DEMONSTRATION DE LA CONJECTURE DE C.GOLDBACH

BERKOUK Mohamed

Email: bellevue-2011@hotmail.com

Christian Goldbach
Adresse une lettre à Euler
Où il affirme que
a) tout nombre PAIR supérieur à 2
Est la somme
De deux nombres premiers
----
b) tout nombre IMPAIR supérieur à 3
Est la somme
De trois nombres premiers

Dans son esprit, Christian Goldbach, considérait 1 comme nombre premier, d'où la nécessite de reformuler sa conjecture d'une manière moderne en décalant respectivement les premiers 2 et 3 d'un autre qui suit :
La conjecture, dans sa version forte devient :

Tout nombre PAIR supérieur à 3
Est la somme
De deux nombres premiers

La conjecture, dans sa version faible s'énonce :

Tout nombre IMPAIR supérieur à 5
Est la somme
De trois nombres premiers

C'est ces deux dernières versions que nous allons essayer de démontrer.

INTRODUCTION

La démonstration repose essentiellement sur trois théorèmes que je vais développer par la suite , le premier dite « théorème 1 » qui définit nécessairement tout nombre premier sous forme de $6m \pm 1$, $\forall\, m \in N^*$, et suffisamment quand m ne soit pas sous forme (6xy+x+y) ou (6xy-x-y) pour tout nombre 6m+1 , et différent de la forme (6xy-x+y) pour tout nombre 6m-1. Nous appliquerons le « théorème 2 » qui définit la primalité de $6m \pm 1$ sans avoir à déterminer x et y de la forme. (v. la multimorielle).
Le troisième théorème dite « théorème 3 » traite de la propriété de la parité en ce qui concerne le produit puis la somme de deux nombres entiers.
Après avoir passé en revue tout les cas possibles de la somme de deux, puis de trois nombres premiers et de vérifier leurs conformité avec les deux conjectures. La démonstration de la réciproque nous a conduites par une analyse logique, tout droit à celles des deux conjectures de C.GOLDBACH.

<u>1° THEOREME -1 :</u>

Avec $m \in N^*$;
6m+1 soit premier, il faut points que m soit compris sous la forme (6xy+x+y) ou (6xy-x-y).
6m-1 pour être premier, il faut points que m soit compris sous la forme (6xy-x+y)
(x et y permutables).

DEMONSTRATIONS :

Soit n > 6 ; ∈ à N ; l'ensemble des entiers naturels.
Divisons n par 6 ==> n=6m+r, m et r ∈ à N. r prend les valeurs des restes de la division soit 0, 1, 2, 3, 4 ou 5.
n ne peut **êtr**e premier si r=0, 2, 3 ou 4 car il sera respectivement divisible par ces derniers
Pour **êtr**e premier, le reste de sa division devra nécessairement **ê**tre égale à 1 ou 5,
C'est-à-dire que n soit de la forme 6m+1 ou 6m+5.
Si on considère la suite 6m+5 et si on définit son premier terme par 5, il sera la même chose que 6m-1, m commençant par la valeur entière 1.
Néant moins cette condition que le nombre premier soit de la forme 6m ± 1 n'est pas suffisante étant donné qu'il existe des entiers non premiers respectant la forme 6m ± 1.
Mr **Krafft**, le 12 avril 1798 devant l'académie des sciences impériales en Europe ; présenta son « essai sur les nombres premiers » [1]. Il s'en sort qu'il fallait une deuxième condition suffisante pour que tout nombre de la forme 6m ± 1 soit premier :

a) Prenant le premier cas 6m+1 , la proposition se résume que **pour être premier , il faut points que m soit compris sous la forme 6xy+x+y ou 6xy-x-y** , (autrement dit ,il faut que le nombre (6m+1) ne soit pas un nombre composé et produit de (6x+1)(6y+1) ou (6x-1)(6y-1) .)

