The algorithm for recurrent finding countless coprime integer solutions of Diophantine equations

$$\boldsymbol{x^4 + y^4 = a^4 + b^4} \quad ,$$

$$\boldsymbol{x^4 = y^4 + a^4 + b^4}$$

and some arising from these extraordinary consequences.

(elementary aspect)

REUVEN TINT[1], MICHAEL TINT[2]

Number Theorist, Israel[1]

Software Engineer, Israel[2]

Email: reuven.tint@gmail.com, tintmisha@gmail.com

http://ferm-tint.blogspot.co.il/

Abstract. In this paper, we obtain an algorithm (identity) of recurrent finding countless coprime integer solutions to equations

$$x^4 + y^4 = a^4 + b^4 \quad ,$$

$$x^4 = y^4 + a^4 + b^4$$

and some arising from these extraordinary consequences.

Introduction.

In the history of mathematics attempts to find common solutions in integers of equations

$$x^4 + y^4 = a^4 + b^4 \quad \text{and}$$

$$x^4 = y^4 + a^4 + b^4$$

were unsuccessful (except iterate through numbers). Since, in 1988, Professor Noam D. Elkies from Harvard University found the following solution:

$$2682440^4 + 15365639^4 + 187960^4 = 20615673^4.$$

He also proved that the equation

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = x_4^4$$

has infinitely many solutions in integers. And the Roger Frye, spending 110 hours a "supercomputer", received a the unique solution to 1,000,000

$$95800^4 + 217519^4 + 414560^4 = 422481^4.$$

(Singh, Simon (2000). Fermat's Last Theorem, IV). There are solutions

$$133^4 + 134^4 = 59^4 + 158^4;$$

$$103^4 + 542^4 = 359^4 + 514^4.$$

(В. Серпинский, "О решении уравнений в целых числах", Физматгиз, Москва, 1961, стр. 58, п. 13.3). In this paper, we obtain an algorithm (identities), allowing to obtain countless coprime integer solutions of these equations, and some arising from these extraordinary consequences, in particular, " The multiplication of the difference between the fourth powers of integers by the difference fourth powers of integers is equal the difference between the fourth powers of integers "and others (see below).

Solution

§ 1

1.1. Let coprime integers x_0, y_0, a_0, b_0 such that

$$x_0^4 + y_0^4 = a_0^4 + b_0^4 \quad [\mathbf{1}],$$

are any non-trivial solution of the equation

$$x^4 + y^4 = a^4 + b^4 \ [\mathbf{2}].$$

1.2. We have

$$A = \pm x_0^2 a_0^2 - y_0^2 b_0^2 \ \ [\mathbf{3}]$$
$$B = a_0^4 - y_0^4 = x_0^4 - b_0^4 \ \ [\mathbf{4}]$$
$$C = \pm x_0^2 y_0^2 - a_0^2 b_0^2 \ [\mathbf{5}]$$

(the signs are consistent)

$$M = (a_0 b_0 A)^4 - (y_0 a_0 B)^4 - (y_0 b_0 C)^4 \ [\mathbf{6}]$$
$$N = a_0^2 b_0^2 A^3 - y_0^2 a_0^2 B^3 - y_0^2 b_0^2 C^3 \ [\mathbf{7}]$$

Thus,

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x_0 M}{\delta} \\ y &= \frac{y_0(M - 4a_0^2 b_0^2 AN)}{\delta} \\ a &= \frac{a_0(M - 4y_0^2 b_0^2 CN)}{\delta} \\ b &= \frac{b_0(M - 4y_0^2 a_0^2 BN)}{\delta} \end{aligned}\right| \qquad [\mathbf{8}]$$

It will be also coprime solution of $[\mathbf{2}]$, which can be verified by direct substitution $[\mathbf{8}]$ in the $[\mathbf{2}]$.

