

La conjecture de Collatz a été découverte par ce dernier dans les années vingt du 20^e siècle. Elle était en ce moment là appelé « problème $3x+1$ » ; elle a pris d'autres noms parmi autres la suite de Collatz qui se définit simplement comme suit :

$\forall x \in \mathbb{N}^*$, partant de x ; s'il est impair on le multiplie par 3 et on ajoute 1 ($3x+1$) ; s'il est pair on le divise par 2 ($x/2$) ; si on répète la transformation, on finit par tomber sur 1 qui suit son « vol » infiniment dans le cycle trivial, c'est-à-dire 1, puis 4, puis 2, puis encore 1, ainsi de suite.

Depuis on a cessé d'utiliser l'informatique pour marquer des records de x grand, $\in \mathbb{N}^*$ qui permettent de rechercher un hypothétique contre exemple . Le projet « $3x+1@home$ » entend s'attaquer à toutes les suites de Collatz comprises entre 2^{71} et 2^{72} . Jusqu' à peu près cette limite, la conjecture est vérifiée.

Je crois que si on vérifie les trois étapes suivantes, on peut démontrer la conjecture à savoir :

- 1)- $\exists!$ Cycle dans la suite de Collatz, c'est le cycle trivial 4-2-1
- 2)- $\forall x \in \mathbb{N}^*$, la suite de Collatz décroît vers un $x' / x' < x$
- 3)- $\forall x \in \mathbb{N}^*$, la suite de Collatz, atterrit dans le cycle trivial dont 1, est le plus petit Élément.

1)- $\exists!$ Cycle dans la suite de Collatz, c'est le cycle trivial 4-2-1

PROPOSITION I :

$\forall x \in \mathbb{N}^*$; \forall le cycle de la suite de Collatz défini sur x , son plus petit élément est toujours Impair.

Démonstration : soit m le plus petit élément du cycle C ; C étant la trajectoire de m . Soit m' le nombre qui suit m , dont il est issu

Alors m' est aussi dans la trajectoire m ; $m' > m$, puisque m est le plus petit élément d'après notre proposition . Si m est pair $\Rightarrow m' = m/2 \Rightarrow m > m'$ ce qui est absurde, donc m est impair et $m' = 3m + 1$ avec m toujours $< m'$.

CQFD.

Partant de notre proposition I, soit un cycle de longueur $k = 3$ dans \mathbb{N}^* . On notera ses k éléments distincts deux à deux a_1, a_2, a_3 .

Supposant que le plus petit des éléments est a_3 . Alors a_3 est forcément impair, et en particulier $a_1 = 3a_3 + 1$. a_2 devra être $> a_3 \Rightarrow a_3 = a_2/2$

Si a_1 est impair $\Rightarrow a_2 = 3a_1 + 1 \Rightarrow a_1 = (a_2 - 1)/3 \Rightarrow a_1 = ((2a_3) - 1)/3 \Rightarrow a_1 \approx 2/3 . a_3 \Rightarrow a_1 < a_3$

Absurde, donc a_1 est pair $\Rightarrow a_2 = a_1/2$

Arrivant au calcul du Produit P , des termes du cycle :

$$P = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \quad \text{remplaçant par leurs valeurs calculées,}$$

$P = (3a_3+1) \cdot a_1/2 \cdot a_2/2$ établissant l'équation associée au produit des termes du cycle.

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = (3a_3+1) \cdot a_1/2 \cdot a_2/2$$

$$\Rightarrow a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = \frac{(3a_3+1) \cdot a_1 \cdot a_2}{4}$$

$$\Rightarrow 4(a_1 \cdot a_2 \cdot a_3) = (3a_3+1) \cdot a_1 \cdot a_2$$

$\Rightarrow 4 = \left(3 + \frac{1}{a_3}\right)$: l'équation sous sa forme épurée admet comme solution $a_3 = 1$ ($4=4$), donc $a_2 = 2 \cdot a_3 = 2$ et $a_1 = 3 \cdot a_3 + 1 = 4$, l'équation associée au cycle trivial $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$

Existent-ils d'autres x_1, x_2, x_3 définis dans \mathbb{N}^* , qui forment un autre cycle avec $k=3$?

