t,x,u)$ – определено и ограничено снизу на $G\times U\times T$.

Тогда имеет место оценка снизу задачи I:

$$I(x,u) \geq \int_T [f_0(t,\bar{x},\bar{u}) + \beta(t,\bar{x},\bar{u}) - \beta(t,\hat{x},\hat{u})]\,dt. \qquad (4.6)$$

Доказательство: Вычитая неравенства $\int_T (f_0+\beta)\,dt \geq \int_T (\bar{f}_0+\bar{\beta})\,dt$ и $\int_T \beta\,dt \leq \int_T \sup\beta\,dt$, получим (4.6), что и тр. доказать.

Следствия: I) $\bar{x},\bar{u}$ (или соответственно $\hat{x}$, $\hat{u}$) является абсолютной минималью задачи I на множестве N и оценкой сверху на множестве P.

2. Если множество $P \supseteq T\times G\times U$ (или множество достижимости), то $\bar{x},\bar{u}$ (или $\hat{x}$, $\hat{u}$) является абсолютной минималью задачи I на Q.

Аналогичные результаты можно получить и для случая, когда $F \not\equiv 0$ и концы $x(t)$ – подвижны.

Пример 44. Пусть задача описывается условиями

$$I = \int_0^1 (x^2 + e^u)\,dt, \quad \dot{x} = u, \quad |u| \leq 1, \quad x(0) = 1, \quad x(1) = 0.$$

Применим теорему 4.I. Берем $\beta = -e^u$. Получаем задачу:

$$J = \int_0^1 x^2\,dt, \quad \dot{x} = u, \quad |u| \leq 1, \quad x(0) = 1, \quad x(1) = 0.$$

Её решение: $\bar{x} = -t$, $\bar{u} = -1$, $0 \leq t \leq 1$. Находим множество P: $\beta \leq \bar{\beta}$, т.е. $e^u \geq e^{-1}$, $u \geq -1$. Но значения $u < -1$ недопустимы. Следовательно, P покрывает все допустимое множество точек t, x, u. Поэтому $\bar{x} = -t$ – абсолютная минималь (см.следствие 2).

Пример 45. Найти минимум в задаче

$$I = \int_0^2 (|x| + \tfrac{1}{2}x^2)\,dt, \quad \dot{x} = u, \quad x(0) = 1, \quad x(2) = 0, \quad |u| \leq 1.$$

Здесь неаналитический функционал. Подинтегральная функция не дифференцируема. Известные методы такие как вариационное исчисление, принцип максимума – применять нельзя.

Заменим эту задачу следующей "хорошей" задачей

$$L = -\int_0^2 \tfrac{1}{2}x^2\,dt, \quad \dot{x} = u, \quad x(0) = 1, \quad x(2) = 0, \quad |u| \leq 1,$$

и найдем $\sup\limits_{x(t)} L$. Решение на фиг 16. Согласно теоремы 4.2 $P = \{x : |x| \geq |\bar{x}|\}$. Т.е. P покрывает всю область достижимости. Следовательно, найденное решение – абсолютная минималь и задачи I.

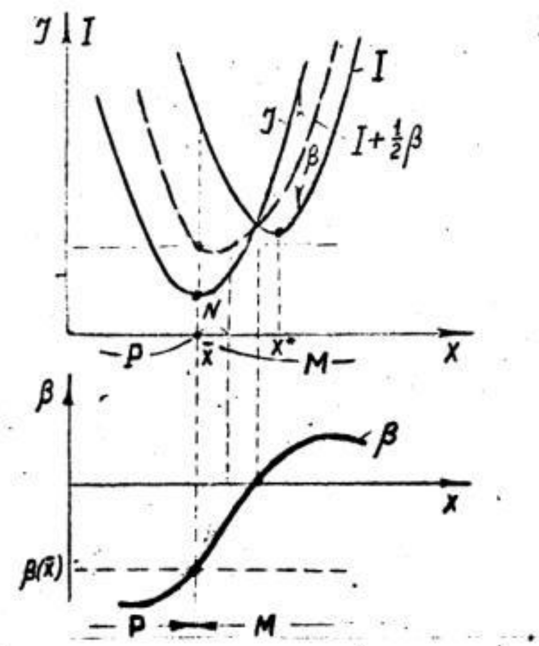
Основные результаты гл. I.

I. Наряду с традиционной постановкой задачи (отыскание минимали) предлагается отыскивать более узкое множество M, содержащее абсолютную минималь и множество N, заведомо содержащие лучшие решения (а также оценки снизу). Традиционная постановка следует из предлагаемой, когда множество M вырождается в точку.

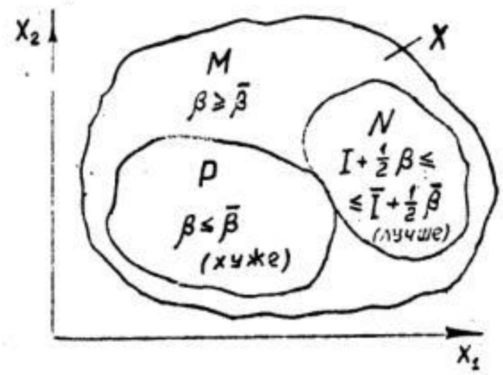
Для решения поставленных задач необходимо решать другую задачу с более простым функционалом (задачу 2) из решения которой можно извлечь информацию в указанном выше смысле о исходной задаче I. Сформулированы и доказаны соответствующие теоремы и оценки; доказаны достаточные условия эквивалентности задач I и 2.

2. Предлагаются три алгоритма решения поставленных задач: I) Метод выделения подмножества, содержащего абсолютную минималь или лучшие решения. 2) Метод спуска по множеству лучших решений. 3) Метод совмещения экстремумов. Получены условия сходимости для некоторых из них.

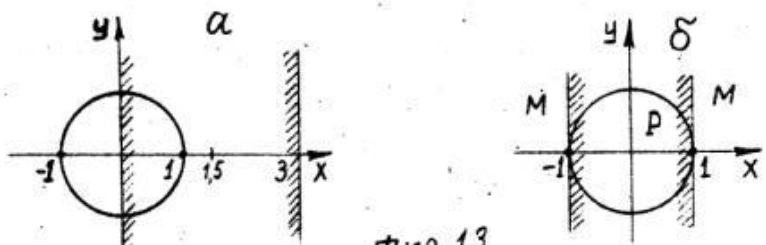
3. Показано, что методы β – функционала при применении к теории экстремумов функций конечного числа переменных не требуют дифференцируемости и непрерывности функционала и связей и позволяют выделять подмножества, содержащие абсолютную минималь, а также получить оценки снизу. При применении же к задачам оптимизации, описываемым обыкновенными дифференциальными уравнениями, позволяют выделять подмножества, содержащие лучшие решения.



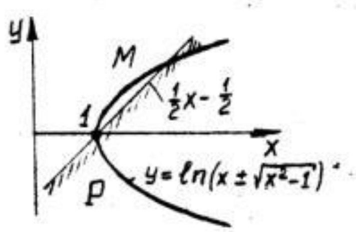
Фиг. 1.1



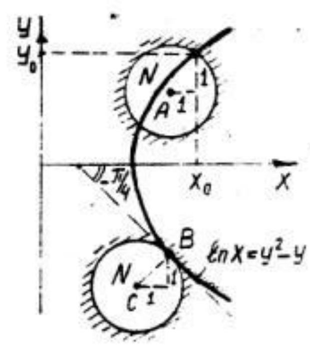
Фиг. 1.2



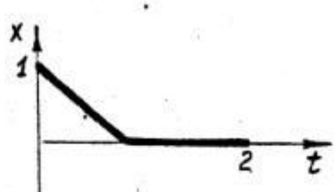
Фиг. 1.3



Фиг. 1.4



Фиг. 1.5



Фиг. 1.6

ГЛАВА 2.

МЕТОДЫ α – ФУНКЦИОНАЛА

§ I. Методы α – функционала. Оценки.

1°. Частным случаем β – функционала является $\tilde{\alpha}$ – функционал, определенный на $Z=X\times Y$ и такой, что I) существует подмножество $K\subset Z$ с проекцией K на X : $pr_1 K = X^*$, 2) $\tilde{\alpha}(x,y)=0$ на K.

Теорема I.I. Пусть $\tilde{\alpha}(x,y)$ есть $\tilde{\alpha}$ – функционал и существует $x^*\in X^*$. Для того, чтобы $\bar{x}$ был абсолютной минималью функционала $I(x)$ на X^* достаточно существования $\tilde{\alpha}(x,y)$ такого, что:

1) $J(\bar{x},\bar{y}) = \inf\,[I(x)+\alpha(x,y)]$, $x,y\in Z$, 2) $\bar{x},\bar{y}\in K$.

Доказательство: т.к. $\bar{x},\bar{y}\in K$, то $\alpha(\bar{x},\bar{y})=0$ и $J(\bar{x},\bar{y}) = \inf\limits_{Z}[I(x)+\tilde{\alpha}(x,y)] = \inf\limits_{K}[I(x)+\alpha(x,y)] = \inf\limits_{X^*} I(x)$, что и требовалось доказать.

Можно поступить наоборот. Определим множество $K_1=\{x,y:\ \tilde{\alpha}(x,y)=0,\ x\in X,\ y\in Y\}$. Найдем $X_1 = pr_1 K_1$. Тогда $\bar{x}$ будет минималью $I(x)$ на X_1, если $\bar{x},\bar{y}\in K_1$.

Частным случаем $\tilde{\alpha}$ – функционала является α – функционал, определенный на Z и такой, что $\alpha(x,y)=0$ на X^* при $\forall y\in Y$.

Теорема I.2. Пусть ~~$\alpha(x,y)=0$ на~~ X^* при $\forall y\in Y$ и существует $x^*\in X^*$. Для того, чтобы $\bar{x}$ был абсолютной минималью функционала $I(x)$ на X^* достаточно существования $\alpha(x,y)$ такого, что:

I) $J(\bar{x},y) = \inf\,[I(x)+\alpha(x,y)]$, $x,y\in Z$, 2) $\bar{x}\in X^*$. (I.I)

Доказательство: т.к. $\bar{x}\in X^*$, то $\alpha(\bar{x},y)=0$ и $J(\bar{x},\bar{y}) = \inf\limits_{Z}[I(x)+\alpha(x,y)] = \inf\limits_{X}[I(x)+\alpha(\bar{x},y)] = \inf\limits_{X^*} I(x)$, что и требовалось доказать.

Если y – не фиксировать, то зависимость α от y может быть использована, в частности, для выполнения условия $\bar{x}\in X^*$.

Аналогично теореме I.3 § I гл.I доказывается:

Теорема I.3 $\tilde{\alpha}$, α – функционалы существуют и число их бесконечно.

Теорема I.4. Если в (I.I) $\bar{x}\notin X^*$, то получаем оценку снизу величины функционала $I(x)$ на X^*: $\mathcal{J}(\bar{x},y) \le I(x)$ при $\forall y \in Y$.

Оценка следует из $\alpha(x,y)=0$ на X^* при $\forall y \in Y$ и принципа расширения.[I)] [Ψ], ибо $X^* \subseteq X$. Зависимость $\mathcal{J}$ от y может быть использована для улучшения оценки. В частности, можно взять $\alpha = \alpha(x)$. Тогда из теорем I.2, I.3 вытекает

Следствие I. Пусть $\alpha(x)=0$ на X^* и существует $x^* \in X^*$. Для того, чтобы элемент $\bar{x}$ был абсолютной минималью функционала $I(x)$ на X^*, необходимо и достаточно существование $\alpha(x)$ такого, что:

1) $\mathcal{J}(\bar{x}) = \inf[I(x)+\alpha(x)],\ x \in X,$ 2) $\bar{x} \in X^*$. (I.I)'

Следствие 2. Если $\bar{x} \in X^*$, $\beta \equiv \alpha$, то $\inf\limits_{X \times Y} \mathcal{J} = \inf\limits_{X^*} I$.

Поскольку α – функционал является частным случаем β – функционала, то теорема I.I гл.I, § I может быть перенесена и на этот случай:

Теорема I.5. Пусть $\bar{x}$ – абсолютная минималь задачи 2: $\inf[I(x)+\alpha(x)],\ x \in X$. Тогда: I) Абсолютная минималь задачи I находится в множестве $M^* = M \cap X^*$, где $M = \{x : \alpha \ge \bar{\alpha}\}$, 2) Множество $N^* = N \cap X^*$, где $N = \{x : \mathcal{J}+I \le \bar{\mathcal{J}}+\bar{I}\}$, содержит такие или лучшие решения (т.е. на N $I(x) \le I(\bar{x})$), 3) Множество $P^* = P \cap X^*$, где $P = \{x . \alpha \le \alpha$ содержит такие или худшие решения (т.е. на P $I(x) \ge I(\bar{x})$).

Аналогично можно перенести на этот случай теорему I.II.. Т.к. множество X^* выделено при помощи равенства $\alpha(x)=0$, то из теоремы I.5 вытекают

Следствия: 3. Если $\alpha(\bar{x}) > 0$, то $X^* \subseteq P$. 4. Если $\alpha(\bar{x}) < 0$, то $X^* \subseteq M$. 5. Если $\alpha(\bar{x}) = 0$, то $\bar{x} \in X^*$.

Из теоремы I.2 – I.4 и следствия I следует:

Алгоритм 4 (решение путем подбора α – функционала). Берем ограниченный снизу функционал α, определенный на X (или $X \times Y$).

I) Принцип расширения гласит: любое расширение множества, на котором ищется минимум функционала, может только уменьшить величину минимума.

Решаем задачу 2: $\inf(I+\alpha), x\in X$. Если $\bar{x}\in X^*$, то мы получаем минималь задачи I. Если $\bar{x}\notin X^*$, то мы получили оценку снизу $\mathcal{J}(\bar{x})\leq I(x^*)$ величины функционала $I(x)$ на X^* и множества M, N, P.

Замечания: I. Если допустимое подмножество X^* выделено при помощи функционалов $F_i(x)=0$, α - функционал можно искать в виде: $\alpha=\lambda_i(x)F_i(x)$ (по i - сумма), где $\lambda_i(x)$ - некоторые функции x.

2. Если допустимое подмножество выделено при помощи неравенств $\Phi_j(x)\leq 0$, α- функционал можно искать в виде:

$$\alpha=\omega_j(x)\left[\Phi_j(x)+|\Phi_j(x)|\right].$$

Здесь $\omega_j(x)$- некоторые функции x.

Либо в виде

$$\alpha=\omega_j(x)\Phi_j(x),$$

где $\omega_j(x)\geq 0$ и выполнено условие $\omega_j(x)\Phi_j(x)\equiv 0$ на X^*.

3. Пусть имеется α- функционал и элемент $\bar{x}\in X^*$ такие, что $\mathcal{J}(\bar{x})=$ $=\inf\left[I(x)+\alpha(x)\right], x\in X$. Тогда любой элемент $x_1\in X^*$ и удовлетворяющий условию

$$\mathcal{J}(x_1)=\inf\left[I(x)+\alpha(x)\right],\quad x\in X \tag{$*$}$$

- есть абсолютная минималь ~~функционала~~ $I(x)$ на X^* и любая абсолютная минималь функционала $I(x)$ на X^* - удовлетворяет условию ($*$).

Прямое утверждение прямо вытекает из следствия I. Докажем обратное утверждение. Т.к. абсолютная минималь $x_1\in X^*$, т.е. $\alpha(x_1)=0$, то

$$I(x_1)=\inf_{X^*}I(x)=\mathcal{J}(x_1)=\mathcal{J}(\bar{x})=\inf_{X}\left[I(x)+\alpha(x)\right],$$

что и треб. доказать.

Таким образом, если существует хотя бы один элемент, удовлетворяющий (I.I), то все остальные минимали задачи I обязательно ему удовлетворяют.

Обратимся к примерам. В качестве примеров взяты неаналитические функционалы, решение которых другими методами затруднено.

Пример I. Найти минимум функционала

$$I=\frac{4x^2+4x\pi+4{,}1+\pi^2}{4(x^2+x\pi+1)+\pi^2}\cdot\frac{\sin^3x-\sin^4x\cos x+\sin^2x\cos^2x}{(\sin x-\cos x)(\sin^3x+\cos^3x)}\quad \text{на } X^*=\{x=\tfrac{1}{2}\pi n:\ n=0,\pm1,\pm2,\dots\}. \quad (I.2)$$

Известные методы здесь трудно применить, ибо функционал задан на дискретном множестве. почти единственное, что может быть предложено существующими теориями – это простой перебор $x\in X^*$. Но число элементов множества X^* бесконечно, а потому перебор может оказаться бессмысленным.

Решим этот пример предлагаемым методом. Возьмем $\alpha(x)$ в виде:

$$\alpha=-\frac{4x^2+4x\pi+4{,}1+\pi^2}{4(x^2+x\pi+1)+\pi^2}\cdot\frac{\frac{1}{2}\sin 2x\cos x}{(\sin x-\cos x)(\sin^3x+\cos^3x)}.$$

Нетрудно видеть, что при таком задании $\alpha(x)$: $\alpha(x)=0$ на X^*, ибо при $x=\frac{1}{2}\pi n$ $n=0,\pm1,\pm2,\dots$, $\sin 2x=\sin\pi n=0$. Составим обобщенный функционал

$$J=I+\alpha=\frac{4x^2+4x\pi+4{,}1+\pi^2}{4(x^2+x\pi+1)+\pi^2}\cdot\frac{\sin^3x-\sin^4x\cos x+\sin^2x\cos^2x-\frac{1}{2}\sin 2x\cos x}{(\sin x-\cos x)(\sin^3x+\cos^3x)}.$$

В этом функционале x уже непрерывно и $-\infty<x<\infty$ (множество X). Благодаря добавке $\alpha(x)$ этот функционал можно привести к простому виду:

$$J=\frac{4x^2+4x\pi+4{,}1+\pi^2}{4(x^2+x\pi+1)+\pi^2}\cdot\frac{(\sin^2x-\cos^2x)(1-\sin x\cos x)\sin x}{(\sin^2x-\cos^2x)(\sin^2x-\sin x\cos x+\cos^2x)}=\left(\frac{0{,}1}{4+(2x+\pi)^2}+1\right)\sin x.$$

Полученный функционал несложен. В силу непрерывности x его абсолютный минимум без труда можно найти, применив обычные методы теории экстремумов функции одного переменного. Здесь $\bar{x}=-\frac{\pi}{2}$ и $\bar{x}\in X^*$ при $\bar{n}=-1$, $\bar{I}=-1{,}025$. Следовательно, это абсолютный минимум (и притом единственный) и исходного функционала (I.2).

Аналогично отыскивается минимум другого функционала (по x)

$$I=\cos^2\varphi+\tfrac{1}{2}\cos 2x\cos 2\varphi-2\cos x\cos\varphi\cos(x+\varphi)+\tfrac{1}{2}-0{,}1e^{-x^2},\quad X^*=\{x=\tfrac{1}{2}\pi n:\ n=0,\pm1,\dots\}$$

Здесь φ – задано, x – дискретно. Зададимся $\alpha=-\frac{1}{2}\sin 2x\sin 2\varphi$ после чего обобщенный функционал: $J=I+\alpha$ можно преобразовать к простому виду: $J=-0{,}1e^{-x^2}+\sin^2x$. Абсолютная минималь задачи 2: $\bar{x}=0$. Она входит в допустимое множество X^* при $\bar{n}=0$, а потому является и абсолютной минималью задачи I.

Может показаться, что в случае ограниченности допустимого дискретного множества в задачах подобных предыдущему примеру применим метод множителей Лагранжа (2б). Покажем, что это не так.

Пример 12. Найти минимум

$$I=x^3-3x^2+2x \quad \text{на} \quad X^*=\{x=0,\ x=3\}. \qquad (I.3)$$

Составляем функцию Лагранжа: $F=x^3-3x^2+2x+\lambda_1 x+\lambda_2(x-3)$,
где λ_1,λ_2 – неопределенные множители Лагранжа. Вычисляем I-ю производную

$$F'=3x^2-6x+2+\lambda_1+\lambda_2.$$

Подставляя сюда $x=0$, $x=3$ и приравнивая $F'(0)=0$, $F'(3)=0$, получаем систему, из которой находим λ_1 , λ_2 . Вторая производная: $F''=6x-6$. При $x=0$ $F''(0)=-6<0$, при $x=3$ $F''(3)=12>0$. следовательно, $x=0$ есть точка максимума, а $x=3$ – точка минимума. Проверяем, подставляя $x=0$, $x=3$ в (I.3), находим $I(0)=0$, $I(3)=6$. Мы видим, что метод Лагранжа дал прямо противоположные результаты: на точку минимума он указал как на точку максимума, а на точку максимума-как на точку минимума. Здесь нарушено одно из условий применимости метода Лагранжа – число уравнений связи больше числа независимых переменных. Этот пример показывает, что для метода Лагранжа это нарушение недопустимо.

Решим этот пример предлагаемым методом. Возьмем $\alpha(x)$ в виде:

$$\alpha=x(x-3)\left(\tfrac{2}{3}-x\right).$$

Тогда

$$J=I+\alpha=x^3-3x^2+2x+x(x-3)\left(\tfrac{2}{3}-x\right),\quad J'=\tfrac{4}{3}x=0,\quad \bar{x}=0\in X^*,\quad J''=\tfrac{4}{3}>0.$$

Таким образом, согласно следствию I , $\bar{x}=0$ – абсолютный минимум функционала (2.5). Все это показывает, что α – функционал имеет более широкое применение, чем метод множителей Лагранжа.

Пример 13. Найти минимум интеграла:

$$I=\int_{-10^{-3}}^{a}(\ln \mathrm{tg}\, t-10^{-3})\,dt \quad \text{на} \quad X^*=\{a=10^{-3}\pi n:\ n=1,2,\dots,400\}. \qquad (I.4)$$

Здесь интервал интегрирования дискретен. Прямой перебор затруднен вдобавок тем, что интеграл (I.4) не выражается через элементарные функции и для него не составлено даже таблиц.

Будем искать α – функционал в виде: $\alpha = -10^{-6}\sin 10^3 a$. Видим, что на X^* $\alpha(x) = 0$. Далее

$$J = I + \alpha = \int_{10^{-3}}^{a} (\ln \operatorname{tg} t - 10^{-3})\,dt - 10^{-6}\sin 10^3 a, \tag{1.5}$$

$$J'_a = \ln \operatorname{tg} a - 10^{-3} - 10^{-3}\cos 10^3 a = 0, \quad \bar{x} = \pi/4 \in X^* \text{ при } \bar{n} = 250,$$

$$J'' = \frac{2}{\sin 2a} + \sin 10^3 a.$$

Т.к. $10^{-3} < x < 0{,}4\pi$, то $J'' > 0$ в этом интервале, т.е. корень единственный и $\bar{n} = 250$ – точка абсолютного минимума.

Аналогично находится минимум другого интеграла, не выражающего через элементарные функции:

$$I = -\int_0^a [\sin(t^2) + 10^{-5}\sqrt{\pi}]\,dt \quad \text{на} \quad X^* = \{a = 10^{-3}\sqrt{\pi}\, n:\ n = 0, 1, \dots, 1{,}5\cdot 10^{\,\cdot}\}. \tag{1.6}$$

[illegible]

Здесь $\alpha = 10^{-8}\sin 10^3\sqrt{\pi}\, a$; $\bar{n} = 1000$.

<u>Пример 14</u>. Найти минимум интеграла

$$I = \int_{\pi/2}^{\pi} \left(\frac{\cos at}{t} + 20a^2\right) dt \quad \text{на} \quad X^* = \{a = 10^{-3} n:\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}. \tag{1.7}$$

Здесь дискретна подинтегральная функция. Интеграл от нее не выражается через элементарные функции.

Возьмем $\alpha = 10^{-7}\sin^2 10^3 \pi a$, $J = I + \alpha$. Тогда

$$J'_a = I'_a + \alpha'_a = \int_{\pi/2}^{\pi} (-\sin at + 40a)\,dt + 2\cdot 10^{-4}\pi \sin 2\cdot 10^3 \pi a = \tag{1.8}$$

$$= -\frac{2}{a}\sin\frac{3}{4}\pi a \cdot \sin\frac{\pi}{4}a + 20\pi a + 10^{-4}\pi \sin 2\cdot 10^3 \pi a.$$

Эта производная не существует при $\bar{a} = 0 \in X^*$. При $a > 0$, $J' > 0$; при $a < 0$, $J' < 0$. (Или $J'' > 0$ при $\forall a \neq 0$). Следовательно, $\bar{n} = 0$ – есть абсолютная минималь.

2°. Рассмотрим случай когда оптимального x^* на X^* не существует, но существует последовательность $\{x_n\} \subset X^*$ $n = 1, 2, \dots$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} I(x_n) = m$. Такая последовательность называется <u>минимизирующей</u>.

Аналогично п.1° можно показать, что имеет место обобщение следствия I на данный случай:

Следствие I'. Пусть $\alpha(x)=0$ только на X^*. Для того, чтобы последовательность $\{x_n\}\subset X^*$ была минимизирующей, необходимо и достаточно существование функционала $\alpha(x)$ такого, что

$$\lim_{n\to\infty}[I(x_n)+\alpha(x_n)]=\inf[I(x)+\alpha(x)], \quad x\in X. \tag{I.9}$$

Достаточное заключение этого следствия совпадает с леммой в[31].

Имеет место обобщение замечания 3 п.I и на этот случай: если имеется α - функционал и хотя бы одна последовательность $\{x_n\}\subset X^*$, удовлетворяющая (I.9), то любая последовательность $\{x_n\}\subset X^*$, удовлетворяющая (I.9), есть минимизирующая и обратно любая минимизирующая последовательность удовлетворяет условию (I.9).

3°. Применим теорему I.2 к задаче оптимизации, описываемой в банаховом пространстве уравнением

$$\frac{dx}{dt}=f(x,u), \quad t_1\le t\le t_2, \quad x(t_1)=x_1, \quad x(t_2)=x_2, \tag{I.I0}$$

где x, $f(x,u)$- элементы полных линейных и нормированных пространств X_1 и X_2 соответственно, ~~причем $X_2\subset X_1$~~; $t\in[t_1,t_2]$-T-отрезок числовой оси.

Назовем допустимым управлением измеримую функцию (в смысле [28] стр.85) со значениями $u\in U$, где U - множество в произвольном топологическом пространстве. В частности, U может быть метрическим замкнутым и ограниченным. Будем предполагать, что для всякого управления $u(t)$ уравнение (I.I0) имеет единственное решение $x(t)$ с $x\in X_1$, почти для всех $t\in[t_1,t_2]$, где $x(t)$ - непрерывная, почти всюду дифференцируемая на $[t_1,t_2]$ функция.

Оператор $f(x,u)$ определен на прямом произведении $X\times U$ непрерывен и ограничен. Граничные условия t_1,t_2, $x(t_1)=x_1$, $x(t_2)=x_2$ - - заданы.

Ставится задача: найти такое допустимое управление $u(t)$, переводящее систему из заданного начального состояния в заданное конечное состояние, чтобы функционал

$$I=\int_{t_1}^{t_2} f_0(x,u)\,dt \qquad (I.II)$$

принимал наименьшее значение.

Совокупность измеримых функций $u(t)$, обозначим V; совокупность непрерывных почти всюду дифференцируемых на $[t_1,t_2]$ функций $x(t)$, обозначим D. Совокупность пар $x(t), u(t)$ обладающих перечисленными свойствами и почти всюду удовлетворяющих уравнению (I.I0) назовем допустимыми и обозначим Q, очевидно, что $Q\subset D\times V$.

Пусть $\psi=\psi(t,x)$ некоторый непрерывный, дифференцируемый функционал, определенный на $X\times T$. Назовем его характеристическим функционалом. Будем искать α – функционал в виде

$$\alpha=\int_{t_1}^{t_2}\psi_x\circ[\dot{x}-f(x,u)]\,dt. \qquad (I.I2)$$

Здесь $\psi_x=\partial\psi/\partial x$ – частная производная Фреше ψ по x, являющаяся линейным функционалом, $\circ$ – знак композиции [34]. Очевидно, что требование определения α – функционала выполнено.

Составляя обобщенный функционал $J=I+\alpha$ и учитывая, что $\dot{\psi}=\psi_x\circ\dot{x}+\psi_t$, получим

$$J=\psi[t_2,x(t_2)]-\psi[t_1,x(t_1)]+\int_{t_1}^{t_2}(f_0-\psi_t-\psi_x\circ f)\,dt=\psi_2-\psi_1+\int_{t_1}^{t_2}B\,dt. \qquad (I.I3)$$

где $B=f_0-\psi_t-\psi_x\circ f$. Т.к. множество Q отличается от множества $D\times V$ только тем, что пары $x(t)$, $u(t)$ удовлетворяют почти всюду (I.I0), то при задании α – функционала в форме (I.I2) согласно теоремы I.2 исходную задачу № I – отыскание минимума (I.II) на Q можно заменить задачей № 2 – отыскание минимума (I.I3) на более широком множестве $D\times V$, на котором $x(t), u(t)$, уже не связаны уравнением (I.I0). Итак имеем

$$\bar{J}=\psi_2-\psi_1+\inf_{x(t)\in D,\,u(t)\in V}\int_{t_1}^{t_2}B(t,x,u)\,dt. \qquad (I.I4)$$

Теорема I.6. Если функция $\bar{u}(t)$, полученная из решения задачи $\inf\limits_{x(t)\in D}\int_{t_1}^{t_2}\inf\limits_{u\in V}B\,dt$ такова, что $\bar{u}(t)\in V$, то она совпадает почти всюду с функцией, полученной из решения задачи $\inf\limits_{x(t)\in D,\, u(t)\in V} \int_{t_1}^{t_2} B\,dt$

и

$$\inf_{x(t)\in D,\, u(t)\in V} \int_{t_1}^{t_2} B\,dt = \inf_{x(t)\in D} \int_{t_1}^{t_2} \inf_{u\in V} B\,dt. \qquad (I.I5)$$

Доказательство. Предположим противное: $B(u^*) \neq \inf\limits_{u\in V} B(u)$ на подмножестве отрезка $[t_1, t_2]$ с мерой не равной нулю. Тогда на этом подмножестве $B(u^*) > B(\bar{u})$, т.е. $\int_{t_1}^{t_2} B(u^*)dt > \int_{t_1}^{t_2} B(\bar{u})dt$, а это противоречит тому, что $u^*(t)$ доставляет минимум интегралу $\int_{t_1}^{t_2} B\,dt$.

Из требования (I.I4) и теоремы I.6 получаем

$$\bar{J} = \psi_2 - \psi_1 + \inf_{x(t)\in D} \int_{t_1}^{t_2} \inf_{u\in V} B\,dt. \qquad (I.I6)$$

Если функционал $\alpha[x(t),u(t)]$ такой, что абсолютная минималь задачи (I.I6): $\bar{x}(t), \bar{u}(t) \in Q$, то согласно теореме I.I - $\bar{x}(t), \bar{u}(t)$ - абсолютная минималь исходной задачи.

Итак, доказана;

Теорема I.7. Для того, чтобы пара функций $\bar{x}(t)$, $\bar{u}(t) \in Q$ была абсолютной минималью функционала I достаточно существование характеристического функционала $\psi(t,x)$ такого, что

I) $B(t,x,\bar{u}) = \inf\limits_{u\in V} B(t,x,u)$, 2) $\int_{t_1}^{t_2} B(t,\bar{x},\bar{u})dt = \inf\limits_{x(t)\in D} \int_{t_1}^{t_2} B(t,x,\bar{u})dt$, 3) $\bar{x}(t), \bar{u}(t) \in Q$ (I.I7)

В частности, если принять, что $\psi = p(t)\circ h$, где $p(t)$ - линейный функционал, $h \in X_1$, то из п.I и условия стационарности п.2 (I.I7) следует[I)]

$$H(t,x,\bar{u}) = \sup_{u\in V} H(t,x,u), \qquad \dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}, \qquad (I.I8)$$

где $H = p(t)\circ f(x,u) - f_0(x,u)$. Предполагается, что $\partial H/\partial x$ - производная Фреше непрерывна. Мы видим, что необходимые условия задачи 2, вытекающие из (I.I7), совпали с необходимыми условиями принципа максимума Понтрягина (26), обобщенного на Банаховы прост-

---

I) Этот результат совпадает с результатом работы [30], полученным путем громоздких рассуждений.

ранства.[I)]

Приложение I к § I гл.2.

О построении α - функционала в случае выделения допустимого множества при помощи двух функционалов, связанных логическими условиями.

Предположим, что на множестве X определены два функционала $F_1(x), F_2(x)$. Допустимыми являются только такие точки $x \in X$, когда между F_1 и F_2 выполнены определенные логические связи. Пусть $F_i(x)=0$ - "истина" и $F_i(x)\neq 0$ - "ложь". Пять основных связок логики: $\leftrightarrow$, $\veebar$, $\vee$, $\wedge$, $\sim$ (двойная импликация, дизъюнкция в исключающем смысле, дизъюнкция в неискл. смысле, конъюнкция, отрицание) представлены в следующих таблицах

F_1	F_2	$F_1 \leftrightarrow F_2$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	И

Двойная импликация

F_1	F_2	$F_1 \veebar F_2$
И	И	Л
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	Л

Дизъюнкция в исключ. смысле

F_1	F_2	$F_1 \vee F_2$
И	И	И
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	Л

Дизъюнкция в неискл. смысле

F_1	F_2	$F_1 \wedge F_2$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	Л

Конъюнкция

F	$\sim F$
И	Л
Л	И

Отрицание

Если использовать символ

$$sign\, F = \begin{cases} 1, & \text{если } F>0, \\ 0, & \text{если } F=0, \\ -1, & \text{если } F<0. \end{cases}$$

то α - функционал в этих случаях можно брать в виде:

I) $X^* = \{x:\ F_1(x) \leftrightarrow F_2(x)\}$ $\qquad \alpha = (p_1F_1 + p_2F_2)[1-|sign(F_1F_2)|]$,

2) $X^* = \{x:\ F_1 \veebar F_2\}$ $\qquad \alpha = p_1F_1F_2 + p_2[1-|sign(F_1^2+F_2^2)|]$,

3) $X^* = \{x:\ F_1 \vee F_2\}$ $\qquad \alpha = pF_1F_2$,

4) $X^* = \{x:\ F_1 \wedge F_2\}$ $\qquad \alpha = p_1F_1 + p_2F_2$,

5) $X^* = \{x:\ \sim F\}$ $\qquad \alpha = p[1-|sign\, F|\}$.

Здесь p, p_1, p_2 - некоторые функции x.

Поскольку из этих 5-ти связок могут быть построены все другие

I) См. сноску I на стр. 44.

сколь угодно сложные высказывания, то тем самым предложены формы α – функционалов и для сложных логических связей. Это дает новые подходы к задачам синтеза схем ЦВМ.