Démonstration :

. Si N=6m+1 est un nombre composé de deux facteurs quelconques
6m+1 = (u+t) (v+z)
= uv + uz +tv +tz ; on suppose que l'un de ces quatre produis soit = 1
Soit tz =1 ; => t=1 et z=1 ou t=-1 et z= -1.
=> 6m+1= uv + u +v +1 ou 6m+1= uv – u –v +1
=> 6m = uv + u +v ou 6m = uv – u –v
Vu que m est un entier > 0 => u et v doivent tout les deux être > 0 ou tout les deux < 0 .
Soit 6m = uv + u + v divisible par 2 & 3. uv +u+v d'abord divisible par 2 == > u & v doivent étre pairs == > u=2p & v=2q
= > 6m = 2p2q + 2p +2q == > 3m=2pq+p+q
= > 2pq+p+q doit être divisible aussi par 3 == >2pq+p+q = 3x

== > 2pq+p+q =pq +p (q+1) +q =3x == >p=3x et q=3x et (q+1)=3x == >q= 3x-1

Soit 6m = uv - u - v divisible par 2 & 3. uv -u-v aussi divisible par 2 == > u & v doivent étre pairs == > u=2p & v=2q

== > 2pq-p-q =pq + q (p -1) - p =3y == > p=3y et q=3y et (p-1)=3y == >p= 3y+1
Donc trois suppositions ; soit p=3x & q=3y ou p=3x-1 & q=3y-1 ou p=3x+1 & q=3y+1
(x étant permutable avec y)

1°-supposition p=3x & q=3y :
3m=2pq+p+q == > 3m= 2.3x.3y +3x+3y
== > m=6xy+x+y
3m=2pq-p-q == > 3m= 2.3x.3y -3x-3y
== > m=6xy-x-y

2°-supposition p=3x-1 & q=3y-1

3m=2pq+p+q == > 3m= 2. (3x-1). (3y-1) + (3x-1) + (3y-1)
= 6x-2 (3y-1) +3x -1 +3y-1
3m= 18xy-6x-6y+2 +3x+3y-2 = 18xy+3x+3y +2-2
== > m=6xy+x+y
3m=2pq-p-q == > 3m= 2. (3x-1). (3y-1) + (3x-1) + (3y-1)
= 6x-2 (3y-1) +3x -1 +3y -1
3m= 18xy-6x-6y+2 +3x+3y-2 = 18xy-3x-3y +2-2
== > m=6xy-x-y

3°-supposition $p=3x+1$ & $q=3y+1$

$3m=2pq+p+q$ == > $3m= 2. (3x+1). (3y+1) -(3x+1)-(3y+1)$
$= 6x+2\ (3y+1)\ -(3x +1) – (3y +1)$
$3m= 18xy +6x+6y +2 -3x-1-3y-1 = 18xy+3x+3y +2-2$
== > $m=6xy+x+y$

$3m=2pq-p-q$ == > $3m= 2.(3x+1).(3y+1) -(3x+1)-(3y+1)$
$= 6x+2\ (3y+1)\ -3x +1 -3y -1$
$3m= 18xy+6x+6y+2 -3x-1-3y-1 = 18xy+3x+3y +2-2$
== > $m=6xy-x-y$

Donc N=6m+1 pour être premier, il faut points que m soit compris sous la forme 6xy+x+y ou 6xy-x-y .fin de démonstration.

b) Prenant le deuxième cas 6m-1 , la proposition dit que **pour être premier , il faut point que m soit compris sous la forme 6xy+x-y** , autrement dit ,il faut que (6m-1) ne soit pas un nombre composé et produit de (6x+1)(6y-1) ou (6x-1)(6y+1)

Démonstration :

. Si N=6m-1 est un nombre composé de deux facteurs quelconques
$6m-1 = (u+t)\ (v+z)$
$6m-1 = uv + uz +tv +tz$; l'un de ces quatre produits peut être supposé =- 1
Soit $tz =-1$; => $t=1$ et $z=-1$ ou $t=-1$ et $z=1$.
=> $6m-1= uv - u +v -1$ ou $6m-1= uv + u –v -1$
=> $6m = uv - u +v$ ou $6m = uv + u –v$
Sachant que m est un entier > 0 => u et v doivent tout les deux être > 0 ou tout les deux < 0.
Soit $6m = uv + u - v$ divisible par 2 & 3. $uv +u-v$ pour être divisible par 2 == > u & v doivent être pairs == > $u=2p$ & $v=2q$

= > $6m = 2p2q + 2p -2q$ == > $3m=2pq+p-q$.
= > $2pq+p-q$ doit être divisible aussi par 3 == >$2pq+p-q = 3x$ (ou $= 3y$)

== > $2pq+p-q =pq +q (p-1) +p =3x$ == >$p=3x$ et $q=3y$ et $(p-1)=3x$ == >$p= 3x+1$

