Solving the 15th Problem of Smale: Navier-Stokes equations

Valdir Monteiro dos Santos Godoi

valdir.msgodoi@gmail.com

Keywords: Navier-Stokes equations, Smale's problems, 15th problem.

Abstract: The solution of the fifteenth problem of Smale, the Navier-Stokes equations in three spatial dimensions.

Steve Smale escreveu um estimulante artigo em 1998 onde propõe 18 problemas ainda não resolvidos na época[1], em atenção à solicitação de V.I.Arnold. Ambos, Arnold e Smale, por sua vez se inspiraram na famosa lista de 23 problemas de David Hilbert.

A proposta deste artigo é resolver o 15º problema da lista de Smale, sobre a unicidade das soluções das equações de Navier-Stokes.

"Do the Navier-Stokes equations on a 3-dimensional domain Ω in $\mathbb{R}^3$ have a unique smooth solution for all time?"

Resposta: Não.

A resposta que aqui é dada já foi vista em [2], sem nos lembrarmos na ocasião da lista de Smale.

Se (u,p) é uma solução das equações de Navier-Stokes,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u - \nu\nabla^2 u + \nabla p = 0 \qquad (1)$$

$$\nabla \cdot u = 0 \qquad (2)$$

então $(u, p + \theta(t))$ também é uma solução, pois $\nabla p(x,t) = \nabla(p(x+t) + \theta(t))$, supondo que $\theta(t)$ não apresente singularidades, seja contínua e possa ser derivável espacialmente ($\nabla\theta(t) = 0$), i.e., seja tão bem comportada quanto o que se espera para $p(x,t)$ neste problema.

Está muito claro que $p(x,t)$ e $p(x,t) + \theta(t)$ não são necessariamente a mesma solução p para (u,p) em (1), exceto se $\theta(t) = 0$, portanto a resposta deste problema não pode ser Sim.

Também há o caso de ser a função φ em

$$\nabla p = \nu\nabla^2 u - \frac{\partial u}{\partial t} - (u \cdot \nabla)u = \varphi \qquad (3)$$

não gradiente, o que impossibilitará de ser encontrado um valor para p, desde $t = 0$ ou a partir de algum $t = T_N$ ou mais genericamente em algum conjunto de valores de t tais que φ não seja uma função gradiente nestes instantes de tempo t.

Então, concluindo, pode não haver solução (u, p) para (1) em algum $t \geq 0$, mas quando há solução ela não é única, pelo menos devido à infinidade de outras soluções $(u, p + \theta(t))$ possíveis para (1), com $\theta(t) \neq 0$.

Vejam que não haver solução para p não é a mesma coisa que admitir que a pressão é nula, $p = 0$, ou mais genericamente impor como condição de contorno uma determinada pressão $p(x, t)$. Nessas situações ∇p existirá em geral, mas o problema original é outro, pois p deve ser uma variável dependente incógnita, não uma função pré-fixada.

Assim a resposta ao problema é Não.

References

1. Smale, Steve, *Mathematical Problems for the Next Century*, Mathematical Intelligencer **20** (2): 7-15 (1998). A status of this problems is encountered in https://en.wikipedia.org/wiki/Smale%27s_problems

2. Godoi, Valdir M. S., *Breakdown of Navier-Stokes Solutions*, http://www.vixra.org/abs/1505.0083 (2015).