§ 2. Замечание о μ – функционале

Частным случаем α – функционала является μ – функционал, определенный на X и такой, что: I) $\mu(x)=0$ на X^*, 2) $\mu(x)>m-I(x)$ на $X-X^*$, где $m=\inf I(x),\ x\in X^*$.

Теорема 2.I. Для того, чтобы оптимальные элементы x^* и $\bar{x}$, найденные из условий $\inf\limits_{x\in X^*} I(x)$ и $\inf\limits_{x\in X}[I(x)+\alpha(x)]$ соответственно совпали между собой (т.е. $x^*=\bar{x}$)[1] необходимо и достаточно, чтобы функционал $\alpha(x)$ был μ – функционалом.

Доказательство: Необходимость. Пусть $x^*=\bar{x}$, $x^*\in X^*$. Нам надо показать, что при этих условиях функция $\alpha(x)$ отвечает определению μ – функционала. Из $\inf\limits_{x\in X}[I(x)+\alpha(x)]$ имеем: $I(x)+\alpha(x)>I(\bar{x})+\alpha(\bar{x})$ на X при $x\neq\bar{x}$. Т.к. $\bar{x}=x^*\in X^*$, то $\alpha(\bar{x})=0$ и на $X-X^*$ $\alpha(x)>$ $>I(x^*)-I(x)$.

Достаточность. Пусть $\alpha(x)$ – есть μ – функционал. Нам надо показать, что $\bar{x}=x^*$. Из определения μ – функционала получаем: $I(x)+\mu(x)>I(x^*)$ на $X-X^*$. Следовательно, среди элементов $x\in(X-X^*)$ оптимальных быть не может, т.е. $\bar{x}\in X^*$. Но на X^* $\mu(x)=0$ и поэтому[2] $\inf\limits_{x\in X}[I(x)+\mu(x)]=\inf\limits_{x\in X^*}I(x)$ и $\bar{x}=x^*$. Теорема доказана.

С целью пояснения основной идеи введения μ – функционала рассмотрим элементарный пример.[3] Пусть дан функционал: $I=x_1^2+x_2^2$. В 3-х мерном пространстве это уравнение параболоида вращения (фиг. I.Ia). Нам надо найти $\inf I(x_1,x_2)$ при условии $x_2=1$.

I) Если решение неединственно, то должны совпасть соответствующие пары (т.е. $x_i^*=\bar{x}_i$).

2) Нетрудно видеть, что для доказательства необходимости пункт I определения μ – функционала можно заменить условием $\mu(\bar{x})=0$, а для доказательства достаточности нет смысла требовать $x^*\in X^*$.

3) Этот простенький пример служит не для демонстрации преимуществ метода, а только для пояснения основной идеи.

Следовательно, совокупность точек плоскости x_1, x_2, у которых $x_2=1$, образует допустимое множество X^*. Если связь $x_2=1$ отбросить, то получим множество X – всех точек плоскости x_1, x_2. Будем искать μ – функционал в виде $\alpha=C(x_2-1)$, где C – некоторая постоянная. Согласно п.2 определения μ – функционал должен быть

$$C(x_2-1)>I(x_1^*,x_2^*)-x_1^2-x_2^2 \quad на \quad X-X^*.$$

Откуда путем простых преобразований получаем

$$x_1^2+(x_2+C/2)^2-(C/2)^2>I(x_1^*,x_2^*) \quad на \quad X-X^*.$$

Из этого выражения видно, что левая часть достигает минимума при $\bar{x}_1=0$, $\bar{x}_2=-C/2$. Т.к. на X^* $x_2=1$, то выбираем $C=-2$. При $x_1=\bar{x}_1$, $x_2=\bar{x}_2$ функционал $I(\bar{x}_1,\bar{x}_2)=1$.

Легко видеть, что построенная таким образом функция $\alpha=-2(x_2-1)$ удовлетворяет определению μ – функционала. На допустимых элементах $x_2=1$ функция $\alpha(x_1,x_2)=0$ (п.1). На всех остальных элементах: $-2(x_2-1)>1-x_1^2-x_2^2$ (п.2). Обобщенный функционал

$$J=I+\mu=x_1^2+x_2^2-2(x_2-1)$$

рассматриваемый на расширенном множестве X точек координатной плоскости x_1, x_2 достигает абсолютного минимума при $\bar{x}_1=0$, $\bar{x}_2=1$. Согласно теореме 2.1: $\bar{x}_1=x_1^*$, $\bar{x}_2=x_2^*$. Таким образом при введении μ – функционала задачу отыскания условного абсолютного минимума (фиг.1.1а), можно заменить задачей отыскания безусловного абсолютного минимума (фиг.1.1б). Заметим, что известное правило множителей Лагранжа [25] представляет только прием для отыскания стационарных точек.

Предлагаемый метод не является и известным методом "штрафа". В методе "штрафа", чтобы "почувствовать" ограничение (если оно является таковым) мы его должны обязательно хоть сколько-то нарушить. В результате решение и величина функционала получаются приближенными. В самом деле решим этот пример по методу "штрафа". Составляем общий функционал

$$J = x_1^2 + x_2^2 + \gamma (x_2 - 1)^2,$$

где $\gamma > 0$. Из условия

$$J'_{x_1} = 2x_1 = 0 , \qquad J'_{x_2} = 2 [x_2 + \gamma (x_2 - 1)] = 0$$

находим точку минимума

$$x_1 = 0 , \qquad x_2 = \frac{\gamma}{\gamma + 1} .$$

Откуда видно, что как бы велико не было γ , значение $x_2 > 1$ и решение будет приближенным.

В методе "штрафа" добавка $\gamma(x_2-1)^2$ всегда положительна (это основное условие метода "штрафа"). При $\gamma \to \infty$ эта добавка в любой ограниченной снизу окресности допустимых значений неограниченно возрастает. В предлагаемом же методе мы получаем точное решение, добавка (μ - функционал) $\mu = -2(x_2 - 1)$ - может быть отрицательной и даже как в этом примере - неограничена снизу. Все это говорит о том, что природа μ - функционала совсем другая, чем просто "штраф" за нарушение ограничений.[I)]

Теорема 2.2 (существования μ - функционала). Пусть X - множество, на котором $I(x)$ определен и $x^* \in X^*$ - существует. Тогда на этом множестве существует и μ - функционал.

Доказательство (метод построения): Зададим функционал $\alpha(x) = 0$ на X^* и каким-нибудь способом $\alpha(x) > m - I(x)$ на $X - X^*$. Поскольку $I(x)$ на X определено, то очевидно, что такое построение возможно. Но построенная таким образом функция $\alpha(x)$ будет удовлетворять определению μ - функционала и может быть принята за таковой. Теорема доказана.

Замечание: I. Из доказательства видно, что число μ - функционалов бесконечно.

I) Однако метод "штрафа", как показано в прил. 2 к § 3 гл.2 может быть получен при специальном задании α - функционала.

Теорема 2.3. Функционал $\alpha(x)$ определенный на X и равный нулю на X^* является μ- функционалом в том и только в том случае, если все абсолютные минимали $\bar{x}$ задачи 2 принадлежат X^*, т.е.:

1) $\mathcal{J}(\bar{x}) = \inf\limits_{x\in X}[I(x)+\alpha(x)]$, 2) $\forall \bar{x}\in X^*$. (2.I)

Доказательство: Необходимость. Дано $\alpha(x) \equiv \mu(x)$. Требуется показать выполнение условий (2.I). Т.к. $\alpha(x) \equiv \mu(x)$, то согласно теореме 2.I $x_i^* = \bar{x}_i$. Из п.2 определения μ - функционала имеем

$$I(x)+\mu(x) > I(\bar{x}) \quad на \quad X-X^*. \tag{2.2}$$

Следовательно, среди элементов множества $X-X^*$ оптимальных элементов нет, т.е $\forall\bar{x}\in X^*$. Пункт 2 (2.I) доказан. Т.к. $\bar{x}\in X^*$, то $\mu(\bar{x})=0$ и неравенство (2.2) можно записать: $I(x)+\mu(x) \geq I(\bar{x})+\mu(\bar{x})$ на X или $\mathcal{J}(\bar{x}) = \inf\limits_{x\in X}[I(x)+\mu(x)]$. Пункт I (2.1) доказан.

Достаточность. Дано (2.I). Покажем, что $\alpha(x)$ в (2.I) есть μ - функционал. Пункт I определения μ - функционала: $\alpha(x)=0$ на X^* - выполнен по условию. Далее из п.I (2.I) имеем: $I(x)+\alpha(x)>I(\bar{x})+\alpha(\bar{x})$ при $x\neq\bar{x}$. Т.к. $\bar{x}\in X^*$, $\alpha(\bar{x})=0$, то это неравенство можно переписать

$$\alpha(x) > I(\bar{x})-I(x) \quad на \quad X-X^*. \tag{2.3}$$

Из условия: $\alpha(x)=0$ на X^* и $\bar{x}\in X^*$ - следует, что $\inf\limits_{x\in X}[I(x)+\alpha(x)] = \inf\limits_{x\in X^*} I(x)$, т.е. $x_i^*=\bar{x}_i$. Поэтому (2.3) примет вид: $\alpha(x) > I(x^*)-I(x)$ на $X-X^*$ ~~на~~. А это есть п.2 определения μ- функционала. Теорема доказана.

2°. Дадим довольно общий метод построения μ - функционалов. Пусть X множество, из которого при помощи уравнения (связи) $\Phi(x)=0$ выделено подмножество X^*, $\Phi\in X_1$, X_1 - линейное пространство. Пусть нам удалось задать добавочный функционал в виде $\alpha=\alpha_1(\Phi,x)$, где $\alpha_1(\Phi,x)$ - произвольная функция от Φ, x, удовлетворяющая п.I определения μ- функционала, т.е. на X^* $\alpha_1[x,\Phi(x)]=0$. Распорядимся произволом $\alpha_1[x,\Phi(x)]=\alpha(x)$ на $X-X^*$ так, чтобы $\bar{x}$, соответствующие $\inf\limits_{x\in X}[I(x)+\alpha(x)]$ входили в X^*. Тогда согласно теоремы 2.3 $\alpha(x)$ есть

μ - функционал, а согласно теоремы 2.I $\bar{x}$ - абсолютная минималь $I(x)$ на X^*.

Например, если множество X^* выделено с помощью функционала $F(x)=0$, то $\mu(x)$ можно искать в виде

$$\alpha = \lambda(x)\,F(x). \tag{2.4}$$

Первый пункт определения μ - функционала: $\alpha(x)=0$ на X^* автоматически выполнен, а функционал $\lambda(x)$ надо подобрать так, чтобы $\bar{x}$, соответствующий задаче 2, принадлежал X^*.

Замечание I. Если мы ограничиваем произвол μ - функционала на $X-X^*$, например, задаем его в виде конкретной функции, то теорема 2.I дает возможность использовать только достаточные условия совпадения решений задач I и 2[I]. Необходимость существования μ - функционала в данном конкретном виде должна исследоваться отдельно. В частности, если будет найден алгоритм для построения μ - функционала в данном виде, то тем самым будет доказана и необходимость существования μ - функционала в этом виде.[2]

Замечание 2. Можно множество X^* разбить на любое число подмножеств X_i^* таких, чтобы $X^*=\bigcup\limits_i X_i^*$. На каждом из подмножеств X_i^* построить μ - функционал, найти минимум $I(\bar{x})$ на X_i^*; и из них выбрать абсолютный. Если же число подмножеств велико, то зная точки $\bar{x}_i$ минимума $I(x)$ на X_i^*, можно еще раз построить μ - функционал относительно уже множества $\bar{X}^*=\{\bar{x}_i : I(\bar{x}_i)=\inf\limits_{x\in X_i^*} I(x)\}$.

Замечание 3. Пусть требуется найти минимум функционала $I(x)$ на X. Можно найти его точки относительных минимумов (или стационарные), если $I(x)$ - дифференцируемо всюду на X, и на полученном дискретном множестве с помощью μ - функционала найти абсолютную минималь.

I) Т.к.заранее нельзя утверждать, что μ- функционал в данном виде существует.

2) В частности, если задавшись некоторым $\alpha(x)$, мы решим задачу 2 и $\bar{x}\in X^*$, то тем самым мы докажем существование μ - функционала в данном виде.

§ 3. Применение метода α - функционала к известным задачам оптимизации.

I^0. Рассмотрим задачу поиска условного экстремума функции конечного числа переменных

$$I = f_0(x)\,, \quad f_i(x) = 0 \quad i = 1,2,\dots,m < n. \tag{3.1}$$

Здесь x - n - мерный вектор, функции $f_i(x)$ определены в некоторой открытой области n - мерного векторного пространства X.

Возьмем α - функционал в виде:

$$\alpha = p_i(x)\, f_i(x) \qquad i = 1,2,\dots,m \tag{3.2}$$

(по повторяющимся индексам - суммирование). Здесь $p_i(x)$ некоторые функции x, определенные на X. $X^* = \{x: \sum_{i=1}^{m} |f_i(x)| = 0\}$, $X^* \subset X$.

Построим обобщенный функционал $J(x) = f_0(x) + \alpha(x)$. Зададимся некоторыми $p_i(x)$ и решим задачу $\inf J(x)$, $x \in X$. Из этого решения задачи 2, согласно теоремам § I, мы можем извлечь следующую информацию о задаче I:

I) Если $\bar{x} \in X^*$, то $\bar{x}$ - абсолютная минималь задачи I (следствие I § I).

2) Если $\bar{x} \notin X^*$, то: а) $J(\bar{x})$ - оценка снизу функционала $f_0(x)$ на X^* (теорема I.4), б) Если $\alpha(\bar{x}) > 0$, то x^* находится в множестве $P = \{x: \alpha(x) \le \alpha(\bar{x})\}$ (следствие 3, § I), в) Если $\alpha(\bar{x}) < 0$, то x^* находится в множестве $M = \{x: \alpha(x) \ge \alpha(\bar{x})\}$, (следствие 4, § I), г) Множество $N^* = N \cap X^*$, где $N = \{x: 2f_0 + \alpha \le 2\bar{f}_0 + \bar{\alpha}\}$, содержит такие или худшие решения (теорема 1.5).

Таким образом, если даже $\bar{x} \notin X^*$ мы видим, что вычисления не пропадают. Мы получаем оценку снизу и сужаем область поиска оптимального решения. Задаваясь рядом α_i в результате можем получить решение одной из поставленных задач а, б, в, г или облегчить решение задачи а (см. гл. I, § I).

Обратим внимание, что данный метод в отличие от классического метода множителей Лагранжа не требует непрерывности и дифференцируемости функций $f_0(x), f_i(x)$. Он может быть применен и не к аналитическим функционалам, например, к функционалам, заданным на дискретных множествах, и экстремальным задачам комбинаторики (см. гл. IO).

2°. Рассмотрим применение теорем § I к задачам оптимизации, описываемым обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Пусть поведение объекта описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = f_i(t,x,u) \quad i=1,2,\dots,n, \quad t\in T=[t_1,t_2], \tag{3.3}$$

где $x(t)$ - n-мерная непрерывная кусочно-дифференцируемая функция, $x\in G(t)$; $u(t)$ - r-мерная функция, непрерывная всюду на T, за исключением конечного числа точек, где она может иметь разрывы I-го рода, $u\in U(t)$. Граничные значения t_1, t_2 - заданы, $x(t_1), x(t_2)\in R$. Качество процесса оценивается функционалом

$$I = F(x_1,x_2) + \int_{t_1}^{t_2} f_0(t,x,u)\,dt, \quad x_1 = x(t_1), \; x_2 = x(t_2). \tag{3.4}$$

Функции $F(x_1,x_2)$, $f_i(t,x,u)$ $i=0,1,\dots,n$ - непрерывны, $F(x_1,x_2) > -\infty$. Совокупность непрерывных почти всюду дифференцируемых функций $x(t)$ с $x\in G(t)$ обозначим D. Совокупность кусочно-непрерывных (с разрывами I-го рода) функций $u(t)$ таких, что $u\in U(t)$ обозначим V. Пары $x(t)$, $u(t)$, обладающие перечисленными выше свойствами и почти всюду удовлетворяющие уравнениям (3.3) называются допустимыми. Обозначим их Q, $Q\subset D\times V$.

Введем в рассмотрение n функций $\lambda_i(t,x)$ $i=1,2,\dots,n$ непрерывных и имеющих непрерывные производные по $T\times G$. Запишем α - функционал в виде

$$\alpha = \int_{t_1}^{t_2} \lambda_i(t,x)[\dot{x}_i - f_i(t,x,u)]\,dt. \tag{3.5}$$

Очевидно, что на Q $\alpha=0$. Составляем обобщенный функционал $J = I+\alpha$, интегрируем член $\lambda_i \dot{x}_i$ по частям и исключаем $\dot{x}_i$ при помощи (3.3). Получим

$$J = F + \lambda_i x_i \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2}\Big[f_0 - \Big(x_j \frac{\partial \lambda_j}{\partial x_i} + \lambda_i\Big) f_i - x_i \frac{\partial \lambda_i}{\partial t}\Big]dt. \tag{3.6}$$

Обозначим $A = F + \lambda_i x_i \big|_{t_1}^{t_2}$, $B = f_0 - (x_j \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_i} + \lambda_i) f_i - x_i \frac{\partial \lambda_i}{\partial t}$. Применим к (3.6) следствие I § I. Здесь роль множества X^* фигурирующего в следствии I, играет Q, а роль множества X множество $D \times V$. Т.к. функции из $D \times V$ уже не связаны уравнениями (3.3), то на парах $x(t)$, $u(t)$ из $D \times V$ с концами в R при условии $\bar{x}(t) \in D$, $\bar{u}(t) \in V$, $x_1 = \bar{x}(t_1)$, $x_2 = \bar{x}(t_2)$

$$\inf_{D \times V} \left(A + \int_{t_1}^{t_2} B dt \right) = \inf_{x_1, x_2 \in R} A + \int_{t_1}^{t_2} \inf_{x \in G, u \in V} B dt .$$

Или окончательно

$$\bar{J} = \inf_{x_1, x_2 \in R} A + \int_{t_1}^{t_2} \inf_{x \in G, u \in V} B dt . \tag{3.7}$$

Итак доказана

Теорема 3.I. Для того, чтобы пара вектор-функций $\bar{x}(t)$, $\bar{u}(t)$ была абсолютной минималью функционала (3.4) достаточно[I)] существования n – дифференцируемых функций $\lambda_i(t,x)$ таких, что

$$1)\ \bar{B} = \inf_{x \in G, u \in V} B , \qquad 2)\ \bar{A} = \inf_{x_1, x_2 \in R} A > -\infty, \qquad 3)\ \bar{x}(t), \bar{u}(t) \in Q . \tag{3.8}$$

Из (3.8) следует, что если найти хотя бы одно решение уравнения в частных производных с n неизвестными функциями $\lambda_i(t,x)$

$$\inf_{u \in V} \left[f_0 - (x_j \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_i} + \lambda_i) f_i - x_i \frac{\partial \lambda_i}{\partial t} \right] = 0, \tag{3.9}$$

при краевом условии $\bar{A} = \inf_R A$, то п.I-2 теоремы 3.I будут выполнены. Любое неудачное задание $\lambda_i(t,x)$ (в смысле $\bar{x}(t), \bar{u}(t) \notin Q$) согласно теоремы I.4 дает оценку снизу величины минимума.

Пусть, например, $x_n \neq 0$[2)]. Зададимся всеми $\lambda_i \equiv 0$ $i = 1,2,\dots,n-1$, кроме $\lambda_n = \varphi(t,x)/x_n$. Подставим их в (3.7), получим результат, опубликованный в работе [3I][3)]

$$\bar{J} = \inf_{x_1 \in G_1, x_2 \in G_2} \Phi - \int_{t_1}^{t_2} \sup_{x \in G, u \in V} R(t,x,u) dt . \tag{3.10}$$

I) Утверждать необходимость нельзя, т.к. мы заранее не знаем существуют ли непрерывные и дифференцируемые $\lambda_i(t,x)$. Однако, если в результате решения задачи (3.8) они найдены, то ясно, что они существуют.

2) Это ограничение не является существенным, т.к. отрезок $[t_1, t_2]$ всегда можно разбить на отрезки, где какое-нибудь $x_i \neq 0$.

3) Отметим, что в предлагаемом выводе в отличие от [3I] не требуется априорного предположения о существовании единой потенциальной функции $\varphi(t,x)$ такой, что $\varphi_{x_i} = \lambda_i$.

Здесь $\Phi = F + \varphi|_{t_1}^{t_2}$, $R = \varphi_t + \varphi_{x_i} f_i - f_0 = -B$. Наличие в (3.9) n - функций, связанных одним уравнением, может расширить прикладные возможности метода. Однако практически иногда удобнее задаваться функцией $\varphi(t,x)$ или в иных обозначениях (см.[5]) $\psi(t,x)$. Тогда A, B запишутся

$$A = F + \psi_2 - \psi_1, \qquad B = f_0 - \psi_{x_i} f_i - \psi_t \tag{3.II}$$

и теорема 3.I совпадет с [3I].

Замечания: I. Теорема 3.I справедлива и в записи п.I (3.8): $\int_{t_1}^{t_2} \bar{B} dt = \inf_{x(t)\in D} \int_{t_1}^{t_2} \inf_{u\in V} B dt$. Именно такая форма предлагается в [5].

2. В качестве множества D можно взять множество $\{x(t)\}$ с ограниченной производной $\dot{x}_i \in \dot{X}_i = \{f_i(t,x,u):\ u \in V\}$. Такое сужение множества может помочь в отыскании оптимального решения.

3. Замечание 3 § I в данном случае имеет следующий вид: пусть существует функция $\psi(t,x)$ и хотя бы одна допустимая пара $\bar{x}(t)$, $\bar{u}(t)$, удовлетворяющая (3.8). Тогда любая другая пара удовлетворяющая (3.8) есть минималь задачи I и любая допустимая минималь задачи I удовлетворяет п.п.I-2 (3.8).

4. Если моменты t_1, t_2 не фиксированы, то можно показать, что п.п.I-2 (3.8) принимают вид:

I) $\bar{B} = \inf_{x\in G,\, u\in V} B = 0$, 2) $\bar{A} = \inf_{t_1, t_2, x_1, x_2 \in R} A > -\infty$.

5. Теорема 3.I является частным случаем более общей теоремы 2.I, рассмотренной в гл. 3, § 2.

Предположим, что мы задались некоторыми $\lambda_i(t,x)$ (или $\psi(t,x)$).

Теорема 3.2. Пусть $F \equiv 0$, ~~концы $x(t)$ не фиксированы~~ и решена задача $\inf_{x,u} B$. Тогда: I) Множество $N = \{t,x,u:\ B + f_0 \le \bar{B} + \bar{f}_0,\ t \in T\}$ содержит такие или лучшие решения задачи I. 2) Множество $P = \{t,x,u:\ B - f_0 \le \bar{B} - \bar{f}_0,\ t\in T\}$ содержит такие или худшие решения задачи I.

Доказательство: I) Вычитая неравенства $B + f_0 \le \bar{B} + \bar{f}_0$ и $B \ge \bar{B}$ получим $f_0 \le \bar{f}_0$ на T, т.е. $\int_T f_0 dt \le \int_T \bar{f}_0 dt$. 2) Вычитая неравенства $B - f_0 \le \bar{B} - \bar{f}_0$ и $B \ge \bar{B}$, получим $-f_0 \le -\bar{f}_0$ на T, т.е. $\int_T f_0 dt \ge \int_T \bar{f}_0 dt$, что и тр.доказать.

Рассмотрим вместо функционала (3.4) другой более простой функционал $\int_T B_1(t,x,u)\,dt$.

Теорема 3.3. Пусть $F\equiv 0$, и решена задача $\bar{J}_1 = \inf \int_T B_1(t,x,u)\,dt$ [1] на Q. Тогда: 1) Множество $N=\{t,x,u: f_0+B_1 \le \bar{f}_0+\bar{B}_1,\ t\in T\}$ содержит такие или лучшие решения задачи I. 2) Множество $P=\{t,x,u: B_1-f_0 \le \bar{B}_1-\bar{f}_0,\ t\in T\}$ содержит такие или худшие решения задачи I.

Доказательство: 1) Из N следует, что $\int_T (f_0+B_1)\,dt \le \int_T (\bar{f}_0+\bar{B}_1)\,dt$. Вычитая из этого неравенства неравенство $\int_T B_1\,dt \ge \int_T \bar{B}_1\,dt$, получим $\int_T f_0\,dt \le \int_T \bar{f}_0\,dt$. 2) Из P получаем $\int_T (B_1-f_0)\,dt \le \int_T (\bar{B}_1-\bar{f}_0)\,dt$. Вычитая $\int_T B_1\,dt \ge \int_T \bar{B}_1\,dt$, получим $\int_T f_0\,dt \ge \int_T \bar{f}_0\,dt$, что и тр. док.

Следствие I: Если множество P покрывает множество $T\times G\times U$ (или множество достижимости) и $\bar{x},\bar{u}\in Q$, то $\bar{x},\bar{u}$ – является абсолютной минималью задачи I.

Замечание I. Отбросим часть связей (3.I) или (3.3).[2] Тогда из принципа расширения [7] следуют оценки снизу: $I(x)\ge I(\bar{x})$ и $I(x,u)\ge I(\bar{x},\bar{u})$, где $\bar{x}$ и $\bar{x}(t), \bar{u}(t)$ – абсолютные минимали "усеченной" задачи.

Когда правые части уравнений (3.3), (3.4) не зависят явно от фазовых координат можно выделить не только множества N, P но и множество M. А именно имеет место

Теорема 3.4. Пусть $F\equiv 0$, концы $x(t)$ – свободны, правые части уравнений (3.3), (3.4) зависят только от t, u, т.е.: $f_i = f_i(t,u)$ $i=0,1,\dots,n$ и решена задача $\inf\limits_{u} B_1(t,u)$. Тогда: I) Множество $M=\{t,u: B_1-f_0 \ge \bar{B}_1-\bar{f}_0,\ t\in T\}$ содержит абсолютную минималь задачи I. 2) Множество $N=\{t,u: B_1+f_0 \ge \bar{B}_1+\bar{f}_0,\ t\in T\}$ содержит такие или лучшие решения. 3) Множество $P=\{t,u: B_1-f_0 \le \bar{B}_1-\bar{f}_0\}$ содержит такие или худшие решения задачи I.

I) Здесь $B_1(t,x,u)$ – заданное подынтегральное выражение.
2) В случае (3.3) соответствующие x_i в оставшихся уравнениях рассматриваются как управления.

Доказательство для множеств N, P полностью совпадает с доказательством теоремы 3.2. Утверждение относительно множества M следует из разрывности $u(t)$ и зависимости правых частей только от u.

3[0]. Задача динамического программирования Р. Беллмана [30]. Пусть имеется физическая система S, процесс управления которой расчленен на m шагов (этапов). На каждом (i-м) шаге в нашем распоряжении имеется управление U_i, посредством которого мы переводим систему из допустимого состояния S_{i-1}, достигнутого в результате ($i-1$)-го шага в новое допустимое состояние S_i, причем $S_i = S_i(S_{i-1}, U_i)$. Этот переход стеснен некоторыми связями. Качество процесса оценивается функционалом $W = \sum_{i=1}^{m} w_i(S_{i-1}, U_i)$.

Построим обобщенный функционал $J_i = W_i + \alpha_i$, где $W_i = \sum_{k=1}^{i} w_k$, $i = 1,2,\dots,m$, и тогда вместо задачи условного минимума $\inf W_i$ можно рассматривать задачу безусловного минимума $\inf\limits_{U} J_i$. Если связи отсутствуют или таковы, что перебор U_i на каждом шаге удобно делать с учетом связей, то в силу $\alpha = 0$ на допустимых элементах получаем функциональное уравнение Беллмана [30].

$$\overline{W}_i(S_{i-1}) = \min_{U_i} \{ W_i(S_{i-1}, U_i) \}, \quad i = 1,2,\dots,m.$$

4[0]. Применение α-функционала к решению задач с распределенными параметрами. Рассмотрим задачу об абсолютном минимуме функционала

$$I(x,u) = \int_P f_0(t,x,u)\,dt, \tag{3.12}$$

где $t = (t_1,\dots,t_m)$, $x = (x_1,\dots,x_n)$, $u = (u_1,\dots,u_r)$ – элементы векторных пространств T, X, U^* – соответственно, P – замкнутая область в пространстве T, ограниченная непрерывной, кусочно гладкой фиксированной гиперповерхностью S, причем на S $t = \tau$. Функции $x_i(t)$ на P – абсолютно-непрерывны, $u_k(t)$ – измеримы на P и u_k принимают значения из области U, которая может быть замкнутой и ограниченной.

Функции $x(t)$, $u(t)$ – почти всюду удовлетворяют системе nm

независимых дифференциальных уравнений в частных производных

$$\frac{\partial x_i}{\partial t_j} = f_j^i(t,x,u) \qquad i=1,2,\dots,n;\ j=1,2,\dots,m. \qquad (3.13)$$

Функции f_j^i, f_0 непрерывны вместе со своими частными производными I-го порядка. Функции $x(t)$, $u(t)$ назовем допустимыми, если они удовлетворяют перечисленным условиям (множество Q).

Ставится задача: найти такую пару функций $u(t)$, $x(t)$, на которых функционал I (3.12) принимает наименьшее значение.

Наложим на систему (3.13) условия интегрируемости

$$\varphi^\gamma = \frac{\partial f_j^i}{\partial t_\kappa} - \frac{\partial f_\kappa^i}{\partial t_j} = 0, \quad i=1,2,\dots,n;\ j,\kappa=1,2,\dots,m,\ \ \kappa>j. \qquad (3.14)$$

Нетрудно подсчитать, что число разных уравнений (3.14) может быть[1] $\frac{1}{2}(m-1)mn$, т.е. $\gamma=1,2,\dots,\frac{1}{2}(m-1)mn$. Для простоты будем полагать, что все функции φ^γ в (3.14) содержат u, что эти u могут быть найдены из (3.14). Пусть число независимых уравнений (3.14) меньше τ.

Введем в рассмотрение m - мерную функцию $\psi(t,x)=(\psi^1,\dots,\psi^m)$ компоненты которой $\psi^j(t,x)$ $j=1,\dots,m$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные почти всюду на T. Назовем эту функцию характеристической. Введем также интегрируемую вектор-функцию

$$\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_p(t).$$

Возьмем α - функционал в виде

$$\alpha = \int_S \psi^j(\tau,x)\cos(n,t^j)d\tau - \int_p(\psi^j_{t_j} + \psi^j_{x_i} f^i_j + \lambda_\gamma\varphi^\gamma)\,dt, \qquad (3.15)$$

где n - внешняя нормаль к поверхности S, $d\tau$ - элемент поверхности S. Функционал $J=I+\alpha$ представим в виде $J=A+\int_p B dt$, где

$$A=\int_S \psi^j(\tau,x)\cos(n,t^j)d\tau, \quad B=f_0-\psi^j_{t_j}-\psi^j_{x_i}f^i_j+\lambda_\gamma\varphi^\gamma. \qquad (3.16)$$

Теорема 3.4. Пусть $u(t)\in V$. Для того, чтобы пара $u(t), x(t)$ - была абсолютной минималью функционала (3.12) достаточно[2] существование α -функционала (3.15) такого, что

$$1)\ \bar B = \inf_{x,u\in V} B(t,x,u), \qquad 2)\ \bar A = \inf_{x(\tau)} A > -\infty, \qquad 3)\ \bar x(t), \bar u(t) \in Q. \qquad (3.17)$$

---

1) Число сочетаний $C_m^2 \cdot n$.

2) Утверждать необходимость существования α-функционала нельзя в силу тех же причин, что и в теореме 2.1 (см. сноску 1 на стр. ...)

Ход рассуждений здесь идентичен [3I] ч.Ш, но в отличие от [3I] теорема 3.5 содержит условия интегрируемости.

Если $\bar{x}(t), \bar{u}(t) \notin Q$, то $\bar{I}$ – оценка снизу функционала (3.I2). Если существуют функции ψ, λ и хотя бы одна пара $\bar{x}(t), \bar{u}(t)$, удовлетворяющая (3.I7), то любая другая пара удовлетворяющая (3.I7) есть минималь функционала (3.I2) и любая допустимая минималь функционала (3.I2) удовлетворяет п.п.I-2 (3.I7) –(следствие замечания 3 § I).

Пусть $f_j^i(t,x,u)$, $\varphi^\gamma(t,x,u)$ – непрерывны и дифференцируемы. Возьмем ψ^j в виде $\psi^j = p_{ij}(t)x_i$. Обозначим

$$H = p_{ij}(t) f_{ij}(t,x,u) - f_0(t,x,u) + \lambda_\gamma(t)\varphi^\gamma(t,x,u).$$

Тогда п.I (3.17) теоремы 3.4 можно переписать: $H(\bar{u}) = \sup_{u \in U} H$, а необходимое условие минимума (условие стационарности), вытекающее из п.2 (3.17) дает

$$\frac{\partial B}{\partial x_i} = -\frac{\partial p_{ij}}{\partial t_j} - \frac{\partial H}{\partial x_i} = 0 \qquad i = 1,2,\dots,n. \tag{3.18}$$

Приложение I к § 3

Теорема 3.I и известные методы решения задач оптимизации, описываемые обыновенными дифференциальными уравнениями.

Из теоремы 3.I можно получить условия, совпадающие с известными алгоритмами решения задач оптимального управления как: принцип максимума Л.С.Понтрягина [28], уравнение Беллмана [30], классическое вариационное исчисление [24].

Потребуем дополнительно, чтобы f, ψ имели непрерывные соответствующие производные.

а) Принцип максимума Понтрягина.

Следуя [3I] возьмем $\psi(t,x)$ в виде $\psi = p_i(t)\Delta x_i$, где $p_i(t)$ – некоторые дифференцируемые функции t, $\Delta x_i = x_i - \bar{x}_i$. Составим гамильтониан

$$H = p_i(t) f_i(t,x,u) - f_0(t,x,u). \tag{I}$$

Тогда $B=-H-\dot{p}_i x_i$. Необходимые условия минимума B по x, вытекающие из п.I (3.8) теоремы 3.I (условия стационарности) таковы:

$$B_{x_i} \equiv -\dot{p}_i - H_{x_i} = 0 \qquad i=1,2,\dots,n. \tag{2}$$

Кроме того, из п.I (3.8) имеем

$$B(t,x,\bar{u}) = \inf_{u\in U} B(t,x,u) \quad \text{или} \quad \inf_{u\in U}(-H) = -\sup_{u\in U} H. \tag{3}$$

Условия (2), (3) (совместно с (3.3) § 3) совпадают с соответствующими условиями принципа максимума[1)] [28].