Soit $6m = uv - u + v$ divisible par 2 & 3. == > $uv –u+v$ divisible par 2 == > u & v doivent être pairs == > $u=2p$ & $v=2q$

= > $6m = 2p2q - 2p+2q$ == > $3m=2pq-p+q$.
= > $2pq-p+q$ devra être divisible aussi par 3 == >$2pq-p+q = 3x$ (ou $= 3y$)

== >$2pq-p+q =pq +pq -p+q = pq+p (q+1)-q=3y$ == > $p=3x$ et $q=3y$ et $(q+1)=3y$ == >$q= 3y-1$

Donc deux suppositions ; soit p=3x & q=3y ou p=3x+1 & q=3y-1
(x étant permutable avec y)

1°-supposition $p=3x$ & $q=3y$:
$3m=2pq-p+q$ == > $3m= 2.3x.3y -3x+3y$
== > $m=6xy-x+y$ (1)

2°-supposition $p=3x+1$ & $q=3y-1$

$3m=2pq-p+q$ == > $3m= 2. (3x-1).(3y+1) -(3x-1)+(3y+1)$
$= 6x-2\ (3y+1)\ -3x +1 +3y+1$
$3m= 18xy+6x-6y-2 -3x+3y+2 = 18xy+3x-3y -2 +2$
== > $m=6xy+x-y$ (2)

A cause de la permutabilité de x & y les expressions (1) & (2) reviennent au même

Finalement : pour que N=6m-1 soit premier, il faut points que m soit compris sous la forme 6xy+x-y.

2° THEOREME-2 :

Théorème sur les nombres premiers (Berkouk)

définition :
soit n, un entier naturel, la Multimorielle de n, notée n(=), est le produit de tous les restes issus de la division respective de n par chaque nombre entier m compris entre 1 et n.

Théorème :
∀ n, un entier naturel > 2, n est premier si et seulement si sa Multimorielle n(=) ≠0.

Démonstration :
Soit m et n deux entiers : n(=) ⇒ 1 < m < n

a)- si n est premier ⇒ n/m conduit à un reste nul, si m=n ou m=1
Or 1 < m < n, donc tous les restes des n/m ≠0 ⇒ la multimorielle n(=) ≠0.
Ou bien
b)- si n est un nombre composé, ⇒ n= k. p (k et p entiers)
comme k < n et p < n ⇒ ∃ m =k, ou m =p qui divise n et conduit à un reste Nul
⇒ n(=) = 0.

CQFD.

3° THEOREME-3 :

a) Seule la multiplication de 2 nombres impairs donne un produit impair.
Dans tous les autres cas, le produit est pair.
Et
b) La somme de deux nombres de même parité est un nombre pair.
La somme de deux nombres de parité différente est un nombre impair.

Démonstration a-:

Produit de deux nombres pairs :

Prenons deux nombres pairs. Le premier est 2n et le second 2p. (Un nombre impair est du type 2 x+1)
Nous avons : (le symbole * est ici le signe de multiplication)

2n * 2p = 2 * n * 2 * p = 2 * (n * 2 * p)
Ce résultat est de la forme 2 x
, (Multiple de 2), donc le produit est pair.

Produit de deux nombres impairs :

Prenons deux nombres impairs. Le premier est 2n + 1
et le second 2p + 1. (Un nombre impair est du type 2 x + 1)

(2n + 1) * (2p + 1) = 4np + 2n + 2p + 1 = 2 (2np + n + p) + 1
Ce résultat est de la forme 2 x + 1, donc le produit est impair.

Produit d’un nombre pair et d’un nombre impair :

Considérons un nombre pair 2n et un nombre impair 2p + 1

2n * (2p + 1) = 4np + 2n = 2(2np + n)
Ce résultat est de la forme 2 x

, (Multiple de 2), donc le produit est pair.

Seule la multiplication de 2 nombres impairs donne un produit impair.
Dans tous les autres cas, le produit est pair. CQFD.

Démonstration b-:

Somme de deux nombres pairs :

Prenons deux nombres pairs. Le premier est 2n et le second 2p. (Un nombre impair est du type 2 x+1)
Nous avons :
2n + 2p = 2(n + p)
Ce résultat est de la forme 2 x
, (Multiple de 2), donc la somme est paire.

