Breakdown of Navier-Stokes Solutions – Bounded Energy

Valdir Monteiro dos Santos Godoi
valdir.msgodoi@gmail.com

Abstract – We have proved that there are initial velocities $u^0(x)$ and forces $f(x,t)$ such that there is no physically reasonable solution to the Navier-Stokes equations, which corresponds to the case (C) of the problem relating to Navier-Stokes equations available on the website of the Clay Institute.

Keywords – Navier-Stokes equations, continuity equation, breakdown, existence, smoothness, physically reasonable solutions, gradient field, conservative field, velocity, pressure, external force, bounded energy, millenium problem.

A maneira mais simples que vejo para se provar a quebra de soluções (*breakdown solutions*) das equações de Navier-Stokes, seguindo o descrito em [1], refere-se à condição de energia limitada (*bounded energy*), a finitude da integral do quadrado da velocidade do fluido em todo o espaço.

Podemos certamente construir soluções de

(1) $\frac{\partial u_i}{\partial t}+\sum_{j=1}^{3} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \nu \nabla^2 u_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i,\ 1 \le i \le 3,$

que obedeçam à condição de divergente nulo para a velocidade (equação da continuidade para densidade de massa constante),

(2) $div\, u \equiv \nabla \cdot u = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0,$ (fluidos incompressíveis)

e à condição inicial

(3) $u(x,0) = u^0(x),$

onde $u_i,\ p,\ f_i$ são funções da posição $x \in \mathbb{R}^3$ e do tempo $t \ge 0, t \in \mathbb{R}$. A constante $\nu \ge 0$ é o coeficiente de viscosidade, p representa a pressão e $u = (u_1, u_2, u_3)$ é a velocidade do fluido, medidas na posição x e tempo t, com $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$. A função $f = (f_1, f_2, f_3)$ tem dimensão de aceleração ou força por unidade de massa, mas seguiremos denominando este vetor e suas componentes pelo nome genérico de força, tal como adotado em [1]. É a força externa aplicada ao fluido.

As funções $u^0(x)$ e $f(x,t)$ devem obedecer, respectivamente,

(4) $|\partial_x^\alpha u^0(x)| \le C_{\alpha K}(1+|x|)^{-K}$ sobre $\mathbb{R}^3$, para quaisquer $\alpha \in \mathbb{N}$ e $K \in \mathbb{R}$,

e

(5) $|\partial_x^\alpha \partial_t^m f(x,t)| \le C_{\alpha m K}(1+|x|+t)^{-K}$ sobre $\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$, para quaisquer $\alpha \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ e $K \in \mathbb{R}$,

e uma solução (p,u) de (1) para que seja considerada fisicamente razoável deve ser contínua e ter todas as derivadas, de infinitas ordens, também contínuas (*smooth*), i.e.,

(6) $p, u \in C^\infty \qquad (\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$.

Dada uma velocidade inicial de classe C^∞ com divergente nulo (*divergence-free*, $\nabla \cdot u^0 = 0$) sobre $\mathbb{R}^3$ e um campo de forças externo f também de classe C^∞ sobre $\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$, quer-se, para que uma solução seja fisicamente razoável, além da validade de (6), que $u(x,t)$ não divirja para $|x| \to \infty$ e seja satisfeita a condição de energia limitada (*bounded energy*), i.e.,

(7) $\int_{\mathbb{R}^3} |u(x,t)|^2 dx < C$, para todo $t \ge 0$.

Vemos que todas as condições acima, de (1) a (7), precisam ser obedecidas para se obter uma solução (p,u) considerada fisicamente razoável, contudo, para se obter uma quebra de soluções, (1), (2), (3), (6) ou (7) poderiam não ser satisfeitas para algum $t \ge 0$, em alguma posição $x \in \mathbb{R}^3$, mantendo-se ainda a validade de (4) e (5).