б) Уравнение Беллмана. Пусть $x_n \neq 0$ [2)]. Зададимся всеми $\lambda_i \equiv 0$ $i=1,2,\dots$ $\dots n-1$, кроме $\lambda_n = \psi(t,x)/x_n$. Подставим их в (3.9) § 3 получим известное уравнение Беллмана [30]

$$\inf_{u\in U}\left(f_0 - \psi_{x_i} f_i - \psi_t \right) = 0. \tag{4}$$

Краевым условием для него является $A=const$. В результате решения этого уравнения мы получим все поле оптимальных траекторий.

в) Классическое вариационное исчисление. Из пп.I, 2 теоремы 3.I легко извлечь условия относительного минимума, совпадающие с соответствующими условиями вариационного исчисления [24], [27].

Пусть U – открытая область, $\dot{x}_i(t), u_i(t)$ – непрерывны, $f_i(t,x,u)$ – имеют непрерывные частные производные до 3-го порядка. Возьмем $\psi = p_i(t)\Delta x_i$. Из (3) следует, что в точке минимума

$$B_{u_i}(t,x,u) = -H_{u_i}(t,x,u) = 0 \qquad i=1,2,\dots,r. \tag{5}$$

Уравнения (2), (4) совпадают с обычными уравнениями Эйлера-Лагранжа 3 § 2, п.I. Из (3) также следует

$$-H_{u_i u_j}\delta u_i \delta u_j \geq 0 \qquad i,j=1,2,\dots,r, \tag{6}$$

Это совпадает с условием Клебша слабого относительного минимума [3], § 2, п.2.

I) Нельзя это понимать как получение необходимых условий из достаточных. Мы получили необходимые условия минимума задачи 2: $\inf[I(x)+\alpha(x)]$ на X, и оказалось, что эти условия суть также и известные необходимые условия задачи I: $\inf I(x)$ на X^*. Это следовало ожидать, т.к. теорема 3.3 дает достаточные условия совпадения решений задач I и 2.

2) См. сноску на стр...

Из (3) можно получить условие совпадающее с условием Вейерштрасса. В самом деле если B выбрано согласно (3), то

$$B(t,x,u)-B(t,x,\bar{u})\geq 0. \qquad (7)$$

Возьмем ψ в виде $\psi=p_i(t)\Delta x_i$. Принимая во внимание (I), неравенство (3.2) можно переписать:

$$f_0(t,x,u)-p_i(t)f_i(t,x,u)-f_0(t,x,\bar{u})+p_i(t)f_i(t,x,\bar{u})\geq 0. \qquad (8)$$

Здесь u – любые, а $\bar{u}$ – значения, соответствующие $\inf\limits_{u\in V} B$. Добавим к (8) тождественные нули

$$p_i[\dot{X}_i-f_i(t,x,u)]=0,\quad p_i[\dot{x}_i-f_i(t,x,\bar{u})]=0. \qquad (9)$$

Тогда

$$f_0+p_i(\dot{X}_i-f_i)-\bar{f}_0-p_i(\dot{x}_i-\bar{f}_i)-p_if_i+p_i\bar{f}_i\geq 0. \qquad (10)$$

Здесь $\bar{f}_i=f_i(t,x,\bar{u})$. Выпишем известную в вариационном исчислении функцию Лагранжа [24]

$$\bar{F}=f_0(t,x,\bar{u})+p_i(t)[\dot{x}_i-f_i(t,x,\bar{u})], \qquad (11)$$

где роль неопределенных множителей (множителей Лагранжа) играют $p_i(t)$. Согласно (9) $p_i=\partial\bar{F}/\partial\dot{x}_i$. Используя (10) и (11) без труда получаем

$$F-\bar{F}-(\dot{X}_i-\dot{x}_i)\bar{F}_{\dot{x}_i}\geq 0, \qquad (12)$$

где $F=f_0+p_i(\dot{X}_i-f_i)$. Неравенство (12) совпадает с условием Вейерштрасса сильного относительного минимума.

Из выражений (п.2 (3.8) теоремы 3.I можно получить условие, совпадающее с условием трансверсальности вариационного исчисления. Пусть, например, множество R есть все пространство E_n. Тогда условие стационарности, следующее из п.2 (3.8) теоремы 3.I. дает условие, совпадающее с условием трансверсальности:

$$\left[\frac{\partial F}{\partial x_i}+\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\right]\Big|_{t_1}=0 \qquad i=1,2,\dots,n. \qquad (13)$$

Условие, совпадающее с условием Якоби относительного минимума, можно получить из п.п. I-2 (3.8) теоремы 3.I. Пусть для простоты концы $x(t)$ фиксированы. Вычисляя d^2J, получим

$$d^2J=d^2\int_{t_1}^{t_2}B\,dt=\int_{t_1}^{t_2}(B_{x_ix_j}\delta x_i\delta x_j+2B_{x_iu_\beta}\delta x_i\delta u_\beta+B_{u_\beta u_\gamma}\delta u_\beta\delta u_\gamma)\,dt\geq 0, \qquad (14)$$
$$i,j=1,2,\dots,n;\quad \beta,\gamma=1,2,\dots,m,$$

где $\delta x_i(t), \delta u_\beta(t)$ подчинены уравнениям связи в вариациях

$$\delta \dot{x}_i = f^i_{x_j}\delta x_j + f^i_{u_\beta}\delta u_\beta \qquad i,j = 1,2,\dots,n, \quad f_i = f^i$$

Легко видеть, что выражение, стоящее справа под интегралом в (I-), совпадает со второй вариацией от F (3.7) [3], § 2, п. 3, если $\psi = p_i(t)\Delta x_i$.

Приложение 2 к § 3

Получение из α- функционала - метода штрафа.

I^0. Рассмотрим задачу поиска экстремума функций конечного числа переменных

$$I = f_0(x) \qquad f_i(x) = 0 \qquad i = 1,2,\dots, m < n. \tag{I}$$

Зададимся α - функционалом в виде

$$\alpha = a_i f_i^2, \tag{2}$$

где a_i - постоянные, $a_i > 0$. Очевидно, что (2) α- функционал, т.к. на допустимых x, он обращается в нуль. Построим обобщенный функционал

$$J = f_0(x) + a_i f_i^2. \tag{3}$$

Известно, что при определенных условиях при $a_i \to \infty$ минималь обобщенного функционала стремится к минимали задачи (I).

Однако из теоремы I.4 § I вытекает и новый факт: минимум обобщенного функционала (3) при любом α является оценкой снизу функционала (I).

2^0. Рассмотрим задачу оптимизации описываемую обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$I = F(x_1, x_2) + \int_{t_1}^{t_2} f_0(t,x,u)\,dt, \qquad \dot{x}_i = f_i(t,x,u) \qquad i = 1,2,\dots,n \tag{4}$$

и подробно описанную в § 3 п.2^0.

Зададим α - функционал в виде

$$\alpha = \int_{t_1}^{t_2} \frac{a_i}{2}\left[\dot{x}_i - f_i(t,x,u)\right]^2 dt, \tag{5}$$

где $a_i > 0$, и будем искать минимум функционала

$$\hat{I} = F + \int_{t_1}^{t_2}\left[f_0 + \frac{a_i}{2}(\dot{x}_i - f_i)^2\right]dt. \tag{6}$$

Для решения этой задачи можно применить теорему 3.I.

Введем обозначения

$$\dot{x}_i = v_i \qquad i = 1,2,\dots,n,$$

где v_i – новые управления. Тогда обобщенный функционал запишется

$$\mathcal{J}=F+\psi|_1^2+\int_{t_1}^{t_2}\left[f_0+\frac{a_i}{2}(v_i-f_i)^2-\psi_{x_i}v_i-\psi_t\right]dt=A+\int_{t_1}^{t_2}B\,dt, \tag{7}$$

Пусть концы $x(t)$ – фиксированы. Возьмем $\psi=p_i(t)x_i$. Подставим его в (7). Из условия $\inf\limits_{x,u,v} B$ получаем (V – открыто):

$$B_{v_i}=a_i(v_i-f_i)-p_i=0 \quad \text{или} \quad v_i=f_i+\frac{p_i}{a_i}, \tag{8}$$

т.е.

$$\dot{x}_i=f_i+\frac{p_i}{a_i}. \tag{9}$$

Далее учитывая (8) находим

$$B_{x_j}\equiv\frac{\partial f_0}{\partial x_j}+a_i(v_i-f_i)\left(-\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)=\frac{\partial f_0}{\partial x_j}-p_i\frac{\partial f_i}{\partial x_j}-\dot{p}_i=0, \tag{10}$$

$$B_{u_k}\equiv\frac{\partial f_0}{\partial u_k}-p_i\frac{\partial f_i}{\partial u_k}=0. \tag{11}$$

Используя обозначения гамильтониана: $H=p_if_i-f_0$, получаем окончательно

$$\dot{p}_i=-H_{x_i}\quad i=1,2,\dots,n,\quad H_{u_k}=0\quad k=1,2,\dots,r. \tag{12}$$

Таким образом видим, что (12) для функционала (6) совпадает с сопряженной системой принципа максимума, а правые части уравнений связи (4) отличаются добавкой p_i/a_i (см. (9)). Отсюда видно, что в случае ограниченности $p_i(t)$ на $[t_1,t_2]$ при $a_i\to\infty$, минималь функционала (6) стремится к минимали функционала (4).

Здесь также из теоремы I.4 § I вытекает и новый результат: минимум функционала (6) при любом $a<\infty$ является оценкой снизу величины функционала (4).

Приложение 3 к § 3

Построение функции ψ путем решения интегро-дифференциального уравнения.

Возьмем $\psi(t,x)$ в виде

$$\psi(t,x)=\int_{\bar{x}_i}^{x_i}\psi_{x_i}(t,x)dx_i, \qquad \text{где } \psi_{x_i}=\partial\psi/\partial x_i. \tag{1}$$

Здесь в каждом слагаемом все компоненты вектора x, кроме x_i, при интегрировании играют роль параметров.

Пусть ψ_{x_i} – непрерывны и $\psi_{x_i t}$ – существует. Тогда

$$\psi_t(t,x)=\int_{\bar{x}_i}^{x_i}\psi_{x_i t}(t,x)dx_i \quad (\psi_t=\partial\psi/\partial t,\ \psi_{x_i t}=\partial^2\psi/\partial x_i\partial t). \tag{2}$$

Подставив φ_t в (4) прилож. I к § 3 придем к интегро-дифферен-циальному уравнению

$$\inf_{u\in U}\left(f_0 - \varphi_t - \ldots \right) = 0, \qquad (3)$$

в случае решения которого найдем все поле оптимальных траекторий.

§ 4. Метод обратной подстановки.

I^0. Из предыдущего параграфа следует, что зная минималь ка-кого-либо функционала на допустимом множестве можно извлечь определенную информацию о решениях задачи I и даже решить одну из за-дач a, δ, θ, z (§I).

Известно, что большинство прямых задач: $\inf f_0(a)$ на A^* (или $\inf\int_{t_1}^{t_2} f_0\,dt$ на Q), (т.е. отыскание минимали для заданного функцио-нала) решаются с большим трудом или вообще для них нет удовлетво-рительных методов решения. Однако, если функционал заранее не ого-варивать, то решение для такого произвольного функционала найти просто. В этом нет ничего удивительного. В математике давно извест-но, что многие обратные задачи в отличие от прямых решаются без осо-бого труда. Примером может быть задача отыскания корней алгебраиче-ского уравнения. Для общего случая при $n \geq 5$ она решается с трудом и её решение не выражается через радикалы. Если же корни заданы, то соответствующее им алгебраическое уравнение находится при помощи простых действий. На базе этой идеи ниже излагается метод, позволяю-щий построить функционал, для которого бы некоторый допустимый эле-мент был абсолютной минималью на допустимом множестве. Поскольку нам при этом приходится решать задачу обратную исходной (находить не минималь ~~для~~ заданного функционала, а какой-либо функционал для некоторой минимали или поле минималей), то этот метод назван методом обратной подстановки. Метод излагается для двух случаев: задач тео-рии экстремумов функций конечного числа переменных (п.2^0) и задач оптимизации, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнения-ми (п.3^0).

2°. Рассмотрим обычную задачу теории экстремумов функций нескольких переменных $I=f_0(x)$, $f_i(x)=0$ $i=1,2,\dots,m\le n$ (4.1)

Преобразуем её. Выберем m компонент x и будем называть их основными. Пусть для определенности это первые m компонент вектора x . Оставшиеся $n-m=\tau$ компонент x обозначим u_j $(j=1,\dots,\tau)$. Тогда задачу /4.1/ можно переписать

$$I=f_0(x,u) \qquad f_i(x,u)=0 \qquad i=1,2,\dots,m\le n, \qquad (4.2)$$

где x-m-мерный вектор, $x\in X$; u-τ-мерный вектор, $u\in U$.

Зададимся более простым функционалом $\mathcal{I}_1(x,u)$ и найдём его абсолютную минималь на $X\times U$. Это решение можно использовать для построения множеств M, N, P :

$$M=\{x,u:\ \mathcal{I}_1-f_0\ge\bar{\mathcal{I}}_1-\bar{f}_0\}\ (4.3),\ N=\{x,u:\ \mathcal{I}_1+f_0\le\bar{\mathcal{I}}_1+\bar{f}_0\}\ (4.4),\ P=\{x,u:\ \mathcal{I}_1-f_0\le\bar{\mathcal{I}}_1-\bar{f}_0\}\ (4.5)$$

Недостаток этого способа в том, что некоторые из этих множеств могут не содержать допустимых элементов /т.е. x,u, удовлетворяющих $f_i=0$/.

Предположим, что связи $f_i(x,u)=0$ в /4.2/ могут быть разрешены относительно x : $x_i=x_i(u)$ $i=1,2,\dots n$ (4.6)

и $x\in X$ для $u\in U$. Зададимся достаточно простым функционалом $\mathcal{I}_1(x,u)$, подставим в него /4.6/ и найдём $\inf\limits_U \mathcal{I}_1(x(u),u)$ $\bar{u}$, а по /4.6/ $\bar{x}$. Это решение аналогично /4.3/-/4.5/ можно использовать для отыскания множеств M,N,P причем пересечения этих множеств с допустимым уже не пусты. Можно взять $\mathcal{I}_1(x,y,u)$, тогда $\bar{u}=\bar{u}(y)$ и зависимость M, N, P от y использовать для изменения "размеров" этих множеств. Очевидна оценка $\Delta=\inf\limits_y\sup\limits_u|\mathcal{I}_1(x(u),u)-I(x(u),u)|$

3. В §3 п.2 рассматривалась задача оптимизации, описываемая обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$I=\int_{t_1}^{t_2} f_0(t,x,u)dt, \qquad \dot{x}_i=f_i(t,x,u) \qquad i=1,2,\dots,n,\ u\in U. \qquad (4.7)$$

Было показано, что если задаться некоторой функцией $\psi(t,x)$ и найти минимум выражений: $\inf\limits_{x,u} B$ на (t_1,t_2) и $\inf\limits_{x_1,x_2} A$, то мы получим либо минималь задачи I, либо оценку снизу.

Поставим задачу иначе: найти функционал который соответствует данной функции $\psi(t,x)$ и минималь этого функционала на допустимом множестве[1)]

1) Заметим, что предлагаемый подход не имеет ничего общего с обратной задачей вариационного исчисления. Там задача ставится так: дана кривая - найти какой функционал (или множество функционалов) она минимизирует на данном допустимом подмножестве. Эта задача, вообще говоря, даже труднее, чем прямая задача.
У нас же минималь не задана. Она находится по данной $\psi(t,x)$

[illegible] 4.2, функционал соответствующий функции $\psi(t,x)$ определяется выражением

$$\mathcal{J}_1 = \int_{t_1}^{t_2} B_1(t,x)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} -\inf_{u \in U}\left[-\psi_{x_i} f_i(t,x,u) - \psi_t\right] dt, \qquad (4.8)$$

а соответствующая ему допустимая минималь уравнениями

$$\dot{x}_i = f_i\left[t, x, \bar{u}(t, x, \psi_{x_i}, \psi_t)\right] \quad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (4.9)$$

где $\bar{u} = \bar{u}(t, x, \psi_{x_i}, \psi_t)$ – находится из (4.8).

Доказательство: Составим выражение B (см., § 3 (3.II)) для задачи (4.7) и проверим условия (3.8) теоремы 3.I:

$$B_2(t) = \inf_{x,u}\left[B_1(t,x) - \psi_{x_i} f_i(t,x,u) - \psi_t\right]. \qquad (4.10)$$

Очевидно, что (4.10) тождественно равно нулю при $\psi = \psi(t,x)$ в силу (4.8) и $\bar{x}, \bar{u}$ удовлетворяют уравнениям (4.7). Если в качестве значений $x(t_2)$ принять значения $x(t)$, получающиеся из (4.9) при t_2, то п.2 (3.8) исчезает и все условия (3.8) теоремы 3.I будут выполнены. Теорема доказана.

Следствие: I. Если $B_1 = f_0(t,x)$, то $x(t)$, получаемые по (4.10), дают поле минималей для граничного условия $\psi_2 = \psi$. В частности, когда концы кривой $x(t)$ из (4.9) совпадают с заданными граничными значениями, то эта кривая минималь задачи I.

Замечание I. Граничные условия на левом конце очевидно всегда могут быть выполнены. Для этого достаточно начать с заданных значений интегрирование системы (4.9). Добиться выполнения граничных условий на правом конце можно следующим приемом: Задаемся $\psi(t,x,c)$, где c - n - мерная константа. Подставляем $\psi(t,x,c)$ в (4.9) и подбираем c так, чтобы удовлетворить заданным граничным условиям на правом конце.

Полученный функционал может быть использован для построения множеств N, P (теорема 3.3):

$$N = \{t, x : f_0 + B_1 \leq \bar{f}_0 + \bar{B}_1\}, \quad P = \{t, x : B_1 - f_0 \leq \bar{B}_1 - \bar{f}_0\},$$

где $f_0 = f_0[t, x, \bar{u}(t, x, \psi_x, \psi_t)]$, а $\psi(t,x)$ – задана. Если найти

$$\bar{J} = \psi_2 - \psi_1 + \int_{t_1}^{t_2} \inf_x [f_0 - B_1] dt,$$

то мы получим еще и оценку снизу.

Отметим, что задание $\psi(t,x)$ определило нам не просто функционал и его минималь, а поле минималей, удовлетворяющих граничному условию $\psi_2 - \psi_1 = C$.

Замечание 2. Можно задаться $\psi(t,x,y)$. Тогда $B_1(t,x,y)$. Если можно подобрать такие $\bar{y}(t)$, что $B_1(t,x,\bar{y}) \equiv f_0(t,x)$ и краевые условия выполнены, то $\bar{u}(t,x,\bar{y})$ – оптимальный синтез задачи I.

4^0. Попутно покажем как можно найти функционал для заданного синтеза управления $u = u(t,x)$.

Приравняем заданное $u(t,x)$ управлению, найденному из (4.3), получим уравнение в частных производных

$$u(t,x) = \bar{u}(t, x, \psi_{x_i}, \psi_t). \tag{4.II}$$

Подставляя его решение $\psi(t,x)$ и заданное $u(t,x)$ в (4.8) и находим тот функционал, которому оно соответствует. Если $B_1 = f_0(t,x)$, то это синтез задачи I для граничного условия $\psi_2 = \Psi$.

Возьмем и другой подход. Задаемся $u = u(t,x,c)$, $\psi = \psi(t,x,y)$ и подставляем их в (4.8). Тогда $B_1 = B_1(t,x,c,y)$. За счет y можно попытаться добиться тождества $f_0 \equiv B_1$, а за счет выбора " c " минимизировать функционал I.

Пример 4.2. Пусть дана задача аналитического конструирования регулятора

$$I = \int_0^\infty b_{ij} x_i x_j \, dt, \ (4.12); \quad \dot{x}_i = a_{ij} x_j + u, \ 0 \leq t \leq \infty \ (4.13); \quad x_i(0) = x_{i0}, \ x_i(\infty) = 0, \ (4.14),$$

где $f_0 = b_{ij} x_i x_j$ – положительно определенная форма.

Зададим $u = c_i x_i$; где c_i – пост.

Будем искать ψ в виде квадратичной формы $\psi = A_{ij} x_i x_j$ с неопределенными коэффициентами.

Положим $f_0 \equiv \dot\psi$, т.е.

$$b_{ij} x_i x_j = A_{ji} x_i (a_{ij} x_j + c_j x_j)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых $x_i x_j$ слева и справа, получим систему $\frac{n(n+1)}{2}$ линейных неоднородных уравнений с таким же числом неизвестных A_{ij} . Предполагая, что определитель этой системы $\Delta \neq 0$, найдем A_{ij} . Подставляя $f_0 = \dot\psi$ в (4.I2) и интегрируя найдем: $I = \psi(x, c) - \psi(c, c)$ или с учетом (4.I4) $I = -\psi(x_{i0}, c)$. Отыскивая минимум этого выражения по C , получим оптимальный синтез. Если $-\psi(x, \bar c)$ - положительно определенная форма, то эта функция является функцией Ляпунова (ибо $\dot\psi \geq 0$) и регулятор асимптотически устойчив.

§ 5. Метод совмещения экстремумов в задачах условного минимума.

В данном параграфе будет показано, как метод совмещения экстремумов, рассмотренный в § 2 гл.I можно распространить на задачи теории функций конечного числа переменных (п.I^0) и задачи описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями.

I^0. Снова рассмотрим задачу теории экстремумов функции конечного числа переменных

$$I = f_0(x) \qquad f_i(x) = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{5.I}$$

Построим функционал

$$\mathcal{J}(x, c) = f_0(x) + \beta(x, c) + \alpha_1(x). \tag{5.2}$$

Здесь $\alpha_1(x)$ - есть α - функционал. C - n - мерная постоянная.

Из условия

$$\inf_{x \in X^*} \mathcal{J}(x, c) \tag{5.3}$$

находим: $\varphi_1(x^{(1)}, c) = 0$. Из условия

$$\Phi(x, c) = \sup_{x \in X^*} [\beta(x, c) + \alpha_1(x)] \tag{5.4}$$

находим: $\varphi_2(x^{(2)}, c) = 0$. Решая совместно систему (уравнения совмещения):

$$\varphi_1(x^{(1)}, c) = 0, \quad \varphi_2(x^{(2)}, c) = 0, \quad x^{(2)} = x^{(1)}, \tag{5.5}$$

с (5.I), получаем абсолютную минималь задачи I. Добавка $\beta(x, c)$ - подбирается так, чтобы задачи (5.3), (5.4) решались проще.

Пусть, например, $\alpha_1=\lambda_i f_i$, $\alpha_2=\nu_i f_i$, функции $f_i(x)$ $i=0,1,\dots,n$ – непрерывны и дифференцируемы, функции $J(x,c)$, $\Phi(x,c)$ имеют единственный минимум и максимум соответственно при любом c. Тогда для определения минимали получаем систему $3n+2m$ уравнений с таким же числом неизвестных $x^{(1)}, x^{(2)}, c, \lambda, \nu$:

$$J'_{x_j}(x^{(1)},c,\lambda)=0,\quad \Phi'_{x_j}(x^{(2)},c,\nu)=0,\quad f_i(x^{(1)})=0,\quad f_i(x^{(2)})=0,\quad x_j^{(1)}=x_j^{(2)}, \qquad (5.6)$$
$$j=1,2,\dots,n;\quad i=1,2,\dots,m.$$

Эту систему можно упростить, если взять вектор c размерности $(n-m)$ и при помощи последнего уравнения в (5.6) исключить $x^{(1)}$. В результате получим систему $2n+m$ уравнений

$$J'_{x_j}(x,c,\lambda)=0,\quad \Phi'_{x_j}(x,c,\nu)=0,\quad f_i(x)=0 \qquad (5.6)'$$

с $2n+m$ неизвестными x, λ, ν, c.

Это же замечание относится и к системе (5.5), (5.1), которая в этом случае принимает вид

$$\varphi_1(x,c)=0,\quad \varphi_2(x,c)=0,\quad f_i(x)=0.$$

Пример 5.1. Найти минимум в задаче

$$I=\frac{1}{4}x_1^4+\frac{1}{4}x_2^4+x_1^2+2x_2^2+x_1x_2-6x_1+1,\qquad x_1+x_2=0.$$

Возьмем $\beta=-x_1^2-2x_2^2-x_1x_2+6x_1+c_1x_1$, $\alpha_1=\lambda(x_1+x_2)$. Тогда

$$J=I+\beta+\alpha_1=\frac{1}{4}x_1^4+\frac{1}{4}x_2^4+c_1x_1+\lambda(x_1+x_2),$$
$$J'_{x_1}=\bar{x}_1^3+c_1+\lambda=0,\qquad J'_{x_2}=\bar{x}_2^3+\lambda=0.$$

Откуда

$$\bar{x}_1=-\sqrt[3]{\frac{1}{2}c_1},\qquad \bar{x}_2=\sqrt[3]{\frac{1}{2}c_1}. \qquad (5.7)$$

Точно также

$$\Phi=\beta+\alpha_2=-x_1^2-2x_2^2-x_1x_2+6x_1+c_1x_1+\nu(x_1+x_2),$$
$$\Phi'_{x_1}=-2\hat{x}_1-\hat{x}_2+6+c_1+\nu=0,\qquad \Phi'_{x_2}=-\hat{x}_1-4\hat{x}_2+\nu=0,$$
$$\hat{x}_1=\frac{3}{2}+\frac{1}{4}c_1,\qquad \hat{x}_2=-\frac{3}{2}-\frac{1}{4}c_1. \qquad (5.8)$$

Приравниваем $\bar{x}_1=\hat{x}_1$, $\bar{x}_2=\hat{x}_2$ и получаем уравнение[1)]

$$z^3+3z+3=0 \qquad \text{или} \qquad (z+1)(z^2-z+3)=0,$$

где $z^3=\frac{1}{2}c_1$. Это уравнение имеет единственный действительный корень $z=-1$, (т.е. $c_1=2$). Поэтому по (5.7) получаем $\bar{x}_1=1$, $\bar{x}_2=-1$.

2^0. Рассмотрим задачу описываемую обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$I=\int_{t_1}^{t_2} f_0(t,x,u)\,dt,\quad \dot{x}_i=f_i(t,x,u)\quad i=1,2,\dots,n,\ u\in U,\ x(t_1)=x_1,\ x(t_2)=x_2. \qquad (5.9)$$

---

1) Уравнения совпали между собой. Поэтому выписано только одно.

Полагаем $\psi^{(1)} = p_i^{(1)}(t) x_i^{(1)}$ и составляем функцию

$$\mathcal{E}_1 = f_0 + \beta(t, x^{(1)}, u^{(1)}, z) - p_i^{(1)} f_i^{(1)} - \dot{p}_i^{(1)} x_i^{(1)} = -H^{(1)} - \dot{p}_i^{(1)} x_i^{(1)}.$$

где $z(t)$ - z - мерная функция. Она может иметь конечное число разрывов 1-го рода.

Из условия $\inf\limits_{x,u} \mathcal{E}_1$ и (5.9) находим

$$\dot{p}^{(1)} = -H_x^{(1)}, \quad \bar{u}^{(1)} = \bar{u}^{(1)}(t, x^{(1)}, p^{(1)}, z), \quad \dot{x}^{(1)} = f(t, x^{(1)}, u^{(1)}). \tag{5.10}$$

Полагаем $\psi^{(2)} = p_i^{(2)} x_i^{(2)}$ и составляем функцию

$$\mathcal{E}_2 = \beta(t, x^{(2)}, u^{(2)}, z) - p_i^{(2)} f_i^{(2)} - \dot{p}_i^{(2)} x_i^{(2)} = -H^{(2)} - \dot{p}_i^{(2)} x_i^{(2)}.$$

Из условия $\sup\limits_{x,u} \mathcal{E}_2$ и (5.9) находим

$$\dot{p}^{(2)} = -H_x^{(2)}, \quad \bar{u}^{(2)} = \bar{u}^{(2)}(t, x^{(2)}, p^{(2)}, z), \quad \dot{x}^{(2)} = f(t, x^{(2)}, u^{(2)}). \tag{5.II}$$

Учитывая уравнения совмещения: $x^{(1)} = x^{(2)}$, $u^{(1)} = u^{(2)}$, получаем окончательно:

$$\dot{x} = f(t, x, u^{(2)}), \quad \dot{p}^{(1)} = -H_x^{(1)}, \quad \dot{p}^{(2)} = -H_x^{(2)}, \quad \bar{u}^{(1)}(t, x, p^{(1)}, z) = \bar{u}^{(2)}(t, x, p^{(2)}, z). \tag{5.I2}$$

Эта система $3n + z$ уравнений с $3n + z$ неизвестными $x, p^{(1)}, p^{(2)}, z$. Последнее уравнение в (5.I2) является уравнением совмещения. Добавка β подбирается так, чтобы решение задач по отысканию инфинума и супремума упростилось.

Основные результаты гл.2

I. Подробно рассмотрен частный случай β - функционала, α - функционал. Показано, что при помощи α - функционала исходную задачу I - поиска минимума на допустимом множестве - можно свести к некоторой задаче 2 - поиска минимума на расширенном множестве более простой структуры. Из решения задачи 2 можно либо получить минималь задачи I, либо оценку снизу и извлечь информацию о множестве, содержащем абсолютную минималь и лучшие решения. Показано, что существует бесконечное число α - функционалов и предложен алгоритм 4 для решения поставленных задач.

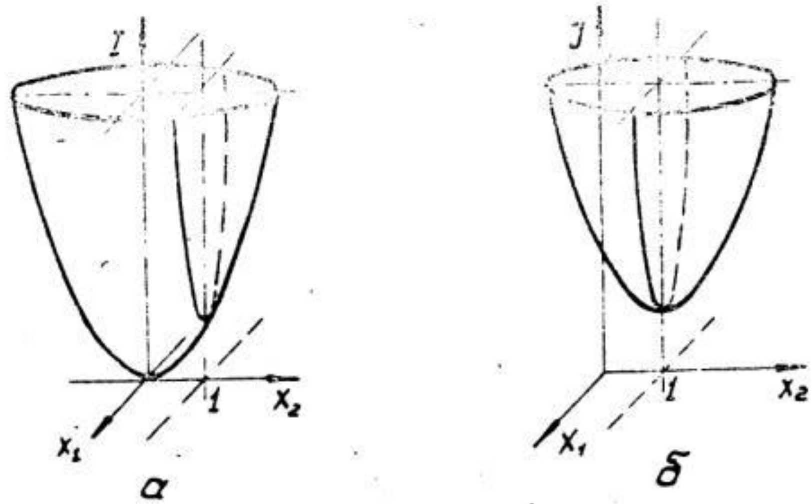
2. Показано, как можно применить методы α - функционала к известным задачам оптимизации: поиска условного минимума функции конечного числа переменных, задачам оптимизации, описываемым обыкновенными дифференциальными уравнениями, методу динамического программирования Р.Беллмана, задачам.описываемым уравнениями в частных производных.

Предлагаемым подходом наряду с классическими [illegible] получать оценки снизу и подмножества, содержащие абсолютные минималь и лучшие решения.

3. Показано, что $\varkappa$ - функционалы можно построить не [illegible] известных форм связей задаваемых в виде уравнений, но и для функционалов, связанных логическими условиями (двойная импликация, дизьюнкция, коньюнкция, отрицание).

4. Показано, что метод $\varkappa$ - функционала не является ни методом множителей Лагранжа, ни методом "штрафа". Однако последний из них может быть получен при специальном задании $\varkappa$ - функционала.

5. Для решения поставленных задач, в частности, может быть использован метод обратной подстановки и метод совмещения экстремумов, распространенный на случай условного минимума.



фиг. 2.1

ГЛАВА 3

МЕТОД МАКСИМИНА

§ I. Общий случай. Основные теоремы. Оценки. Уравнения максимина. Алгоритмы 4, 4', 4''.

I°. Продолжим рассмотрение задачи гл.I § I: на X задан функционал $I(x)$. Ищется минимум его на допустимом подмножестве $X^* \subseteq X$.

Метод α – функционала неудобен тем, что он оставляет открытым вопрос о подборе $\alpha(x)$ такого, чтобы $\bar{x} \in X^*$. Развиваемый ниже подход дает алгоритм в значительной мере лишенный этого недостатка.

Теорема I.I. Пусть: I) $\alpha(x,y)=0$ только на X^* при $\forall y \in Y$. 2) $\alpha(x,y)$ таково, что для $\forall x \in X \setminus X^*$ найдется $y \in Y$ такое, что $I(x)+\alpha(x,y) > m = \inf\limits_{X^*} I(x)$.

3/ Существует пара $\bar{x},\bar{y}$ удовлетворяющая условию:

$$J(\bar{x},\bar{y}) = \sup_{Y} \inf_{X} \left[I(x) + \alpha(x,y) \right] \qquad (I.I)$$

4/ $J(\bar{x},y) \le J(\bar{x},\bar{y})$ на Y. Тогда: 1/ $\bar{x}$ – принадлежит X^*.

2) $\bar{x}$ – является абсолютной минималью задачи I: $\inf I(x)$, $x \in X^*$.

Доказательство: I) Пусть $\bar{x} \notin X^*$. Из теоремы I.4 гл.2 имеем $\inf\limits_{X} J(x) \le m$. Т.к. это неравенство справедливо при любом $y \in Y$, то $J(\bar{x},\bar{y}) = \sup\limits_{Y} \inf\limits_{X} J \le m$ и $J(\bar{x},y) \le J(\bar{x},\bar{y}) \le m$ на Y. Но это противоречит п.2 условия теоремы. Следовательно, $\bar{x} \in X^*$. 2) Из $\bar{x} \in X^*$ и $\alpha(\bar{x},\bar{y})=0$ следует, что $J(\bar{x},\bar{y}) = \inf I(x)$, $x \in X^*$, т.е. $x^* = \bar{x}$.Теорема доказана.[1)]

Следствие I. При выполнении условий теоремы I.I точка $\bar{x},\bar{y}$ является седловой точкой функционала $J(x,y)$[2)], т.е.

$$J(\bar{x},y) \le J(\bar{x},\bar{y}) \le J(x,\bar{y}). \qquad (I.2)$$

2. Из следствия I вытекает: при выполнении условий теоремы I.I:

$$J(\bar{x},\bar{y}) = \sup_{Y} \inf_{X} J(x,y) = \inf_{X} \sup_{Y} J(x,y).$$

I) Заметим, что $J(\bar{x},y) \le J(\bar{x},\bar{y})$ (здесь $\bar{x}$, $\bar{y}$ – фиксировано) представляет самостоятельное условие, не следующее из (I.I). Из (I.I) вытекает $\sup\limits_{Y} \inf\limits_{X} J(x,y) = \sup\limits_{Y} J(\bar{x}(y),y)$. Отсюда видно, что супремум ищется не при фиксированном $\bar{x}$, а на подмножестве x, y, связанных условием $\bar{x} = \varphi(y)$. Поэтому неравенство $J(\bar{x},y) \le J(\bar{x},\bar{y})$, вытекающее из (I.I), имеет место на этом подмножестве и может не иметь места при фиксированном $\hat{x}$.