Somme de deux nombres impairs :

Prenons deux nombres impairs. Le premier est 2n + 1
et le second 2p + 1. (Un nombre impair est du type 2 x + 1)
Nous avons :
(2n + 1) + (2p + 1) = 2n + 1 + 2p + 1 = 2 n + 2p + 2 = 2(n + p + 1)
Ce résultat est de la forme 2 x
, (Multiple de 2), donc la somme est paire.

Somme d'un nombre pair et d'un nombre impair :

Considérons un nombre pair 2n et un nombre impair 2p + 1
Nous avons :
2n + (2p + 1) = 2n + 2p + 1 = 2(n + p) + 1
Ce résultat est de la forme 2 x + 1, donc la somme est impaire.
Le résultat est similaire si le premier nombre est impair et le second pair.

La somme de deux nombres de même parité est un nombre pair.
La somme de deux nombres de parité différente est un nombre impair. CQFD

CONJECTURES DE C. GOLDBACH
DEMONSTRATION

A) Toute somme S de deux nombres premiers > 3 est pair :

Soit deux nombres premiers de la forme 6m ± 1 Et 6n ± 1, m et n ∈ N*.
(D'après la démonstration du théorème 1),
Nous aurons les sommes possibles suivantes, qui vérifient la propriété PAIRE d'après le « théorème 3 » :

1° soit S = (6m+1) +(6n +1) = 6(m+n)+2 = 2 (3(m+n) +1) ⇒ S est PAIRE, ∀ m&n ∈ N*

2° ou S = (6m+1) + (6n -1)= 2.3 (m+n), d'après théorème 3 ⇒ S est PAIRE ∀ m& n ∈ N*

3° ou S = (6m-1) + (6n +1) = 2.3 (m+n), d'après théorème 3 ⇒ S est PAIRE ∀ m& n ∈ N*

4° ou S = (6m-1) + (6n -1) = 2.3 (m+n) -2 = 2 (3(m+n) - 1) ⇒ S est PAIRE ∀ m& n ∈ N*

La première condition nécessaire pour qu'un nombre soit premier est la forme 6m ± 1 , ou 6n ± 1 vérifiée , la parité est établi aussi , ∀ m &,n ∈ N*, S est divisible par 2 ⇒ donc ∀ m & n ∈ N*,la somme de 2 premiers est PAIRE , y compris quand :

1)- m et n ≠ 6xy +x + y ou m et n ≠ 6xy -x – y ; condition suffisante pour que

6m +1, ou 6n +1 soient premiers. (D'après théorème 1)

⇒ ∃ k et k' ∈ à **R**, tel que, k= (6m + 1)(=) et k'= (6n + 1)(=) (multimorielle)
. Si k > 0 ⇒ (m+k) et (n+k) ≠ 6xy +x + y ou (m+k) et (n+k) ≠ 6xy -x – y
. Si k' > 0 ⇒ (m+k') et (n+k') ≠ 6xy +x + y ou (m+k') et (n+k') ≠ 6xy -x – y ⇔ 6m + 1, ou 6n + 1 sont Surement Premiers sans avoir à déterminer x et y puisque k ≠0.

2) - y compris aussi quand : m et n ≠ 6xy +x – y ; condition suffisante pour que 6m - 1, ou 6n -1 soient premiers. (D'après théorème 1)

⇒ ∃ k et k' ∈ à **R,** tel que, k= (6m - 1)(=) et k'= (6n - 1)(=) (multimorielle)
. si k > 0 et k' > 0 ⇒ (m+k) et (n+k') ≠ 6xy +x - y

⇔ 6m - 1, ou 6n - 1 sont surement Premiers sans avoir à déterminer x et y. (car k ≠ 0)

PREMIERE CONCLUSION : Toute somme S de deux nombres premiers > 3 est pair

Soit la proposition P = Toute somme S de deux nombres premiers > 3 est pair
Et sa réciproque Q = Tout nombre pair > 3 est la somme de deux nombres premiers

(⟶ : implication « si... Alors »)

Regardons P ⟶ Q et sa réciproque Q ⟶ P selon le tableau de vérités suivant :

P	Q	P ⟶ Q	Q ⟶ P (réciproque)
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	V

P ⟶ Q ⇔ Q ⟶ P SSI P est vraie et Q est vraie aussi ?

Supposons que Q est Fausse :

⇒ ∃ un nombre PAIR > 3 qui n'est pas la somme de deux nombres premiers

Démonstration :

Soit ℕ, l'ensemble des entiers naturels ; 𝔻, l'ensemble des entiers pairs. 𝕀, l'ensemble des entiers impairs.

