Solving the 15th Problem of Smale: Navier-Stokes equations

Valdir Monteiro dos Santos Godoi

valdir.msgodoi@gmail.com

Keywords: Navier-Stokes equations, Smale's problems, 15th problem.

Abstract: The solution of the fifteenth problem of Smale, the Navier-Stokes equations in three spatial dimensions.

Steve Smale wrote a stimulating article in 1998 proposing 18 problems still unresolved at that time[1], in keeping with V.I.Arnold request. Both, Arnold and Smale, in turn were inspired by the famous list of 23 problems of David Hilbert.

The purpose of this paper is to solve the 15th problem of Smale list, on the uniqueness of the solutions of the Navier-Stokes equations.

"*Do the Navier-Stokes equations on a 3-dimensional domain Ω in* $\mathbb{R}^3$ *have a unique smooth solution for all time?*"

Answer: No.

The answer is given here was seen in [2], without mentioning that occasion the Smale list.

If (u, p) is a smooth solution of the Navier-Stokes equations,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u - \nu \nabla^2 u + \nabla p = 0 \tag{1}$$

$$\nabla \cdot u = 0 \tag{2}$$

then $(u, p + \theta(t))$ it is also a solution, because $\nabla p(x,t) = \nabla(p(x,t) + \theta(t))$, supposing that $\theta(t)$ does not present singularities, is continuous and can be spatially derivable ($\nabla\theta(t) = 0$), i.e., it is so well behaved as expected for $p(x,t)$ in this problem.

It is very clear that $p(x,t)$ and $p(x,t) + \theta(t)$ they are not necessarily the same solution p in (u, p) for (1), except if $\theta(t) = 0$, therefore the answer to this problem cannot be Yes.

Similar reasoning can be done with functions $q(x,t)$ such that $\nabla q = 0$ (zero vector), whose solution is a constant in x or variable only with time. We have, in this case,

$$\nabla p(x,t) = \nabla(p(x,t) + \theta(t) + q), \tag{3}$$

$q \in \mathbb{R}$. Then, if p is part of the solution (u, p) of (1) and (2), there are infinite other pairs (u, r) solutions of (1) and (2) such that

$$r(x,t) = p(x,t) + \theta(t) + q, \tag{4}$$

with $q \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^3$, $t \in [0, \infty)$, and the functions $p, r: \Omega \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $\theta: [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $p, r, \theta \in C^\infty$ on Ω for all $t \geq 0$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, i.e., all this functions and solutions are smooth.

There is also the case of the function φ in

$$\nabla p = \nu \nabla^2 u - \frac{\partial u}{\partial t} - (u \cdot \nabla) u = \varphi \tag{5}$$

be non-gradient, which make it impossible to be found a value for p, as from $t = 0$ or from some $t = T_N$ or more generally on some set values of t such that φ is not a function gradient in these time instants t. This can already happen at $t = 0$, with the imposition of adequate additional initial condition $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}$ or else, for example, for $\frac{Du}{Dt}|_{t=0} = \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u\right)|_{t=0}$.

So, in conclusion, maybe there is no solution (u, p) for the system of equations (1) and (2) at some $t \geq 0$, but when there is a solution it is not unique, at least due to the infinity of other solutions $(u, p + \theta(t) + q)$ possible for the system, with $q \neq 0$ and $\theta(t) \neq 0$.

See that there is no solution for p is not the same as admitting that the pressure is null, $p = 0$, or more generally impose boundary conditions a given pressure $p(x, t)$. In these situations ∇p exist in general, but the original problem is other, because p must be a variable dependent unknown, not a fixed function.

Recall also that both this problem as described in Smale[1] and the corresponding (and more detailed) described by Fefferman[3] is given no initial condition for the pressure $p(x, t)$, only for the initial velocity $u(x, 0)$. Smale, unlike Fefferman, includes a boundary condition for $u(x, t)$ on $\partial\Omega$.