2) Где y идет первым аргументом, а x – вторым (ибо у нас $\max\limits_{y} \min\limits_{x} J(x,y)$, а не $\min\limits_{x} \max\limits_{y} J(x,y)$ как принято в определении седловой точки.

Доказательство следств. 1: Из условия теоремы I.I имеем: $\mathcal{J}(\bar{x},y) \le \mathcal{J}(\bar{x},\bar{y})$. Зафиксируем $y=\bar{y}$. Тогда из (I.I) $\mathcal{J}(\bar{x},\bar{y}) = \inf\limits_{X} \mathcal{J}(x,\bar{y})$, т.е. $\mathcal{J}(\bar{x},\bar{y}) \le \mathcal{J}(x,\bar{y})$. Отсюда вытекает (I.2).

Замечания: I. Пусть $\bar{x}$, $\bar{y}$ - седловая точка функционала $\mathcal{J}(x,y)$ и $\bar{x}\in X^*$. Тогда $\bar{x}$- абсолютная минималь задачи I.

Доказательство. Из определения седловой точки (I.2) имеем

$$I(\bar{x}) + \alpha(\bar{x},y) \le I(\bar{x}) + \alpha(\bar{x},\bar{y}) \le I(x) + \alpha(x,\bar{y}). \qquad (I.2)'$$

На X^* $\alpha\equiv 0$ при $\forall y$. $\bar{x}\in X^*$. Поэтому на X^* из $(I.2)'$ следует: $I(\bar{x}) \le I(x)$, что и треб.доказать.

2. Если $\bar{x}$, $\bar{y}$ - седловая точка относительно некоторой своей окрестности и $\bar{x}\in X^*$, то $\bar{x}$- относительная минималь задачи I.

3. Пусть имеется α- функционал и элемент $\bar{x}\in X^*$ такие, что $\mathcal{J}(\bar{x},\bar{y}) = \sup\limits_{Y'} \inf\limits_{X} [I(x)+\alpha(x,y)]$. Тогда любой элемент $x_1\in X^*$ и удовлетворяющий условию

$$\mathcal{J}(x_1,\bar{y}) = \sup_{y\in Y'} \inf_{x\in X} [I(x) + \alpha(x,y)] \qquad (I.\mathbf{1})'$$

- есть абсолютная минималь функционала $I(x)$ на X^* и любая абсолютная минималь функционала $I(x)$ на X^*, при соответствующем выборе множества Y удовлетворяет условию $(I.\mathbf{1})'$.

Доказательство: Из $x_1\in X^*$ и $(I.\mathbf{1})'$ следует: $\mathcal{J}(x_1) = \inf\limits_{x\in X^*} I(x) = I(x_1)$. Обратно: пусть x_1- абсолютная минималь $I(x)$ на X^*. Из $x_1\in X^*$ получаем

$$I(x_1) = \inf_{x\in X^*} I(x) = \mathcal{J}(\bar{x}) = \sup_{y\in Y'} \inf_{x\in X} [I(x) + \alpha(x,y)].$$

Теорема I.2 (о существовании α- функционала удовлетворяющего теореме I.I).

Пусть $x^*\in X^*$ - существует. Тогда 1) существует такое $\alpha(x,y)$, что $x^*,\bar{y}$ является седловой точкой функционала $\mathcal{J}(x,y)$, 2) это $\alpha(x,y)$ удовлетв. (I.1).

Доказательство: (метод построения). 1. Зададим $\alpha(x,y)$ так, чтобы $\alpha\equiv 0$ на X^* при $\forall y\in Y$. Зафиксируем некоторое $y=\bar{y}$. Тогда на X^* $\mathcal{J}(x^*,\bar{y}) \le \mathcal{J}(x,\bar{y})$, ибо x^*- минималь задачи I на X^*. На $X-X^*$ $\alpha(x,\bar{y})$- произвольна и её всегда можно выбрать так, что $\mathcal{J}(x,\bar{y}) \ge \mathcal{J}(x^*,\bar{y})$. Кроме того, в силу нашего построения $\mathcal{J}(x^*,y) \le \mathcal{J}(x^*,\bar{y})$, ибо $x^*\in X^*$ и $\alpha(x^*,y)=0$ $\forall$. Итак построенная нами добавка $\alpha(x,y)$ дает: $\mathcal{J}(x^*,y) \le \mathcal{J}(x^*,\bar{y}) \le \mathcal{J}(x,\bar{y})$ на $x\in X$, $y\in Y$. А это есть опре-

2. Из п.1 вытекает[1] п.2.

деление седловой точки. Теорема доказана.

Замечание 4. Аналогично можно построить $\alpha(x,y)$, удовлетворяющие условию $\mathcal{J}(x^*,y) < \mathcal{J}(x^*,\bar{y}) < \mathcal{J}(x,\bar{y})$ при

$$(x,y) \neq (x^*,\bar{y})$$

Замечание 5. Из доказательства теоремы I.2ясно, что число α - функционалов, удовлетворяющих теореме I.I,- бесконечно.

Теорема I.3. Пусть $\alpha(x,y)=0$ только на X^* при $\forall y \in Y$. Тогда (I.I) дает оценку снизу $I(x)$ на X^*.

Доказательство: $\mathcal{J}(\bar{x},y) = \inf\limits_{X} \mathcal{J}(x,y) \leq m$ при $\forall y \in Y$. Следовательно, $\sup\limits_{Y} \mathcal{J}(\bar{x},y) \leq m$, что и треб.доказать.

Замечание 6. Теоремы I.2-I.4 § I гл.2 вытекают как частный случай из теорем I.I-I.3, если зафиксировать y.

Из теоремы I.I. вытекает алгоритм $\mathfrak{S}$ (метод максимина). Чтобы найти x^* надо решить задачу (I.I).

Решать задачу (I.I) можно различно:

а) Алгоритм $\mathfrak{S}'$. Берем одновременно $\inf\limits_{x}$ и $\sup\limits_{y}$, получим систему

$$\omega_1(\bar{x},\bar{y})=0, \quad \omega_2(\bar{x},\bar{y})=0 \tag{I.3}$$

(уравнения максимина[2]), отыскивая решения которой и получим точки $\bar{x}$, $\bar{y}$.

б) Алгоритм $\mathfrak{S}''$. Берем вначале $\inf\limits_{x} \mathcal{J}$, находим

$$\omega_3(\bar{x},y)=0 \tag{I.4}$$

и $\mathcal{J}_1(y) = \inf \mathcal{J}(x,y)$, а затем $\sup\limits_{y} \mathcal{J}_1(y)$ и

$$\omega_4(y)=0. \tag{I.4$'$}$$

Назовем их уравнениями последовательного максимина. Отыскиваем корни (I.4)$'$ и из $\omega_3=0$ (I.4) находим минималь $\bar{x}$.

2^0. Будем искать (I.I) при дополнительном условии $\alpha(x,y)=0$. Находим вначале $\inf\limits_{x}[I(x)+\alpha(x,y)]$ и $\bar{x}=\bar{x}(y)$. Выберем теперь y таким образом

I) Дж.Мак Кинси "Введение в теорию игр", ФМ, 1960, стр.25.

2) Вообще говоря, это векторные уравнения.

чтобы $\alpha=0$, т.е. $\alpha(\bar{x},\bar{y})=0$. Тогда очевидно, что на подмножестве пар x, y удовлетворяющих условию $\alpha(x,y)=0$ требование $\sup_y$ будет выполнено (т.к. на этом подмножестве J не зависит от y). Таким образом имеет место

<u>Алгоритм 6</u> (<u>метод условного максимина</u>)

Чтобы найти x^* надо решить систему

$$\bar{x}=\bar{x}(y), \qquad \alpha(\bar{x},y)=0, \tag{I.5}$$

где $\bar{x}$ минималь задачи $\inf_X [I(x)-\alpha(x,y)]$.

Первое уравнение (I.5) может быть и в неявном виде. Уравнения (I.5) при этом примут вид

$$\xi(\bar{x},y)=0, \qquad \alpha(\bar{x},y)=0. \tag{I.5$'$}$$

Назовем их <u>общими уравнениями условного максимина</u>.

Если при помощи одного из уравнений (I.5) исключить $\bar{x}$, придем к уравнению[I)]

$$\omega_5(y)=0, \tag{I.5$''$}$$

а если исключить y, то к уравнению

$$\omega_6(\bar{x})=0. \tag{I.5$'''$}$$

Первое из них мы назовем <u>уравнением условного максимина относительно вспомогательного неизвестного</u>, а второе – <u>уравнением условного максимина относительно основного неизвестного</u>.

<u>Пример I.I.</u> Найти минимум $I=\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2$ при условии $x_1+x_2=1$. Решение (алгоритм 4): берем $\alpha=y(x_1+x_2-1)$, $J=I+\alpha=\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2+y(x_1+x_2-1)$, $\inf_X J$, $J'_{x_1}=x_1+y=0$, $J'_{x_2}=x_2+y=0$, $J=\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}y^2-2y^2-y=-y^2-y$, $\sup_y J$, $\bar{y}=-\frac{1}{2}$, $\bar{x}_1=\bar{x}_2=\frac{1}{2}$.

То обстоятельство, что $\bar{x},\bar{y}$ – седловая точка функционала $J(x,y)$ открывает определенные возможности для решения задачи (I.I). Например когда X, Y – конечномерные пространства и $J(x,y)$ – непрерывна и диффе-

---

I) Во всех наших рассуждениях не оговаривая этого особо, используется классическая схема исследования, т.е. предполагается, что соответствующие действия выполнимы (или имеют место условия, при которых они выполнимы).

ренцируема на $X\times Y$, можно применить уравнения градиентного метода для отыскания седловой точки: $\dot{x}=-\nabla_x \mathcal{J}(x,y)$, $\dot{y}=\nabla_y \mathcal{J}(x,y)$; где ∇_x, ∇_y – обозначают градиенты, вычисленные по соответствующим переменным.

Приложение к § I

I. Метод максимина для β - функционала с ограничениями типа равенств и неравенств.

Пусть на X задан функционал $I(x)$, ограниченный снизу. Допустимое множество $X^*\neq\varnothing$ выделено при помощи функционалов

$$F_i(x)=0 \quad i=1,2,\dots,K, \quad \Phi_j(x)\le 0 \quad j=1,2,\dots,q. \tag{2.1}$$

Возьмем β - функционал в виде (по i,j - сумма)

$$\beta(x,y)=\lambda_i(x,y)F_i(x)+\omega_j(x,y)\Phi_j(x), \tag{2.2}$$

где $\lambda_i(x,y)$, $\omega_j(x,y)$ некоторые функции x, y, $y\in Y$, причем $\omega_j(x,y)\ge 0$.

Построим обобщенный функционал

$$\mathcal{J}(x,y)=I(x)+\lambda_i(x,y)F_i(x)+\omega_j(x,y)\Phi_j(x). \tag{2.3}$$

Теорема I (условие максимина для β - функционала). Предположим: а) $\omega_j(x,y)\ge 0$, $\lambda_i(x,y)$ таково, что для $\forall x\in(X-X^*)$ найдется $y\in Y$ такое, что $\mathcal{J}(x,y)>m$. Найдем $\bar{x}$ из условия

$$\mathcal{J}(\bar{x},\bar{y})=\sup_Y \inf_X \left[I(x)+\beta(x,y)\right]. \tag{2.4}$$

Пусть: б) $\mathcal{J}(\bar{x},y)\le\mathcal{J}(\bar{x},\bar{y})$ на Y. с) $\beta(\bar{x},\bar{y})=0$, d) $\bar{x},\bar{y}$ – существует. Тогда: I) $\bar{x}$ принадлежит X^*, 2) $\bar{x},\bar{y}$ – является седловой точкой функционала $\mathcal{J}(x,y)$, 3) $\bar{x}$ – абсолютная минималь задачи I. 4) $\mathcal{J}(\bar{x},\bar{y})=I(\bar{x})=m$.

Доказательство: I) Предположим противное: $\bar{x}\notin X^*$. Из теоремы 2 приложения 4 к § I гл.I имеем $\inf_{x\in X}\mathcal{J}(x,y)\le m$. Т.к. это неравенство справедливо при $\forall y\in Y$, то $\mathcal{J}(\bar{x},y)=\sup_Y\inf_X \mathcal{J}\le m$ и $\mathcal{J}(\bar{x},y)\le\mathcal{J}(\bar{x},\bar{y})\le m$ на Y. Но это противоречит условию теоремы – на $X-X^*$ существует $y\in Y$, такое, что $\mathcal{J}(x,y)>m$. Следовательно, $\bar{x}\in X^*$.

2) Из (2.4) при любом фиксированном y следует $\mathcal{J}(\bar{x},\bar{y})\le\mathcal{J}(x,\bar{y})$. Учитывая п.2 условия, получаем

$$\mathcal{J}(\bar{x},y)\le\mathcal{J}(\bar{x},\bar{y})\le\mathcal{J}(x,\bar{y}), \tag{2.5}$$

а это есть определение седловой точки.

3) Т.к. $\bar\beta=0$, то из (2.5) : $I(\bar x)\le I(x)+\beta(x,\bar y)$. На X^* $\beta(x,\bar y)\le 0$. Следовательно $I(\bar x)\le I(x)$ на X^*. Т.к. $\bar x\in X^*$, то $\bar x$ - абсолютная минималь задачи I на X^*.
4) Ввиду $\bar\beta=0$, $\mathcal{J}(\bar x,\bar y)=I(\bar x)=m$. Теорема доказана.

Замечание. п.3 утверждения теоремы I для частного случая, когда $\xi(x)$ отсутствуют и $\omega_j=y_j$, можно получить сразу из п.2 теоремы I, используя известную теорему Куна-Таккера[Io4] гл.3 о седловой точке: если $\bar x,\bar y$ - седловая точка функции $I(x)+y\Phi(x)$, то $\bar x$ оптимальный вектор задачи максимизации.

Таким образом, теорема Куна-Таккера является частью теоремы I для одного частного случая.

§ 2. Применение метода максимина к задачам оптимизации, описываемым обыкновенными дифференциальными уравнениями.

а) Основная теорема максимина. Методы редукции. Алгоритмы р.э. Оценки.

I°. В гл. 2 § 3 была сформулирована типовая задача оптимизации, описывая обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\dot x_i=f_i(t,x,u)\quad i=1,2,\dots,n\ ,\quad x(t_1),x(t_2)\in R. \tag{2.1}$$

Значения t_1,t_2 - заданы, $u\in U$, $[t_1,t_2]=T$, $x\in G$. Как и в гл.2 § 3 D -множество непрерывных кусочно-дифференцируемых $x(t)$, V - множество $u(t)$ с $u\in U$ и могущих иметь разрывы I-го рода. Q - множество пар $x(t)$, $u(t)\in$ $\in D\times V$, удовлетворяющих (2.I). Качество процесса оценивается функционалом

$$I=F(x_1,x_2)+\int_{t_1}^{t_2} f_0(t,x,u)\,dt. \tag{2.2}$$

Зададимся некоторой непрерывной дифференцируемой функцией $\psi(t,x,y)$, определенной на $T\times G\times Y$, где y-n - мерный вектор[I)], построим функции

$$A=F+\psi_2-\psi_1\ ,\qquad B=f_0-\psi_{x_i}f_i-\psi_{y_i}\dot y_i-\psi_t \tag{2.3}$$

и обобщенный функционал $\quad \mathcal{J}=A+\int_{t_1}^{t_2}B\,dt.$ (2.4)

Здесь $\psi_1=\psi[t_1,x(t_1),y(t_1)]$, $\psi_2=\psi[t_2,x(t_2),y(t_2)]$.

Обозначим W множество непрерывных кусочно-дифференцируемых n -мерных вектор-функций $y(t)$ с $y\in Y$. Из теоремы I.I, § I следует

<u>Теорема 2.I.</u> Пусть существует непрерывная дифференцируемая функция $\psi(t,x,y)$, удовлетворяющая условиям:

I) Для $\forall x,u \notin Q$ найдется $y \in W$, такое, что $J > m$ [I)],

2) $J(\bar{x},\bar{u},\bar{y}) = \sup\limits_{y(t)\in W} \left(\inf\limits_{x_1,x_2 \in Q} A + \int_{t_1}^{t_2} \inf\limits_{x\in G,\, u\in V} B\,dt \right)$, $\qquad$ (2.5)

3) $\bar{x}(t) \in D$, $\bar{u}(t) \in V$.

4) $J(\bar{x},\bar{u},y) \le J(\bar{x},\bar{y},\bar{u})$ на W, ~~во~~ $\overbrace{\bar{x},\bar{u} \in Q}^{\text{Тогда: пара}}$ и $\bar{x},\bar{u}$ – является абсолютной минималью функционала (2.2).

Здесь также имеет место <u>следствие I</u> (см. § I): в условиях теоремы 2.I, точка $\bar{x},\bar{y}$ является седловой точкой функционала (2.4).

<u>Замечания</u>: I. Если $\bar{x},\bar{u} \in Q$, то условие $J(\bar{x},\bar{u},y) \le J(\bar{x},\bar{u},\bar{y})$ всегда выполнено, ибо на Q $\quad \alpha \equiv 0$.

2. Если (2.5) заменить условием

$$\bar{J} = \max_{y(t)} \left(\min_{x_1,x_2} A + \int_{t_1}^{t_2} \min_{x} \inf_{u\in V} B\,dt \right),$$

где под $\min$, $\max$ понимаются локальные минимумы, то $\bar{x}$, $\bar{u}$ – сильная относительная минималь.

3. Условие 2,3 теоремы можно заменить более жесткими:

$$2)\ \sup_{y_1,y_2} \inf_{x_1,x_2\in R} A,\quad \sup_{y} \inf_{x\in G,\, u\in V} B\ ;\quad 3)\ \bar{x},\bar{u}\in Q,\ \bar{y}\in W. \qquad (2.5)'$$

4. Простейшая функция $\psi(t,x,y)$ - это $\quad \psi = y_i x_i$.

5. Замечание 3 § I гл. 3 принимает для данной задачи следующую форму: пусть существует функция $\psi(t,x,y)$ и хотя бы одна допустимая тройка $\bar{x},\bar{y},\bar{u}$, удовлетворяющая (2.5) (или $(2.5)'$). Тогда любая другая тройка $\tilde{x}$, $\tilde{u}$, $\tilde{y}$, удовлетворяющая (2.5) (соответственно $(2.5)'$) дает $\tilde{x},\tilde{y}$ - абсолютную минималь задачи I и любая допустимая абсолютная минималь задачи I при соответствующем выборе множества Y удовлетворяет условию (2.5) (или $(2.5)'$).

6. Можно показать, что если t_1, t_2 – не фиксированы, то (2.5) таковы:

I) Это требование можно заменить более простым: $\psi_{x_i}(t,x,y)$ неограничены сверху по y на $x \in G$.

$$2)\ \sup_{y_1,y_2}\ \inf_{t_1,t_2;\,x_1,x_2\in R} A\,,\qquad \sup_{y}\ \inf_{x\in G,\,u\in V} B=0 \text{ на } [t_1,t_2],\ \ 3)\ \bar x,\bar u\in Q,\ \bar y\in W. \qquad (2.5)''$$

7. Теорема 3.I § 3 гл.2 является частным случаем теоремы 2.I, если зафиксировать y .

Из теоремы I.2 § I для данного случая вытекает

Теорема 2.2. Пусть $\psi(t,x,y)$ непрерывная дифференцируемая функция. Имеет место оценка снизу

$$I(x,u)\geq \sup_{y(t)\in W}\Big(\inf_{x_1,x_2\in R} A+\int_{t_1}^{t_2}\inf_{x\in G,\,u\in V} B\,dt\Big). \qquad (2.6)$$

С учетом п.2 (2.5) получаем еще одну оценку

$$I(x,u)\geq \sup_{y_1,y_2}\ \inf_{x_1,x_2\in R} A+\int_{t_1}^{t_2}\sup_{y}\ \inf_{x\in G,\,u\in V} B\,dt\Big). \qquad (2.6)'$$

Эта оценка проще в смысле вычислений, но, вообще говоря, более грубая, чем (2.6).

Для решения задачи (2.5) можно использовать следующий

Алгоритм 5 (метод подбора $\psi(t,x,y)$). Задаемся $\psi^{(1)}(t,x,y)$ [I], решаем задачу (см. (3.8) гл.2):

$$\inf_{x,u}\big[f_0-\psi^{(1)}_{x_i}f_i-\psi^{(1)}_{y_i}\dot y_i-\psi^{(1)}_t\big]=B^{(1)}(t,y,\dot y),\qquad \inf_{x_1,x_2}\big(F+\psi^{(1)}_2-\psi^{(1)}_1\big)=A^{(1)}(y_1,y_2) \quad (2.7)$$

При этом находим

$$\bar u=\bar u(t,y,x)\,,\qquad \bar x=\bar x(t,y,\dot y). \qquad (2.8)$$

Рассматриваем

$$I^{(1)}=A^{(1)}(y_1,y_2)+\int_{t_1}^{t_2}B^{(1)}(t,y,v)\,dt \qquad (2.9)$$

как новый функционал для системы

$$\dot y_i=v_i \qquad i=1,2,\dots,n\ , \qquad (2.10)$$

где новые управления $v\in V(t,y)$, $V(t,y)$ – множество значений вектора v . Оно является следствием V, G и вида $f_i(t,x,u)$.

Еще раз задаемся $\psi^{(2)}(t,y)$ и решаем задачу

$$\sup_{y,v\in V}\big(B^{(1)}-\psi^{(2)}_{y_i}v_i-\psi^{(2)}_t\big)=B^{(2)}(t),\qquad \sup_{y_1,y_2}\big(A^{(1)}+\psi^{(2)}_2-\psi^{(2)}_1\big)=A^{(2)} \qquad (2.11)$$

Найденные из (2.II) $\bar y(t)$, $\bar v(t)$ подставляем в (2.8), получаем $\bar x(t)$, $\bar u(t)$. Если $\bar x,\bar u\in Q$ (т.е. удовлетворяют (2.I)) и $x(t_1), x(t_2)\in R$, то полученное решение есть минималь задачи I, если нет, то $J(\bar x,\bar y,\bar u)$ дает оценку сни-

---

I) Индекс сверху у ψ означает номер функции.

зу функционалу (2.2). Заметим, что эта оценка, вообще говоря, лучше (в смысле ближе к m), т.к. функция $\psi(t,x,y)$ обладает большей "свободой" (за счет y), чем функция $\psi(t,x)$.

3°. Алгоритм 5' (метод последовательного подбора ψ). В (2.II) задаемся $\psi^{(2)}(t,y,z)$, $\dot{z}\in \mathcal{Z}$. В этом случае, решая (2.II), находим $B^{(2)}=B^{(2)}(t,z,\dot{z})$, $A^{(2)}=A^{(2)}(z_1,z_2)$ и

$$\bar{v}=v(t,z)\,,\qquad \bar{y}=y(t,z,\dot{z}). \tag{2.I2}$$

Рассматриваем

$$I^{(2)}=A^{(2)}(z_1,z_2)+\int_{t_1}^{t_2}B^{(2)}(t,z,w)\,dt \tag{2.I3}$$

как новый функционал для системы

$$\dot{z}_i=w_i \qquad i=1,2,\dots,n. \tag{2.I4}$$

Задаемся $\psi^{(3)}(t,z)$ и решаем задачу

$$\inf_{z,w}\left(B^{(2)}-\psi^{(3)}_{z_i}w_i-\psi^{(3)}_t\right)=B^{(4)}(t),\qquad \inf_{z_1,z_2}\left(A^{(2)}+\psi^{(3)}_2-\psi^{(3)}_1\right)=A^{(3)}. \tag{2.I5}$$

Найденные из (2.I5) $\bar{z}(t),\bar{w}(t)$ вставляем в (2.I2), $\bar{v},\bar{y}$ из (2.I2) вставляем в (2.8), получаем $\bar{x},\bar{u}$. В итоге, если $\bar{x},\bar{u}\in Q$, а $x_1,x_2\in R$, то это минималь, если – нет, то $\mathcal{J}(\bar{x},\bar{u},\bar{y})$ дает оценку снизу (2.2) на Q.

Таким образом, процедура п.2° может быть продолжена неограниченное число раз. При этом $\psi^{(i)}$ следует подбирать каждый раз так, чтобы решение каждой последующей задачи было проще.

Задачу (2.9), (2.I0) назовем редуцированной задачей I-ой редукции, задачу (2.I3), (2.I4) назовем редуцированной задачей 2-ой редукции и т.д.

Вообще говоря, уже задача I-ой редукции проще исходной задачи (2.I), (2.2), т.к. правые части (2.I0) имеют очень простой вид. Кроме того, число управлений v_i в редуцированной задаче равно числу фазовых координат. Это может иметь большое значение. Например, когда редуцированная задача решается методом динамического программирования, так называемая элементарная операция [39] упрощается и количество вычислений резко сокращается.

4^0. Иногда с целью упрощения вычислений удобно считать $y(t)$ постоянной. В этом случае теорема 2.2 принимает вид:

Теорема 2.2'. Пусть $\psi(t,x,c)$ (c – константа) – непрерывная дифференцируемая функция. Имеет место оценка снизу

$$I(x,u) \geq \sup_c \left(\inf_{x_1,x_2 \in R} A + \int_{t_1}^{t_2} \inf_{x\in G,\, u\in U} B\,dt \right). \qquad (2.16)$$

Пример 2.1. Найти оценку снизу в задаче построения оптимального регулятора

$$I = \int_{t_1}^{t_2} (0{,}1x^2 + \tfrac{1}{2}u^2)dt, \quad \dot{x} = u, \quad x(t_1) = x_1, \quad x(t_2) = x_2. \qquad (2.17)$$

Используем теорему 2.2'. Полагаем $\psi = cx$. Тогда

$$\mathcal{J} = c(x_2 - x_1) + \int_{t_1}^{t_2} \inf_{x,u} (0{,}1x^2 + \tfrac{1}{2}u^2 - cu)dt = c(x_2 - x_1) - \tfrac{1}{2}c^2(t_2 - t_1).$$

Отыскиваем $\sup\limits_c \mathcal{J}$: $\mathcal{J}'_c = (x_2 - x_1) - c(t_2 - t_1) = 0$, $\bar{c} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$, т.е.

$$I(x,u) \geq \sup_c \mathcal{J} = \frac{(x_2 - x_1)^2}{t_2 - t_1} - \frac{1}{2}\frac{(x_2 - x_1)^2}{t_2 - t_1} = \frac{1}{2}\frac{(x_2 - x_1)^2}{t_2 - t_1}.$$

Пусть $x_2 = 0$, $t_2 - t_1 = 1$. Тогда $I(x,u) \geq \frac{1}{2}x_1^2$. Если $x_1 = 0$, т.о. $I(x,u) \geq 0$. Оценка снизу совпадает со значением на кривой $x = u \equiv 0$. Следовательно, это кривая есть абсолютная минималь. Если $x_1 = 1$, то $I(x,u) \geq 0{,}5$. Возьмем кривую $x = -t$. Она удовлетворяет заданным граничным условиям. Значение функционала на ней равно: $I = (0{,}1\frac{t^3}{3} + \frac{1}{2}t)\big|_0^1 = 0{,}533$, что весьма близко к нижней оценке. Следовательно, кривую $x = -t$ можно принять в качестве квазиоптимального решения.

б) Методы построения поля минималей. Сведение к уравнениям максимина в частных производных.

5^0. Рассмотрим ряд методов построения поля оптимальных траекторий. Эти методы сводятся к отысканию решения уравнений в частных производных.

Подставим (2.7) в (2.11), получим

$$\sup_{y,v} \left[\inf_{x,u} (f_0 - \psi^{(1)}_{x_i} f_i - \psi^{(1)}_{y_i} v_i - \psi^{(1)}_t) - \psi^{(2)}_{y_i} v_i - \psi^{(2)}_t \right] = B^{(2)}, \qquad (2.18)$$

$$\inf_{x_2} \left[F(x_2) + \psi^{(1)}_2 \right] - \psi^{(2)}_2 = A^{(2)}. \qquad (2.19)$$

Полем в (2.18) $B^{(2)} = b(t)$ некоторой функции t, а $A^{(2)} = c$ – некоторой постоянной. В частности, можно считать, что $b(t) \equiv 0$.

Возможны следующие варианты:

а) Пусть $\psi^{(1)} = \psi^{(1)}(t,x,y)$ – известной функции, удовлетворяющей п.1 условия теоремы 2.I, а $\psi^{(2)}(t,y)$ выберем так, чтобы она удовлетворяла уравнению в частных производных

$$\sup_{v}\left[\inf_{x,u}\left(f_0-\psi^{(1)}_{x_i}f_i-\psi^{(1)}_{y_i}v_i-\psi^{(1)}_t\right)-\psi^{(2)}_{y_i}v_i-\psi^{(2)}_t\right]=\beta(t) \qquad /2.20/$$

при краевом условии

$$\inf_{x_2}\left(F(x_2)+\psi^{(1)}_2\right)+\psi^{(2)}_2-\psi^{(2)}_1=C. \qquad /2.21/$$

Или в более компактной записи

$$\sup_{v}\left[B^{(1)}(t,y,v)-\psi^{(2)}_{y_i}v_i-\psi^{(2)}_t\right]=\beta(t), \qquad /2.20/$$

$$A^{(1)}(y_2)+\psi^{(2)}_2=C. \qquad /2.21/$$

Тогда все требования теоремы 2.I будут выполнены, в том числе и условие $\sup_y \mathcal{J}$, ибо в этом случае в силу /2.20/, /2.21/ $\mathcal{J}$ перестает зависеть от y. Найденная таким способом $\psi^{(2)}(t,y)$ полностью решает задачу "a".

б/ Найдем какое-нибудь решение уравнения в частных производных /2.20/ при краевом условии /2.21/, рассматривая его как уравнение с двумя неизвестными функциями $\psi^{(1)}(t,x,y)$ и $\psi^{(2)}(t,y)$. Тогда все требования теоремы 2.I будут выполнены. Найденные таким способом $\psi^{(2)}(t,y)$ полностью решают задачу "a" и мы получаем оптимальные траектории как основной так и редуцированной задач.

Если сделать редукцию дважды /см. п. 3°/, то получим следующее уравнение в частных производных

$$\sup_{w}\left\{\sup_{y,v}\left[\inf_{x,u}\left(f_0-\psi^{(1)}_{x_i}f_i-\psi^{(1)}_{y_i}v_i-\psi^{(1)}_t\right)-\psi^{(2)}_{y_i}v_i-\psi^{(2)}_t\right]-\psi^{(3)}_{z_i}w_i-\psi^{(3)}_t\right\}=\beta(t) \quad /2.22/$$

при краевом условии

$$\sup_{y_2}\left[\inf_{x_2}\left(F(x_2)+\psi^{(1)}_2\right)+\psi^{(2)}_2\right]+\psi^{(3)}_2=C. \qquad /2.23/$$

И вообще, если сделать редукцию K - раз, получим такое уравнение в частных производных

$$\inf_{w}{}^{1)}\ldots\left\{\sup_{y,v}\left[\inf_{x,u}\left(f_0-\psi^{(1)}_{x_i}f_i-\psi^{(1)}_{y_i}v_i-\psi^{(1)}_t\right)-\psi^{(2)}_{y_i}v_i-\psi^{(2)}_t\right]\ldots-\psi^{(K+1)}_{z_i}w_i-\psi^{(K+1)}_t\right\}=\beta(t) \quad /2.24/$$

при краевом условии

$$\sup_{z_2}\ldots\left\{\sup_{y_2}\left[\inf_{x_2}\left(F(x_2)+\psi^{(1)}_2\right)+\psi^{(2)}_2\right]\ldots+\psi^{(K+1)}_2\right\}=C. \qquad /2.25/$$

1/ Знак будет $\inf$ или $\sup$ в зависимости от того четное или нечетное K .

Замечание: Положим (2.20) $\psi^{(2)}(t,y)=0$, $\psi^{(1)}=\psi^{(1)}(t,x)$ и выбраем $\psi^{(1)}(t,x)$ так чтобы оно удовлетворяло уравнению в частных производных

$$\inf_{u}\left(f_0-\psi^{(1)}_{x_i}f_i-\psi^{(1)}_t\right)=0 \qquad (2.26)$$

при краевом условии

$$\inf_{t_2 x_2}\left(F(x)+\psi^{(1)}_2\right)=C, \qquad (2.27)$$

мы как частный случай получили уравнение Р.Беллмана.

Предлагаемые уравнения редуцированной задачи по сравнению с уравнением Беллмана обладают следующими преимуществами:

I) Уравнения в частных производных (2.20), (2.22), (2.24) содержат несколько неизвестных функций, что расширяет прикладные возможности метода.

2) Уравнение (2.20), вообще говоря, проще уравнения Беллмана, т.к. слагаемое $\psi^{(2)}_{y_i}V_i$ по сравнению со слагаемым $\psi_{x_i}f_i(t,x,u)$ имеет более простой вид.

3) Уравнение (2.20) может быть задано многими способами (в зависимости от выбора $\psi^{(1)}(t,x,y)$), что может быть полезно, т.к. позволит выбирать более простой для решения вид.

Пример 2.2. Пусть задача описывается уравнениями $I=\int_{t_1}^{t_2}\frac{1}{2}(u^2+x_1^2+x_2^2)dt$, $\dot x_1=x_2+u$, $\dot x_2=x_1+u$, $x_i(t_j)$ - заданы.
Возьмем $\psi^{(1)}=x_1y_1+x_2y_2$ и редуцируем задачу

$$\inf_{x,u} B=\inf_{x,u}\left[\frac{1}{2}(u^2+x_1^2+x_2^2)-y_1(x_2+u)-y_2(x_1+u)-x_1\dot y_1-x_2\dot y_2\right]. \qquad (2.28)$$

Откуда

$$B_{x_1}\equiv x_1-y_2-\dot y_1=0,\ B_{x_2}\equiv x_2-y_1-\dot y_2=0,\ B_u\equiv u-y_1-y_2=0.$$

Подставляя все это в (2.28) и обозначая $\dot y_1=V_1$, $\dot y_2=V_2$, получим новый функционал $I^{(1)}=A^{(1)}+\int_{t_1}^{t_2}B^{(1)}dt=\left[x_1y_1+x_2y_2-y_1y_2\right]_1^2-\int_{t_1}^{t_2}\left(y_1^2+y_2^2+y_1y_2+\frac{1}{2}V_1^2+\frac{1}{2}V_2^2\right)dt$
для системы

$$\dot y_1=V_1,\ \dot y_2=V_2.$$

Уравнение (2.20) для этого функционала таково[I])

$$\sup_{V}\left(-y_1^2-y_2^2-y_1-y_2-\frac{1}{2}V_2^2-\frac{1}{2}V_1^2-\psi_{y_1}V_1-\psi_{y_2}V_2-\psi_t\right)=0.$$

Откуда следует, что

$$V_1=-\psi_{y_1},\quad V_2=-\psi_{y_2}.$$

Исключая V_1, V_2 при помощи этих равенств, получим окончательно

I) Верхний индекс $^{(2)}$ у ψ для простоты опущен.