Soit $\mathbb{N}^2$, l'ensemble des couples d' entiers naturels (n , m) , ∀ n , m ∈ ℕ,

Soit ℙ l'ensemble des premiers positifs,

Soit $\mathbb{P}^2$ l'ensemble des couples de deux premiers positifs (p , p') , ∀ p , p' ∈ ℙ,

Et $\mathbb{P}^3$ l'ensemble des triplets de premiers positifs (p, p', p''), ∀ p, p', p'' ∈ ℙ,

Pour cela nous allons introduire trois lemmes à partir desquels nous définissons les cardinaux de ces ensembles
Et à partir desquels aussi, nous concluons sur la réciproque Q de Goldbach.

1° Lemme fondamentale

Tout sous-ensemble de ℕ est équipotent à ℕ

Soit A ⊆ ℕ infini ; on sait que A admet un plus petit élément a_0.

Comme A n'est pas un singleton ; $A_1 = A \setminus \{a_0\}$ est non vide, donc admet un plus petit élément a_1, qui vérifie $a_0 < a_1$

Comme A n'est pas de cardinal 2 ; $A_2 = A \setminus \{a_0, a_1\}$ admet un plus petit élément a_2, qui vérifie $a_0 < a_1 < a_2$

Supposons que l'on ait construit n éléments $a_0 < a_1 < a_2 \dots a_n$ dans A.

Comme A n'est pas fini , l'ensemble $A_{n+1} = A \setminus \{ a_0 , a_1,\dots , a_n \}$ est non vide et admet donc un plus petit élément A_{n+1} , qui vérifie $a_n < a_{n+1}$ .Par récurrence , on construit ainsi une suite $a_0 < a_1 < a_2 \dots a_n < a_{n+1}$ c'est-à-dire une application $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$ définit par $f(n) = a_n$, qui strictement croissante , <u>donc injective</u> .

Montrons que f est surjective, par l'absurde, supposons $\exists\, y \in A \;/\; y \neq f(n), \forall\, n \in \mathbb{N}, \exists\, m \in \mathbb{N} \;/\; a_m < y < a_{m+1}$.

Comme $a_m < y$, on a $y \in A_{m+1} = A \setminus \{a_0, a_1, \dots, a_m\}$.

Comme a_{m+1} est le plus petit élément de A_{m+1}, on doit alors, $a_{m+1} \leq y$, d'où la contradiction

$\Rightarrow f$ est une <u>bijection</u> de $\mathbb{N}$ sur A $\Rightarrow$ est Donc A est équipotent $\mathbb{N} \Rightarrow \text{Card}(A) = \text{Card}(\mathbb{N})$.

<u>2° Lemme 1</u>

$\mathbb{N}^2$ est dénombrable, donc $\mathbb{N}^2$ est équipotent à $\mathbb{N}$

m \ n	0	1	2	3	4
0	0	1	3	6	10
1	2	4	7	11	16
2	5	8	12	17	23
3	9	13	18	24	31
4	14	19	25	32	40

On peut faire la liste des couples d'entiers par diagonales Dn :

Dn : D0 ; **D1** ; **D2** ; **D3** ; **D3** ; ....

$\mathbb{N}^2$ **:** (0,0) ; (1,0) (0,1) ; (2,0) (1,1) (0,2) ; (3,0) (2,1) (1,2) (0,3) ; (4,0) (3,1) (2,2) (1,3) (0,4) ; .... (n,m)

$\mathbb{N}$ **:** 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 .... $\dfrac{(n+m)\,(n+m+1)}{2} + m$

Ce qui revient à constater par induction que l'application

$$f : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N} : (n,m) \longrightarrow \frac{(n+m)\,(n+m+1)}{2} + m$$ (fonction de couplage de Cantor $\longrightarrow$ terme explicite de la bijection=y)

Est une <u>bijection</u> (strictement croissante) puisse que $\forall\, y \in \mathbb{N}, \exists!\, (n,m) \in \mathbb{N}^2 \;/\; f(n,m) = y$

$$\Rightarrow \mathbb{N}^2 \text{ est équipotent à } \mathbb{N} \Rightarrow \text{Card}(\mathbb{N}^2) = \text{Card}(\mathbb{N}) .$$

<u>3° Lemme 2</u>

Si $\mathbb{N}^2$ pour est équipotent à $\mathbb{N}$, alors l'ensemble $\mathbb{N}^3$ est équipotent à $\mathbb{N}$

Cela se démontre par récurrence, si $\mathbb{N}^3$ est équipotent à $\mathbb{N}$, alors $\mathbb{N}^{2+1}$ est équipotent à $\mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}$ est donc à $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Et finalement à $\mathbb{N}$.