Nous avons 3 nombres x_1, x_2 et x_3 avec chacun 2 façons de se présenter, s'il est pair, soit en $(x/2)$ dite a , soit en $(3x+1)$ dite b s'il est impair, donc nous avons $2^3 = 8$ cas possibles que nous allons examiner en permutant les opérations a et b par 3 :

$$\text{-1) cas : } a \ a \ a \Rightarrow ((x/2)/2) / 2 = x \Rightarrow x = 0$$

(Après 3 opérations, il retourne à x puisque c'est un cycle, donc $= x$)

$$\text{-2) cas : } a \ a \ b \Rightarrow 3((x/2)/2) + 1 = x \Rightarrow x = 4$$

$$\text{-3) cas : } a \ b \ a \Rightarrow ((3x+1)/2)/2 = x \Rightarrow x = 1$$

$$\text{-4) cas : } a \ b \ b \Rightarrow (3(3x+1) + 1)/2 = x \Rightarrow x = -4/7$$

$$\text{-5) cas : } b \ b \ b \Rightarrow 3(3(3(x+1) + 1) + 1) = x \Rightarrow x = -1/2$$

$$\text{-6) cas : } b \ a \ b \Rightarrow 3((3x+1)/2) + 1 = x \Rightarrow x = -5/7$$

$$\text{-7) cas : } b \ b \ a \Rightarrow 3(3(x/2) + 1) + 1 = x \Rightarrow x = -8/7$$

$$\text{-8) cas : } b \ a \ a \Rightarrow (3(x/2) + 1) / 2 = x \Rightarrow x = 2$$

Les seules solutions de nos équations dans \mathbb{N}^* sont $x_1=1, x_2=2, x_3=4$ qui sont celles du cycle trivial $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$; les autres solutions $(0, -4/7, -1/2, -5/7, -8/7)$ n'appartiennent pas à \mathbb{N}^*

Donc, dans \mathbb{N}^* , il n'existe pas de cycle de longueur $k=3$, c'est le cycle trivial $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ CQFD

Cas ou la longueur du cycle $k > 3$:

Supposons qu'il existe un cycle de la suite de Collatz de longueur $k > 3$, a_1 étant le plus petit élément, défini par les termes suivants:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_k$$

Pour opérer les calculs selon la suite de Collatz sur les termes $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_k$ Nous devrions connaître leur parité. Or tout ce que nous savons par notre proposition I ci-dessus, c'est que a_1 , le plus petit élément est impair. Quant aux autres termes, soit en procédant théoriquement par un tri des termes du cycle suivant la parité ; indépendamment de l'indice et de sa position exacte dans la suite, puisqu'on l'ignore.

Nous posons ensuite le produit de ces k termes, qu'on appellera P . (la commutativité du produit nous dispense de la position des vrais indices du cycle)

En posant d'abord, en les triant par parité, puis en spécifiant les termes impairs par a , les termes pairs par b ; puis en désignant par m le nombre de termes (ou cardinal) impairs, et h le nombre de termes pairs.

On obtient

$$P = a_1 \cdot a_2 \dots a_m \cdot b_1 \cdot b_2 \dots b_h$$

Exprimant maintenant chaque terme par sa valeur puisque nous avons défini sa parité en le multipliant par $3x+1$ s'il est impair et en le multipliant par $x/2$ s'il est pair :

$$P = (3a_1+1) \cdot (3a_2+1) \dots (3a_m+1) \cdot (b_1)/2 \cdot (b_2)/2 \dots (b_h)/2.$$

Soit l'équation qui relie les deux formes du produit sous sa forme brute :

$$a_1 \cdot a_2 \dots a_m \cdot b_1 \cdot b_2 \dots b_h = (3a_1+1) \cdot (3a_2+1) \dots (3a_m+1) \cdot (b_1)/2 \cdot (b_2)/2 \dots (b_h)/2.$$

Simplifions l'équation par :

$$(a_1 \cdot a_2 \dots a_m) \cdot (b_1 \cdot b_2 \dots b_h) = \frac{(3a_1+1) \cdot (3a_2+1) \dots (3a_m+1) \cdot (b_1) \cdot (b_2) \dots (b_h)}{2^h}$$

$$\implies 2^h \cdot (a_1 \cdot a_2 \dots a_m) \cdot (b_1 \cdot b_2 \dots b_h) = (3a_2+1) \dots (3a_m+1) \cdot (b_1) \cdot (b_2) \dots (b_h)$$

$$\implies 2^h (a_1 \cdot a_2 \dots a_m) = (3a_1+1) \cdot (3a_2+1) \dots (3a_m+1)$$

$$2^h = \frac{(3a_1+1)}{a_1} \cdot \frac{(3a_2+1)}{a_2} \dots \frac{(3a_m+1)}{a_m}$$

$$2^h = \left(3 + \frac{1}{a_1}\right) \cdot \left(3 + \frac{1}{a_2}\right) \dots \left(3 + \frac{1}{a_m}\right)$$

Intéressons nous un instant au terme de droite que l'on nomme D .