Yet one more observation is needed. Unlike Fefferman and real pressure in the daily, in machines and nature may vary with time, Smale defines the pressure domain equal to $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, i.e., no variation in time. Either by mistake or not, even assuming $p, r: \Omega \to \mathbb{R}$, with $p, r \in C^\infty$ on Ω for all $t \geq 0$ and $q \in \mathbb{R}$ a constant, not utilizing the function $\theta(t)$, we have

$$\nabla p(x) = \nabla(p(x) + q), \tag{6}$$

a result which also provide infinite other solutions (u, r) admissible (smooth) for (1) and (2), being (u, p) a smooth solution and

$$r(x) = p(x) + q, \tag{7}$$

$q \neq 0$, as we have said in [2] with other words using $\theta(t)$ and shown initially to the more general case of pressure vary over time and the position, $p(x, t)$.

So the answer to the problem is No. Not always, not unique.

Once solved, it seems very easy, but we know it is far from being so. More complicated solutions that would be given to questions also more complicated, with more detailed requirements, or by exploiting other aspects of the problem, which would be primarily a sophistication of the original question actually involve other problems, known or unknown, rather than obey to the essence of what is asked.

References.

1. Smale, Steve, *Mathematical Problems for the Next Century*, Mathematical Intelligencer **20** (2): 7-15 (1998). A status of these problems maybe encountered in https://en.wikipedia.org/wiki/Smale%27s_problems.

2. Godoi, Valdir M. S., *Breakdown of Navier-Stokes Solutions*, http://www.vixra.org/abs/1505.0083 (2015).

3. Fefferman, Charles L., *Existence and Smoothness of the Navier-Stokes Equation*, in http://www.claymath.org/sites/default/files/navierstokes.pdf.

Solving the 15th Problem of Smale: Navier-Stokes equations

Valdir Monteiro dos Santos Godoi

valdir.msgodoi@gmail.com

Keywords: Navier-Stokes equations, Smale's problems, 15th problem.

Abstract: The solution of the fifteenth problem of Smale, the Navier-Stokes equations in three spatial dimensions.

Steve Smale escreveu um estimulante artigo em 1998 onde propõe 18 problemas ainda não resolvidos na época[1], em atenção à solicitação de V.I.Arnold. Ambos, Arnold e Smale, por sua vez se inspiraram na famosa lista de 23 problemas de David Hilbert.

A proposta deste artigo é resolver o 15º problema da lista de Smale, sobre a unicidade das soluções das equações de Navier-Stokes.

"*Do the Navier-Stokes equations on a 3-dimensional domain Ω in* $\mathbb{R}^3$ *have a unique smooth solution for all time?*"

Resposta: Não.

A resposta que aqui é dada já foi vista em [2], sem nos lembrarmos na ocasião da lista de Smale.

Se (u, p) é uma solução suave (lisa, regular, *smooth*) das equações de Navier-Stokes,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u - \nu\nabla^2 u + \nabla p = 0 \qquad (1)$$

$$\nabla \cdot u = 0 \qquad (2)$$

então $(u, p + \theta(t))$ também é uma solução, pois $\nabla p(x,t) = \nabla(p(x,t) + \theta(t))$, supondo que $\theta(t)$ não apresente singularidades, seja contínua e possa ser derivável espacialmente ($\nabla\theta(t) = 0$), i.e., seja tão bem comportada quanto o que se espera para $p(x,t)$ neste problema.

Está muito claro que $p(x,t)$ e $p(x,t) + \theta(t)$ não são necessariamente a mesma solução p em (u, p) para (1), exceto se $\theta(t) = 0$, portanto a resposta deste problema não pode ser Sim.

Raciocínio análogo pode ser feito com as funções $q(x,t)$ tais que $\nabla q = 0$ (vetor nulo), cuja solução é uma constante em x ou variável apenas com o tempo. Temos, neste caso,

$$\nabla p(x,t) = \nabla(p(x,t) + \theta(t) + q), \qquad (3)$$

$q \in \mathbb{R}$. Então, se p faz parte da solução (u, p) de (1) e (2), também são soluções de (1) e (2) infinitos outros pares (u, r) tais que

$$r(x,t) = p(x,t) + \theta(t) + q, \tag{4}$$

com $q \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^3$, $t \in [0,\infty)$, e as funções $p,r\colon \Omega \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $\theta\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $p,r,\theta \in C^\infty$ em Ω para todo $t \geq 0$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, i.e., todas estas funções e soluções são regulares (suaves, lisas, *smooth*).