следующее уравнение в частных производных редуцированной задачи

$$\psi_{y_1}^2 + \psi_{y_2}^2 - 2\psi_t = 2(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2). \tag{2.29}$$

Уравнение Беллмана после исключения u для данной задачи имеет вид

$$(\psi_{x_1} + \psi_{x_2})^2 + x_2 \psi_{x_1} + x_1 \psi_{x_2} + \psi_t = -x_1^2 - x_2^2.$$

Мы видим, что оно: I) не совпадает с уравнением (2.29), 2) имеет более громоздкий вид.

в) Методы отыскания отдельных минималей. Методы условного максимума (относительно вспомогательного и относительно основного неизвестного).

Пусть мы перешли к редуцированной задаче (I-ая редукция) с функционалом:

$$I^{(1)} = A^{(1)}(y_1, y_2) + \int_{t_1}^{t_2} B^{(1)}(t, y, v)\,dt \tag{2.30}$$

и системой

$$\dot{y}_i = v_i \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n, \quad v \in V. \tag{2.31}$$

Применим к этой задаче теорему 3.I гл.2. Зададимся функцией $\psi^{(2)}(t,y)$ в виде $\psi^{(2)} = p_i(t)\Delta y_i$, где $\Delta y_i = y_i - \bar{y}_i$, тогда из условия

$$B^{(2)} = \sup_{y,v}\left[B^{(1)}(t,y,v) - p_i v_i - \dot{p}_i \Delta y_i\right] = \sup_{y,v}\left[-H^{(1)} - \dot{p}_i \Delta y_i\right] \tag{2.32}$$

получаем

$$B_{y_i}^{(2)} = -\dot{p}_i + B_{y_i}^{(1)} = 0, \qquad \bar{H}^{(1)} = \inf_v H^{(1)}. \tag{2.33}$$

Выражения (2.33), (2.3I) совместно с краевым условием[1)]

$$\sup_{y_1, y_2}\left[A^{(1)}(y_1, y_2) + \psi_2^{(2)} - \psi_1^{(2)}\right] \tag{2.34}$$

позволяют найти экстремаль редуцированной задачи[2)], а по ней при помощи (2.8) уже без всяких интеграций восстановливается кривая подозрительная на экстремум исходной задачи.[3)]

Заметим, что редуцированная задача (2.30), (2.3I) обычно проще основной задачи, т.к.: I) Правые части в уравнениях (2.3I) просты. 2) Правые части в уравнениях (2.33): $\dot{p}_i = B_{y_i}^{(1)}$, не зависят от p_i. 3) За-

---

I) При этом приходится решать краевую задачу.

2) Мы говорим об экстремали, т.к. первое уравнение в (2.33) обеспечивает только выполнение необходимого условия стационарности функционала по y.

3) Если $\bar{x}, \bar{u} \in Q$, $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in R$, то это минималь задачи 1.

висимость $-H^{(1)}(v)=\overset{(1)}{B}(t,y,v)-p_iv_i$, вообще говоря, проще в силу (2.3I) и $\inf\limits_{v} H^{(1)}$ может находиться более просто.

Если $\bar{x}$, $\bar{u}$ из (2.8) удовлетворяют (2.I), то это абсолютная минималь задачи I, если нет, то $J(\bar{x},\bar{y})$ дает оценку снизу функционалу (2.2) на допустимом множестве. Вероятность того, что $\bar{x},\bar{u}\in Q$ здесь значительно выше, чем в методе $\mathcal{L}(x)$- функционала (см.гл.2 § 3), ибо (2.2) на $\bar{x},\bar{u}\in Q$ завышается насколько только позволяет функция $\psi^{(2)}(t,y)$, а оценка снизу в силу тех же причин в большинстве случаев лучше, чем в методе $\mathcal{L}$ - функционала.

Редуцированную задачу (2.30), (2.3I) можно решить и при помощи классического вариационного исчисления. Для этого удобно переписать её в виде

$$I^{(1)}=A^{(1)}(y_1,y_2)+\int_{t_1}^{t_2}B^{(1)}(t,y,\dot{y})\,dt. \tag{2.35}$$

Уравнения Эйлера для этой задачи запишутся так

$$\frac{d}{dt}B^{(1)}_{\dot{y}_i}=B^{(1)}_{y_i}\,,\quad i=1,\dots,n \tag{2.36}$$

Условие Вейерштрасса

$$B^{(1)}(t,y,\dot{Y})-\dot{Y}_i\,B^{(1)}_{\dot{y}_i}(t,y,\dot{y})\geqslant B^{(1)}(t,y,\dot{y})-\dot{y}_i\,B^{(1)}_{\dot{y}_i}(t,y,\dot{y}) \tag{2.37}$$

или

$$\inf_{\dot{Y}}\left[B^{(1)}(t,y,\dot{Y})-\dot{Y}_i\,B^{(1)}_{\dot{y}_i}(t,y,\dot{y})\right]. \tag{2.38}$$

Угловые условия

$$B^{(1)-}_{\dot{y}_i}=B^{(1)+}_{\dot{y}_i}\,,\quad \left[B^{(1)}-\dot{y}_i\,B^{(1)}_{\dot{y}_i}\right]^-=\left[B^{(1)}-\dot{y}_i\,B^{(1)}_{\dot{y}_i}\right]^+. \tag{2.39}$$

Простейшая форма, в которой можно брать $\psi^{(1)}$, это

$$\psi^{(1)}=y_ix_i\,, \tag{2.40}$$

(или $\psi^{(1)}=y_i\Delta x_i$, где $\Delta x_i=x_i-\bar{x}_i$), а $\psi^{(2)}=p_i(t)y_i$ (или $\psi^{(2)}=p_i(t)\Delta y_i$, где $\Delta y_i=y_i-\bar{y}_i$).

<u>Пример 2.3</u>. Пусть

$$I=\int_0^1\frac{1}{2}u^2dt,\quad \dot{x}=u,\quad x(0)=1,\quad x(1)=0. \tag{2.4I}$$

Возьмем $\psi^{(1)}=xy$. Тогда $B=\frac{1}{2}u^2-yu-\dot{y}x$, $B^{(1)}=\inf\limits_{x,u}B$, $B_x=-\dot{y}=0$, $y=const$, $B_u=u-y=0$, $\bar{u}=y$, $B^{(1)}=-\frac{1}{2}y^2$; $A^{(1)}=xy\big|_1^2$. Редуцированная задача ($\psi^{(2)}=p(t)y$):

$$J=A^{(2)}+\int_0^1B^{(2)}dt=xy\big|_1^2+py\big|_1^2+\int_0^1\left(-\frac{1}{2}y^2-\dot{p}y\right)dt,\quad \dot{y}=0.$$

Из $\sup\limits_{y} B^{(2)} = \sup\limits_{y}(-\frac{1}{2}y^2 - \dot{p}y)$, $\dot{p} = -y$, $p = -yt + c$; $\sup\limits_{y_1, y_2} A^{(2)} = \sup\limits_{y_1, y_2}[xy|_1^2 + py|_1^2]$, $p(0) = -x(0) = -1, p(1) = -x(1) = 0$. Подставляя их в $p = -yt + c$ найдем: $y = -1$. Подставляя это y в исходную задачу, получаем окончательно: $\bar{u} = y = -1$, $\dot{\bar{x}} = -1$, $\bar{x} = -t$.

Пример 2.4. Решим пример 2.2 способами этого пункта.

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2}(u^2 + x_1^2 + x_2^2)\,dt;\ \dot{x}_1 = x_2 + u,\ \dot{x}_2 = x_1 + u,\ x_i(t_j) \text{ - зад.} (i, j = 1, 2). \quad (2.42)$$

Возьмем $\psi^{(1)} = x_1 y_1 + x_2 y_2$. Из

$$\inf_{x,u} B = \inf_{x,u}\left[\frac{1}{2}(u^2 + x_1^2 + x_2^2) - y_1(x_2 + u) - y_2(x_1 + u) - x_1\dot{y}_1 - x_2\dot{y}_2\right] \quad (2.43)$$

находим

$$B_{x_1} \equiv x_1 - y_2 - \dot{y}_1 = 0,\ B_{x_2} \equiv x_2 - y_1 - \dot{y}_2 = 0,\ B_u \equiv u - y_1 - y_2 = 0. \quad (2.44)$$

Подставив все это в (2.43), получим

$$\bar{B} = -y_1^2 - y_2^2 - y_1 y_2 - \frac{1}{2}\dot{y}_1^2 - \frac{1}{2}\dot{y}_2^2 - \frac{d}{dt}(y_1 y_2). \quad (2.45)$$

Обозначим $\dot{y}_1 = V_1$, $\dot{y}_2 = V_2$,

получим следующую редуцированную задачу

$$I^{(1)} = A^{(1)} + \int_{t_1}^{t_2} B^{(1)} dt = [x_1 y_1 + x_2 y_2 - y_1 y_2]_1^2 + \int_{t_1}^{t_2}\left(-y_1^2 - y_2^2 - y_1 y_2 - \frac{1}{2}V_1^2 - \frac{1}{2}V_2^2\right)dt, \quad (2.46)$$

$$\dot{y}_1 = V_1,\ \dot{y}_2 = V_2. \quad (2.47)$$

Возьмем $\psi^{(2)} = p_1(t)y_1 + p_2(t)y_2$ и составим обобщенный функционал для редуцированной задачи

$$\mathcal{Y}^{(1)} = A^{(2)} + \int_{t_1}^{t_2} B^{(2)} dt = [x_1 y_1 + x_2 y_2 - y_1 y_2 + p_1 y_1 + p_2 y_2]_1^2 + \int_{t_1}^{t_2}(-y_1^2 - y_2^2 - y_1 y_2 - \frac{1}{2}V_1^2 - \frac{1}{2}V_2^2 - p_1 V_1 - p_2 V_2 - \dot{p}_1 y_1 - \dot{p}_2 y_2)\,dt.$$

Из $\sup\limits_{y,v} B^{(2)}$ находим систему уравнений оптимали редуцированной задачи.

$$B_{y_1} \equiv -2y_1 - y_2 - \dot{p}_1 = 0,\ B_{y_2} \equiv -2y_2 - y_1 - \dot{p}_2 = 0,\ B_{V_1} = -V_1 - p_1 = 0,\ B_{V_2} = -V_2 - p_2 = 0. \quad (2.48)$$

Из $\sup\limits_{y_1 y_2} A^{(2)}$ находим краевые условия

$$A_{y_1}|_2 = (x_1 + p_1 - y_2)|_2 = 0,\qquad A_{y_1}|_1 = (-x_1 - p_1 + y_2)|_1 = 0, \quad (2.49)$$

$$A_{y_2}|_2 = (x_2 + p_2 - y_1)|_2 = 0,\qquad A_{y_1}|_1 = (-x_2 - p_2 + y_1)|_1 = 0.$$

Интегрируя (2.48) при краевых условиях (2.49), находим $y_1(t)$, $y_2(t)$. Подставляя их в (2.44), получаем (уже без интегрций) решение, подозрительное как экстремаль исходной задачи. Если оно допустимое, т.е. совместно с (2.42), то это абсолютная минималь исходной задачи. Проверить это без всяких интеграций можно путем подстановки в (2.42), либо следующим образом. Продифференцируем первые 2-а уравнения (2.44) и исключим $\dot{x}_1, \dot{x}_2, x_1, x_2$ и при помощи (2.42), (2.44) получим уравнения совместности:

$$\ddot{y}_1 = 2y_1 + y_2\,, \quad \ddot{y}_2 = y_1 + 2y_2\,. \tag{2.50}$$

Пусть $y_1(t), y_2(t)$ удовлетворяют этим уравнениям. Т.к. они получены из (2.42), (2.44), то, следовательно, y_1, y_2 удовлетворяют и (2.42), (2.44).

7°. Рассмотрим метод условного максимина в задачах оптимизации, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Пусть поведение системы описывается попрежнему уравнениями (2.I) с функционалом (2.2). Предположим, что мы задались некоторой функцией $\psi(t,x,y)$, зависящей от n - мерного вектора y и из условий

$$B^{(1)}(t,y,\dot{y}) = \inf_{u,x}\left(f_0 - \psi_{x_i} f_i - \psi_{y_i}\dot{y}_i - \psi_t\right), \quad A(y_1 y_2) = \inf_{x_1, x_2 \in R}\left(F + \psi_2 - \psi_1\right) \tag{2.5I}$$

нашли

$$\dot{y} = \xi_1(t,\bar{x},y,\bar{u}), \quad \xi_2(t,\bar{u},\bar{x},y) = 0, \quad \xi(y_1,y_2,\bar{x}_1,\bar{x}_2) = 0. \tag{2.52}$$

Заметим, что в силу (2.5I) первое из них линейно относительно $\dot{y}$, а второе не содержит $\dot{y}$. Отметим также, что каждое из них представляет векторное равенство - первое размерности n, второе - z, и третье - $2n$.

Найдем из $\xi_2(t,\bar{u},\bar{x},y) = 0$ управление

$$\bar{u} = \xi_3(t,y,\bar{x})\,. \tag{2.53}$$

Исключая во 2-м уравнении в (2.52) $\bar{x}$ при помощи I-го уравнения в (2.52) и разрешая полученное уравнение относительно u, можно (2.53) записать еще в таком виде

$$\bar{u} = \xi_4(t,y,\dot{y}). \tag{2.53'}$$

Подставим (2.53) в первое выражение (2.52) и в (2.I), получим

$$\dot{y} = \xi(t,\bar{x},\dot{y}), \quad \dot{x} = f[t,x,u(t,y,\bar{x})]\,. \tag{2.54}$$

Потребуем теперь, чтобы $\bar{x} = x$, т.е. $\bar{x}$ обязательно было допустимым. Тогда условие

$$\alpha = \int_{t_1}^{t_2} \psi_{x_i}\left(\dot{x}_i - f_i\right)dt = 0$$

будет выполнено. Но в этом случае согласно алгоритму **6** и условие $\sup_y \mathcal{J}$ автоматически будет выполнено. Таким образом

$$\dot{y}=\xi(t,x,y),\quad \dot{x}=\varphi(t,x,y) \qquad (2.54)'$$

будут представлять собой уравнения условного максимина (общий случай) для задач оптимизации, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Решая краевую задачу для $(2.54)'$ при краевых условиях (2.52): $\xi(y_1,y_2,x_1,x_2)=a$ мы найдем абсолютную минималь.

Замечание. Если I-е уравнение в $(2.54)'$ не зависит x, то оно может быть проинтегрировано отдельно от 2-го уравнения в (2.54). Переход к редуцированной задаче в этом случае делается следующим образом.

Подставляем найденное общее решение $y=y(t,y_1)$, где $y_1=y(t_1)$, в подинтегральное выражение (2.30): $B^{(1)}(t,y,\dot{y})=B^{(1)}(t,y_1)$ и интегрируем

$$L(y_1)=\int_{t_1}^{t_2} B^{(1)}(t,y_1)\,dt. \qquad (2.55)$$

Начальное значение y_1, соответствующее заданным граничным значениям x_1, x_2 выбираем из условия

$$\sup_{y_1,y_2}\left\{\inf_{x_1,x_2\in R}\left[F(x_1,x_2)+\psi(t_2,x_2,y_2)-\psi(t_1,x_1,y_1)\right]+L(y_1)\right\}. \qquad (2.56)$$

Пример 2.5. Найти синтез в следующей задаче построения оптимального регулятора $I=\int_0^\infty \frac{1}{2}u^2dt,\ \dot{x}=x+u,\ x(0)=x_1,\ x(\infty)=x_2=0.$

Берем $\psi=xy$. $\mathcal{J}=\psi_2-\psi_1+\int_0^\infty Bdt$. $B=\frac{1}{2}u^2 y(x+u)-\dot{y}x$. Из $\inf_{x,u} B$ получаем: $B_x\equiv -y-\dot{y}=0$. Видим, что это уравнение не зависит от x. Интегрируя его находим $y=y_1e^{-t}$. Далее $B_u\equiv u-y=0$, $u=y_1e^{-t}$. Подставляя все это в (2.55 и вычисляя L, получаем $L=\int_0^\infty -\frac{1}{2}y^2dt=\int_0^\infty -\frac{y_1^2}{2}e^{-2t}dt=-\frac{1}{4}y_1^2.$

Т.к. x_1,x_2 – заданы, то требование $\inf_{x_1,x_2}(\psi_2-\psi_1)$ – пропадает и из (2.56) получаем $\sup_{y_1}\left(-y_1x_1-\frac{1}{4}y_1^2\right)$ и $y_1=2x_1$.

Подставим y_1 в $u=y_1e^{-t}$: $u=-2x_1e^{-t}$. Считая каждый момент за начальный ($t=0$), находим синтез: $u=-2x$. Система асимптотически устойчива в целом. В самом деле примем за функцию Ляпунова $V=\psi=yx$. Т.к. $y=-2x$ то $V=\psi=-2x^2$, и $\dot{\psi}=-4x(x+u)=-4x(x+y)=4x^2$. Мы видим, что $V<0$, $\dot{V}>0$ при $x\neq 0$, что и говорит об устойчивости.

Интересно отметить, что если решать эту задачу по принципу максимума, то нужно интегрировать систему дифференциальных уравнений 2-го порядка (основную и сопряженную). В данном же случае мы интегрировали только одно уравнение (I-го порядка): $\dot{y}+y=0$. Можно показать, что это обстоятельство при некоторых условиях имеет место и в более общем случае, т.е. вместо интегрирования системы порядка $2n$ (основной и сопряженной) для построения синтеза можно обойтись интегрированием системы: $\dot{y}=\xi(t,y)$ – порядка n. В самом деле, зная $y=y(t,y_1)$, подставим его в $(2.53)'$: $\bar{u}=\xi_3(t,y,\dot{y})$ и исключим y_1 при помощи (2.56). Получим: $\bar{u}=\xi_4(t,x_1,x_2)$. Считая здесь каждый момент за начальный $(t=0)$, найдем полный синтез: $\bar{u}=\xi_5(x_1,x_2)$ I). Мы видим, что переход к редуцированной задаче может оказаться полезен.

Если в $B^{(1)}(t,x,y,\dot{y})$ не удастся исключить x, то подставляя $y=y(t,y_1)$ в $(2.53)'$, получим: $\bar{u}=\xi_6(t,y_1)$, а подставляя $\bar{u}$ в (2.I) подбираем y_1, чтобы кривая $x(t)$ удовлетворяла заданным условиям на правом конце.

Подчеркнем, что в отличие от уравнений Эйлера в классическом вариационном исчислении или уравнений принципа максимума, уравнения условного максимина, если их удалось построить, дают не решение подозрительное на экстремум (экстремаль), а абсолютную минималь.

Покажем каким образом можно получить уравнение условного максимина для вспомогательного неизвестного и основного неизвестного.

а) Уравнение условного максимина для вспомогательного неизвестного.

Решим 2) I-ое уравнение (2.56) относительного x:

$$x=\xi_3(t,y,\dot{y}). \tag{2.57}$$

I) Т.е. синтез для любых граничных условий на правом конце. Таким образом мы решили более общую задачу, чем обычным методом. Там находится синтез только для фиксированного правого конца.

2) Предполагается, что соответствующие обратные операторы, производные существуют и функциональные матрицы имеют нужный ранг (см.сноску на стр. 80).

Продифференцируем (2.57) полным образом по t и исключим $\dot{x}$ при помощи 2-го уравнения в $(2.54)'$

$$\varphi(t, x, y) = \xi_4(t, y, \dot{y}, \ddot{y}).$$

Заметим, что оно линейно относительно $\ddot{y}$. Исключая из него x при помощи (2.57) получим окончательно уравнение (векторное) условного максимина для вспомогательного неизвестного

$$\omega(t, y, \dot{y}, \ddot{y}) = 0. \qquad (2.58)$$

Краевые условия для $y(t)$ находим по заданным $x(t_1), x(t_2)$ при помощи 3-го уравнения в (2.52) и I-го в $(2.54)'$. Решаем краевую задачу для (2.58) и по (2.57), (2.53) уже без всяких интеграций находим $\bar{x}(t), \bar{u}(t)$. В силу наших построений оно будет допустимым и будет удовлетворять заданным граничным условиям. Отметим, что уравнение (2.58) не является уравнением Эйлера в классическом смысле этого слова. В отличие от уравнения Эйлера оно определяется неоднозначно (зависит от выбора $\psi(t, x, y)$), что может быть использовано для построения его в более простой форме) и дает не экстремаль, а абсолютную минималь.

Уравнение (2.58) можно рассматривать также как уравнение совместности задачи (2.30), (2.31) с исходной задачей (2.1), (2.2). Из характера получения этого уравнения следует, что если $y(t)$, полученные по (2.31), (2.33), удовлетворяют уравнению (2.58), то $x(t), u(t)$ восстановленные при помощи (2.8), являются допустимыми.

б) Уравнение условного максимина для основного неизвестного.

Разрешим 2-ое уравнение $(2.54)'$ относительно y:

$$y = \varphi^{-1}(t, x, \dot{x}). \qquad (2.59)$$

Продифференцируем его полным образом по t и исключим $\dot{y}$ при помощи I-го уравнения $(2.54)'$ $\quad \xi(t, x, y) = \xi_5(t, x, \dot{x}, \ddot{x})$.

Исключая из этого уравнения y при помощи (2.59) получим окончательно

$$\omega(t, x, \dot{x}, \ddot{x}) = 0. \qquad (2.60)$$

Заметим, что оно линейно относительно $\ddot{x}$. Краевые условия для него находим из 3-го уравнения в (2.52) и 2-го уравнения в $(2.54)'$. Решая краевую задачу для (2.60) находим сразу оптимальное решение $\bar{x}(t)$, подставляя которое во 2-ое уравнение (2.54) находим $y(t)$ и подставляя его в $(2.53)'$ находим $\bar{u}(t)$.

Пример 2.6. Решим пример24 методами условного максимина.

а) Сведение к уравнению (2.58) относительно вспомогательных неизвестных.

Найдем из (2.44) x_1, x_2,

$$x_1 = y_2 + \dot{y}_1, \quad x_2 = y_1 + \dot{y}_2. \tag{2.61}$$

Продифференцируем их по t и подставим (2.42)

$$x_2 + u = \dot{y}_2 + \ddot{y}_1, \quad x_1 + u = \dot{y}_1 + \ddot{y}_2. \tag{2.62}$$

Исключим x_1, x_2, u при помощи (2.61), (2.44) получим окончательно

$$\ddot{y}_1 = 2y_1 + y_2, \quad \ddot{y}_2 = y_1 + 2y_2. \tag{2.63}$$

Это и есть уравнение (2.58). Краевые условия получаем для него из (2.64) :

$$\begin{aligned} &y_2(t_1) + \dot{y}_1(t_1) = x_1(t_1), \quad y_2(t_2) + \dot{y}_1(t_2) = x_1(t_2), \\ &y_1(t_1) + \dot{y}_2(t_1) = x_2(t_1), \quad y_1(t_2) + \dot{y}_2(t_2) = x_2(t_2), \end{aligned} \tag{2.64}$$

где $x_i(t_j)$ $(i,j=1,2)$ – нам известны.

Интегрируя (2.63) при краевых условиях (2.64) получаем $y_1(t), y_2(t)$. Вставляя их в (2.44) примера24 находим абсолютную минималь $x_1(t), x_2(t)$ уже без всяких интеграций. При этом нам уже не надо беспокоится – являются ли x_1, x_2 – допустимыми.

б) Сведение к уравнению (2.60) относительно основных неизвестных.

Подставляем u из (2.44) в (2.42)

$$\dot{x}_1 = x_1 + y_1 + y_2, \quad \dot{x}_2 = x_1 + y_1 + y_2. \tag{2.65}$$

Дифференцируем по t и исключаем $\dot{y}_1, \dot{y}_2, y_1, y_2$ при помощи (2.65), (2.44). Получаем уравнение условного максимина относительно основных функций

$$\ddot{x}_1 = x_1 + 2x_2 + \dot{x}_2 - \dot{x}_1, \quad \ddot{x}_2 = 2x_1 + x_2 + \dot{x}_1 - \dot{x}_2.$$

Краевые условия $x_i(t_j)_{i,j=1,2}$ для них известны. Интегрируя их, находим абсолютную минималь.

§ 3. Метод максимина как метод оценки решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

В данном параграфе показано, что метод максимина может быть использован не только в задачах оптимизации, но и как метод оценки максимальных отклонений фазовых координат для некоторой совокупности начальных условий. Эта задача имеет большое значение для теории автоматического регулирования.

I°. Математическая постановка задачи. Поведение объекта описывается системой уравнений

$$\dot{x}_i = f_i(x) \quad i=1,2,\dots,n, \quad t_1 \leq t \leq t_2, \quad x(t_1) \in R. \tag{3.1}$$

Надо найти оценку снизу функции

$$I = F[x(t_2)] \tag{3.2}$$

для совокупности $x(t_1) \in R$, где R – множество начальных условий.

Если начальное условие задано, то найти точное значение функции (3.2) не представляет особого труда, например, путем интегрирования системы (3.I) на ЭВМ. Однако, если множество R начальных условий содержит большое число элементов, этот способ становится неприменимым. Насколько известно автору, в настоящее время нет удовлетворительных методов решения этой задачи. Число же технических задач укладывающихся в рамки данной постановки, достаточно велико. Это и наибольшее потребное отклонение руля высоты или направления самолета и максимальный промах ракеты при неблагоприятном стечении обстоятельств и многое другое.

Представляет интерес и такая задача: не решая уравнений (3.I), найти оценку снизу в момент t_2, отклонения какой-нибудь координаты (или всех координат).

В рамки данной постановки укладывается и задача получения оценки сверху отклонения фазовых координат (или функции (3.2)) в момент t_2.

2^0. Поставленную задачу можно рассматривать как частный случай задачи оптимизации, когда управления отсутствуют и $f_0 \equiv 0$. Применим для её решения метод максимина. Возьмем функцию $\psi(t,x,y)$ и составим выражение:

$$B = -\psi_{x_i} f_i - \psi_t , \quad A = F + \psi_2' - \psi_1 . \qquad (3.2)'$$

Из теоремы 2.2 следует оценка снизу

$$F[x(t_2)] \geq \sup_{y(t)} \left(\inf_{x \in R} A + \int_{t_1}^{t_2} \inf_{x} B\, dt \right) \qquad (3.3)$$

Для отыскания этой оценки можно применить методы условного максимина § 2 (уравнения (2.54), (2.58), (2.60)) или уравнения максимина частных производных (2.20), (2.2I).

В простейшем случае можно считать y – постоянными. Тогда для получения оценки достаточно найти минимум по x, вычислить интеграл и найти максимум по y в правой части выражения (3.3).

<u>Пример 3.I</u>. Поведение объекта описывается системой

$$\dot x_1 = -x_1 + \frac{1}{2} x_2^2 , \quad \dot x_2 = x_1^2 - x_2 , \qquad t_1 \leq t \leq t_2 . \qquad (3.4)$$

Найти оценку снизу для функции: $x_1(t_2) + x_2(t_2)$, когда $x_i(t_1)$, $i=1,2$ – любые.

Зададимся $\psi = y_1 x_1 + y_2 x_2$ и будем считать, что y_1, y_2 – постоянные. Тогда

$$B = -y_1(-x_1 + \tfrac{1}{2}x_2^2) - y_2(x_1^2 - x_2), \quad A = (x_1 + x_2 + y_1 x_1 + y_2 x_2)|_{t_2} - (y_1 x_1 + y_2 x_2)|_{t_1}$$

Из $\bar B = \inf B$ находим

$$B_{x_1} = y_1 - 2x_1 y_2 = 0, \quad \bar x_1 = \frac{y_1}{2y_2}, \quad B_{x_1x_1} = -y_2 \geq 0, \quad y_2 \leq 0, \quad \bar B = \frac{y_1^2}{4y_2} + \frac{y_2^2}{2y_1}$$

$$B_{x_2} = -y_1 x_2 + y_2 = 0, \quad \bar x_2 = \frac{y_2}{y_1}, \quad B_{x_2x_2} = -y_1 \geq 0, \quad y_1 \leq 0.$$

Из $\bar A = \inf_{x(t_2)} A > -\infty$ находим: $y_1 = -1$, $y_2 = -1$. Подставляя эти значения в $\bar B$, получаем $\bar B = -\frac{3}{4}$. Следовательно, $\int_{t_1}^{t_2} \bar B\, dt = -\frac{3}{4}(t_2 - t_1)$, $\bar A = x_1(t_1) + x_2(t_1)$.

Итак согласно (3.3) имеет место оценка снизу

$$x_1(t_2) + x_2(t_2) \geq x_1(t_1) + x_2(t_1) - \frac{3}{4}(t_2 - t_1).$$

или максимальное отклонение (вниз) фазовых координат ограничено величиной $\quad \Delta x_1 + \Delta x_2 \geq -\frac{3}{4}(t_2 - t_1).$

<u>Пример 3.2</u>. Поведение объекта описывается системой

$$\begin{aligned} \dot x_1 &= x_2 - 3x_3 - x_1(x_2 - 2x_3)^2, \\ \dot x_2 &= -2x_1 + 3x_3 - x_2(x_1 + x_3)^2, \qquad t_1 \leq t \leq t_2 . \\ \dot x_3 &= 2x_1 - x_2 - x_3 . \end{aligned} \qquad (3.5)$$

Найти оценку снизу и сверху возможного отклонения координаты $x_1(t_2)$ для произвольных начальных условий $x_1(t_1), x_2(t_1), x_3(t_1)$ и произвольного момента t_2.

Задаемся $\psi = y(2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$, где y – постоянная. Находим

$$B = -\psi_{x_i} f_i - \psi_t = y\left[2x_1^2(x_2 - 2x_3)^2 + x_2^2(x_1 + x_3)^2 + x_3^2\right].$$

Минимум B по x существует, если $y>0$ и очевиден: $\bar{x}_i \equiv 0$, $\bar{B} \equiv 0$.

Составим выражение для A (оценка снизу $F = x_1(t_2)$):

$$A = \left[x_1 + y(2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\right]\Big|_{t_2} - y(2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\Big|_{t_1}.$$

Из условия минимума A по $x_i|_{t_2}$ находим ($y>0$):

$$x_2|_{t_2} = 0,\quad x_3|_{t_2} = 0,\quad B_{x_1} = 1 + 4yx_1|_{t_2} = 0,\quad x_1(t_2) = -1/4y$$

$$A(y) = -\frac{1}{8y} - y(2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\Big|_{t_1}.$$

Из условия максимума A по y следует

$$A_y = \frac{1}{8y^2} - (2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\Big|_{t_1} = 0,\quad y = \frac{1}{\sqrt{8(2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)|_{t_1}}},$$

$$\bar{A} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)|_{t_1}}.$$

Подставляя $\bar{A}, \bar{B}$ в (3.3), находим окончательно

$$x_1(t_2) \geqslant -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)|_{t_1}}. \tag{3.6}$$

Найдем теперь оценку для $x_1(t_2)$ сверху. Для этого достаточно положить $F = -x_1(t_2)$ и подставить в выражение для $A = F + \psi|_1^2$. Аналогично предыдущем получим

$$-x_1(t_2) \geqslant -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)|_{t_1}}. \tag{3.7}$$

Объединяя (3.6), (3.7) найдем окончательно

$$|x_1(t_2)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)|_{t_1}}.$$

Откуда видно, что возмущения для координаты $x_1(t)$ с течением времени не возрастают: В частности, если $x_2|_{t_1} = 0$, $x_3|_{t_1} = 0$ имеем $|x_1(t)| \leqslant |x_1(t_1)|$.

Замечание: Очевидно, что если $\bar{x}(t)$, полученное из правой части (3.3) является решением системы (3.I) (т.е. допустимым), то в (3.3) будет знак равенства и мы получим точное значение максимального отклонения. Напомним – методы условного максимина гарантирукт, что решение допустимое.

§ 4. Применение метода максимина в исследовании устойчивости решений обыкновенных дифференциальных уравнений.

Метод максимина может быть применен также и в другой необычайной роли - как метод построения в выбранном классе функции Ляпунова и исследования устойчивости решений обыкновенных дифференциальных уравнений. В дальнейшем используется терминология [I02].

I^{0}. Рассмотрим вначале случай автономной системы. Пусть

$$\dot{x}_i = f_i(x) \qquad i=1,2,\dots,n, \quad 0 \le t \le \infty \tag{4.I}$$

- уравнения возмущенного движения объекта, т.е. $f_i(0) \equiv 0$.

Возьмем непрерывную и дифференцируемую функцию $\psi(x,y)$ на $X \times Y$ и обладающую следующими свойствами:

I) $\psi(x,y)$ - положительно определена по x при $\forall y \in Y$. 2) $\psi(0,y)=0$ на Y.

Уравнения (4.I) можно рассматривать как частный случай задачи оптимизации, когда управления отсутствуют и функционал тождественно равен нулю. Составим выражение $B = -\psi_{x_i} f_i - \psi_t$.

Теорема 4.I. Пусть функция $\psi(x,y)$ - непрерывна, дифференцируема на $X \times Y$ и обладает свойствами: а) $\psi(x,y)$ - положительно определена по x при $\forall y \in Y$; б) $\psi(0,y) \equiv 0$ на Y.

Тогда:

I) Если $\sup\limits_{y \in Y} \inf\limits_{x} B = 0$, то невозмущенное движение устойчиво;

2) Если $\sup\limits_{y \in Y} \inf\limits_{x} B = 0$, причем $\bar{x}=0$ и единственно, то невозмущенное движение устойчиво ассимптотически;

3) Если $\inf\limits_{y \in Y} \sup\limits_{x} B = 0$, причем $B \neq 0$ в окрестности $x=0$, то невозмущенное движение неустойчиво;[I)]

4) Если $\inf\limits_{y \in Y} \sup\limits_{x} B = 0$, причем $\bar{x}=0$ и единственно, то невозмущенное движение неустойчиво абсолютно.

Доказательство: I) Примем за функцию Ляпунова V функцию $\psi(x,\bar{y})$.

I) Для справедливости данного утверждения положительной определенности от ψ - не требуется, но должна существовать сколь угодно малая окрестность $x=0$, где $\psi > 0$.

Эта функция знакоопределенная. Найдем знак её производной. Согласно п.I теоремы имеем $B(\bar x,\bar y)=\sup\limits_{y\in Y}\inf(-\dot\psi)=-\inf\limits_{y\in Y}\sup\limits_{x}\dot\psi=0$, т.е. $\dot\psi(x,\bar y)\le 0$ на X. Применяя I-ую теорему Ляпунова [I02] стр. 9I, получаем заключение теоремы.