4/11

$$2^h = \left(3 + \frac{1}{a_1}\right) \cdot \left(3 + \frac{1}{a_2}\right) \dots \left(3 + \frac{1}{a_m}\right)$$

Vérifions l'équation avec 3^m , borne minimale de $D \iff 3^m < D$

Pour qu'il n'existe aucun cycle de longueur k , $\forall k > 3 \in \mathbb{N}$; il suffit de vérifier l'inégalité de 2^h avec D .

$$\text{Sachant que } D > 3^m, \text{ par : } 2^h < 3^m < D \Rightarrow 2^h < 3^m$$

Selon h et m , trois cas peuvent se présenter :

$$1) - \underline{\text{si } m=h}, 2^h < 3^m \Rightarrow h \cdot \log 2 < m \cdot \log 3 \Rightarrow \frac{h \cdot \log 2}{h \cdot \log 3} < \frac{m \cdot \log 3}{h \cdot \log 3}$$

$$\Rightarrow \frac{m}{h} > \frac{\log 2}{\log 3}, \text{ comme } \frac{m}{h} = 1, \Rightarrow 1 > \frac{\log 2}{\log 3} \text{ ce qui est évident}$$

$$2) - \underline{\text{si } m > h}, 2^h < 3^m \Rightarrow h \cdot \log 2 < m \cdot \log 3 \Rightarrow \frac{h \cdot \log 2}{h \cdot \log 3} < \frac{m \cdot \log 3}{h \cdot \log 3} \Rightarrow \frac{m}{h} > \frac{\log 2}{\log 3}$$

$$\text{Comme } m > h \Rightarrow \frac{m}{h} > 1 \Rightarrow \frac{m}{h} > \frac{\log 2}{\log 3}, \text{ ce qui est évident}$$

$$3) - \underline{\text{si } m < h} : \text{ la solution n'est pas évidente, comme } m < h, \text{ il se peut que } \frac{m}{h} \text{ soit } = \frac{\log 2}{\log 3}$$

Et vérifie notre équation ci-dessus, et donc l'existence du cycle de longueur $k > 3$. Or nous avons :

$$\text{a) soit } 2^h < 3^m \Rightarrow h \cdot \log 2 < m \cdot \log 3 \Rightarrow \frac{h \cdot \log 2}{h \cdot \log 3} < \frac{m \cdot \log 3}{h \cdot \log 3} \Rightarrow \frac{m}{h} > \frac{\log 2}{\log 3}, \text{ ex } 2^4 < 3^3$$

Ou bien

$$\text{b) soit } 2^h > 3^m \Rightarrow h \cdot \log 2 > m \cdot \log 3 \Rightarrow \frac{h \cdot \log 2}{h \cdot \log 3} > \frac{m \cdot \log 3}{h \cdot \log 3} \Rightarrow \frac{m}{h} < \frac{\log 2}{\log 3}, \text{ ex } 2^7 > 3^4$$

Or nous avons $2^h < 3^m \Rightarrow \frac{m}{h} > \frac{\log 2}{\log 3} \iff 2^h > 3^m \Rightarrow \frac{m}{h} < \frac{\log 2}{\log 3}$; cette équivalence logique est dû, si on multiplie ou divise les 2 membres d'une inéquation par une même valeur strictement négative (ex : -1), le sens de l'inéquation change tandis que les solutions de l'inéquation restent les mêmes.

Il suffit donc de démontrer, si $m < h$, l'une des cas en a) ou en b) par la transformation de Collatz et d'en tirer les conclusions

Démontrons alors cette inégalité $\frac{m}{h} < \frac{\log 2}{\log 3}$:

Si le vol N atterrit en 1 alors le nombre **h** d'étapes paires du vol N et

5/11

Le nombre **m** d'étapes impaires du vol N vérifient

$$\frac{m}{h} < \frac{\log 2}{\log 3} : \text{Démonstration}$$

Soit $N = U(0), U(1), \dots, U(p)=1$ le vol N

Posons la suite de simplification pour $N = \left(\frac{U(0)}{U(1)}\right) \cdot \left(\frac{U(1)}{U(2)}\right) \cdot \left(\frac{U(2)}{U(3)}\right) \dots \left(\frac{U(p-1)}{U(p)}\right)$

$$\text{Donc } \log N = \log \left(\frac{U(0)}{U(1)}\right) + \log \left(\frac{U(1)}{U(2)}\right) + \log \left(\frac{U(2)}{U(3)}\right) \dots + \log \left(\frac{U(p-1)}{U(p)}\right)$$

Lorsque i est une étape paire on a : $\log \left(\frac{U(i)}{U(i+1)}\right) = \log \left(\frac{U(i)}{3 \cdot U(i)}\right) = \log 2$

Lorsque i est une étape impaire on a :

$$\begin{aligned} \text{Log} \left(\frac{U(i)}{U(i+1)}\right) &= \log \left(\frac{U(i)}{3 \cdot U(i)+1}\right) \\ &= \log \left(\frac{1}{3 + \frac{1}{U(i)}}\right) = -\log \left(3 + \frac{1}{U(i)}\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \log N = h \cdot \log(2) + m \cdot \log \left(\frac{1}{3 + \frac{1}{U(i)}}\right)$$

$$\Rightarrow \log N = h \cdot \log(2) + (-m \cdot \log \left(3 + \frac{1}{U(i)}\right)) \quad (1)$$

Avec $U(i)$ grand $\Rightarrow \frac{1}{U(i)} \approx 0$, prenant seulement la borne minimale $\log(3)$ sans les $\frac{1}{am}$

puisque $h \cdot \log(2) - m \cdot \log \left(3 + \frac{1}{U(i)}\right) < h \cdot \log(2) - m \cdot \log(3)$; l'équation (1) devient donc :

$$0 < \log N < h \cdot \log(2) - m \cdot \log(3)$$

$$\Rightarrow 0 < h \cdot \log(2) - m \cdot \log(3)$$

$$\Rightarrow m \cdot \log(3) < h \cdot \log(2) \text{ , divisons les 2 parties de l'inéquation par } h \cdot \log(3)$$

$$\text{D'où } \frac{m}{h} < \frac{\log 2}{\log 3}$$

$\Rightarrow \forall k > 3 \in \mathbb{N}$; il n'existe aucun cycle de longueur $k > 3$

Conclusion : $\exists!$ Cycle dans la suite de Collatz, c'est le cycle trivial 4-2-1

2)- $\forall x \in \mathbb{N}^*$, la suite de collatz décroît vers un $x' / x' < x$

De \mathbb{N} , l'ensemble des entiers naturels, considéré comme suite croissante, on peut extraire 4 sous-suites, étant donné leurs coefficients directeur positifs, donc également croissantes sous forme de $4k+1$, $4k+2$, $4k+3$, et $4k+4$ avec $k \in \mathbb{N}$.

Si nous observons la transformation de Collatz sur ces 4 sous-suites nous constatons :

1° - $4k+2$ et $4k+4$ tous deux pairs, après 1 ou 2 suites de divisions successives par 2, finissent par décroître : $4k+2$ pair $\rightarrow 2k+1$ ($2k+1$ impair, $\forall k \in \mathbb{N}$) $\rightarrow 6k+4 \rightarrow 3k+2$; donc $3k+2 < 4k+2$

$$4k+4 \text{ pair} \rightarrow 2k+2 \rightarrow k+1 ; \text{ donc } k+1 < 4k+4$$

(En Sachant que la parité de $k+1$ ou $3k+2$ dépend de la parité de k)

2° - $4k+1$ est impair \Rightarrow 1^{er} étape : $3(4k+1)+1 = 12k+4$ qui est pair

$$\Rightarrow 2^{\text{er}} \text{ étape : } (12k+4)/2 = 6k+2 \text{ qui est pair}$$

$\Rightarrow 3^{\text{er}} \text{ étape : } (6k+2)/2 = 3k+1$ parité inconnue, mais nous constatons que $4k+1$ décroisse puisque $3k+1 < 4k+1$

3° - $4k+3$ est impair \Rightarrow 1^{er} étape : $3(4k+3)+1 = 12k+10$ qui est pair

$$\Rightarrow 2^{\text{er}} \text{ étape : } (12k+10)/2 = 6k+5 \text{ qui est impair}$$

$$\Rightarrow 3^{\text{er}} \text{ étape : } 3(6k+5)+1 = 18k+16 \text{ qui est pair}$$