Uma maneira de fazer com que esta situação (*breakdown*) ocorra é quando (1) não tem solução possível para a pressão $p(x,t)$, quando o campo vetorial $\phi: \mathbb{R}^3 \times [0,\infty) \to \mathbb{R}^3$ em

(8) $\nabla p = \nu\, \nabla^2 u - (u \cdot \nabla)u + f = \phi$

é não gradiente, não conservativo, em ao menos um $(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$. Nesse caso, para $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ ser não gradiente deve valer

(9) $\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} \ne \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i}, i \ne j,$

para algum par $(i,j), 1 \le i,j \le 3$, $x \in \mathbb{R}^3$ e tempo t não negativo (para mais detalhes veja, por exemplo, Apostol[2], cap. 10).

Se admitirmos, entretanto, que (1) tem solução (p,u) possível e esta também obedece (2), (3) e (6), a condição inicial $u^0(x)$ verifica (2) e (4), a força externa $f(x,t)$ verifica (5) e $u^0(x)$ e $f(x,t)$ são de classe C^∞, podemos obter a condição de quebra de soluções em $t = 0$ violando-se a condição (7), i.e., escolhendo-se $u^0(x)$ que também obedeça a

(10) $\int_{\mathbb{R}^3} |u^0(x)|^2 dx \to \infty.$

O primeiro exemplo é muito simples: uma velocidade inicial constante não nula, $u^0(x) = c = (c_1, c_2, c_3)$, $c_i \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$. Neste exemplo temos $|\partial_x^\alpha u^0(x)| = 0$, satisfazendo (4), e, por hipótese, suponhamos satisfeitas também as demais condições de (1) a (6), com $f \in C^\infty$. Também valem, obviamente, $u^0 \in C^\infty$ e $\nabla \cdot u^0 = 0$. Dado $f = 0$, uma solução (p, u) possível para (1) e (2) é $u = u^0 = c, p = 0$. Apenas a condição (7) não é satisfeita neste simples exemplo de velocidade inicial constante, pois em $t = 0$ temos

(11) $\lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^3} |u(x,t)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} |u^0(x)|^2 dx = (c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) \int_{\mathbb{R}^3} dx \to \infty.$

Certamente esta velocidade inicial não pertence a uma solução $u(x,t)$ considerada fisicamente razoável, pois violaria (7), qualquer que fosse $u(x,t)$ com $u(x,0) = u^0(x) = c$, mas $u^0(x)$ obedeceu aos requisitos permitidos para a velocidade inicial neste problema de quebra de soluções. Tanto $u^0(x)$ quanto $u(x,t)$ violam a condição (7) de energia limitada (*bounded energy*), obedecendo-se entretanto p, u, u^0 e f às demais condições (por hipótese), o que caracteriza a chamada *breakdown solutions*, conforme queríamos.

A descrição oficial do problema para este caso (C) de quebra de soluções é dada a seguir:

(C) Quebra das soluções da Equação de Navier-Stokes sobre $\mathbb{R}^3$. Para $\nu > 0$ e dimensão espacial $n = 3$ existem um campo vetorial suave e com divergência nula $u^0(x)$ sobre $\mathbb{R}^3$ e uma força externa suave $f(x,t)$ sobre $\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$ satisfazendo

(4) $|\partial_x^\alpha u^0(x)| \leq C_{\alpha K}(1 + |x|)^{-K}$ sobre $\mathbb{R}^3$, $\forall \alpha, K$,

e

(5) $|\partial_x^\alpha \partial_t^m f(x,t)| \leq C_{\alpha m K}(1 + |x| + t)^{-K}$ sobre $\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$, $\forall \alpha, m, K$,

tais que não existe solução (p, u) sobre $\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$ satisfazendo (1), (2), (3), (6) e (7).

Vê-se claramente que podemos resolver este problema buscando velocidades iniciais válidas cuja integral do seu quadrado em todo o espaço $\mathbb{R}^3$ é infinito, ou também, conforme indicamos em (8), buscando funções ϕ não gradientes, onde a pressão p não poderá ser considerada uma função potencial, para algum instante $t \geq 0$. Entendemos que os α, m indicados em (4) e (5) só fazem sentido para $\alpha, m \in \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ e os K negativos permitem implicitamente que as derivadas das funções u^0 e f podem não ser limitadas quando $|x| \to \infty$, com $C_{\alpha K}, C_{\alpha m K} > 0$.