2) Аналогично предыдущему получаем $\psi(x,\bar y)>0$ при $x\neq 0$ и в силу единственности x $\dot\psi(x,\bar y)<0$ на X при $x\neq 0$. Применяя теорему 2[I02]стр.I00, получаем утверждение п.2 нашей теоремы.[I] 3) Аналогично п.I получаем в некоторой окрестности $x=0$ $\psi(x,\bar y)>0$ при $x\neq 0$ $\dot\psi(x,\bar y)>0$. Применяя теорему 3[I02] стр.III о неустойчивости движения, видим справедливость нашего заключения. 4) Точно также доказывается и этот пункт. При этом используется теорема в [I02] на стр.II5.

<u>Замечание</u> I. Теорема 4.I может не иметь места на всем множестве X, но иметь место на некотором подмножестве $X_1\subset X$ и таком, что $0\in X_1$ и $x=0$ – является внутренней точкой в X_1. Тогда она будет иметь место только по отношению к X_1. Это позволяет выявлять области устойчивости, асимптотической устойчивости, условной устойчивости и неустойчивости. Задача может ставиться и сразу по отношению к некоторому множеству $R\subset X$. 2. Теорема 4.I будет верна и в том случае, если $\psi(x,y)$ отрицательна определенная функция на X при $\forall y\in Y$. Только знак $\sup\limits_{y\in Y}\inf\limits_{x}$ надо везде заменить знаком $\inf\limits_{y\in Y}\sup\limits_{x}$ и $\inf\limits_{y\in Y}\sup\limits_{x}$ – знаком $\sup\limits_{y\in Y}\inf\limits_{x}$ соответственно.

Как частный случай из теоремы 4.I вытекает

<u>Следствие 4.I</u>. Пусть $\psi(x)$ – непрерывная дифференцируемая положительно-определенная функция, такая, что $\psi(0)\equiv 0$. Тогда: I) Если $\inf\limits_{x} B=0$, то невозмущенное движение устойчиво;

2) Если $\inf\limits_{x} B=0$ $\bar x=0$ и единственно, то оно устойчиво ассимптотически;

3) Если $\sup\limits_{x} B=0$ причем $B\neq 0$ в окрестности $x=0$, то оно неустойчиво;

4) Если $\sup\limits_{x} B=0$ $\bar x=0$ и единственно, то оно неустойчиво абсолютно.

I) Функции $\psi(x,y)$, $\dot\psi(x,y)$ – допускают бесконечно малый высший предел, т.к. не зависят явно от t.

Теорема 4.2. (Об отсутствии функции Ляпунова в данном классе).
Пусть: I) $\psi(x,y)$ – непрерывная, дифференцируемая и положительно-определенная функция по x для $\forall y \in Y$. 2) $\psi(0,y)=0$ на Y.

Если $\sup\limits_{y\in Y}\inf\limits_{x} B<0$, $\bar{x}\in G$, то среди данного семейства функций $\psi(x,y)$, $y\in Y$ нет функции, удовлетворяющей п.I теоремы 4.I.

Здесь G – множество решений системы (4.I) при разных начальных $x_0\in\lambda$.

Доказательство: Предположим противное, что она существует. Тогда подставляя в нее $\bar{x}\in G$, получим согласно п.I теоремы 4.I: $\sup\limits_{y\in Y}\inf\limits_{x} B=0$, что противоречит условию теоремы 4.2. Теорема доказана.

2^0. Обобщим некоторые предыдущие результаты на случай

$$\dot{x}_i = f_i(t,x) \quad i=1,2,\dots,n \quad 0\le t\le\infty, \tag{4.2}$$

где $f_i(t,x)=0$ при $x\equiv 0$.

Теорема 4.3. Пусть: I) $f_i(t,x)$ – непрерывные функции, удовлетворяющие условию $f_i(t,0)\equiv 0$.

2) $\psi(t,x,y)$ – непрерывная дифференцируемая функция с непрерывными частными производными, удовлетворяющая условию $\psi(t,0,y)\equiv 0$ при $\forall y\in Y$ и $t\ge 0$.

3) $\psi(t,x,y)$ – знакоопределенная (положительная) по x на Y функция.

4) При $\forall y\in Y$ $\psi(t,x,y)$ допускает бесконечно малый высший предел.

Тогда при любых начальных возмущениях: I) Если выполнены п.п.I-3 условия и $\sup\limits_{y\in Y}\inf\limits_{x} B \overset{=0}{\le}$ почти всюду на $0\le t\le\infty$, то невозмущенное движение устойчиво.

2) Если выполнены п.п.I,2,4 и существует t_0 такое, что $\inf\limits_{y\in Y}\sup\limits_{x} B=0$, а $B\ne 0$ в сколь угодно малой окрестности $x=0$, при $\forall t\ge t_0$, то невозмущенное движение неустойчиво.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 4.I.

I) Примем за функцию V Ляпунова функцию $\psi(t,x,\bar{y})$. По условию эта функция знакоопределенная. Найдем знак её производной. Из условия $\sup\limits_{y\in Y}\inf\limits_{x} B=0$ получаем $\dot{\psi}(t,x,\bar{y})\le 0$ на X при $t\ge 0$. Применяя I-ю теорему Ляпунова [I02] стр. 9I, получаем заключение п.I утверждения теоремы.

2) Аналогично п.I получаем $\psi(t,x,\bar{y})>0$ при $x\neq 0$, $\dot{\psi}(t,x,\bar{y})>0$ для $t\geq t_0$. Применяя теорему 3 [I02] стр.III видим справедливость нашего утверждения.

Для проверки условий п.I теоремы 4.I и 4.3 можно использовать методы условного максимина § 2 (уравнения (2.54), (2.58), (2.60)), или уравнения максимина в частных производных (2.20), (2.2I), полагая $f_0\equiv 0$, $F\equiv 0$.

3°. Теорема 4.3 без труда распространяется на случаи постоянно действующих возмущений. А именно, если к условиям п.2 добавить требование ограниченности производных ψ_x , то невозмущенное движение будет устойчиво и при постоянно действующих возмущениях. Это следует из [I03] стр. 202.

4°. Другой пока не совсем ясный, но как правило успешный прием применения метода максимина к исследованию устойчивости состоит в следующем. Берется любая функция $\psi(t,x,y)$ (не обязательно знакоопределенная) и в результате применения метода максимина находится $y=y(t,x)$. При подстановке этой зависимости в $\psi(t,x,y)$ функция ψ оказывается обычно функцией Ляпунова. Соответствующие примеры смотрите в гл. 3 § 2 прим. 2.5 (стр. 93) и в гл. 8, § 2 (стр. 210).

Пример 4.I. Пусть уравнения возмущенного движения таковы:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -3x_1 + x_2 - x_3 + 3x_1(6x_1^2+5x_2^2+2x_3^2) , \\
\dot{x}_2 &= -2x_1 - 5x_2 + x_3 + 5x_2(6x_1^2+5x_2^2+2x_3^2) , \\
\dot{x}_3 &= 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_3(6x_1^2+5x_2^2+2x_3^2)
\end{aligned}
\qquad (4.3)
$$

Исследуем их на устойчивость. Возьмем ψ в виде

$$\psi = y(2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) .$$

Очевидно, что эта функция положительно определенная, если $y>0$.

Составим выражение $B=-\psi_{x_i} f_i - \psi_t$:

$$B = 2y(5x_1^2+5x_2^2+2x_3^2)[1-6x_1^2-5x_2^2-2x_3^2] .$$

Очевидно, что в области R :

$$6x_1^2+5x_2^2+2x_3^2<1 \qquad (4.4)$$

$\sup_{x\in R}\inf B=0$ и $\bar{x}=0$ – единственная минималь. Следовательно, согласно теореме 4.I не возмущенное движение (4.3) в области (4.4) устойчиво ассимптотически.

Пример 4.2. Уравнения возмущенного движения объекта имеют вид

$$\dot{x}_1 = p(t)x_1 + q(t)x_2 + m(t)x_2(x_1^2 + x_2^2),$$
$$\dot{x}_2 = q(t)x_1 - p(t)x_2 + m(t)x_1(x_1^2 + x_2^2),$$

где $p(t)$, $q(t)$ и $m(t)$ суть непрерывные и ограниченные при $t \geq 0$ функции времени.

Возьмем $\psi = y x_1 x_2$, $y > 0$. Тогда

$$B = -y\,q(t)(x_1^2 + x_2^2) - y\,m(t)(x_1^2 + x_2^2)x_2^2.$$

Пусть $q(t) \geq q_0 > 0$, $m(t) > 0$. Тогда $\inf\limits_{y>0} \sup\limits_{x} B = 0$ и $B < 0$ при $x_i \neq 0$ и согласно теоремы 4.3 невозмущенное движение системы неустойчиво.

Пример 4.3. Возьмем уравнения горизонтального полета самолета (ракеты) с двигателем постоянной тяги (ЖРД, ТРД):

$$\dot{L} = V, \qquad \dot{V} = \frac{b\beta - aV^2}{m}, \qquad \dot{m} = -\beta. \tag{4.5}$$

Здесь L - дальность полета, V - скорость, β - расход топлива, m - масса л.а., $b > 0$, $a > 0$ - пост. Составим уравнения возмущенного движения для заданного режима работы двигателей

$$\Delta\dot{L} = V - V_0, \quad \Delta\dot{V} = -\frac{a}{m}(V^2 - V_0^2), \quad \Delta\dot{m} = 0. \tag{4.6}$$

Здесь V_0 - скорость невозмущенного движения, $a > 0$.

Требуется установить является ли летательный аппарат устойчивым по скорости.

Возьмем $\psi = \frac{1}{2} y \Delta V^2$, где $y > 0$, $\Delta V = V - V_0$. Составим функцию B :

$$B = -\dot{\psi} = y\frac{a}{m}(V - V_0)(V^2 - V_0^2) = y\frac{a}{m}(V - V_0)^2(V + V_0) > 0 \quad \text{при} \quad V \neq V_0,\ y > 0,\ V > 0.$$

Следовательно, невозмущенное движение самолета (ракеты) по скорости устойчиво.

Точно также можно показать, что вертикальный подъем ракеты в атмосфере постоянной плотности с постоянной тягой по скорости является устойчивым. Уравнения типа (4.5), (4.6) и функции ψ, B в данном случае таковы:

$$\dot{H} = V, \qquad \dot{V} = \frac{V_e\beta - aV^2}{m} - g, \qquad \dot{m} = -\beta.$$

ме 4.I не возмущенное движение (4.3) в области (4.4) устойчиво ассимптотически.

Пример 4.2. Уравнения возмущенного движения объекта имеют вид

$$\dot{x}_1 = p(t)x_1 + q(t)x_2 + m(t)x_2(x_1^2 + x_2^2),$$
$$\dot{x}_2 = q(t)x_1 - p(t)x_2 + m(t)x_1(x_1^2 + x_2^2),$$

где $p(t)$, $q(t)$ и $m(t)$ суть непрерывные и ограниченные при $t \geq 0$ функции времени.

Возьмем $\psi = y x_1 x_2, y>0$. Тогда

$$B = -y q(t)(x_1^2 + x_2^2) - y m(t)(x_1^2 + x_2^2)x_2^2.$$

Пусть $q(t) \geq q_0 > 0$, $m(t) > 0$. Тогда $\inf\limits_{y>0} \sup\limits_{x} B = 0$ и $B<0$ при $x_i \neq 0$ и согласно теоремы 4.3 невозмущенное движение системы неустойчиво.

Пример 4.3. Возьмем уравнения горизонтального полета самолета (ракеты) с двигателем постоянной тяги (ЖРД, ТРД):

$$\dot{L} = V, \qquad \dot{V} = \frac{b\beta - aV^2}{m}, \qquad \dot{m} = -\beta. \tag{4.5}$$

Здесь L - дальность полета, V - скорость, β - расход топлива, m - масса л.а., $b>0, a>0$ - пост. Составим уравнения возмущенного движения для заданного режима работы двигателей

$$\Delta\dot{L} = V - V_0, \quad \Delta\dot{V} = -\frac{a}{m}(V^2 - V_0^2), \quad \Delta\dot{m} = 0. \tag{4.6}$$

Здесь V_0 - скорость невозмущенного движения, $a>0$.

Требуется установить является ли летательный аппарат устойчивым по скорости.

Возьмем $\psi = \frac{1}{2} y \Delta V^2$, где $y>0$, $\Delta V = V - V_0$. Составим функцию B:

$$B = -\dot{\psi} = y\frac{a}{m}(V - V_0)(V^2 - V_0^2) = y\frac{a}{m}(V - V_0)^2(V + V_0) > 0 \quad \text{при} \quad \dot{V} \neq V_0,\ y>0,\ V>0.$$

Следовательно, невозмущенное движение самолета (ракеты) по скорости устойчиво.

Точно также можно показать, что вертикальный подъем ракеты в атмосфере постоянной плотности с постоянной тягой по скорости является устойчивым. Уравнения типа (4.5), (4.6) и функции ψ, B в данном случае таковы:

$$\dot{H} = V, \qquad \dot{V} = \frac{V_e\beta - aV^2}{m} - g, \qquad \dot{m} = -\beta.$$

$$\Delta\dot{H}=\Delta V,\quad \Delta\dot{V}=-\frac{a}{m}(V^2-V_0^2),\quad \Delta\dot{m}=0,$$
$$\psi=\frac{1}{2}y\Delta V^2,\quad y>0,\quad B=y\frac{a}{m}(V-V_0)^2(V+V_0)>0.$$

Аналогично, если рассмотреть горизонтальный полет самолета с двигателем постоянной мощности (ПД, ТВД), то получим:

$$\dot{H}=V,\quad \dot{V}=\frac{\beta\frac{1}{V}-aV^2}{m}-g,\quad \dot{m}=-\beta,$$
$$\Delta\dot{H}=0,\quad \Delta\dot{V}=\frac{\beta\frac{1}{V}-aV^2}{m}-\frac{\beta\frac{\beta}{V_0}-aV_0^2}{m},\quad \Delta\dot{m}=0.$$
$$\psi=\frac{1}{2}y\Delta V^2,\quad y>0,\quad B=-\dot{\psi}=\frac{1}{m}\left[\frac{(V-V_0)^2}{VV_0}\beta_B+a(V-V_0)^2(V+V_0)\right]>0.$$

Откуда следует, что по скорости движение устойчиво.

Основные результаты гл.3

1. Предложен довольно общий метод названный методом максимина, который при определенных условиях гарантирует, что решение будет допустимым и оптимальным. Таким образом, мы избавляемся от той неопределенности в подборе α, которая имела место в гл.2. Показано, что предлагаемые условия являются необходимыми (теорема I.2) и достаточными (теорема I.I) условиями оптимальности. Метод максимина наиболее общий и методы гл.2 могут быть получены из него как частный случай. Следовательно, могут быть получены и алгоритмы, совпадающие с известными алгоритмами решения оптимальных задач.

2. Получены новые алгоритмы решения оптимальных задач: метод максимина (алгоритм 5) с двумя модификациями и методы условного максимина (алгоритм 6) относительно основного и вспомогательного неизвестного. Рассмотрен метод максимина для β - функционала с ограничениями типа равенств и неравенств.

3. Метод максимина применен к задачам оптимизации, описываемым обыкновенными дифференциальными уравнениями. Предложен алгоритм 5. (отыскание потенциальной функции $\psi(t,x,y)$). Выведены уравнения максимина в частных производных. Из них как частный случай следует известное уравнение Беллмана. Показано, что основную задачу всегда можно преобразовать бесконечным числом способов к некоторой редуцированной задаче, которая, вообще говоря, проще исходной задачи I.

Показано как можно получить для данной задачи уравнения условного максимина относительно основного и вспомогательного неизвестного, а также уравнения максимина в частных производных. Показано, что полученные уравнения не являются уравнениями Эйлера-Лагранжа в классическом вариационном исчислении или уравнениями сопряженной системы в принципе максимума А.С.Понтрягина и в отличие от последних выделяют не решение подозрительное на экстремум, а абсолютную минимакс.

4. Показано, что метод максимина может найти применение как метод оценки решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений для данной совокупности начальных условий, что может найти применение в автоматике (задача о накоплении возмущений, построение регуляторов), в ракетостроении (величина максимального промаха ракеты) и т.д. Интересно, что в отдельных случаях такую оценку можно построить вообще не интегрируя дифференциальные уравнения.

5. Другое неожиданное применение метода максимина - в исследовании устойчивости решений дифференциальных уравнений. Показано, что в отличие от классического 2-го метода Ляпунова - подбора отдельных функций Ляпунова - можно при помощи метода максимина проверять целые семейства функций Ляпунова и либо находить такую функцию, либо доказывать, что в данном семействе её не существует. Этот метод применен к исследованию устойчивости по скорости горизонтального и вертикального полета ракеты с двигателем постоянной тяги и горизонтального полета самолета с двигателем постоянной мощности.

ГЛАВА 4

ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ НЕКОТОРЫХ АЛГОРИТМОВ α-ФУНКЦИОНАЛА И МАКСИМИНА

§ I. Численная реализация метода максимина для задач оптимизации, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями.

I°. Даны функционал и связи

$$I=\int_{t_1}^{t_2} f_0(t,x,u)\,dt, \quad \dot{x}_i=f_i(t,x,u) \quad i=1,2,\dots,n, \quad t_1\le t\le t_2, \qquad (I.I)$$

где $x(t)$ – n – мерная непрерывная кусочно дифференцируемая функция, $x\in G$, G – открыто. $u(t)$ - r – мерная кусочно-непрерывная функция, которая может иметь конечное число разрывов I-го рода, $u\in U$, U – может быть замкнутым и ограниченным. $t_1, t_2, x(t_1), x(t_2)$ – заданы. Функции $f_i(t,x,u)$ $(i=0,1,\dots,n)$ – непрерывны и дифференцируемы.

Согласно гл. 3 составим обобщенный функционал, полагая $\psi=y_i x_i$,

$$J(x,u,y)=x_i y_i\Big|_1^2+\int_{t_1}^{t_2}(f_0-y_i f_i-\dot{y}_i x_i)\,dt=A+\int_{t_1}^{t_2}B\,dt. \qquad (I.2)$$

Здесь $A=x_i y_i\Big|_1^2$, $B=f_0-y_i f_i-\dot{y}_i x_i$.

Исключим u из B в (I.2) при помощи условия

$$\hat{B}=\inf B(t,x,u,y,\dot{y}),\quad u\in U, \qquad (I.3)$$

получим $\bar{u}=\bar{u}(t,x,y)$ и

$$\hat{J}(x,y)=A+\int_{t_1}^{t_2}\hat{B}(t,x,y,\dot{y})\,dt. \qquad (I.4)$$

Пусть $\hat{J}(x,y)$ – непрерывная и дифференцируемая функция x, y, имеющая седловую точку (удовлетворяющая условиям теоремы 2.I гл.3). Зададимся некоторой траекторией $\tilde{x}(t)$, удовлетворяющей заданным граничным условиям с $x\in G$ и непрерывной кусочно-дифференцируемой функцией $\tilde{y}(t)$, подставим их в (1.4) и вычислим вариацию функционала (I.4) относительно $\tilde{x}(t)$, $\tilde{u}(t)$, $\tilde{y}(t)$:

$$\delta\hat{J}=\delta A+\int_{t_1}^{t_2}(B_{x_i}\delta x_i+B_{u_j}\bar{u}^j_{x_i}\delta x_i+B_{y_i}\delta y_i+B_{u_j}\bar{u}^j_{y_i}\delta y_i+B_{\dot{y}_i}\delta\dot{y}_i)\,dt. \qquad (I.5)$$

Слагаемые

$$B_{u_j}\bar{u}^j_{x_i}=B_{u_j}\bar{u}^j_{y_i}\equiv 0, \qquad (I.6)$$

ибо в открытой области $B_{u_j}\equiv 0$, а на границе $\bar{u}^j_{x_i}=\bar{u}^j_{y_i}\equiv 0$, т.к. граница $U(t)$ не зависит ни от x, ни от y.

$$\delta A=y_i\delta x_i\Big|_1^2+x_i\delta y_i\Big|_1^2. \qquad (I.7)$$

Последнее слагаемое под интегралом в (I.5) проинтегрируем по частям

$$\int_{t_1}^{t_2} B_{\dot{y}_i}\delta\dot{y}_i\,dt = -x_i\delta y_i|_1^2 - \int_{t_1}^{t_2}\dot{B}_{\dot{y}_i}\delta y_i\,dt. \tag{I.8}$$

С учетом (I.5) - (I.7) выражение (I.4) запишется

$$\delta\hat{J} = y_i\delta x_i|_1^2 + \int_{t_1}^{t_2}\left[B_{x_i}\delta x_i + (B_{y_i} - \dot{B}_{\dot{y}_i})\delta y_i\right]dt, \tag{I.9}$$

где

$$B_{x_i} \equiv -\dot{y}_i - H_{x_i}, \qquad B_{y_i} - \dot{B}_{\dot{y}_i} \equiv \dot{x}_i - f_i, \tag{I.10}$$

$\delta x_i|_1 = \delta x_i|_2 = 0$, т.к. концы $x(t)$ – фиксированы, а $H = y_i f_i - f_0$.

Положим (по i – не сумма)

$$\tilde{\delta}x_i = -\tau_{i1}B_{x_i} = \tau_{i1}(\dot{y}_i + H_{x_i}), \qquad \tilde{\delta}y_i = \tau_{i2}(\dot{x}_i - f_i), \tag{I.11}$$

где

$$\tau_{i1} = \begin{cases} \tau = const > 0 & \text{на } (t_1, t_2), \\ 0, & \text{когда } t = t_1,\ t = t_2. \end{cases} \qquad \tau_{i2}(t) = \tau = const \text{ на } [t_1, t_2]. \tag{I.12}$$

Новая траектория будет такой

$$x_{i,\beta+1} = x_{i,\beta} + \tilde{\delta}x_{i,\beta}, \qquad y_{i,\beta+1} = y_{i,\beta} + \tilde{\delta}y_{i,\beta}. \tag{I.13}$$

Здесь $\beta = 1, 2, \ldots$ – номер итерации. Она может быть взята снова в качестве новой опорной траектории и т.д.

Таким образом процедура расчета состоит в задании исходного приближения $\bar{x}(t), \bar{y}(t)$ и в определении к нему поправок по (I.11), (I.13). Известно, что если шаг τ – выбрать достаточно малым, то процесс (I.13) приводит в седловую точку функционала (I.9). Отсюда следует[1], что

$$\hat{J}(\bar{x}, \bar{y}) = \max_y \min_x \hat{J}(x, y), \tag{I.14}$$

т.е. точка $\bar{x}, \bar{u} \in U$ – является сильной относительной минималью функционала (I.I) (см.замечание 2 к теор. 2.I, § 2, гл.3).

По мере убывания $|\dot{y}_i + H_{x_i}|, |\dot{x}_i - f_i|$ шаг τ следует брать меньше. Конец счета, когда

$$\sum_{i=1}^{n}\left(|\dot{y}_i + H_{x_i}| + |\dot{x}_i - f_i|\right) \le C_1, \tag{I.15}$$

где C_1 – заданное число. В результате получим приближенное решение. Степень близости его к допустимому можно оценивать по (I.15).

I) См.Дж.Мак Кинси "Введение в теорию игр", ФМ, 1960, стр. 25.

Если конец какой-нибудь координаты $x(t)$ свободен, то согласно (I.8) соответствующий конец $y_i(t)$ принимает значение равное нулю. В этом случае при выборе начального приближения берем $y_i(t)$, удовлетворяющее этому граничному условию. Кроме того, соответствующее конечное значение τ_{i_1} полагаем равным τ, а соответствующее конечное значение τ_{i_2} равным 0. Последнее требование обеспечивает неподвижность нужного конца $y_i(t)$ и подвижность нужного конца $x_i(t)$.

2^0. Предложенный метод последовательных приближений по сравнению с методами спуска в пространстве управлений Шатровского Л.И. [59], Брайсона, Келли [38] и принципом максимума Понтрягина Л.С. [28] обладает следующими преимуществами: I) Полностью исчезает краевая задача, ибо краевые условия всегда выполнены.[I)] 2) В результате всегда получаем сильный относительный минимум;[2)] 3) Особые режимы (а следовательно, после соответствующего преобразования I и скользящие режимы) не являются помехой методу максимина (см.пример 1.1).

3^0. Рекомендуется следующая схема вычислений на ЭВМ при помощи стандартной подпрограммы: I) Отрезок $[t_0, t_m]$ делит на m равных частей Δt и задаемся таблицей $x_k(t_\gamma)$, $y_k(t_\gamma)$ $\gamma=0,1,\ldots,m$, $k=1,2,\ldots,n$, $\underbrace{\quad}_{2[n\times(m+1)]}$ – ячеек. $x_k(t_0)$, $x_k(t_m)$ – совпадают с краевыми условиями.

2) Находим в каждой точке t_γ значение $\bar{u}_\alpha(t_\gamma)$ $\alpha=1,2,\ldots,r$ из условия $\sup\limits_{u\in U} H$, где $H=y_i f_i(t,x,u)-f_0(t,x,u)$. Значения $\bar{u}_\alpha(t_\gamma)$ запоминаем ($\alpha=1,2,\ldots,r$; $\gamma=0,1,\ldots,m$).

3) Находим новую траекторию по (I.II) – (I.13). Частные производные H_{x_i} находим численно, а $\dot{x}_i=\Delta x_i/\Delta t$, $\dot{y}_i=\Delta y_i/\Delta t$ по таблице $\Delta x_i = x_i(t_{\gamma+1})-x_i(t_\gamma)$, $\Delta y_i = y_i(t_{\gamma+1})-y_i(t_\gamma)$. В последней точке берем $\Delta x_i(t_m)=\Delta x_i(t_{m-1})$, $\Delta y_i(t_m)=\Delta y_i(t_{m-1})$. Вычисляем одновременно $I=\sum\limits_\gamma \Delta f_0(t_\gamma, x_\gamma, u_\gamma)$.

I) В методах [59], [38] выполнение краевых условий достигается за счет "штрафа" в функционале, т.е. краевая задача остается.

2) Спуск по управлению, т.е. по $H(u)$ (H – гамильтониан), может привести в локальный минимум функции $H(u)$, т.е. к слабому минимуму.

4) Находим (в процессе счета) величину

$$K(\tau)=\frac{1}{\tau}\sum_i\sum_\gamma|\delta x_i(t_\gamma)|+|\delta y_i(t_\gamma)|,$$

которая характеризует "невязку" (расстояние до седловой точки). Первые три просчета (итерации) можно сделать с постоянным τ (заданным в исходных данных). Величины τ и соответствующие им значения K запоминаются. Для каждого следующей итерации действует следующая логика

а) Если $K_{\beta-2}>K_{\beta-1}>K_\beta$ (т.е. $K(\tau)$ убывает) или $K_{\beta-2}<K_{\beta-1}>K_\beta$ ($K(\tau)$ имеет максимум), то полагаем $\tau_{\beta+1}=1{,}2\tau_\beta$ (запоминаем его) и идем на следующую итерацию.

б) Если $K_{\beta-2}>K_{\beta-1}<K_\beta$ ($K(\tau)$ имеет минимум) или $K_{\beta-2}<K_{\beta-1}<K_\beta$ ($K(\tau)$ – растет), то полагаем $\tau_{\beta+1}=0{,}4\tau_\beta$ и идем на следующую итерацию.

5) Конец счета, когда $\tau_\beta\le C_1$, где C_1 – заданное число ($\tau_0>C_1$). На печать выдаются: K,τ_β,N[1], I, $x_i(t_\gamma),u_j(t_\gamma)$[2]. Кроме того, чтобы следить за "кухней" приближений полезно после каждой итерации выдавать на печать K, τ_β, N.

Программа должна по желанию оператора выдавать достигнутое приближение на печать.

Замечание: Предлагаемый метод без труда обобщается на случай ограничений на фазовые координаты вида:

$$\Gamma_{1i}\le x_i\le\Gamma_{2i}\qquad i=1,2,\dots,n. \tag{I.16}$$

(G – ограничено и замкнуто). В этом случае, когда $x_{i,\beta}(t_\gamma)$ выходят за границу, следует полагать их равными граничным значениям.

Пример I.I. Найти минимум функционала

$$I=\int_0^3\frac{1}{2}x^2dt,\quad \dot x=u,\quad |u|\le1,\quad x(0)=x(3)=1. \tag{I.17}$$

I) N – число итераций.

2) Две последние величины рекомендуется выдавать с заданным шагом, назначая для печати только число точек, достаточное для построения графика.

Составим выражение $B=\frac{1}{2}x^2 - yu - \dot{y}x$. Из условия $\inf_u B$: $u = \operatorname{sign} y$ где

$$\operatorname{sign} y = \begin{cases} 1, & \text{если } y>0, \\ 0, & \text{если } y=0, \\ -1, & \text{если } y<1. \end{cases}$$

Выписываем (I.II)

$$\delta x = \tau(\dot{y} - x), \quad \delta y = \tau(\dot{x} - \operatorname{sign} y), \quad \tau>0, \ |\dot{x}| \le 1. \qquad (I.I8)$$

Возьмем в качестве первого приближения кривые: $x_1 \equiv 1$, $y_1 = 0{,}7t - 0{,}7$ (фиг.4.I). Подставляя x_1, y_1 в (I.I8) видим, что $\delta x<0$ на (0,3), $\delta y>0$ на [0; I,5) и $\delta y<0$ на (I,5; 3]. Если же на некотором участке $x_i<0$, то на этом участке согласно (I.I8) $\delta x>0$. Если же на участке [0;I,5) $y>0$, то на этом участке согласно (I.I8) $\delta y<0$. Аналогично для участка (I,5; 3]. Расчеты показывают, что получаемая последовательность сходится к кривым, изображенным на фиг.4.2. Полученная минималь содержит участок особого режима: $x \equiv 0$.

§ 2. Метод градиентного спуска в пространстве состояний для задач оптимизации, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями.

I°. Пусть поведение объекта описывается уравнениями

$$\dot{x}_i = f_i(t, x, u) \quad i=1,2,\dots,n, \quad t \in T = [t_1, t_2], \qquad (2.I)$$

где $x(t)$ - n - мерная непрерывная кусочно-дважды дифференцируемая функция, $x \in G(t)$, $G(t)$ - ограниченная замкнутая односвязная область в E_n, $\Gamma(t)$ - ее граница типа $\Gamma_{1i} \le x_i \le \Gamma_{2i}$; $u(t)$ - r - мерная функция непрерывная на T, кроме конечного числа точек, в которых она может терпеть разрывы I-го рода, и $u \in U(t)$. Множество $U(t)$ может быть замкнутым и ограниченным. Граничные значения t_1, t_2, $x(t_1)$, $x(t_2)$ - заданы.

Ищется минимум функционала

$$I(x,u) = \int_{t_1}^{t_2} f_0(t,x,u)\,dt. \qquad (2.2)$$

Функции $f_i(t,x,u)$ $i=0,1,\dots,n$ - определены, непрерывны и дифференцируемы на $T \times A \times U$.

<u>Ставится задача</u>: найти пару $x(t)$, $u(t)$, доставляющую минимум функционалу (2.2).

2^0. Заменим задачу (2.1) –(2.2) задачей

$$\hat{I}(x,u,a)=\int_{t_1}^{t_2}\left[f_0+\frac{a_i}{2}(v_i-f_i)^2\right]dt,\quad \dot{x}_i=v_i\quad i=1,2,\dots,n, \tag{2.3}$$ [1]

где $a_i \geq 0$, а связи (2.1) учитываются приближенно как "штраф" за их нарушение. В (2.3) как обычно по повторяющимся индексам производится суммирование. Согласно гл.2 составим обобщенный функционал. Положим $\psi=p_i(t)x_i$. Тогда

$$J=p_i x_i\Big|_{t_1}^{t_2}+\int_{t_1}^{t_2}\left[f_0+\frac{a_i}{2}(v_i-f_i)^2-p_i v_i-\dot{p}_i x_i\right]dt=p_i x_i\Big|_{t_1}^{t_2}+\int_{t_1}^{t_2}B\,dt. \tag{2.4}$$

Смысл обозначения B ясен из (2.4).

Исключим u из B в (2.4) при помощи условия

$$\bar{B}=\inf B,\quad u\in U \tag{2.5}$$

Зададимся некоторой траекторией $\tilde{x}(t)$, удовлетворяющей заданным краевым условиям $x\in G$, подставим ее в (2.4) и вычислим вариацию $\tilde{\delta} J$ относительно $\tilde{x}(t)$, учитывая, что концы $x(t)$ – фиксированы. Получим

$$\tilde{\delta} J=\int_{t_1}^{t_2}(B_{v_i}\tilde{\delta} v_i+B_{u_j}\bar{u}^j_{v_i}\tilde{\delta} v_i+B_{x_k}\tilde{\delta} x_k+B_{u_j}\bar{u}^j_{x_i}\tilde{\delta} x_i)\,dt. \tag{2.6}$$

Здесь $\bar{u}^j=\bar{u}^j(t,x,v)$ $j=1,\dots,r$ – компоненты вектор-функции управления, найденной из (2.5). Очевидно, что в открытой области из условия стационарности следует, что $B_{u_j}=0$, а на границе $\bar{u}^j_{v_i}=0$, $\bar{u}^j_{x_i}=0$, ибо граница множества U не зависит ни от v, ни от x. Таким образом, на $[t_1,t_2]$ в (2.6) слагаемые $B_{u_j}\bar{u}^j_{v_i}=B_{u_j}\bar{u}^j_{x_i}\equiv 0$. Выбирая $p_i(t)$ так, чтобы

$$B_{v_i}\equiv a_i(v_i-f_i)-p_i=0\qquad i=1,2,\dots,n \tag{2.7}$$

вариацию (2.6) можно переписать

$$\tilde{\delta} J=\int_{t_1}^{t_2}B_{x_k}\tilde{\delta} x_k\,dt,\qquad k=1,2,\dots,n, \tag{2.8}$$

где с учетом (2.7)

$$B_{x_k}\equiv\frac{\partial f_0}{\partial x_k}-p_i\frac{\partial f_i}{\partial x_k}-\dot{p}_k. \tag{2.9}$$

Дифференцируя (2.7) полным образом по t и исключая при помощи полученного выражения $\dot{p}_k$ из (2.9), найдем

$$B_{x_k}=\frac{\partial f_0}{\partial x_k}-p_i\frac{\partial f_i}{\partial x_k}-a_i\left(\ddot{x}_i-\frac{\partial f_i}{\partial x_\alpha}\dot{x}_\alpha-\frac{\partial f_i}{\partial u_j}\dot{\bar{u}}_j-\frac{\partial f_i}{\partial t}\right)\qquad k,\alpha=1,2,\dots,n. \tag{2.10}$$

[1] Добавка в (2.3) представляет собой α-функционал, ибо на допустимых кривых $v_i=f_i$ и $\alpha=0$.