$\Rightarrow 4^{\text{er}} \text{ étape : } (18k+16)/2 = 9k+8$ parité inconnue, mais nous constatons que $4k+1$ croisse puisque $9k+8 > 4k+1$

Démontrons dans un premier temps que tout nombre entier de la forme $4k+3$ suivant la suite de Collatz pourrait se transformer en $4k+1$:

- **Tout nombre impair peut s'écrire sous forme $2^p \cdot x - 1$, $\forall p \in \mathbb{N}^*$:**

$\forall x \in \mathbb{N}$, le produit = $x \cdot$ une puissance de 2 est Pair, ôté de 1 est un nombre IMPAIR

- **Tout nombre impair de forme $4k+1$ peut s'écrire sous forme $2^p \cdot x - 1$ avec $p=1$; (ou $2x - 1$) :**

$$\forall k \in \mathbb{N}, 4k+1 \text{ est impair, } \forall x \in \mathbb{N} / 4k+1 = 2x - 1$$

Preuve : soit $4k+1 = I$ (impair)

$$I = 2x - 1 \Rightarrow x = \frac{I+1}{2} ; \text{ comme } (I+1) \text{ est pair (somme de 2 impairs = pair)}$$

$$\text{Donc } (I+1) = 2 \cdot m \text{ (} m \in \mathbb{N}^* \text{)} \Rightarrow x \text{ est également un entier } \in \mathbb{N}^* \text{ (puisque } x = m \text{)}$$

- **Tout nombre impair de forme $4k+3$ peut s'écrire sous forme $2^p \cdot x - 1$ avec $p > 1$, leurs proportion tend vers zéro quand p tend vers ∞ :**

$$\forall k \in \mathbb{N}, 4k+3 \text{ est impair, } \exists x \in \mathbb{N} / 4k+3 = 2^p \cdot x - 1$$

Preuve :

$$\begin{aligned} 4k+3 = 2^p \cdot x - 1 &\Rightarrow x = \frac{4k+4}{2^p} \\ &\Rightarrow x = \frac{k+1}{2^{p-2}} \quad (1) \end{aligned}$$

Si dans (1) la proportion, selon étude de la récurrence, des nombres de forme $4k+3$,
 $P(4k+3) = \frac{1}{2^{p-2}} \implies$ la proportion des nombres de forme autres que $4k+3$ est égale au
complémentaire de $P(4k+3)$, soit $(1 - \frac{1}{2^{p-2}})$ qui bien entendu représente la proportion
 $P(4k+1)$, $P(4k+2)$ et $P(4k+4)$, dont la somme Pr ; c'est-à-dire la somme de tout les entiers suivants
la transformation de Collatz, décroissant durant les premières étapes.

$$\begin{aligned} Pr &= (1 - \frac{1}{2^{p-2}}) \\ Pr &= \frac{2^{p-2} - 1}{2^{p-2}} \\ &= \frac{4 \cdot 2^{p-2} - 4}{4 \cdot 2^{p-2}} \\ Pr &= \frac{2^p - 4}{2^p} \end{aligned}$$

nous constatons enfin que $P(4k+3) = \frac{1}{2^{p-2}}$ proportion des nombres qui croissent suivant la suite
de Collatz, le reste, c'est-à-dire $Pr = \frac{2^p - 4}{2^p}$ décroissant en suivant la transformation de Collatz
, nous vérifions que leurs somme est égale à l'unité :

$$\frac{2^p - 4}{2^p} + \frac{1}{2^{p-2}} = \frac{2^p - 4}{2^p} + \frac{4}{2^p} = \frac{2^p}{2^p} = 1$$

nous vérifions aussi que :

$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{p-2}}$ quand $p \rightarrow \infty$ est 0 (comme nous avons annoncé ci-dessus)
 $\implies \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{2^p - 4}{2^p}$ quand $p \rightarrow \infty$ est 1; qui va dans le sens de $\forall x \in \mathbb{N}^*$, la suite de collatz
décroit vers un $x' / x' < x$

(ex : pour $p=10$, en appliquant les 2 formules, $Pr = 99.60\%$ des nombres décroissent
suivant le processus de Collatz, alors que 0.40% croissent,)

l'argument de la probabilité n'est point suffisant, Il faudra alors que nous démontrons qu'un
nombre impair de la forme $4k+3$ peut par la suite de Collatz passer à la forme $4k+1$:

Appliquons la transformation de Collatz sur le nombre impair $4k+3$:

Soit le nombre $N_1 = 4k+3 = 2^p \cdot x - 1$

Calculons $N_2 = (3N_1 + 1)/2 = (3(2^p \cdot x - 1) + 1)/2 = (3 \cdot 2^p \cdot x - 2)/2 = 3 \cdot 2^{p-1} \cdot x - 1$: 1° étape

$N_3 = (3N_2 + 1)/2 = (3(3 \cdot 2^{p-1} \cdot x - 1) + 1)/2 = (3^2 \cdot 2^{p-1} \cdot x - 2)/2 = 3^2 \cdot 2^{p-2} \cdot x - 1$: 2° étape

..... Déduisons par récurrence le terme général de la suite ; $N_p = 3^{p-1} \cdot 2 \cdot x - 1$: (p-1)° étape

Finalement la puissance p , de 2 descend à 1, le nombre prend donc la forme $2x'-1$ ($x' = 3^{p-1} \cdot x$),

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{N}^*$, la suite de collatz décroît vers un $x' / x' < x$

Nous remarquons que $4k+3$ en passant à $4k+1$, ce dernier reste supérieur à $4k+3$, comme nous le montrons :

$$2^p \cdot x - 1 < 3^{p-1} \cdot 2 \cdot x - 1 \Rightarrow 2^p < 3^{p-1} \cdot 2 \Rightarrow 2^{p-1} < 3^{p-1} \text{ Ce qui est évident}$$

Nous avons vu en 1° que les formes $4k+2$ et $4k+4$ finissent par décroître mais nous remarquons que le processus est plus évident dans la forme $4k+4$ que dans la forme $4k+2$

Parce que seuls les $4k+4$ contiennent les puissance de 2 (P_2) qui garantissent un trajectoire sûr vers 1 suite à des divisions successives par 2, mais il ya aussi des non- P_2 dans $4k+4$ et seulement des non P_2 dans la forme $4k+2$. (selon études des 2 suites.)

En ce qui concerne les $4k+1$ et les $4k+3$, si $4k+1$ décroît au bout de trois étapes et durant la transformation de Collatz, les $4k+3$ finissent par se transformer en $4k+1$ et décroître rien nous garantit que ce dernier $4k+1$, reste dans cette forme et décroît vers 1, car le processus de la transformation est en réalité réciproque comme le montre cette exemple du nombre 19 de forme $4k+3$ ($4 \cdot 4 + 3$) génère dans la trajectoire 29 de forme $4k+1$ ($4 \cdot 7 + 1$) qui donne 11 de forme $4k+3$ ($4 \cdot 2 + 3$), qui donne à son tour un $4k+1$: 17 (puis 13, puis 5 qui reste le dernier $4k+1$ de la suite de Collatz si bien sur 32 ne prend pas sa place dans un autre $x \in \mathbb{N}^*$).

19 58 29 88 44 22 11 34 17 52 26 13 40 20 10 5 16 8 4 2 1

Nous constatons que la décroissance de $4k+2$ et $4k+4$ est acquise, et si du fait de la réciprocity du passage de la forme $4k+3$ à $4k+1$, nous considérons qu'ils se transforment entre eux équitablement ;

Nous concluons que dans plus des $\frac{3}{4}$ des cas, la tendance est à la décroissance, il nous reste que de trouver le moyen de suivre le vol et de démontrer effectivement qu'ils terminent dans le cycle trivial c'est que nous essayons de faire dans la 3° partie qui suit.

3)- $\forall x \in \mathbb{N}^*$, la suite de collatz, atterrit dans le cycle trivial dont 1, est le plus petit élément.

PROPOSITION –II

$\forall x$ impair $\in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $\exists ! x / \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = x$; soit $x_i = 1$. (Moyenne arithmétique)

Démonstration :

Soit U_n ; la suite des nombres impairs ; $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = 2n + 1$ ($x_1=U_1=1$; $x_2=U_2=3$; $x_3=U_3=5$; $x_4=U_4=7$...).

$$\text{Soit } V_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U_i ; \quad V_1 = \frac{U(1)}{1} = 1 ; V_2 = \frac{(U_1+U_2)}{2} = 2 ; V_3 = \frac{(U_1+U_2+U_3)}{3} = 3 ;$$

$$V_4 = \frac{(U_1+U_2+U_3+U_4)}{4} = 4 \Rightarrow \dots \text{ Par récurrence, déduisons sa formule explicite } V_n = n$$

$n < 2n+1 \iff V_n < U_n$ et $V_n = U_n$ ssi $n=1$ c à d **xi impair = 1** ; d'où la proposition II.