1.2.1.

$$\cancel{x_0^4 M^4} + \cancel{y_0^4 M^4} - 16y_0^4 M^3 a_0^2 b_0^2 AN +$$

$$+96y_0^4 M^2 a_0^4 b_0^4 A^2 N^2 - 256y_0^4 M a_0^6 b_0^6 A^3 N^3 +$$

$$+256y_0^4 a_0^8 b_0^8 A^4 N^4 =$$

$$= \cancel{a_0^4 M^4} - 16a_0^4 M^3 y_0^2 b_0^2 CN + 96a_0^4 M^2 y_0^4 b_0^4 C^2 N^2 -$$

$$-256a_0^4 M y_0^6 b_0^6 C^3 N^3 + 256a_0^4 y_0^8 b_0^8 C^4 N^4 +$$

$$\cancel{+b_0^4 M^4} - 16b_0^4 M^3 y_0^2 a_0^2 BN +$$

$$+96b_0^4 M^2 y_0^4 a_0^4 B^2 N^2 -$$

$$-256b_0^4 M y_0^6 a_0^6 B^3 N^3 + 256b_0^4 y_0^8 a_0^8 B^4 N^4;$$

$$[\cancel{-16y_0^2 a_0^2 b_0^2 NM^3} y_0^2 A + 16\cancel{y_0^2 a_0^2 b_0^2 M^3 N} a_0^2 C +$$

$$\cancel{+16y_0^2 a_0^2 b_0^2 M^3 N} b_0^2 B] +$$

$$+[\cancel{96y_0^4 a_0^4 b_0^4 M^2 N^2} A^2 - \cancel{96y_0^4 a_0^4 b_0^4 M^2 N^2} C^2 -$$

$$\cancel{-96y_0^4a_0^4b_0^4M^2N^2B^2}] +$$

$$+[-256y_0^4a_0^6b_0^6MN^3A^3 + 256y_0^6a_0^4b_0^6MN^3C^3 +$$

$$+256y_0^6a_0^6b_0^4MN^3B^3] + [256y_0^4a_0^8b_0^8N^4A^4 -$$

$$-256y_0^8a_0^4b_0^8N^4C^4 - 256y_0^8a_0^8b_0^4N^4B^4] =$$

$$= -256y_0^4a_0^4b_0^4N^3[M(a_0^2b_0^2A^3 - y_0^2b_0^2C^3 - y_0^2a_0^2B^3) +$$

$$+N(a_0^4b_0^4A^4 - y_0^4b_0^4C^4 - y_0^4a_0^4B^4)] = 0.$$

$$M = a_0^4b_0^4A^4 - y_0^4a_0^4B^4 - y_0^4b_0^4C^4$$

$$N = a_0^2b_0^2A^3 - y_0^2a_0^2B^3 - y_0^2b_0^2C^3$$

1.3. When checking, we should note that

1) $A^2 = B^2 + C^2.$

$$(\pm x_0^2a_0^2 - y_0^2b_0^2)^2 = (a_0^4 - y_0^4)^2 + (\pm x_0^2y_0^2 - a_0^2b_0^2)^2$$

$$x_0^4a_0^4 \mp \cancel{2x_0^2a_0^2y_0^2b_0^2} + y_0^4b_0^4 = a_0^8 - 2a_0^4y_0^4 + y_0^8 +$$

$$+x_0^4y_0^4 \mp \cancel{2x_0^4y_0^4a_0^4}b_0^4 + a_0^4b_0^4$$

$$a_0^4(x_0^4 + y_0^4) + y_0^4(a_0^4 + b_0^4) = a_0^4(a_0^4 + b_0^4) + y_0^4(x_0^4 + y_0^4),$$

if

$$x_0^4 + y_0^4 = a_0^4 + b_0^4$$

1.4.