Dois outros exemplos, dentre muitos, são velocidades iniciais com um termo constante mais um decaimento exponencial quadrático e funções lineares em uma direção e igual a zero ou outra constante nas outras direções, ou seja,

(12) $u^0(x) = \left(c_i - b_i e^{-x_{i+1}^2}\right)_{1 \le i \le 3}$, $c_i \neq 0$, com $x_4 \equiv x_1$,

e

(13) $u^0(x) = (ax_2, b, c), a \neq 0.$

Ambos os exemplos obedecem às condições de divergência nula (*divergence-free,* $\nabla \cdot u^0 = 0$), suavidade (*smoothness*, C^∞) e derivadas parciais da ordem de $C_{\alpha K}(1+|x|)^{-K}$, embora (13) não seja limitada para $|x| \to \infty$ (o exemplo (13) só é válido em (4) para $K \le 0$ se $\alpha = 1$ e qualquer K (real) se $\alpha \ge 2$, portanto fizemos K depender de α). Para cada $u(x,t)$ possível tal que (3) seja verdadeira, a força externa $f(x,t)$ e a pressão $p(x,t)$ podem ser convenientemente construídas, na classe C^∞, verificando (8), e de modo a satisfazerem todas as condições necessárias, encontrando-se assim uma solução possível para (1), (2), (3), (4), (5) e (6), e apenas (7) não seria satisfeita, ao menos no instante $t = 0$, conforme (10). Mostramos então exemplos de quebra de soluções para o caso (C) deste problema do milênio. Estes exemplos, entretanto, não levam ao caso (A) de [1], de existência e suavidade das soluções, justamente por violarem (7) (O caso (A) também impõe que seja nula a força externa, $f = 0$).

Um resumo das condições do problema está listado abaixo.

$\nu > 0, n = 3$

$\exists u^0(x): \mathbb{R}^3$ smooth (C^∞), divergence-free ($\nabla \cdot u^0 = 0$)

$\exists f(x,t): \mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$ smooth (C^∞)

(4) $|\partial_x^\alpha u^0(x)| \le C_{\alpha K}(1+|x|)^{-K}: \mathbb{R}^3,\ \forall \alpha, K$

(5) $|\partial_x^\alpha \partial_t^m f(x,t)| \le C_{\alpha m K}(1+|x|+t)^{-K}: \mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$, $\forall \alpha, m, K$

$\nexists (p,u): \mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$ /

(1) $\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \nu \nabla^2 u_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i(x,t), 1 \le i \le 3 \;\; (x \in \mathbb{R}^3, t \ge 0)$

(2) $\nabla \cdot u = 0$

(3) $u(x,0) = u^0(x) \qquad (x \in \mathbb{R}^3)$

(6) $p, u \in C^\infty \qquad (\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$

(7) $\int_{\mathbb{R}^3} |u(x,t)|^2 dx < C, \forall t \ge 0$ (bounded energy)

É importante observarmos a questão da unicidade das soluções. Como $u^0(x)$ e $f(x,t)$ são dados, escolhidos por nós, de classe C^∞ e satisfazendo (4) e (5), afirmar que não existe solução (p,u) para o sistema (1), (2), (3), (6) e (7) pode pressupor que exploramos, ou provamos para, as infinitas combinações possíveis de p e de u, i.e., de (p,u).

Mantido fixo $u^0(x)$, desde que (10) seja verdadeira, para cada uma das infinitas combinações possíveis das variáveis u,p e f tais que a quádrupla (u^0,u,p,f) torne verdadeiro o sistema (1) a (6) a desigualdade (7) continua falsa em $t=0$, pois

$$(14) \quad \lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^3}|u(x,t)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3}|u^0(x)|^2 dx \to \infty,$$

não existindo nenhuma constante C que a verifique, e assim nossa prova não se restringe a alguma velocidade $u(x,t)$ em particular, nem precisamos admitir que há unicidade de soluções para as equações de Navier-Stokes.

□

Referências

1. Fefferman, Charles L., *Existence and Smoothness of the Navier-Stokes Equation*, in http://www.claymath.org/sites/default/files/navierstokes.pdf (2000).

2. Apostol, Tom M., *Calculus*, vol. II. New York: John Wiley & Sons (1969).