Solving the 15th Problem of Smale: Navier-Stokes equations

Valdir Monteiro dos Santos Godoi

valdir.msgodoi@gmail.com

Keywords: Navier-Stokes equations, Smale's problems, 15th problem.

Abstract: The solution of the fifteenth problem of Smale, the Navier-Stokes equations in three spatial dimensions.

Steve Smale wrote a stimulating article in 1998 proposing 18 problems still unresolved at that time[1], in keeping with V.I.Arnold request. Both, Arnold and Smale, in turn were inspired by the famous list of 23 problems of David Hilbert.

The purpose of this paper is to solve the 15th problem of Smale list, on the uniqueness of the solutions of the Navier-Stokes equations.

"*Do the Navier-Stokes equations on a 3-dimensional domain Ω in $\mathbb{R}^3$ have a unique smooth solution for all time?*"

Answer: No.

The answer is given here was seen in [2], without mentioning that occasion the Smale list.

If (u,p) is a smooth solution of the Navier-Stokes equations,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u\cdot\nabla)u - \nu\nabla^2 u + \nabla p = 0 \tag{1}$$

$$\nabla\cdot u = 0 \tag{2}$$

then $(u, p+\theta(t))$ it is also a solution, because $\nabla p(x,t) = \nabla(p(x,t)+\theta(t))$, supposing that $\theta(t)$ does not present singularities, is continuous and can be spatially derivable ($\nabla\theta(t) = 0$), i.e., it is so well behaved as expected for $p(x,t)$ in this problem.

It is very clear that $p(x,t)$ and $p(x,t)+\theta(t)$ they are not necessarily the same solution p for (u,p) in (1), except when $\theta(t) = 0$, therefore the answer to this problem cannot be Yes.

Similar reasoning can be done with functions $q(x,t)$ such that $\nabla q = 0$ (zero vector). We have, in this case,

$$\nabla p(x,t) = \nabla(p(x,t) + q(x,t) + \theta(t)), \tag{3}$$

assuming that q is spatially differentiable. Then, if p is part of the solution (u,p) of (1), there are infinite other pairs (u,r) solutions of (1) such that

$$r(x,t) = p(x,t) + q(x,t) + \theta(t), \tag{4}$$

with $\nabla q(x,t) = 0$, $x \in \mathbb{R}^3$, $t \in [0,\infty)$, and the functions $p,q,r: \Omega \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $\theta: [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $p,q,r,\theta \in C^\infty$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, i.e., all this functions and solutions are smooth.

There is also the case of the function φ in

$$\nabla p = \nu \nabla^2 u - \frac{\partial u}{\partial t} - (u \cdot \nabla)u = \varphi \tag{5}$$

be non gradient, which make it impossible to be found a value for p, as from $t = 0$ or from some $t = T_N$ or more generally on some set values of t such that φ is not a function gradient in these time instants t.

So, in conclusion, maybe there is no solution (u,p) for (1) at some $t \geq 0$, but when there is a solution it is not unique, at least due to the infinity of other solutions $(u, p + q(x,t) + \theta(t))$ possible for (1), with $q(x,t) \neq 0$ and $\theta(t) \neq 0$.

See that there is no solution for p is not the same as admitting that the pressure is null, $p = 0$, or more generally impose boundary conditions a given pressure $p(x,t)$. In these situations ∇p exist in general, but the original problem is other, because p must be a variable dependent unknown, not a fixed function.

Recall also that both this problem as described in Smale and the corresponding (and more detailed) described by Fefferman[3] is given no initial condition for the pressure $p(x,t)$, only for the initial velocity $u(x,0)$.

Yet one more observation is needed. Unlike Fefferman[3] and real pressure in machines and nature may vary with time, Smale[1] defines the pressure domain equal to $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, i.e., no variation in time. Either by mistake or not, even assuming $p,q,r: \Omega \to \mathbb{R}$, with $p,q,r \in C^\infty$ and $\nabla q(x) = 0$, not utilizing the function $\theta(t)$, we have

$$\nabla p(x) = \nabla(p(x) + q(x)), \tag{6}$$

a result which also provide infinite other solutions (u,r) admissible (smooth) for (1), being (u,p) a smooth solution and

$$r(x) = p(x) + q(x), \tag{7}$$

as we have said in [2] with other words and shown above to the more general case of variable pressure over time and the position, $p(x,t)$.

So the answer to the problem is No.

References.

1. Smale, Steve, *Mathematical Problems for the Next Century*, Mathematical Intelligencer **20** (2): 7-15 (1998). A status of these problems maybe encountered in https://en.wikipedia.org/wiki/Smale%27s_problems.

2. Godoi, Valdir M. S., *Breakdown of Navier-Stokes Solutions*, http://www.vixra.org/abs/1505.0083 (2015).

3. Fefferman, Charles L., *Existence and Smoothness of the Navier-Stokes Equation*, in http://www.claymath.org/sites/default/files/navierstokes.pdf.

Solving the 15th Problem of Smale: Navier-Stokes equations

Valdir Monteiro dos Santos Godoi

valdir.msgodoi@gmail.com

Keywords: Navier-Stokes equations, Smale's problems, 15th problem.

Abstract: The solution of the fifteenth problem of Smale, the Navier-Stokes equations in three spatial dimensions.