2) $y_0^2A = b_0^2B + a_0^2C$

$$y_0^2(\pm x_0^2a_0^2 - y_0^2b_0^2) \equiv b_0^2(a_0^4 - y_0^4) +$$

$$+a_0^2(\pm x_0^2y_0^2 - a_0^2b_0^2)$$

$$\cancel{\pm y_0^2x_0^2a_0^2} - \cancel{y_0^4b_0^2} \equiv \cancel{b_0^2a_0^4} - \cancel{b_0^2y_0^4} \cancel{\pm a_0^2x_0^2y_0^2} - \cancel{a_0^4b_0^2}$$

1.5. Here, δ -is highest common factor of the expressions for x, y, a, b.

1.6. It is clear that in the $[\mathbf{8}]$ "$\boldsymbol{M}$" is not equal to any of the last three expressions in brackets. Therefore, the $[\mathbf{8}]$ is a new, in comparison with $[\mathbf{1}]$,solution of the equation $[\mathbf{2}]$. Note that

$$x_0 + y_0 < x^4 + y^4$$

(except perhaps for a finite number of cases). Continuing in the same way, we see that $[\mathbf{8}]$ are recurrence formulas to obtain an infinite set of coprime integer solutions of the equation $[\mathbf{2}]$,using the above-mentioned partial solutions.

1.6.1.

$$x_1 = x_0 M_1; y_1 = y_0 Q_{y_1};\ a_1 = a_0 Q_{a_1}; b_1 = b_0 Q_{b_1}.$$
$$x_k = x_0 M_1 \times \ldots \times M_k$$
$$y_k = y_0 Q_{y_1} \times \ldots \times Q_{y_k}$$
$$a_k = a_0 Q_{ai} \times \ldots \times Q_{a_k}$$
$$b_k = b_0 Q_{b_1} \times \ldots \times Q_{b_k}$$
$$k = 1,2,3 \ldots$$

$M_k, Q_k -$ are corresponding values of the factors when x_0, y_0, a_0, b_0.

1.7. In this same work for the purposes of clarity, the resulting validation algorithm $[\mathbf{8}]$ to find solutions to the equation $[\mathbf{2}]$ performed, even without affecting the generality on the numerical examples.

§ 2

2.1. Let identity (example $N1_2$)

$$(2m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 \equiv (2m^2)^2 + (n^2)^2$$

$$m = 2; n = 1.$$

Then,

$$7^2 + 4^2 = 8^2 + 1^2$$

and equation

$$x_0^4 + y_0^4 = a_0^4 + b_0^4$$

$$x_0 = \sqrt{7};\ y_0 = \sqrt{4};\ a_0 = \sqrt{8};\ b_0 = 1.$$

2.2. Using [3], [4], [5]

$$A = \pm 7 \times 8 - 4 \times 1 \text{ and } A_1 = 52, A_2 = -60$$
$$B = a_0^4 - y_0^4 = x_0^4 - b_0^4 \text{ and } B_1 = B_2 = 48 = 64 - 16 = 49 - 1$$
$$C = \pm 7 \times 4 - 8 \times 1 \text{ and } C_1 = 20;\ C_2 = -36.$$

2.3.

$$A_1^2 = B_1^2 + C_1^2;\ 52^2 = 48^2 + 20^2$$
$$y_0^2 A_1 = b_0^2 B_1 + a_0^2 C_1;\ \ 4 \times 52 = 1 \times 48 + 8 \times 20$$

2.3.1.

$$A_2^2 = B_2^2 + C_2^2;\ (-60)^2 = 48^2 + (-36)^2$$
$$y_0^2 A_2 = b_0^2 B_2 + a_0^2 C_2;\ 4 \times (-60) = 1 \times 48 + 8 \times (-36)$$

2.4. Let us use [6] and [7]

$$M = 8^2 \times 1^2 \times 52^4 - 4^2 \times 8^2 \times 48^4 - 4^2 \times 1^2 \times 20^4 =$$
$$= -4970434560 = -2^{12} \times 3 \times 5 \times 7^2 \times 13 \times 127.$$
$$N = 8 \times 1 \times 52^3 - 4 \times 8 \times 48^3 - 4 \times 1 \times 20^3 = -2446080 =$$
$$= -2^{12} \times 3 \times 5 \times 7^2 \times 13.$$