CONCLUSION FINALE :

$\mathbb{D}$, l'ensemble des entiers pairs et $\mathbb{P}$ l'ensemble des premiers positifs, sont des sous-ensembles infinis de $\mathbb{N}$

D'après le Lemme 1, ils sont donc équipotents à $\mathbb{N}$, comme selon le Lemme 2 , $\mathbb{N}^2$ est équipotents à $\mathbb{N}$

⇒ f : P^2 ⟶ N qui est une <u>bijection</u> ⇒ P^2 est équipotents à N. ⇒ Card (D) = Card (P^2) .

Si Card (D) > Card (P^2) , alors il y aurait des nombres pairs qui ne peuvent générer des sommes de 2 premiers Puisse que les images de l'ensemble P^2 ont déjà un et un seul antécédent dans D, et que pour le restant des pairs de l'ensemble D , la seule possibilité est de générer des somme de 2 nombres non premiers ; comme dans notre cas Card (D) = Card (P^2) .cette possibilité est nulle, ⇒ f : P^2 ⟶ D est une <u>bijection</u> :

- f est donc injective : ∀ (p, p') et (c, c') ∈ P^2 , (p+p') = n et (c+c') =n' ⇒ si (p+p') = (c+c') alors **n** = n' ,
  n et n', pairs ∈ D.
- f est donc surjective : <u>∀ n pair ∈ D, ∃ (p ,p') ∈ P^2 , (p+p') = n .</u>

Donc :

Il n'existe pas de nombre PAIR > 3 qui n'est la somme de deux premiers. (1)

(1) ⇒ Q n'est pas Fausse

⇒ <u>Nous déduisons alors, selon le principe du tiers exclu, que Q est Vraie</u>

P est vraie, Q est Vraie : P ⇔ Q , autrement dit **si Toute somme S de deux nombres premiers > 3 est pair, Alors Tout nombre pair > 3 est la somme de deux nombres premiers** , la conjecture forte de Goldbach est donc vraie , CQFD.

B) Toute somme S de trois nombres premiers > 5 est impair:

Soit trois nombres premiers de la forme 6m ± 1. 6n ± 1, et 6p ± 1 avec m, n et p ∈ N*.
Nous aurons 8 sommes à trois, possibles :

1° soit S = (6m+1) + (6n +1) + (6p +1) = 6(m+n+p) +3 ⇒ d'après théorème 3
⇒ S est IMPAIRE ∀ m, n & p ∈ N*

2° soit S = (6m+1) + (6n +1) + (6p -1) = 6(m+n+p) +1 ⇒ d'après théorème 3
⇒ S est IMPAIRE ∀ m, n & p ∈ N*

3° soit S = (6m+1) + (6n -1) + (6p +1) = 6(m+n+p) +1 ⇒ d'après théorème 3
⇒ S est IMPAIRE ∀ m, n & p ∈ N*

4° soit S = (6m+1) + (6n -1) + (6p -1) = 6(m+n+p) -1 ⇒ d'après théorème 3
⇒ S est IMPAIRE ∀ m, n & p ∈ N*

5° soit S = (6m-1) + (6n-1) + (6p -1) = 6(m+n+p) -3 ⇒ d'après théorème 3
⇒ S est IMPAIRE ∀ m, n & p ∈ N*

6° soit S = (6m -1) (6n+1) + (6p -1) = 6(m+n+p) -1 ⇒ d'après théorème 3
⇒ S est IMPAIRE ∀ m, n & p∈ N*

7° soit S = (6m -1) + (6n -1) + (6p+1) = 6(m+n+p) -1 ⇒ d'après théorème 3
⇒ S est IMPAIRE ∀ m, n & p ∈ N*

8° soit S = (6m -1) + (6n+1) + (6p +1) = 6(m+n+p) +1 ⇒ d'après théorème 3
⇒ S est IMPAIRE ∀ m, n & p ∈ N*