Положим в (2.8)

$$\delta x_\kappa = -\tau_\kappa(t) B_{x_\kappa}. \qquad (2.11)$$

Здесь $\tau_\kappa(t)>0$ на (t_1,t_2) и $\tau_\kappa(t_1)=\tau_\kappa(t_2)=0$. В качестве $\tau_\kappa(t)$ может быть взяты, например, функции $\tau_\kappa = \beta_\kappa (t-t_2)(t-t_1)$ с $\beta_\kappa = const>0$ или функции $\tau(t)$ общая для всех κ. Тогда (2.8) можно переписать: $\delta J = -\int_{t_1}^{t_2} \tau_\kappa(t) B^2_{x_\kappa} dt$ Отсюда видно, что выбирая $\tau_\kappa(t)$ с достаточно малым $max\, \tau_\kappa(t)$ на T, мы уменьшим величину функционала (если только $\tilde{x}(t)$ не минималь).

Новая лучшая траектория будет равна

$$x_{\kappa,\beta+1} = x_{\kappa,\beta} + \delta x_{\kappa,\beta} \qquad \kappa = 1,2,\dots,n, \qquad (2.12)$$

где добавочный индекс β обозначает номер итерации $\beta=1,2,\dots$. Если $x_{i,\beta}$ выходит за границу, то принимаем его равным граничному значению. Эта траектория может быть принята в качестве опорной для следующей итерации и т.д.

Таким образом процедура расчета состоит в задании исходного приближения $\tilde{x}(t)$ (не удовлетворяющего (2.1)) и в последовательном нахождении к полученному решению поправок по (2.5), (2.7), (2.10) и (2.2). При этом шаг τ в направлении к минимуму выбирается каждый раз таким, чтобы функционал (2.4) убывал. Сходимость этого процесса рассмотрена в п.5^0.

3^0. Спуск в пространстве состояний по сравнению с методами спуска в пространстве управлений Шатровского Л.И. [59], Брайсона, Келли [38] и принципом максимума Понтрягина Л.С. обладает теми же преимуществами что и метод максимина (§ 1): 1) Полностью исчезает краевая задача, ибо краевые условия всегда выполнены. 2) В результате всегда получаем сильный относительный минимум. 3) Просто (и точно) можно учесть ограничения на управления и ограничения на фазовые координаты. 4) Особые режимы (а следовательно, после соответствующего преобразования [1] и скользящие режимы), как показывает пример 21, приводимый в конце параграфа, не является помехой спуску в пространстве состояний.

Недостатком предлагаемого метода по сравнению с методами [59], [38] является больший потребный объем памяти ЭВМ, ибо в большинстве практических задач размерность вектора $x(t)$ больше, чем $u(t)$.

4°. Рекомендуется следующая вычислительная схема реализации метода на ЭВМ с помощью стандартной подпрограммы: I) Делим отрезок $[t_1, t_2]$ на m равных частей Δt и задаемся таблицей значений $x_k(t_\gamma) \in A$ $\gamma = 0, 1, \ldots, m$, где $x_k(t_0)$, $x_k(t_m)$ – совпадают с краевыми условиями $[n \times (m+1)$ – ячеек$]$. Задаемся общим $\tau = \beta = const$ и не очень большим общим α. 2) В каждой точке t_γ $\gamma = 0, 1, \ldots, m$ находим оптимальное управление $\bar{u}(t_\gamma)$ из условия типа (2.5), а именно[I)]

$$\inf_{u \in T^r} \left\{ f_0(t, x, u) + \frac{a_i}{2} \left[v_i - f_i(t, x, u) \right]^2 \right\}, \qquad (2.5)'$$

где $v_i(t_\gamma) \approx \dot{x}_i = \Delta x_i(t_\gamma)/\Delta t$, $\Delta x_i(t_\gamma) = x_i(t_{\gamma+1}) - x_i(t_\gamma)$.[2)]

3) Зная $\bar{u}, v$ в каждой точке t_γ по (2.7), находим $p_i(t_\gamma)$ и $\dot{p}_i(t_\gamma) \approx \Delta p_i(t_\gamma)/\Delta t$, где $\Delta p_i(t_\gamma) = p_i(t_{\gamma+1}) - p_i(t_\gamma)$.[3)]

4) Далее находим по (2.9) B_{x_k}[4)], по (2.II) δx_k и по (2.I2) $x_{k,\beta+1}$. Проверяем, чтобы $\Gamma_{1i} \le x_i \le \Gamma_{2i}$ и в случае выхода за границы берем соответствующее граничное значение. В точках t_0, t_m поступаем следующим образом: если значение $x_i(t_\lambda)$ $(\lambda = 0, m)$ – свободно, то по (2.I2), если фиксировано, то $x_i(t_\lambda)$ остается без изменений. Одновременно вычисляем по (2.3) $\hat{I}_\beta$, а по (2.2) I_β (лучше по формуле трапеций или Симпсона). Просчет от t_0 до t_m является одной итерацией. В результате итерации мы получаем новую таблицу $x_i(t_\gamma)$, $\bar{u}(t_\gamma)$ и значения $\hat{I}_\beta$, I_β. После каждой итерации для контроля за ходом вычислений рекомендуется выдавать на печать τ_β, $\hat{I}_\beta$.

5) Первые три итерации (при данном a_γ) делаем с постоянным текущим $\tau > 0$ (τ_0 – задано). Величина τ и $\hat{I}_{\beta-2}, \hat{I}_{\beta-1}, \hat{I}_\beta$ запоминаются. Для каждого следующей итерации действует следующая логика:

I) Слагаемые в $(2.5)'$ не зависящие от u при отыскании $\bar{u}$ могут быть отброшены.
2) В конечной точке t_m: $v_i(t_m) = v_i(t_{m-1})$.
3) В конечке точке t_m: $\dot{p}_i(t_m) = \dot{p}_i(t_{m-1})$.
4) Частные производные в (2.9) проще находить численным методом.

а) Если $\hat{I}_{\beta-2} > \hat{I}_{\beta-1} > \hat{I}_{\beta}$ ($\hat{I}(\tau)$ – убывает) или $\hat{I}_{\beta-2} < \hat{I}_{\beta-1} > \hat{I}_{\beta}$ ($\hat{I}(\tau)$ – имеет максимум), то $\tau_{\beta+1} = 1{,}2\,\tau_{\beta}$.

б) Во всех остальных случаях $\tau_{\beta+1} = 0{,}4\,\tau_{\beta}$.

б) По достижении $\tau_{\beta} < c_1$, ($c_1 > \tau_0 > 0$ – задано) увеличиваем значение a ($a_{\nu} \approx 2a_{\nu-1}$, a_0 – задано) и повторяем п.5.

Конец счета, когда выполнены два условия: $\tau_{\beta} < c_1$, $a_{\nu} > c_2$ (c_2 – задано). Выдаются на печать (с заданным шагом кратным m) величины: $t, x, \bar{u}, I, \hat{I}, \tau$.

Программа должна предусматривать печать достигнутых резуультатов по требованию оператора.

5[0]. Рассмотрим вопрос сходимости к локальному минимуму. Поскольку происходит градиентный спуск, то ясно, что при каждом фиксированном a мы приходим к минимум задачи (2.4). Пусть a в (2.4) общее. Рассмотрим как ведет себя получаемая минималь и величина минимума при $a \to \infty$. Обозначим через D совокупность пар $x(t), u(t)$, удовлетворяющих всем перечисленным условиям в п.I[0], а через N совокупность пар $x(t)$, $u(t)$, удовлетворяющих всем условиям п.I[0], кроме уравнений (2.I). Ясно, что $D \subset N$.

Пусть N – компакт, D – замкнуто и не содержит изолированных точек[I)], $I(x,u)$ – непрерывно на N, минимум задачи (2.I)–(2.2) на D существует. Обозначим через $x_a, u_a \in N$ – функции, на которых $\hat{I}(x,u,a)$ достигает минимума при данном a. В силу компактности N существует сходящаяся подпоследовательность функций $\{x_a, u_a\}$ такая, что $\lim\limits_{a\to\infty} (x_a, u_a) = (x_{\infty}, u_{\infty})$.

Теорема 2.I. Пара $x_{\infty}, u_{\infty} \in D$ и на этой паре

$$I(x_{\infty}, u_{\infty}) = \lim_{a\to\infty} \min_{N} \hat{I}(x,u,a) = \min_{D} I(x,u). \qquad (2.13)$$

Доказательство: Отметим прежде всего, что поскольку на D $I(x,u) \equiv \hat{I}(x,u,a)$ и $D \subset N$, то при любом $a \geq 0$

$$\min_{N} \hat{I}(x,u,a) \leq \min_{D} I(x,u). \qquad (2.14)$$

I) Последнее требование необходимо, чтобы задача (2.I)–(2.2) о локальном минимуме на D имела смысл.

Докажем теперь утверждения теоремы: I) предположим противное $x_\infty, u_\infty \notin D$. Тогда в силу замкнутости D, начиная с некоторого a_0, все пары последовательности $\{x_a, u_a\}$ будут внешними по отношению к D. Следовательно, для всех $a > a_0$: $\lim\limits_{a\to\infty} \min\limits_{D} \hat{I}(x,u,a) = \infty$, что противоречит (2.14); 2) докажем, что $I(x_\infty, u_\infty) = \min\limits_{D} I$. Поскольку $x_\infty, u_\infty \in D$, то

$$I(x_\infty, u_\infty) \geq \min_{D} I(x,u). \qquad (2.15)$$

Но (2.14) имеет место при любом a, поэтому $I(x_\infty, u_\infty) \leq \min\limits_{D} I(x,u)$. Сравнивая эти два неравенства, видим, что $I(x_\infty, u_\infty) = \min\limits_{D} I$; 3) обозначим $\Phi = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} (v_i - f_i)^2 dt$. Рассмотрим предел: $\lim\limits_{a\to\infty} \min\limits_{N} \hat{I}(x,u,a) = \lim\limits_{a\to\infty} [I(x_a, u_a) + a\,\Phi(x_a, u_a)]$. Так как $\Phi \geq 0$, $a \geq 0$, то $\lim\limits_{a\to\infty} \min\limits_{N} \hat{I}(x,u,a) \geq \lim\limits_{a\to\infty} I(x_a, u_a)$ и в силу непрерывности $I(x,u)$, а следовательно и $\hat{I}(x,u,a)$ имеем: $\lim\limits_{a\to\infty} I(x_a, u_a) = I(x_\infty, u_\infty)$. Итак

$$\lim_{a\to\infty} \min_{N} \hat{I}(x,u,a) \geq I(x_\infty, u_\infty). \qquad (2.16)$$

С другой стороны, из (2.14), (2.15)

$$\lim_{a\to\infty} \min_{N} \hat{I}(x,u,a) \leq I(x_\infty, u_\infty). \qquad (2.17)$$

Сравнивая (2.16) и (2.17), видим, что имеет место (2.13). Теорема доказана.

Поскольку в точке минимума $B_{x_i} = 0$, то из (2.9) следует, что на паре x_∞, u_∞ функции $p_i(t)$ совпадают с соответствующими функциями сопряженной системы принципа максимума Понтрягина (или множителями Лагранжа в классическом вариационном исчислении). Поэтому начальные значения $p_i(t_1)$, взятые при конечном a могут быть использованы как исходное приближение для точного решения задачи принципом максимума.

<u>Пример 2.I</u>. Решим пример I § I данным методом. Найти минимум функционала

$$I = \int_0^3 \frac{1}{2} x^2 dt, \quad \dot{x} = u, \quad |u| \leq 1, \quad x(0) = x(3) = 1. \qquad (2.18)$$

Переходим к задаче

$$\hat{I} = \int_0^3 \left[\frac{1}{2} x^2 + \frac{a}{2} (v-u)^2 \right] dt, \quad \dot{x} = v, \quad |v| \leq 1, \quad x(0) = x(3) = 1. \qquad (2.19)$$

Составляем выражение: $B = \frac{1}{2}x^2 + \frac{a}{2}(v-u)^2 - pv - \dot{p}x$. Задаемся $\tilde{x}(t)$, удовлетворяющей заданным граничным условиям и $|\dot{\tilde{x}}| \leq 1$. Из (2.7): $p = a(v-u)$

Из (2.5): $B_x=-a(v-u)=0$, т.е. $u=v$ пока $|v|\le 1$. Из (2.10): $B_x=x-a(\ddot{x}-\dot{v})$. Но $\dot{x}=v$ поэтому $B_x=x$ и $\delta x=-\tau x$, где $\tau>0$. Таким образом, при $x>0$ на каждом шаге надо стремиться уменьшать x насколько позволяет ограничение $|v|\le 1$ и увеличивать его, если $x<0$. В итоге придем к кривой, показанной на фиг. 4.2а. Эта кривая содержит участок особого режима: $x\equiv 0$

§ 3. Метод спуска по допустимому множеству в задачах поиска экстремума функций конечного числа переменных.

Рассмотрим поиск экстремума в задаче

$$I=f_0(x),\quad f_i(x)=0\qquad i=1,2,\dots,m<n. \tag{3.1}$$

Пусть $f_i(x)$ $i=0,1,\dots,n$ непрерывны и дифференцируемы. Возьмем $\varkappa$ – функционал в виде $\varkappa=\lambda_i f_i(x)$ $i=1,2,\dots,n$, где λ_i пока неопределены. Составим обобщенный функционал: $J=f_0(x)+\lambda_i f_i(x)$. Зададимся некоторыми значениями $x_i=\tilde{x}_i$ и вычислим вариацию относительно этих значений:

$$\tilde{\delta} J=J'_{x_i}\tilde{\delta}x_i \tag{3.2}$$

Положим n производных[1)]

$$J'_{x_i}(\tilde{x},\lambda)=0\qquad i=1,2,\dots,m \tag{3.3}$$

и из этих уравнений найдем λ_i ($i=1,2,\dots,m$)[2)]. Полагая оставшиеся в (3.2) $\tilde{\delta}x_i$ равными

$$\tilde{\delta}x_i=-\tau J'_{x_i}\qquad i=m+1,\dots,n,\ \tau>0, \tag{3.4}$$

получим

$$\tilde{\delta} J=-\tau\sum_{i=m+1}^{n}(J'_{x_i})^2 \tag{3.5}$$

Отсюда видно, что если приращения ($n-m$) компонент $\tilde{\delta}x_i$ выбирать по (3.4), то при достаточно малом шаге $\tau>0$ величина функционала оудет убывать.

Поэтому выбираем новые значения ($n-m$) компонент x_i по формулам

$$x_{k,\beta+1}=x_{k,\beta}+\tilde{\delta}x_{k,\beta}\qquad k=m+1,\dots,n \tag{3.6}$$

(где β –номер итерации), а остальные m компонент найдем по уравнениям (3.1): $f_i(x)=0$ $i=1,2,\dots,m$.

---

1) Для определенности мы будем считать, что это m первых производных. Это не ограничивает общности рассуждений.

2) Это возможно, если функциональная матрица $\|J''_{x_i x_j}\|$ имеет в точке $\tilde{x}$ ранг m.

В данном методе мы [illegible] получили [illegible]
и он назван спуском по допустимому множеству.

Приложение I к гл.4

Замечание о приближенных методах построения $\psi(t,x,y)$

I°. Для приближенного построения функции $\psi(t,x,y)$, фигурирующей в методе максимина (гл.3, § 2) можно применить метод Ритца. [illegible] не зависит от y. Выберем последовательность координатных функций $\nu_1(t,x)$, $\nu_2(t,x),\dots,\nu_k(t,x),\dots$ удовлетворяющую следующим требованиям:

I) При любом k функции $\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_k$ – линейно независимы.

2) Последовательность функций полная, т.е. линейная [illegible] этих функций образует множество всюду плотное в пространстве функций $\psi(t,x)$.

Приближенное решение можно искать в виде

$$\psi_k(t,x)=\sum_{\ell=1}^{k} c_\ell \nu_\ell(t,x), \qquad (1)$$

где c_ℓ – постоянные. Эти постоянные находим из условия (2.10) гл.3

$$\sup_c\Big(\inf_{x_1,x_2\in K} A+\int_{t_1}^{t_2}\inf_{x\in G,\,u\in U} B\,dt\Big). \qquad (2)$$

Увеличивая k найдем последовательность оценок снизу

$$\bar{J}_k=\bar{A}_k+\int_{t_1}^{t_2}\bar{E}_k\,dt. \qquad (3)$$

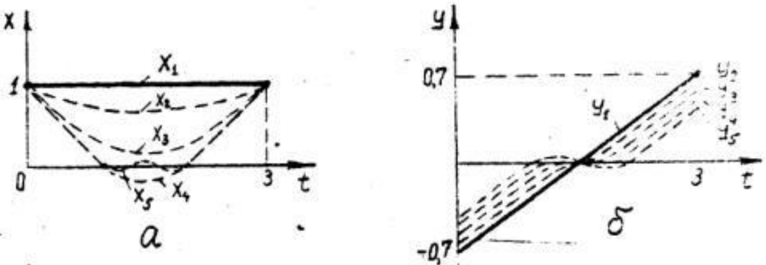
Указанная последовательность является невозрастающей, т.к. среди линейных комбинаций $k+1$ функции ν_ℓ содержаться все линейные комбинации первых k функций. Т.к. эта последовательность ограничена сверху, то она сходится. Степень близости найденного решения к нижней грани функционала можно оценить следующим образом. Найдем ближайшее к $\bar{x}$ допустимое x и вычислим на нем значение функционала. Сравнивая его с нижней оценкой $\bar{J}_k$, судим о близости к оптимальному решению.

Основные результаты гл.4

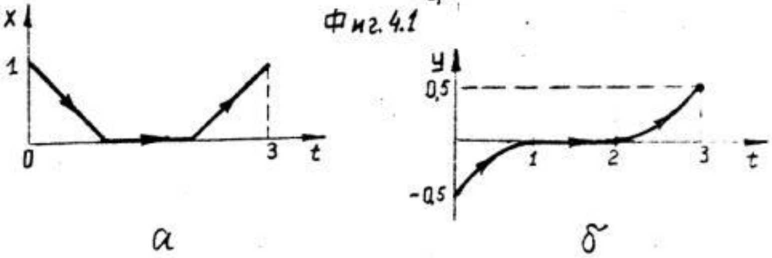
I. Предложен новый алгоритм численной реализации метода максимина в задачах описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. Этот алгоритм по сравнению с известными методами Л.С.Понтрягина, Л.И.Шатровского, Брайсона и Келли обладает следующими преимуществами: I) Нет краевой задачи, 2) Получаем сильный относительный минимум, 3) Особые и скользящие режимы не мешают применению метода, 4) Просто и точно можно учесть ограничения на управления и фазовые координаты.

2. Предложен новый метод градиентного спуска в пространстве состояний для задач оптимизации, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями с ограничениями на фазовые координаты. Этот метод обладает теми же преимуществами, что и метод максимина. Выведены условия его сходимости. На примере показано, что он может применятся (и сходиться) при наличии в составе экстремали вырожденных режимов.

3. Предложен новый метод спуска по допустимому множеству в задачах поиска условного экстремума функций конечного числа переменных. Этот метод всегда приводит в локальный минимум.



Фиг. 4.1



Фиг. 4.2

ГЛАВА 5

ИМПУЛЬСНЫЕ РЕЖИМЫ[1)]

Расширение круга рассматриваемых проблем оптимизации привело к появлению задач, в которых управление обладает такой мощностью, что временем его действия можно пренебречь и считать, что его кратковременное действие на полную мощность эквивалентно приложению некоторого импульса к системе. Но в этом случае в момент приложения такого импульса система может скачком переходить из одного состояния в другое, что с математической точки зрения соответствует разрыву фазовых координат. Примером таких задач являются задачи переходов с орбиты на орбиту или межпланетные перелеты космических кораблей с ракетными двигателями, где временем работы двигательной установки по сравнению с общим временем полета можно пренебречь и тем самым понизить порядок системы уравнений.

В данной главе рассматриваются оптимальные задачи, описываемые системами обыкновенных дифференциальных уравнений I-го порядка. В отличие от известных методов /24/ - /31/ рассмотрение ведется на классе функции фазовых координат, которые в определенных случаях могут иметь разрывы I-го рода (§ I). Доказана теорема, устанавливающая достаточные условия абсолютного минимума в таких задачах (§ 2). На базе этой теоремы выводится ряд алгоритмов отыскания минимали (§ 3).

§ I. Постановка задачи. Основные определения

I°. Пусть требуется найти абсолютный минимум функционала

$$I = g_0[t_1, t_2, x(t_1), x(t_2)] + \int_{t_1}^{t_2} f_0(t, x, u)\,dt. \qquad (I.I)$$

[1)] Ряд результатов по импульсным режимам опубликовано автором в /I/, /2/. Глава полностью опубликована в [87].

121

Входящие в него функции удовлетворяют почти всюду дифференциальным уравнениям

$$\dot{x}_i = f_i(t, x, u) \qquad i = 1, \dots, n \tag{I.2}$$

и величины $t_1, t_2, x(t_1), x(t_2)$ принадлежат заданному множеству R.

Здесь $t \in T$, T -множество, представляющее собой отрезок $[t_1, t_2]$ действительной оси t^{*}. $x(t)$-n -мерная ограниченная и почти всюду непрерывная вектор-функция фазовых координат, определенная на отрезке $[t_1, t_2]$. Совокупность x образует некоторое множество в n -мерном евклидовом пространстве E_n. $u(t)$-r -мерная измеримая вектор-функция, принимающая значения из некоторой области $U(t)$, которая может быть любым множеством r -мерного евклидова пространства E_r. В частности, она может быть замкнутой и ограниченной. Функции $f(t, x, u)$ - измеримы и суммируемы по t при всех фиксированных x, u непрерывны и ограничены всюду по x и непрерывны почти всюду на U. Функция g_0 -непрерывна и ограничена снизу на R.

Измеримую функцию $u(t)$, заданную на отрезке $t_1 \le t \le t_2$ назовем допустимым управлением, если $u \in U(t)$. Аналогично конечные значения назовем допустимыми, если $t_1, t_2, x(t_1), x(t_2) \in R$. Тогда каждому допустимому управлению $u(t)$ и некоторому значению $t_1, t_2, x(t_1), x(t_2) \in R$ в $n+1$ -мерном фазовом пространстве $E_n \times T$ будет соответствовать вектор-функция $x(t)$, почти всюду удовлетворяющая (I.2). Эту функцию мы будем называть допустимой траекторией процесса. Множество функций $x(t)$, $u(t)$, удовлетворяющих всем перечисленным условиям, назовем допустимым и обозначим Q. Предполагается, что функционал I -полунепрерывен и ограничен снизу на Q.

Ставиться задача: на множестве Q допустимых функций $X(t)$, $u(t)$ требуется найти такую пару $\bar{x}(t)$, $\bar{u}(t)$, на которой функционал I имел бы наименьшее (наибольшее) значение.

Допустимое управление $u(t)$ $(u \in U)$, доставляющее минимум функционалу (I.I) при условии, что концы траектории принадлежат R, будем называть оптимальным управлением, а соответствующую траекторию - оптимальной траекторией.

С точки зрения теории автоматического регулирования можно считать, что уравнения (I.2) описывают состояние объекта, который надо перевести из некоторого начального положения в некоторое конечное положение таким образом, чтобы показатель качества процесса (I.I) был минимален.

Поставленная задача отличается тем, что на допустимых управлениях ($u \in U$) фазовые координаты могут иметь разрывы I-го рода (импульсные режимы /I/).

2^0. Введем в рассмотрение множество $U^* = \{u^*: |f_i(t,x,u)| = \infty, i = 0,1,\dots,n\}$, т.е. множество значений $u \in U$, на которых правые части (I.I), (I.2) обращаются в бесконечность. Очевидно, что $U^* \subset U$. По условию $U^* \neq U$. Импульс (разрыв $X(t)$) допустим, если $u \in U^*$. Допустимый импульс (разрыв) отличается от произвольного импульса тем, что он может быть реализован на допустимом управлении.

Обратимся к анализу подмножества U^*. Здесь могут быть случаи:

I. U^* состоит из изолированных точек. Пример: $f_0 = x^2$, $f = \frac{1}{u_1^2 + u_2^2}$, тогда $U^* = \{0,0\}$.

2. U^*-многообразие не нулевого измерения. Примеры:

I) $f_0 = x^2$, $f_1 = u_1$, $f_2 = u_2$ $\quad U^* = \{u_1, u_2: \ |u_1| + |u_2| = \infty\}$.

2) $f_0 = x^2$, $f = \frac{1}{u_1^2 + u_2^2 - 1}$ $\quad U^* = \{u_1, u_2: \ u_1^2 + u_2^2 = 1\}$.

Из определения следует, что $U^* = U^*(t, x)$. Здесь могут быть случаи:

1. U^* не зависят ни от t , ни от x . Импульс может быть в любой точке пространства $T \times E_n$. Пример: $f_0 = x^2$, $f = u$.

2. $U^* = U^*(t)$. Обозначим T^* множество t , на которых U^* - не пусто. Возможны варианты: а) U^* - не пусто только в отдельных точках $t_\alpha \in [t_1, t_2]$ ($\alpha = 1, 2, \ldots, k$) число которых конечно и положение известно (сосредоточенные или фиксированные импульсы). Если $t \neq t_\alpha$, то множество U^* -пусто.
Пример: $f_0 = x^2$; $f = \frac{u}{\sin^2 \pi t + u^2}$ $U^* = \{u^* = 0 : t = n\}$ - импульсы возможны только в точках $t = n$, где n - целое число. Если же положение импульсов неизвестно - назовем их "плавающие" импульсы.
б) U^* - существует на множестве T^*, которое всюду плотно в T. Пример: $f_0 = x^2$; $f = \frac{u}{u^2 + 1 - E(t)}$, где $E(t)$ - функция Дирихле. Импульсы здесь возможны в любой рациональной точке t .
в) U^* - не пусто всюду на отрезке $t_3 t_4 \subseteq [t_1, t_2]$ (распределенные импульсы). Пример: $f_0 = x^2 + u^2$, $f = u^3 + 1$ - импульс при любом t .

3. $U^* = U^*(x)$. Обозначим X^* совокупность x таких, что U^* - не пусто. В этом случае на систему (1.1), (1.2) на многообразии разрыва накладывается дополнительная связь $x \in X^*$. Эта связь должна быть совместна с системой (1.2). Импульс возможен при любом $t \in T$. Пример: $f_0 = x_2^2$, $f_1 = \frac{u_1}{x_2^2 + u_1^2}$, $f_2 = \sin u_2$, $X^* = \{x_2 = 0\}$ - импульсы возможны только при $x_2 = 0$.

4. $U^* = U^*(t, x)$ - самый общий случай. Импульсы возможны на многообразии $T^* \times X^*$.

3°. Выделим из f_0, f_i функции f_ζ , обладающие на U^* наивысшим порядком бесконечности, т.е. функции для которых

$$\lim_{u \to u^*} \left| \frac{f_i}{f_\zeta} \right| < \infty, \quad i = 0, 1, \ldots, \zeta - 1, \zeta + 1, \ldots, n.$$

Предположим, что одна из функций f_s такова, что в интересующей нас области $f_s \neq 0$ (пусть это будет f_s). Тогда $x_s = \tau$ можно взять в качестве независимого переменного. Траектории на многообразии разрыва будут описываться системой уравнений, полученной из (I.I), (1.2)

$$x_i' = \varphi_i(\tau, x, u^*) \quad i = 0, 1, \ldots, n, \quad u^* \in U^*, \tag{1.3}$$

где $x_i' = dx_i / d\tau$, $\varphi_i = f_i / f_s$.

Систему (I.3) можно снова анализировать на импульсные режимы, если она содержит u^*. Если они возможны, т.е. существует непустимое множество

$$U^{**}(\tau, x) = \{ u^* : |\varphi_i(\tau, x, u^*)| = \infty \} \quad i = 1, \ldots, n,$$

то эти импульсы назовем импульсами 2-го порядка. Аналогично можно построить импульсы 3-го, 4-го,..., n-го порядков.

§ 2. Случай "фиксированных" и "плавающих" импульсов[1)]

I[0]. Введем в рассмотрение непрерывную почти всюду на T ограниченную снизу в допустимой области значений t, x функцию $\psi(t, x)$ обладающую почти всюду непрерывными на T и всюду ограниченными частными производными ψ_t, ψ_{x_i}, которую по аналогии с гл. 2 назовем характеристической. Пусть $t_{\beta\alpha} \in [t_1, t_2]$ $(\alpha = 1, \ldots, K;\ \beta = 1, 2)$ - допустимые точки разрыва функции $x(t)$. Условимся обозначать на интервалах $t_{1\alpha} < t < t_{2\alpha}$ (между разрывами), функцию $\psi(t, x)$ как $\psi^\alpha(t, x)$. Заметим, что $t_{2\alpha} = t_{1, \alpha+1}$.

2[0]. Рассмотрим поведение системы в момент разрыва $x(t)$. Разрыв возможен тогда и только тогда, когда существует такое $u \in U$, что хотя бы одна функция f_0, f_i равна бесконечности. Следовательно в пространстве $\tilde{X}$ в момент разрыва траектория рас-

---

I) Предполагается, что число импульсов конечно.

положена в гиперплоскости перпендикулярной оси τ. Рассмотрим расчет этого участка траектории. Очевидно, что в этом случае t не может быть независимым переменным, но в качестве независимого переменного, вообще говоря, может быть выбрана одна из фазовых координат.

Ход траектории по многообразию разрыва будет описываться системой уравнений (I.3):

$$x_i' = \varphi_i(\tau, x, u^*) \quad i=0,1,\dots,n, \; i \neq s, \; \tau_{1\alpha} \leq \tau \leq \tau_{2\alpha}, \; u^* \in U^* \qquad (2.I)$$

Ввиду непрерывности f_i по x и $f_s \neq 0$ функции φ_i будут непрерывными, функции $x(\tau)$ – по-прежнему ограниченными и непрерывными почти всюду, $u^*(t)$ – измеримыми.

Всюду в этой главе мы будем рассматривать только импульсы I-го порядка. В этом случае уравнения (2.3) связывают значения $x(t)$ слева и справа от точки разрыва. Очевидно, что при входе в разрыв (момент $t_{2\alpha}-0$) и при выходе из разрыва (момент $t_{1\alpha}+0$) имеем

$$x_i(t_{2\alpha}) = x_i(\tau_{10}), \quad x_i(t_{1\alpha}) = x_i(\tau_{2\alpha}), \quad i=0,1,\dots,n, \; \alpha=1,2,\dots,k. \qquad (2.2)$$

Введем непрерывные и имеющие непрерывные частные производные функции разрывов[I)] $\Psi^{\alpha} = \Psi^{\alpha}(\tau, x)$ $(\alpha = 1,\dots,k+1)$ и функции $\lambda_\gamma[x(\tau_{j\alpha}), x(t_{j\alpha})]$ $\gamma = 1,\dots,2(n+1)k+k-1$, $j=1,2$.

Возьмем $\mathcal{L}$-функционал в виде

$$\mathcal{L} = \int_{t_{1\alpha}}^{t_{2\alpha}} \psi^{\alpha}_{x_i}[\dot{x}_i - f_i(t,x,u)] + \int_{\tau_{1\alpha}}^{\tau_{2\alpha}} \Psi^{\alpha}_{x_i}[x_i' - \varphi_i(\tau,x,u^*)]\,d\tau + \lambda_i[x_i(\tau_{1\alpha}) - x_i(t_{2\alpha})] +$$

$$+ \lambda_{n+i}[x_i(t_{1\alpha}) - x_i(\tau_{2\alpha})] + \lambda_{2n+\xi}[t_{2\alpha} - t_{1,\alpha+1}] \qquad (2.3)$$

$$i=1,\dots,n; \quad \alpha=1,\dots,k; \quad \xi=1,\dots,k-1.$$

I) Число этих функций будет на одну больше числа участков. Поэтому суммирование по повторяющимся индексам α выражений, в которое входит τ надо производить от I до к-I. Считаем, что Ψ^{α} относится к левому концу отрезка.

~~Вернее~~ Требование определения α-функционала выполнено. Составляя общий функционал $\mathcal{J}=I+\alpha$, добавляя и вычитая из подынтегрального выражения (2.3) величину ψ_t' и учитывая, что $\dot\psi = \psi_{x_i}\dot x_i + \psi_t$, а также (1.2), (2.I), получаем

$$\mathcal{J}= g_0 + \psi^\alpha(t,x(t))\Big|_{1\alpha}^{2\alpha} + \Psi^\alpha(\tau,x(\tau))\Big|_{1\alpha}^{2\alpha} + \lambda_\gamma K_\gamma + \int_{t_{1\alpha}}^{t_{2\alpha}} (f_0 - \psi_t^\alpha - \psi_{x_i}^\alpha f_i)\,dt + \int_{\tau_{1\alpha}}^{\tau_{2\alpha}} (\varphi_0 - \Psi_\tau^{-\alpha} - \Psi_{x_i}^{-\alpha}\varphi_i)\,d\tau, \tag{2.4}$$

где

$$K_i \equiv x_i(\tau_{1\alpha}) - x_i(t_{2\alpha}) = 0, \qquad K_{n+i} \equiv x_i(t_{1\alpha}) - x_i(\tau_{2\alpha}) = 0,$$

$$K_{2n+\xi} \equiv t_{2\alpha} - t_{1,\alpha+1} = 0, \quad i=1,\dots,n,\ \alpha=1,\dots,K;\ \xi=1,\dots,K-1.$$

Введем обозначения: $\bar t_{1\alpha}, \bar t_{2\alpha}, \bar\tau_{1\alpha}, \bar\tau_{2\alpha}$ - ~~оптимальное~~ положение точек разрыва (в случае "плавающих" импульсов),

$$A = g_0 + \psi^\alpha\Big|_{1\alpha}^{2\alpha} + \Psi^\alpha\Big|_{1\alpha}^{2\alpha} + \lambda_\gamma K_\gamma, \tag{2.5}$$ [I)]

$$B_\alpha = f_0 - \psi_\tau^\alpha - \psi_{x_i}^\alpha f_i, \quad \alpha=1,\dots,K;\ i=1,\dots,n, \tag{2.6}$$

$$B_\alpha^* = -\Psi_\tau^{-\alpha} - \Psi_{x_i}^{-\alpha}\varphi_i, \quad i=0,1,\dots,n;\ i\neq s,\ \Psi_{x_0}^{-\alpha} \equiv -1. \tag{2.7}$$

Тогда (2.4) можно переписать

$$\mathcal{J} = A + \int_{\bar t_{1\alpha}}^{\bar t_{2\alpha}} B_\alpha\,dt + \int_{\bar\tau_{1\alpha}}^{\bar\tau_{2\alpha}} B_\alpha^*\,d\tau.$$

Обозначим Π множество абсолютно-непрерывных кривых $x(t)$ с ограниченной производной

$$\dot x_i \in \dot X_i = \{f_i(t,x,u):\ u\in U\} \quad i=0,1,\dots,n,\quad t_{1\alpha}<t<t_{2\alpha},$$

а через Π^* множество абсолютно-непрерывных кривых $x(\tau)$ с производной, принадлежащей множеству

$$\dot x_i^* \in \dot X_i^* = \{\varphi_i(\tau,x,u^*):\ u^*\in U^*\} \quad i=0,1,\dots,n,\ i\neq s,\ \tau_{1\alpha}<\tau<\tau_{2\alpha}.$$

I)

Имеет место теорема:

<u>Теорема 2.I.</u> Для того, чтобы пара вектор функций $\bar{u}(t)$, $\bar{x}(t) \in Q$ была абсолютной минималью функционала (I.I) достаточно существование непрерывной почти всюду, на T ограниченной снизу, кусочно-дифференцируемой характеристической функции $\psi(t,x)$, непрерывных и дифференцируемых функций разрывов $\Psi^*(\tau,x)$ и функций λ_γ таких, что

$$\text{I) } \xi_\alpha(t,x) = \inf_{u \in U} B_\alpha(t,x,u), \tag{2.8}$$

$$\text{2) } \int_{\bar{t}_{1\alpha}}^{\bar{t}_{2\alpha}} \bar{B}_\alpha dt = \inf_{x(t) \in D} \int_{\bar{t}_{1\alpha}}^{\bar{t}_{2\alpha}} \xi_\alpha dt = 0, \text{ по } \alpha \text{ - не сумма}, \tag{2.9}$$

$$\text{3) } \xi_\alpha^*(\tau,x) = \inf_{u^* \in U^*} B_\alpha^*, \tag{2.I0}$$

$$\text{4) } \int_{\bar{\tau}_{1\alpha}}^{\bar{\tau}_{2\alpha}} \bar{B}_\alpha^* d\tau = \inf_{x(\tau) \in D^*} \int_{\bar{\tau}_{1\alpha}}^{\bar{\tau}_{2\alpha}} \xi_\alpha^* d\tau = 0, \text{ по } \alpha \text{ - не сумма}, \tag{2.II}$$

$$\text{5) } \bar{A} = \inf_{\tau_{\beta\alpha}, t_{\beta\alpha}, X_\alpha, X_\tau} A. \tag{2.I2}$$

Здесь $X_\alpha = \{x(t_{1\alpha}), x(t_{2\alpha})\}$, $X_\tau = \{x(\tau_{1\alpha}), x(\tau_{2\alpha})\}$, причем $t_{1k}, t_{2k}, x(t_{1k}), x(t_{2k}) \in R$, а черта сверху обозначает величины на абсолютной минимали.

