Axa radicală a cercurilor Lemoine

Profesor Ion Pătrașcu, Colegiul Național Frații Buzești, Craiova, România
Profesor Florentin Smarandache, Universitatea New Mexico, USA

În acest articol scoatem în evidență axa radicală a cercurilor Lemoine. Amintim pentru început:

Teorema 1.

Paralelele duse prin centrul simedian K al unui triunghi la laturile triunghiului determină pe laturile triunghiului șase puncte conciclice (Primul cerc al lui Lemoine).

Teorema 2.

Antiparalelele duse prin centrul simedian al unui triunghi la laturile triunghiului determină pe acestea șase puncte conciclice (Al doilea cerc al lui Lemoine).

Remarca 1.

Dacă ABC este un triunghi oarecare și K este centrul său simedian, atunci L, centrul primului cerc Lemoine, este mijlocul segmentului $[OK]$, unde O este centrul cercului circumscris, iar centrul celui de-al doilea cerc Lemoine este chiar K. Va rezulta că axa radicală a cercurilor Lemoine este perpendiculară pe linia centrelor LK, deci pe dreapta OK.

Propoziția 1.

Axa radicală a cercurilor Lemoine este perpendiculara pe dreapta OK ridicată în centrul simedian K.

Demonstrație.

Fie A_1A_2 antiparalela la BC dusă prin K, atunci KA_1 este raza R_{L_2} a celui de-al doilea cerc Lemoine; avem:

$R_{L_2} = \frac{abc}{a^2+b^2+c^2}$.

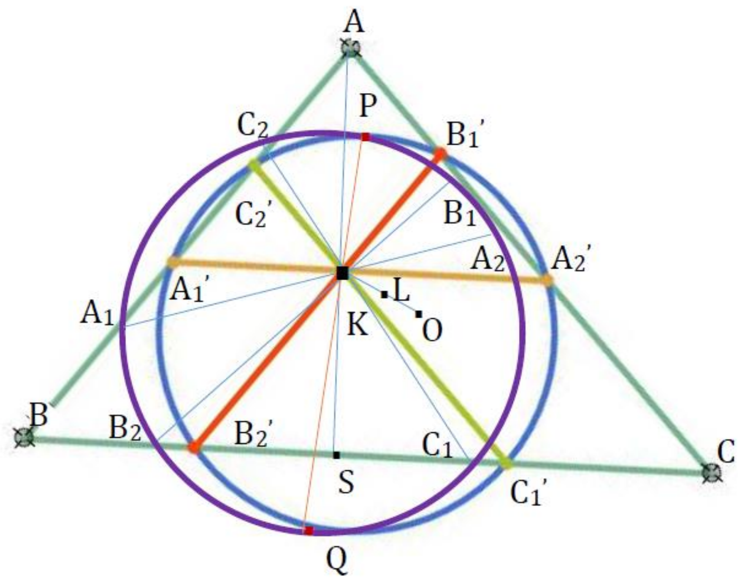

Figura 1

Fie $A_1'A_2'$ paralela lui Lemoine dusă la BC; evaluăm puterea lui K față de primul cerc Lemoine. Avem:

$$\overrightarrow{KA_1'} \cdot \overrightarrow{KA_2'} = LK^2 - R_{L_1}^2. \quad (1)$$

Fie S piciorul simedianei din A, rezultă că:

$\frac{KA_1'}{BS} = \frac{AK}{AS} = \frac{KA_2'}{SC}$.

Obținem:

$KA_1' = BS \cdot \frac{AK}{AS}$și $KA_2' = SC \cdot \frac{AK}{AS}$,

dar $\frac{BS}{SC} = \frac{c^2}{b^2}$ și $\frac{AK}{AS} = \frac{b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2}$.

Deci:

$$\overrightarrow{KA_1'} \cdot \overrightarrow{KA_2'} = -BS \cdot SC \cdot \left(\frac{AK}{AS}\right)^2 = \frac{-a^2b^2c^2}{(b^2+c^2)^2} \cdot \frac{(b^2+c^2)^2}{(a^2+b^2+c^2)^2} = -R_{L_2}^2 . \qquad (2)$$

Construim perpendiculara în K pe linia LK și notăm cu P și Q intersecția ei cu primul cerc Lemoine, vom avea $\overrightarrow{KP} \cdot \overrightarrow{KQ} = -R_{L_2}^2$, pe de altă parte, $KP = KQ$ (PQ este o coardă perpendiculară pe diametrul ce trece prin K).

Rezultă $KP = KQ = R_{L_2}$, deci P şi Q se găsesc pe cercul al doilea al lui Lemoine.

Cum PQ este coardă comună a cercurilor Lemoine, rezultă că ea este axa radicală.

Observația 1.

Din egalarea relaţiilor (1) şi (2) sau cu teorema lui Pitagora în triunghiul PKL, putem calcula R_{L_1}. Se ştie că:

$$OK^2 = R^2 - \frac{3a^2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2},$$

şi cum $LK = \frac{1}{2}OK$, găsim că:

$$R_{L_1}^2 = \frac{1}{4} \cdot \left[R^2 + \frac{a^2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}\right].$$

Remarca 2.

Propoziţia demonstrată privind axa radicală a cercurilor Lemoine este un caz particular al următoarei propoziţii a cărei demonstraţie o lăsăm pe seama cititorului.

Propoziția 2.

Dacă $\mathcal{C}(O_1, R_1)$ și $\mathcal{C}(O_2, R_2)$ sunt două cercuri astfel încât puterea centrului O_1 faţă de $\mathcal{C}(O_2, R_2)$este $-R_1^2$, atunci axa radicală a cercurilor este perpendiculara în O_1 pe linia centrelor O_1O_2.

Bibliografie.

[1] F. Smarandache, Ion Patrascu: *The Geometry of HomologicalTriangles*, Education Publisher, Ohio, USA, 2012.

[2] Ion Patrascu, F. Smarandache: *Variance on Topics of Plane Geometry*, Education Publisher, Ohio, USA, 2013.