Steve Smale escreveu um estimulante artigo em 1998 onde propõe 18 problemas ainda não resolvidos na época[1], em atenção à solicitação de V.I.Arnold. Ambos, Arnold e Smale, por sua vez se inspiraram na famosa lista de 23 problemas de David Hilbert.

A proposta deste artigo é resolver o 15º problema da lista de Smale, sobre a unicidade das soluções das equações de Navier-Stokes.

"*Do the Navier-Stokes equations on a 3-dimensional domain Ω in* $\mathbb{R}^3$ *have a unique smooth solution for all time?*"

Resposta: Não.

A resposta que aqui é dada já foi vista em [2], sem nos lembrarmos na ocasião da lista de Smale.

Se (u, p) é uma solução suave (lisa, regular, *smooth*) das equações de Navier-Stokes,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u - \nu \nabla^2 u + \nabla p = 0 \tag{1}$$

$$\nabla \cdot u = 0 \tag{2}$$

então $(u, p + \theta(t))$ também é uma solução, pois $\nabla p(x,t) = \nabla(p(x,t) + \theta(t))$, supondo que $\theta(t)$ não apresente singularidades, seja contínua e possa ser derivável espacialmente ($\nabla\theta(t) = 0$), i.e., seja tão bem comportada quanto o que se espera para $p(x,t)$ neste problema.

Está muito claro que $p(x,t)$ e $p(x,t) + \theta(t)$ não são necessariamente a mesma solução p para (u,p) em (1), exceto se $\theta(t) = 0$, portanto a resposta deste problema não pode ser Sim.

Raciocínio análogo pode ser feito com as funções $q(x,t)$ tais que $\nabla q = 0$ (vetor nulo). Temos, neste caso,

$$\nabla p(x,t) = \nabla(p(x,t) + q(x,t) + \theta(t)), \tag{3}$$

admitindo-se que q seja espacialmente diferenciável. Então, se p faz parte da solução (u,p) de (1), também são soluções de (1) infinitos outros pares (u,r) tais que

$$r(x,t) = p(x,t) + q(x,t) + \theta(t), \tag{4}$$

com $\nabla q(x,t) = 0$, $x \in \mathbb{R}^3$, $t \in [0,\infty)$, e as funções $p, q, r: \Omega \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $\theta: [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $p, q, r, \theta \in C^\infty$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, i.e., todas estas funções e soluções são regulares (suaves, lisas, *smooth*).

Também há o caso de ser a função φ em

$$\nabla p = \nu \nabla^2 u - \frac{\partial u}{\partial t} - (u \cdot \nabla) u = \varphi \tag{5}$$

não gradiente, o que impossibilitará de ser encontrado um valor para p, desde $t = 0$ ou a partir de algum $t = T_N$ ou mais genericamente em algum conjunto de valores de t tais que φ não seja uma função gradiente nestes instantes de tempo t.

Então, concluindo, pode não haver solução (u, p) para (1) em algum $t \geq 0$, mas quando há solução ela não é única, pelo menos devido à infinidade de outras soluções $(u, p + q(x,t) + \theta(t))$ possíveis para (1), com $q(x,t) \neq 0$ e $\theta(t) \neq 0$.

Vejam que não haver solução para p não é a mesma coisa que admitir que a pressão é nula, $p = 0$, ou mais genericamente impor como condição de contorno uma determinada pressão $p(x,t)$. Nessas situações ∇p existirá em geral, mas o problema original é outro, pois p deve ser uma variável dependente incógnita, não uma função pré-fixada.

Lembremos também que tanto neste problema descrito por Smale quanto no correspondente (e mais detalhado) descrito por Fefferman[3] não é dada nenhuma condição inicial para a pressão $p(x,t)$, apenas para a velocidade inicial $u(x,0)$.

Ainda mais uma observação é necessária. Ao contrário de Fefferman[3] e da pressão real, em máquinas e na natureza, poder variar com o tempo, Smale[1] define o domínio da pressão como igual a $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, i.e., sem variar no tempo. Seja por equívoco ou não, mesmo admitindo-se $p, q, r: \Omega \to \mathbb{R}$, com $p, q, r \in C^\infty$ e $\nabla q(x) = 0$, sem utilizarmos a função $\theta(t)$, temos

$$\nabla p(x) = \nabla(p(x) + q(x)), \tag{6}$$

resultado que também proporcionará infinitas outras soluções (u, r) admissíveis para (1), sendo (u, p) uma solução regular (suave, lisa, *smooth*) e

$$r(x) = p(x) + q(x), \tag{7}$$

como já dissemos em [2] com outras palavras e mostramos acima para o caso mais geral da pressão variável com o tempo e a posição, $p(x,t)$.

Assim a resposta ao problema é Não.

Referências.

1. Smale, Steve, *Mathematical Problems for the Next Century*, Mathematical Intelligencer **20** (2): 7-15 (1998). A status of these problems maybe encountered in https://en.wikipedia.org/wiki/Smale%27s_problems.

2. Godoi, Valdir M. S., *Breakdown of Navier-Stokes Solutions*, http://www.vixra.org/abs/1505.0083 (2015).

3. Fefferman, Charles L., *Existence and Smoothness of the Navier-Stokes Equation*, in http://www.claymath.org/sites/default/files/navierstokes.pdf.