PROPOSITION –III

Dans \mathbb{N} , l'ensemble des entiers naturels ; il ya autant de nombre pairs que d'impairs

$$\text{Soit la formule du binome de Newton } (x + a)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k a^{n-k}$$

$$\text{Avec } a = 1 \text{ \& } b = 1 ; \exists M \text{ parties de l'ensemble } E / M = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \implies M = (1 + 1)^n = 2^n$$

$$\text{Soit } M_p \text{ le nombre de parties de cardinal pair : } M_p = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \binom{n}{6} \dots = \sum_{p=0}^{n/2} \binom{n}{2p}$$

Soit M_i le nombre de parties de cardinal impair dont la somme est comptée jusqu'au dernier impair

$$\text{inferieur à } n : M_i = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots = \sum_{p=0}^{(n-1)/2} \binom{n}{2p+1} ;$$

$$\text{Avec } a = 1 \text{ \& } b = -1 \implies \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \binom{n}{6} \dots - \binom{n}{1} - \binom{n}{3} - \binom{n}{5} - \dots$$

parce que $(-1)^k = 1$ si k est pair et $(-1)^k = -1$ signe négative qui affecte M_i

$$\implies \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{p=0}^{n/2} \binom{n}{2p} - \sum_{p=0}^{(n-1)/2} \binom{n}{2p+1}$$

$$\text{Comme } \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = (1 - 1)^n = 0$$

$$\implies \sum_{p=0}^{n/2} \binom{n}{2p} - \sum_{p=0}^{(n-1)/2} \binom{n}{2p+1} = 0 ; \text{ on déduit que } \sum_{p=0}^{n/2} \binom{n}{2p} = \sum_{p=0}^{(n-1)/2} \binom{n}{2p+1}$$

\implies Le nombre de sous-parties de cardinal pair = nombre de sous-parties de cardinal impair

La suite de Collatz peut être présenté sous un produit en spécifiant les nombres impairs (a_1, a_2, \dots, a_m) et les nombres pairs (b_1, b_2, \dots, b_h) ; encore une fois, selon deux formes de produits P_1 , puis P_2 exprimé suivant la transformation de Collatz. m et h étant respectivement le cardinal des nombres impairs et pairs.

$$P2 = a_1 \cdot a_2 \dots a_m \cdot b_1 \cdot b_2 \dots b_h$$

$$P1 = (3a_1+1) \cdot (3a_2+1) \dots (3a_m+1) \cdot (b_1)/2 \cdot (b_2)/2 \dots (b_h)/2$$

Utilisant encore une fois l'équation associée à ce produit sous sa forme brute

$$(a_1 \cdot a_2 \dots a_m) \cdot b_1 \cdot b_2 \dots b_h = (3a_1 + 1) \cdot (3a_2 + 1) \dots (3a_m + 1) \cdot (b_1)/2 \cdot (b_2)/2 \dots (b_h)/2$$

$$(a_1 \cdot a_2 \dots a_m) \cdot b_1 \cdot b_2 \dots b_h = \frac{(3a_1+1) \cdot (3a_2+1) \dots (3a_m+1) \cdot (b_1) \cdot (b_2) \dots (b_h)}{2^h}$$

$$2^h = \frac{(3a_1+1) \cdot (3a_2+1) \dots (3a_m+1)}{(a_1 \cdot a_2 \dots a_m)}$$

$$\text{Or } 2^h = \left(3 + \frac{1}{a_1}\right) \cdot \left(3 + \frac{1}{a_2}\right) \dots \left(3 + \frac{1}{a_m}\right)$$

$$\text{Or } 2^h < 3^m < \left(3 + \frac{1}{a_1}\right) \cdot \left(3 + \frac{1}{a_2}\right) \dots \left(3 + \frac{1}{a_m}\right)$$

$$\Rightarrow 2^h < \left(3 + \frac{1}{a_1}\right) \cdot \left(3 + \frac{1}{a_2}\right) \dots \left(3 + \frac{1}{a_m}\right)$$