La première condition nécessaire pour qu'un nombre soit premier est la forme $6m \pm 1$, $6n \pm 1$ ou $6p \pm 1$ vérifiée , la propriété IMPAIRE est établi pour ces sommes aussi , quelque soit m , n & p ∈ N*, S est impaire, non divisible par 2

⇒ Donc ∀ m, n & p ∈ N*, la somme de 3 premiers est IMPAIRE, y compris quand :

1)- m, n et p ≠ 6xy +x + y ou m, n et p ≠ 6xy -x - y ; condition suffisante pour que 6m + 1, ou 6n + 1 ou 6p + 1 soient premiers. (D'après théorème 1)

⇒ ∃ k, k' et k'' ∈ à **R,** tel que, k= (6m + 1)(=), k'= (6n + 1)(=) et k''= (6p+1)(=) .

. Si k > 0, k'>0 et k''> 0 ⇒ (m+k), (n+k') et (p+k'') ≠ 6xy +x + y ou (m+k), (n+k') et (p+k'') ≠ 6xy -x – y

⇔ 6m + 1, 6n + 1 et 6p +1 sont surement Premiers sans avoir à déterminer x et y.

Puisque k, k' et k'' sont différent de 0 selon **théorème 2**.

2) - y compris aussi quand : m, n et p ≠ 6xy +x – y ; condition suffisante pour que 6m - 1, 6n -1 ou 6p – 1 soient premiers. (D'après théorème 1)

⇒ ∃ k, k' et k'' ∈ à **R,** tel que, k= (6m - 1)(=), k'= (6n - 1) (=) et k''= (6p-1)(=)

.Si k > 0, k'>0 et k''> 0 ⇒ (m+k), (n+k') et (p+k'') ≠ 6xy +x - y

⇔ 6m - 1, 6n - 1 et 6p -1 sont surement Premiers sans avoir à déterminer x et y.

PREMIERE CONCLUSION : Tout nombre impair > 5, est la somme de trois nombres premiers,

Soit la proposition P = Toute somme S de trois nombres premiers > 5 est impaire
Et sa réciproque Q = Tout nombre impair > 5 est la somme de trois nombres premiers

Supposons que Q est Fausse :

b) ⇒ ∃ un nombre IMPAIR > 5 qui n'est pas la somme de trois nombres premiers

Démonstration du :

I, l'ensemble des entiers impairs, et P l'ensemble des premiers positifs, sont des sous-ensembles infinis de N

D'après le Lemme 1, ils sont donc équipotents à N, comme selon le Lemme 3 , N^3 est équipotents à N

⇒ P^3 est équipotents à N. ⇒ Card (I) = Card (P^3) .

CONCLUSION FINALE :

Si Card (I) > Card (P^3) , alors il y aurait des nombres impairs qui ne peuvent générer des sommes de 3 premiers Puisse que les images de l'ensemble P^3 ont déjà un et un seul antécédent dans I, et que pour le restant des impairs de l'ensemble I , la seule possibilité est de générer des somme de 3 nombres non premiers ; comme dans notre cas Card (I) = Card (P^3) .cette possibilité est nulle, donc : ⇒ f : $P^3 \rightarrow$ D est une bijection :

- f est donc injective : ∀ (p, p', p'') et (c, c', c'') ∈ P^2 , (p+p'+p'') = n et (c+c'+c'') =n' ⇒ si (p+p'+p'') = (c+c'+c'')

  Alors n = n' (n et n' impairs ∈ I.)

.

- f est donc surjective : ∀ n impair ∈ I, ∃ (p, p', p'') ∈ P^3 , (p+p'+p'') = n .

Donc :

Il n'existe pas de nombre IMPAIR > 5 qui n'est pas la somme de trois premiers. **(2)**

(2) ⇒ Q n'est pas Fausse

⇒ Nous déduisons alors, selon le principe du tiers exclu, que Q est Vraie

P est vraie, Q est Vraie : P ⇔ Q , autrement dit **si Toute somme S de trois nombres premiers > 5 est impaire, alors Tout nombre impair > 5 est la somme de trois nombres premiers,** la conjecture faible de Goldbach est donc vraie

CQFD.

Casablanca le 19/05/2016 - 11:00
BERKOUK Mohamed ; email: bellevue-2011@hotmail.com

REFERENCE

[1] Conference du Mr. **KRAFFT** du12 avril 1798, **in Nova acta Academiae Scientiarum Imperialis** – p.220