<u>Доказательство теоремы 2.I.</u> Подставим (2.8) в (2.9), (2.I0) в (2.II) и сложим соответственно правые и левые части. Просуммируем полученные выражения по α $(\alpha = 1, \ldots, k)$ и сложим правую и левую части соответственно с правой и левой частью (2.I2).

Получим

$$\bar{A} + \int_{\bar{t}_{1\alpha}}^{\bar{t}_{2\alpha}} \bar{B}_\alpha dt + \int_{\bar{\tau}_{1\alpha}}^{\tau_{2\alpha}} \bar{B}_\alpha^* d\tau = \inf_{t_{\beta\alpha}, \tau_{\beta\alpha}, X_\alpha, X_\tau} A + \inf_{x(t)} \int_{\bar{t}_{1\alpha}}^{\bar{t}_{2\alpha}} \inf_{u \in U} B_\alpha dt + \inf_{x(\tau)} \int_{\bar{\tau}_{1\alpha}}^{\bar{\tau}_{2\alpha}} \inf_{u^* \in U^*} B_\alpha^* d\tau \tag{2.I3}$$

Используя равенство

$$\inf_{x(t)} \int_{\bar t_{1\alpha}}^{\bar t_{2\alpha}} \inf_{u\in V} B\,dt = \inf_{x(t)} \inf_{u(t)} \int_{\bar t_{1\alpha}}^{\bar t_{2\alpha}} B_\alpha dt = \inf_{x(t),u(t)} \int_{\bar t_{1\alpha}}^{\bar t_{2\alpha}} B_\alpha dt,$$

выражение (2.13) представим в виде

$$\bar{J} = \inf_{t_{\beta\alpha},\tau_{\beta\alpha},x_{\beta},x_\tau} A + \inf_{x(t),u(t)} \int_{\bar t_{1\alpha}}^{\bar t_{2\alpha}} B_\alpha\, dt + \inf_{u^*(t),x(\tau)} \int_{\tau_{1\alpha}}^{\bar\tau_{2\alpha}} B_\alpha^* d\tau. \qquad (2.14)$$

Поскольку $x(t), u(t), x(\tau)$ и $t_{\alpha\beta}, \tau_{\beta\alpha}, x(t_{\beta\alpha}), x(\tau_{\beta\alpha})$ меняются независимо друг от друга (2.14) можно переписать

$$\bar{J} = \inf \left[A + \int_{\bar t_{1\alpha}}^{\bar t_{2\alpha}} B_\alpha dt + \int_{\bar\tau_{1\alpha}}^{\bar\tau_{2\alpha}} B_\alpha^* d\tau\right] \text{ или } \bar{J} = \inf J. \qquad (2.15)$$

В (2.15) инфинум берется по $x(t), u(t), x(\tau), u^*(t), t_{\beta\alpha}, \tau_{\beta\alpha}, x(t_\beta), x(\tau_\beta)$. Подставим A, B_α, B_α^* из (2.5)–(2.7) в (2.15)

$$\bar{J} = \inf\Big[g_0 + \psi^\alpha\Big|_{1\alpha}^{2\alpha} + \int_{\bar t_{2\alpha}}^{t} B_\alpha ds + \int_t^{\bar t} B_\alpha ds + \Psi_\alpha\Big|_{1\alpha}^{2\alpha} + \int_{\bar\tau_{2\alpha}}^{\tau} B_\alpha^* dq + \qquad (2.16)$$
$$+ \int_\tau^{\bar\tau_{1\alpha}} B_\alpha^* dq + \lambda_\gamma K_\gamma + \int_{\bar t_{2\alpha}}^{\bar t_{2\alpha}} (f_0 - \psi_t^\alpha - \psi_{x_i}^\alpha f_i) dt - \int_{\bar\tau_{1\alpha}}^{\tau_{2\alpha}} (\Psi_\tau^{\tau+\alpha} + \Psi_{x_i}^\alpha \varphi_i) d\tau\Big].$$

Пусть существуют такие функции $\psi(t,x)$, $\Psi(\tau,x)$, что инфинум J по $x(t)$, $u(t)$, $x(\tau)$ и $t_{\beta\alpha}$, $\tau_{\beta\alpha}$, x_β, x_τ достигается на допустимых значениях. Тогда в силу $\psi_t + \psi_{x_i} f_i = \dot\psi, \Psi_\tau + \Psi_{x_i}\varphi_i = \dot\Psi$ уравнений (1.2) и условий в точках разрыва $x_i(t_{1\alpha}) = x_i(\tau_{2\alpha}), x_i(t_{2\alpha}) = x_i(\tau_{1\alpha})$ получим, что (2.16) превратиться в

$$\bar{I} = \inf\left[g_0 + \int_{t_{1\alpha}}^{t_{2\alpha}} f_0^\alpha dt\right] = \inf\left[g_0 + \int_{t_1}^{t_2} f_0 dt\right].$$

Следовательно, неравенство $I > \bar{I}$ имеет место для любой допустимой кривой $x(t)$, $u(t)$ с концами в R, не совпадающей с $\bar{x}(t)$, $\bar{u}(t)$. Неравенство $I > \bar{I}$ есть определение абсолютной минимали на допустимом множестве кривых. Теорема доказана.

§ 3. Методы отыскания минимали в случае фиксированных и плавающих импульсов

В случае разрывных фазовых координат, когда K - конечно, f_i - неограничены на U только в отдельных точках $t \in [t_1, t_2]$, можно построить методы отыскания φ, Ψ аналогичные методам § 3, гл. 2.

I⁰. Так в формализме Гамильтона-Якоби решаем систему уравнений в частных производных

$$\inf_{u \in U} (f_0 - \varphi_t^\alpha - \varphi_{x_i}^\alpha f_i) = 0 \qquad \alpha = 1, \ldots, K. \qquad (3.1)$$

$$\inf_{u \in U} (\Psi_\tau^\alpha + \Psi_{x_i}^\alpha \varphi_i) = 0 \qquad \alpha = 1, \ldots, K+1. \qquad (3.2)$$

Уравнение (3.I) определено в областях пространства $T \times X$, в которых левая часть равенства существует и конечна. Начальным условием для (3.I) служат $t_{11}, x(t_{11}) \in R$, решения систем (3.I), (3.2) "склеиваются" из условия непрерывности (2.2). Этот метод позволяет получить все поле оптимальных траекторий, но он сложен и трудоемок.

2⁰. Рассмотрим теперь формализм Эйлера-Лагранжа[I]. Проводимые в этом пункте рассуждения справедливы как для фиксированных, так и для "плавающих" разрывов.

Пусть φ, Ψ взяты в виде:

$$\Delta \varphi^\alpha = p_i(t) \Delta x_i, \; \Delta \Psi^\alpha = P_i(\tau) \Delta x_i \quad i = 1, \ldots, n. \qquad (3.3)$$

Подставим их в (2.8) - (2.II). Согласно (2.8) оптимальное управление находим из условия

$$\mathfrak{z}_\alpha = \inf_{u \in V} B_\alpha = -\sup_{u \in V} H - \varphi_t \quad , \text{ где } H = p_i(t) f_i(t, x, u).$$

Используя необходимое условие минимума для (2.9) (условие стационарности), аналогично § 3, п. 4, гл. 2 получаем

I) Как обычно, предполагаем, что соответствующие производные существуют.

$$-\partial B^\alpha/\partial x_i \equiv p_i + \partial H^\alpha/\partial x_i = 0 \quad i=1,\dots,n,\ \alpha=1,\dots,\kappa. \qquad (3.4)$$

Используя необходимое условие минимума для (2.12) (условие стационарности) по $x(t_{\alpha\beta}), x(\tau_{\beta\alpha})$ $\beta=1,2,\ \alpha=1,\dots,\kappa$ получаем:

$$\partial A/\partial x_i(t_{2\alpha}) \equiv p_i(t_{2\alpha}) - \lambda_i = 0,\ \ \partial A/\partial x_i(t_{1\alpha}) \equiv -p_i(t_{1\alpha}) + \lambda_{n+i} = 0,$$

$$\partial A/\partial x_i(\tau_{2\alpha}) \equiv p_i(\tau_{2\alpha}) - \lambda_{n+i} = 0,\ \ \partial A/\partial x_i(\tau_{1\alpha}) \equiv -p_i(\tau_{1\alpha}) + \lambda_i = 0.$$

Во второй строке i пробегает значения от 0 до n, кроме $i=s$. Исключая из этих выражений, взятых попарно, λ_i, λ_{n+i} получим:

$$p_i(t_{2\alpha}) = p_i(\tau_{1\alpha}),\ p_i(t_{1\alpha}) = p_i(\tau_{2\alpha}),\ i=1,\dots,n \quad i\neq s. \qquad (3.5)$$

Условие стационарности для (2.12) по $x_s(t_{2s}), \tau_{1\alpha}, x_s(t_{1\alpha}), \tau_{2\alpha}$ дает равенства

$$\partial A/\partial x_s(t_{2\alpha}) \equiv p_s(t_{2\alpha}) - \lambda_s = 0,\ \ \partial A/\partial \tau_{1\alpha} \equiv H^* + \lambda_s = 0, \text{ где } H^* = p_i(t)\psi_i(x),$$

$$\partial A/\partial x_s(t_{1\alpha}) \equiv -p_s(t_{1\alpha}) - \lambda_{n+s} = 0,\ \ \partial A/\partial \tau_{2\alpha} \equiv -H^* - \lambda_{n+s} = 0,\ i=0,1,\dots,n;\ i\neq s;\ p_0 = -1.$$

Исключая из этих выражений λ_s, λ_{n+s}, получим

$$p_s(t_{2\alpha}) = -H^*\big|_{\tau=\tau_{1\alpha}},\ p_s(t_{1\alpha}) = -H^*\big|_{\tau=\tau_{2\alpha}}. \qquad (3.6)$$

Аналогично записываем условие стационарности для (2.12) по $\tau_{2\alpha}, t_{1,\alpha+1}$, если они неизвестны

$$\partial A/\partial t_{2\alpha} \equiv -H + \lambda_{2n+\alpha} = 0,\ \ \partial A/\partial t_{1,\alpha+1} \equiv H - \lambda_{2n+\alpha} = 0.$$

Исключая $\lambda_{2n+\alpha}$, получаем, что при "плавающем разрыве $H^- = H^+$.

Запишем необходимое условие минимума следующее из (2.10) аналогично § 3, п. 4.1 получим:

$$\partial B_\alpha^*/\partial x_i \equiv p_i + \partial H_\alpha^*/\partial x_i = 0;\ i=1,\dots,n,\ i\neq s;\ p_0(t) = -1. \qquad (3.7)$$

Условия входа в разрыв и выхода из разрыва (3.5)-(3.6) (условия "склейки"), а также уравнения (3.7) позволяют полностью рассчитать изменение всех величин при разрыве. При этом момент выполнения равенства $\sup_{u\in V} H = -\infty$ является сигналом входа в "плавающий" разрыв, а момент выполнения равенства $H^- = H^+$ играет роль сигнала выхода из "плавающего" разрыва[1]).

Замечание 3.I. "Плавающие" импульсы возникают при некоторых комбинация x, Ψ_x. Наиболее простой случай, когда система (I.I), (I.2) имеет вид

$$I = f_0(x),\ \dot{x}_i = f_i(x) \quad i = 1,\dots,e,\ \dot{x}_\alpha = f_\alpha(x) + u_\alpha,\ \alpha = e+1,\dots,n. \quad (3.8)$$

Здесь u_α – особые (гл. 6) неограниченные управления. Последние уравнения в (3.8) могут быть удовлетворены на любых кусочно-дифференцируемых $x_\alpha(t)$, а потому эти уравнения можно отбросить. В оставшейся системе x_α будут играть роль управлений. Моменты разрыва $x_\alpha(t)$ определяются из условий оптимальности "усеченной" системы.

3°. Рассмотрим подробнее отдельные случаи. Предположим, что система (I.I), (I.2) имеет вид

$$\dot{x}_i = f_i(t, x, u),\ i = 0, 1, \dots, n, \quad (3.9)$$

а конечные значения $t_1, t_2, x(t_1), x(t_2)$ – фиксированы.

Пусть: I) $Y_1(a)$ – область (многообразие) в пространстве E_n, из каждой точки которой мы на траекториях системы (1.3) можем достигнуть точки a (область управляемости относительно точки a).

2) $Y_2(a)$ – область (многообразие) в пространстве E_n через каждую точку которой проходит траектория системы (1.3), исходящая из некоторой точки a (область достижимости).

Назовем область управляемости Y_1, областью полной управляемости, если существуют траектории системы (1.3), соединяющие любые точки из этой области.

I) Этот выход, а также направление изменения τ, вообще говоря, неоднозначны.

Напоминаем, что в этом параграфе мы рассматриваем случай, когда f_0 - не ограничены на U только в отдельных точках $t_\alpha \in [t_1, t_2]$ число которых конечно и положение заранее известно. Очевидно, что импульсы будут возможны в этом случае только в этих точках. Обозначим множество $x(t)$ с допустимыми разрывами - θ .

Теорема 3.I. Пусть многообразия разрывов являются областями полной управляемости, любая непрерывная траектория $x(t)$ системы (I.2) пересекает эти области, $f_c(t,x,u)$ - ограничено снизу на $E_n \times U$ и $\varphi_0 \equiv 0$. Тогда: I) участки минимали между точками разрыва не зависят от граничных условий; 2) абсолютная минималь находится среди минималей множества θ (минималей с импульсами).

Доказательство: I. Т.к. перемещения по многообразию разрыва не меняет величины функционала ($\varphi_0 = 0$), а многообразия разрыва являются областями полной управляемости, то концы участка минимали между точками разрыва можно выбирать из условия минимума функционала. Следовательно, они будут определяться условиями трансверсальности, а не граничными значениями.

2. Т.к. любая непрерывная кривая $x(t)$, удовлетворяющая (I.2), пересекает многообразия разрыва, которые являются областями полной управляемости, то множество непрерывных кривых, удовлетворяющих заданным граничным условиям входят в множество θ кривых с импульсами. Поэтому согласно принципу расширения /7/ величина абсолютного минимума на множество θ во всяком случае не больше, чем на множестве непрерывных кривых. Теорема доказана.

Пример 3.I. Найти минимум

$$I = \int_{-1}^{1} u^2 \sin^2 t\,dt, \quad \dot{x} = u, \quad x(-1) = -1, \quad x(1) = 1.$$

Составляем $H = pu - u^2 \sin^2 t$. Легко видеть, что при $t = 0$, гамильтониан $H(0) = pu$ и поскольку u -неограничено, то в этой точке возможен импульс. В импульсе $\varphi_0 = f_0 / f = 0$. Поэтому любое перемещение по многообразию разрыва не меняет величины функционала. Значения $\bar{x}(0)$, $x^+(0)$ можно выбирать из условия минимума функционала. Т.к. $\dot{p} = 0$, а из условия трансверсальности $p(0) = 0$ то $p(t) \equiv 0$. Подставляя это значение в H, из требования $\max_u H = \max_u (u^2 \sin^2 t)$, получаем $u \equiv 0$, т.е. $x = const$. Итак минималь имеет вид, показанный на фиг. 5.1.

Теорема 3.2. Пусть концевые точки t_1, t_2, кривой $x(t)$ являются точками разрыва, многообразия разрыва в которых являются областями полной управляемости, $x(t_1), x(t_2)$ принадлежит этим многообразиям и $\varphi_0 \equiv 0$.

Тогда вид минимали $\bar{x}(t)$ на $t_1 < t < t_2$ и величина функционала не зависят от граничных условий $x(t_1)$, $x(t_2)$.

Доказательство: Утверждение теоремы очевидно, поскольку в силу $\varphi_0 = 0$ мы можем переместиться в любую точку на многообразии разрывов без изменения величины функционала и следовательно выбрать конечные условия, исходя из условия минимума функционала. Теорема доказана.

Пример 3.2. Найти минимум функционала

$$I = \int_0^1 t(1-t)u^2 dt, \quad \dot{x} = u, \quad x(0) = 1, \quad x(1) = 1.$$

Составляя $H = pu - t(1-t)u^2$, видим, что в точках $t = 0$, $t = 1$ возможны импульсы. Т.к. в этих точках $\varphi_0 = f_0 / f = 0$, то перемещения по многообразию разрыва не меняет величины функционала. Повторяя рассуждения примера 3.1, получаем $p \equiv 0$ и минималь, показанную на фиг. 5.2.

Замечание 3.2. Если конечные значения $x^+(t_1)$, $x^-(t_2)$, соответствующие минимуму функционала справа в t_1 и справа в t_2, известны, то для справедливости теоремы условие принадлежности

$x(t_1)$, $x(t_2)$ областям полной управляемости можно заменить более слабым условием: $x(t_1) \in Y_1[\tilde{x}(t_1)]$, $x(t_2) \in Y_2[\tilde{x}(t_2)]$.

Назовем отрезок $x_{i_1} \leq x_i \leq x_{i_2}$ оси x_i ~~[illegible]~~ отрезком управляемости по координате x_i, если на многообразии разрыва существует проекция допустимой траектории системы (1.3) на ось x_i, соединяющая крайние точки этого отрезка.

Теорема 3.3. Пусть система (I.I), (I.2) имеет вид:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} f_0(t,x,u)\,dt, \quad \dot{x}_i = f_i(t,x,u) \quad i = 1,\dots,n,$$

существуют такие u^*, что в точке разрыва t_α функции $f_k = \infty$ и $f_k = -\infty$, а f_k имеет наивысший порядок бесконечности.

Тогда в этой точке у многообразия разрыва существует отрезок управляемости по координате x_k.

Доказательство: Т.к. f_k имеет наивысший порядок бесконечности, то $|\varphi_0(\tau_i, u^*)| < \infty$. Кроме того в силу существования таких u^*, что $f_k = \infty$ и $f_k = -\infty$ независимое переменное $x_k = \tau$ может как возрастать, так и убывать. Поскольку $\varphi_0(\tau, u^*)$ - определено на некотором отрезке $\tau_1 \tau_2 \neq 0$, а $x_k = \tau$, то этот отрезок и является отрезком управляемости по координате x_k. Теорема доказана.

В частности: I) Если $n = 1$, то отрезок управляемости совпадает с областью полной управляемости.

2) Если $\varphi_0 \equiv 0$, то отрезок управляемости есть: $-\infty < x_k < \infty$.

Легко проверить, что в примерах 3.I, 3.2, многообразия разрыва являются областями полной управляемости.

§ 4. Методы отыскания минимали в случае "распределенных" импульсов

Рассмотрим случай, когда на всем множестве T или на некотором плотном его подмножестве T^* - возможны импульсы.

I^0. Мы ограничимся случаем, когда система (I.I), (I.2) имеет вид:

$$\dot{x}_i = f_i(x,u) \qquad i = 0,1,\dots,n, \; x_0(t_2) = \min, \; u \in U. \qquad (4.I)$$

Конечные значения t_1, t_2 - фиксированы. В этом случае абсолютная минималь может не принадлежать классу допустимых. Однако в классе допустимых может существовать минимизирующая последовательность, сходящаяся к абсолютной минимали. ~~Для этого случая применима теорема 1.2 гл. 2~~.

Теорема 4.1. Пусть: I) f_0 имеет вид: $f_0(x)$ и ограничено снизу, x^0 - точка $\inf\limits_x f_0(x)$; 2) $x(t_1) \in Y_1(x^0)$ - область управляемости $x(\tau)$ относительно точки x^0; 3) $x(t_2) \in Y_2(x^0)$ - область достижимости $x(\tau)$ относительно x^0; 4) $\varphi_0 = 0$.

Тогда: I) $x \equiv x_0$ - есть предельная абсолютная минималь системы (4.I) (с импульсами в концах); 2) если существует такое $u \in U$, что x^0 удовлетворяет системе (4.I), то x^0 - гладкая минималь, если такого u не существует, то абсолютный минимум достигается на минимизирующей последовательности $x_{(n)}$ такой, что при $n \to \infty$, $|x_{(n)} - x^0| \to 0$ (абсолютной минимали с распределенными импульсами).

Доказательство: 1) Из п. I следует $\varphi_0 = f_0/f_x = 0$. Из п.2,3 получаем, что граничные условия могут быть выполнены, причем в силу $\varphi_0 = 0$ без потерь в величине функционала. Поэтому x^0 соответствующее $\inf\limits_x f_0$ и является абсолютной минималью.
2) Первое утверждение этого пункта очевидно. Докажем второе утверждение. В силу существования областей $Y_1(x^0)$ (см. п. 1 теоремы) - существует такая окрестность минимали x^0, в которой любое отклонение $x(\tau)$ от x^0 (вызванное подстановкой в уравнения (4.I) x^0 и $\forall u \in (U - U^*)$) может быть ликвидировано за счет импульса. Если при $n \to \infty$ $|x_{(n)} - x^0| \to 0$ (в силу ограниченности $f(x)$, это возможно), то $x_{(n)} \to x^0$ рав-

номерно на (t_1, t_2) и $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{t_1}^{t} f(x_{(n)})\,dt=\int_{t_1}^{t_2} f(x^0)\,dt$. Теорема доказана.

<u>Замечание 4.I:</u> Условие $f_0=f_0(x)$ можно заменить более слабым условием $f_0=f_0(x,u)$, если $f_0(x,u)$ ограничено снизу на U и при выборе u^0, x^0 из условия

$$\inf_{x;\,u\in U} f_0(x,u) \qquad (A\mathcal{R})$$

остается еще некоторая свобода выбора u (не все компоненты u определяются условием ($A\mathcal{R}$)).

<u>Следствие 4.I.</u> При условиях теоремы 4.I абсолютной минимум не зависит от граничных условий и определяется как

$$\bar{\bar{I}}=\int_{t_1}^{t_2} \inf_x f_0\,dt .$$

2^0. Установим условия, при которых в некоторой окрестности абсолютной минимали x^0 существует минимизирующая последовательность.

<u>Теорема 4.2.</u> Пусть: I) функции $f_i(x,u)$ $u\in U-U^*$, $\varphi_i(x,u^*)$ $u^*\in U^*$ - непрерывны в точке x_0 и некоторой ее окрестности вместе со своими частными производными первого порядка;
2) $\varphi\equiv 0$; 3) множества $U-U^*$, U^* - не пусты.

Тогда для существования в окрестности x^0 допустимой минимизирующей последовательности $x_n\to x^0$, необходимо и достаточно существование таких $u\in U-U^*$, $u^*\in U^*$, чтобы имели место равенства

$$f_i(x^0,u)=f_k(x^0,u)\cdot\varphi_i(x^0,u^*) \quad i=1,\dots,n\ ,\ i\neq k,\ (k=s). \qquad (4.2)$$

Короче говоря, для существования в некоторой окрестности минимали минимизирующей последовательности, необходимо и достаточно существование решений у системы (4.2).

<u>Доказательство</u>: <u>Необходимость</u>. Пусть дана допустимая минимизирующая последовательность $x^n\to x^0$ в виде

$$x_i = x_i^0 + \Delta x_i, \quad t_j \le t \le t_{j+1}, \; \Delta x_i(t_j) = 0. \tag{4.3}$$

В силу ограниченности, непрерывности и дифференцируемости $f_i(x,u), \varphi_i(x,u^*)$ в точке x^0 и на $U-U,^*$ U^*, приращения в пространстве E_{n+2} и на многообразии разрыва можно записать:

$$\Delta x_i = f_i(x_i^0 u)\Delta t + O_1(\Delta t)\Delta t, \; t_j \le t \le t_{j+1}, \; \Delta t = t_{j+1} - t_j,$$
$$\Delta x_i^* = \varphi_i(x_i^0 u^*)\Delta x_k + O_2(\Delta x_k)\Delta x_k, \quad i \ne k, \tag{4.4}$$

где $O_1(\Delta t), O_2(\Delta x_k)$ – величины более высокого порядка малости относительно $\Delta t, \Delta x_k$ соответственно. Приравнивая первое и второе выражения в (4.4) и деля обе части полученного равенства на Δt, будем иметь:

$$f_i(x_i^0 u) + O_1(\Delta t) = \varphi_i(x_i^0 u^*)\frac{\Delta x_k}{\Delta t} + O_2(\Delta x_k)\frac{\Delta x_k}{\Delta t}, \; i \ne k. \tag{4.5}$$

Устремим $\Delta t \to 0$ ($n \to \infty$), тогда $\frac{\Delta x_k}{\Delta t} \to f_k(x,u)$. Кроме того в силу ограниченности f_k $, \Delta x_k \to 0$. Таким образом в пределе получим систему (4.2).

<u>Достаточность.</u> Пусть существуют такие $u \in U-U^*$, $u^* \in U^*$, что имеют место равенства (4.2). Тогда в силу непрерывности и дифференцируемости f_i, φ_i в окрестности минимали можно написать равенства (4.5). Умножая обе части (4.5) на Δt, получим Δx_i (4.4). Подставим их в (4.3). Это и будет искомая минимизирующая последовательность, которая при $\Delta t \to 0$ стремиться к x^0. В построенной последовательности возвращение на минималь x^0 осуществлялось с погрешностью O_1, O_2. Нам осталось только показать, что при $\Delta t \to 0$ на любом конечном отрезке эта погрешность стремится к нулю. Она равна величине $\sum_{\Delta t}(O_1 + O_2\varphi_k)\Delta t$. Но при $\Delta t \to 0$, члены $O_1, O_2 \to 0$, а φ_k – ограничено. Следовательно, вся эта величина стремиться к нулю.

Пример 4.I.
$$I=\int_{t_1}^{t_2} x_1^2\,dt,\ \dot x_1=f_1(x)+u_1,\ \dot x_2=f_2(x)+u_2,\ x(t_1)=x(t_2)=0. \quad (4.6)$$
Абсолютная минималь ($\inf\limits_{x_1} x_1^2$) равна $x_1^0=0$. Равенства (4.2) таковы
$$f_1(x)+u_1=\left(\frac{u_1^*}{u_2^*}\right)[f_2(x)+u_2]. \quad (4.6)$$

Отсюда видно, что всегда найдутся такие u_1, u_2, u_1^*, u_2^*, что (4.2) будет выполнено. Следовательно, в окрестности предельной кривой $x\equiv 0$ (абсолютной минимали) существует минимизирующая последовательность, которая к ней сходится.

Здесь согласно теореме 3.3 каждая из координат x_1, x_2 является координатой полной управляемости на всей оси, а потому вся плоскость x_1, x_2 является плоскостью полной управляемости. Отсюда с учетом $\varphi_0\equiv 0$ следует, что любые граничные значения $x(t_1), x(t_2)$ могут быть выполнены без потери в величине функционала.

Пример 4.2.
$$I=\int_{t_1}^{t_2} f_0(x_1)dt,\ \dot x_1=f_1(x_1,x_2),\ \dot x_2=f_2(x_1,x_2)+u. \quad (4.7)$$

Здесь условие (4.2) таково
$$f_1(x_1^0, x_2)=0\cdot[f_2(x_1^0,x_2)+u].$$
Оно выполнено, если уравнение $f_1(x_1^0, x_2)=0$ имеет хотя бы один корень.

Пример синтеза довольно общей системы 3-го порядка, содержащей импульсные и особые режимы приводится в приложении 3 к § 2 гл. 6.

Некоторые случаи разрывных решений в простейшем функционале рассматривались в /32/.

Приложение I к гл. 5.

Задача о наивыгоднейшей форме воздушного тормоза

Примем в качестве модели обтекания – неупругую модель Ньютона, согласно которой тангенциальная составляющая скорости молекул, налетающих на тело, остается неизменной, тогда как нормальная составляющая скорости обращается в нуль. Эта модель аппроксимирует случай гиперзвукового невязкого течения. Пусть тормоз имеет форму тела вращения. Уравнения, описывающие явление, следующие /38/ стр. 146-7 I).

$$dX/dx = 4\pi q y u^3/1+u^2;\ dy/dx = u,\ 0 \le x \le x_1,\ x_1 - \text{своб.},\ y(x_1) = y_1,\ X(0) = 0,\ X(x) = \max. \qquad (I)$$

Здесь X – сопротивление, q – скоростной напор (пост.), x – абсцисса точки (независимое переменное, "время"), y – ордината (фазовая координата), u – наклон касательной в данной точке тела (управление).

Применим формализм Эйлера-Лагранжа. Составляя функцию $H = p(t)u - 4\pi q y u^3/1+u^2$ видим, что если $p \ne 4\pi q y$, то $\sup H = \infty$ (фиг. 5.3а). Поэтому при $p \ne 4\pi q y$ оптимальный режим – импульс. Найдем предел

$$\lim_{u \to \infty} 4\pi q y u^3/((1+u^2)u) = 4\pi q y.$$

Следовательно, правую часть 2-го уравнения в (I) можно взять за f_s. Итак в импульсе

$$X = 4\pi q \int_0^{y_1} y\,dy = 2\pi q y_1^2. \qquad (2)$$

Экстремаль состоит только из разрыва от 0 до y_1 (фиг. 5.3б). Физический смысл: при наших предположениях наибольшее сопротивление даст пластинка, стоящая перпендикулярно потоку.

I) В /38/ отыскивается форма тела, обладающего наименьшим сопротивлением. Однако в технике необходимо бывает и знать и форму тел, обладающих наибольшим сопротивлением (воздушные тормоза, парашюты и т.п.).

У нас остался необследованным случай $\rho(t)=4\pi q y$. В этом случае зависимость $H=H(u)$ имеет вид, изображенный на фиг. 5.3в и минимум может быть найден по принципу максимума Л.С.Понтрягина /28/. Соответствующее $\inf\limits_{u} H$ управление $u=1$. Экстремаль $y=x$. Величина функционала на этой экстремали

$$X=4\pi q\int_0^{y_1}\frac{u^3y}{1+u^2}dx=4\pi q\int_0^{y_1}\frac{x}{2}dx=\pi q\, y_1^2 \qquad (3)$$

достигает только половины от разрывного решения (2).

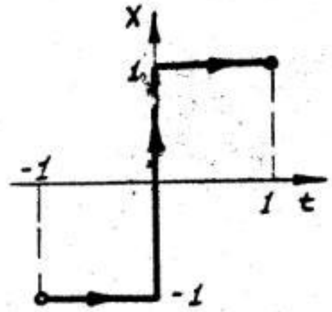
Выводы и основные результаты гл. 5

I. Поставлена задача оптимизации для случаев фиксированных, "плавающих" и "распределенных" импульсов. Доказана теорема о достаточных условиях абсолютного минимума для случая фиксированных импульсов. Разработаны методы отыскания относительных минималей.

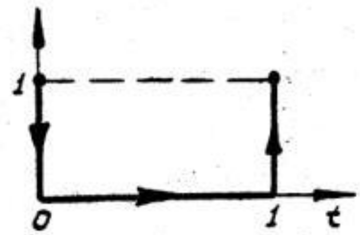
2. Доказано, что при определенных условиях участки минимали между точками разрыва не зависят от граничных условий и абсолютная минималь находится среди минималей с импульсами.

3. Выведены необходимые и достаточные условия существования минимизирующей последовательности кривых с распределенными импульсами, стремящихся к предельной кривой - абсолютной минимали (не принадлежащей классу допустимых кривых).

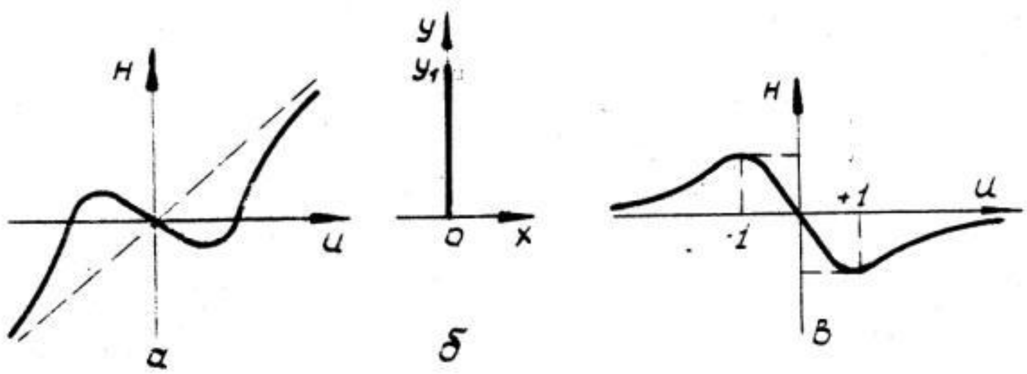
4. Продемонстрирована важность теории импульсных экстремалей на задаче о наивыгоднейшей форме воздушного тормоза. Все решение в этой задаче состоит только из разрыва. Решение же найденное обычными методами, не является оптимальным (не дает абсолютного минимума).



фиг. 5.1



фиг. 5.2



фиг. 5.3