- Remplaçons les a_i par La moyenne arithmétique défini sur $m = \sum_{i=1}^m \frac{a_i}{m} = M$

$$M > 0 \Rightarrow 2^h < \left(3 + \frac{1}{M}\right) \cdot \left(3 + \frac{1}{M}\right) \dots \left(3 + \frac{1}{M}\right) \quad m \text{ fois}$$

$$2^h < \left(\frac{(3M+1)}{M}\right)^m$$

- Supposons un nombre $x \in \mathbb{N}^*$ infiniment grand dont la trajectoire par la transformation de Collatz, puise dans tous les nombres pairs et impairs, comme selon la proposition III, il y aura autant de pair que d'impair, on pose donc $m=h$

$$2^h < \left(\frac{(3M+1)}{M}\right)^h \quad \text{ou} \quad 2^m < \left(\frac{(3M+1)}{M}\right)^m$$

- Appliquons le théorème des fonctions réciproques, c'est-à-dire :

$\forall x \in \mathbb{N}^*$ (ou \mathbb{R}^+), si x est positif et $x = y^n \Leftrightarrow y = \sqrt[n]{y^n}$ est unique.

Utilisant la racine nième jusqu'à m ou h , pour arriver au supposé dernier terme de la trajectoire parti d'un grand nombre infini :

$$\sqrt[m]{2^m} < \sqrt[m]{\left(\frac{(3M+1)}{M}\right)^m} \quad \text{Ou} \quad \sqrt[h]{2^h} < \sqrt[h]{\left(\frac{(3M+1)}{M}\right)^h}$$

$$2 < \left(\frac{(3M+1)}{M}\right)$$

- soit un nombre quelconque K qui puisse égaliser notre inéquation

$$2 + k = \frac{3M+1}{M}$$

$$2M + kM = 3M + 1$$

$$kM - M = 1$$

$M(k-1) = 1 \Rightarrow$ admet comme solutions : $M=1$ & $k=2$ ($\in \mathbb{N}^*$)

Comme, **suivant proposition II** : $\exists! M \in \mathbb{N}^* / M = \sum_{i=1}^m \frac{a_i}{m} = ai$ soit $ai = 1$, et comme $M=1$ donc a_i , le dernier terme impair est connu soit $a_i = 1$.

Notre équation épurée et simplifiée devient : $4 = \frac{3a_i+1}{a_i}$, observons des 2 cotés :

Du coté droit, l'équation garde les nombres a_i impairs, avec a_i dernier terme =1

Démonstration :

Si $a_i = 1$ est seulement premier terme de la suite de Collatz, sa transformation est celle qui concerne le cycle trivial : $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$, nous constatons aussi que c'est aussi le dernier terme $a_i=1$, qui est en même temps le plus petit élément impair, du cycle trivial. (Suivant proposition I).

Si a_i est dernier terme impair $> 1 \Rightarrow$ l'équation $4 = \frac{3a_i+1}{a_i}$, devient impossible puisque :

$$4 > \frac{3a_i+1}{a_i} \Rightarrow 4 > 3 + \frac{1}{a_i} \text{ si } a_i > 1$$

Donc a_i est nécessairement le dernier terme impair de la suite =1 **CQFD**

Du coté gauche : partant d'une puissance de 2 très grande et arrivant au dernier terme La racine nième qui colle à la trajectoire de la suite, s'arrête dans notre équation à 4 Le reste est pris en charge finalement par le cycle trivial, par 4 ou par 1, $\forall x$ pair ou impair $\in \mathbb{N}^*$ du départ.

Nous avons $4 = 2^2 = 2^h$, $h = 2$ étant le cardinal des nombres pairs dans ce dernier terme pair de la suite, nous connaissons déjà un : c'est 4 nous déduisons nécessairement le deuxième élément pair du cycle trivial : 2, solution aussi de l'équation avec 1 et passage obligé de 4 à 1 par la transformation de Collatz.

Conclusion finale :

Comme $\exists!$ Cycle trivial dans la suite de COLLATZ (1) $\Rightarrow \forall x \in \mathbb{N}^*$, x décroisse suivant la transformation de COLLATZ (2), atterri nécessairement dans le cycle trivial dont 1 son plus petit élément. (3) **CQFD**

CASABLANCA LE 01.12.2015

BERKOUK MOHAMED, email : bellevue-2011@hotmail.com

Mohamed.berkouk@aei-maroc.ma

Référence :

J.P- Delahaye - Christian Lasou- UST- Licence S.T -2007.

- Shalom Eliahou, problème $3n+1$: y a-t-il des cycles non triviaux ? – I.des math-2011.