Também há o caso de ser a função φ em

$$\nabla p = \nu \nabla^2 u - \frac{\partial u}{\partial t} - (u \cdot \nabla)u = \varphi \tag{5}$$

não gradiente, o que impossibilitará de ser encontrado um valor para p, desde $t = 0$ ou a partir de algum $t = T_N$ ou mais genericamente em algum conjunto de valores de t tais que φ não seja uma função gradiente nestes instantes de tempo t. Isto pode acontecer já em $t = 0$, com a imposição de uma adequada condição inicial adicional $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}$ ou então, por exemplo, para $\frac{Du}{Dt}|_{t=0} = \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u\right)|_{t=0}$.

Então, concluindo, pode não haver solução (u,p) para o sistema de equações (1) e (2) em algum $t \geq 0$, mas quando há solução ela não é única, pelo menos devido à infinidade de outras soluções $(u, p + \theta(t) + q)$ possíveis para o sistema, com $q \neq 0$ e $\theta(t) \neq 0$.

Vejam que não haver solução para p não é a mesma coisa que admitir que a pressão é nula, $p = 0$, ou mais genericamente impor como condição de contorno uma determinada pressão $p(x,t)$. Nessas situações ∇p existirá em geral, mas o problema original é outro, pois p deve ser uma variável dependente incógnita, não uma função pré-fixada.

Lembremos também que tanto neste problema descrito por Smale[1] quanto no correspondente (e mais detalhado) descrito por Fefferman[3] não é dada nenhuma condição inicial para a pressão $p(x,t)$, apenas para a velocidade inicial $u(x,0)$. Smale, ao contrário de Fefferman, inclui uma condição de contorno para $u(x,t)$ sobre $\partial\Omega$.

Ainda mais uma observação é necessária. Ao contrário de Fefferman e da pressão real, no cotidiano, em máquinas e na natureza, poder variar com o tempo, Smale define o domínio da pressão como igual a $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, i.e., sem variar no tempo. Seja por equívoco ou não, mesmo admitindo-se $p,r\colon \Omega \to \mathbb{R}$, com $p,r \in C^\infty$ em Ω para todo $t \geq 0$ e $q \in \mathbb{R}$ uma constante, sem utilizarmos a função $\theta(t)$, temos

$$\nabla p(x) = \nabla(p(x) + q), \tag{6}$$

resultado que também proporcionará infinitas outras soluções (u,r) admissíveis para (1) e (2), sendo (u,p) uma solução regular (suave, lisa, *smooth*) e

$$r(x) = p(x) + q, \tag{7}$$

$q \neq 0$, como já dissemos em [2] com outras palavras, usando $\theta(t)$, e mostramos inicialmente para o caso mais geral da pressão variável com o tempo e a posição, $p(x,t)$.

Assim a resposta ao problema é Não. Nem sempre, nem única.

Uma vez resolvido parece agora muito fácil, mas sabemos que está longe de ser assim. Soluções mais complicadas que esta seriam dadas com questões também mais complicadas, com requisitos mais detalhados, ou então explorando outros aspectos do problema, o que seria principalmente uma sofisticação da questão original, na realidade envolvendo outros problemas, conhecidos ou não, ao invés de atender à essência do que é pedido.

Referências.

1. Smale, Steve, *Mathematical Problems for the Next Century*, Mathematical Intelligencer **20** (2): 7-15 (1998). A status of these problems maybe encountered in https://en.wikipedia.org/wiki/Smale%27s_problems.

2. Godoi, Valdir M. S., *Breakdown of Navier-Stokes Solutions*, http://www.vixra.org/abs/1505.0083 (2015).

3. Fefferman, Charles L., *Existence and Smoothness of the Navier-Stokes Equation*, in http://www.claymath.org/sites/default/files/navierstokes.pdf.