2.5. With respect to the [8]

$$x = -\sqrt{7} \times 2^{12} \times 3 \times 5 \times 13 \times 7^2 \times 127$$
$$y = 2 \times (-2^{12} \times 3 \times 5 \times 13 \times 6223 + 2^{15} \times 3 \times 5 \times 7^2 \times 13^2) =$$
$$= -2^{13} \times 3 \times 5 \times 13 \times 7^2 \times 23$$
$$a = -\sqrt{2} \times 2^{13} \times 3 \times 5 \times 13 \times 7^2 \times 107$$
$$b = 2^{12} \times 3 \times 5 \times 13 \times 7^2 \times 257$$

2.6. Reduce by a common factor, we finally obtain:

$$x' = -\sqrt{7} \times 127 = -x_0 \times 127$$
$$y' = -2 \times 23 = -y_0 \times 23$$
$$a' = -2\sqrt{2} \times 107 = -a_0 \times 107$$
$$b' = 1 \times 257 = b_0 \times 257$$

and

$$(x')^4 = 12747087409$$
$$(y')^4 = 4477456$$
$$(a')^4 = 8389094464$$
$$(b')^4 = 4362470401.$$

Thus,

$$12747087409 + 4477456 = 8389094464 + 4362470401 =$$
$$= 12751564865$$

§ 3

Consequences

3.1. Using **§ 2** we have:

$$(\sqrt{7} \times 127)^4 + (2 \times 23)^4 = (2\sqrt{2} \times 107)^4 + (257)^4$$

Then,

$$x^2 = 7 \times 127^2 = 112903$$
$$y^2 = 2^2 \times 23^2 = 2116$$
$$a^2 = (2\sqrt{2})^2 \times 107^2 = 91592$$
$$b^2 = 257^2 = 66049$$

3.2.

$$x^2 + b^2 = 178952;\ \ a^2 + y^2 = 93708$$
$$x^2 - b^2 = 46854;\ \ a^2 - y^2 = 89476$$

3.3. Let

$$\left.\begin{array}{c} a^2 + y^2 = 2m, m_2;\ m_1m_2 = 46854 \\ a^2 - y^2 = 2n_1, n_2;\ n_1n_2 = 44738 \\ x^2 + b^2 = 2m_1, n_2;\ m_1n_2 = 89476 \\ x^2 - b^2 = 2n_1, m_2;\ n_1m_2 = 23427 \end{array}\right\} \quad [\mathbf{9}]$$

Since, with respect to $[\mathbf{9}]$

$$\boxed{m_1 = 2;\ n_1 = 1;\ m_2 = 23427;\ n_2 = 44738}$$

3.4. Now we introduce the following concepts that sets of four numbers have unique properties:

1)

$$a^2 = m_1 m_2 + n_1 n_2 = 2 \times 23427 + 1 \times 44738 = 91592$$
$$y^2 = 2 \times 23427 - 1 \times 44738 = m_1 m_2 - n_1 n_2 = 2116$$
$$x^2 = m_1 n_2 + m_2 n_1 = 2 \times 44738 + 23427 \times 1 = 112903,$$
$$b^2 = m_1 n_2 - m_2 n_1 = 2 \times 44738 - 23427 \times 1 = 66049,$$

that indicates the direction in search of a more elegant, perhaps, ways of finding such numbers and the solutions of the equation $[\mathbf{2}]$.
It is clear that the numbers with such properties are necessary and sufficient condition for finding solutions to the equation$[\mathbf{2}]$ - the inverse problem.
Further properties are given in general terms as in the following section; they will be shown in the integer version from beginning to end.

2)

$$(ay)^2 = (m_1 m_2)^2 - (n_1 n_2)^2$$
$$(xb)^2 = (m_1 n_2)^2 - (n_1 m_2)^2$$

3)

$$(m_1^2 - n_1^2)(m_2^2 + n_2^2) = (ay)^2 + (xb)^2$$
$$(m_1^2 + n_1^2)(m_2^2 - n_2^2) = (ay)^2 - (xb)^2$$

4)

$$(m_1^4 - n_1^4)(m_2^4 - n_2^4) = (ay)^4 - (xb)^4,$$

ie "The multiplication of the difference between the fourth powers of integers by the difference fourth powers of integers is equal the difference between the fourth powers of integers."

§ 4

4.1. Using the equality mentioned in the introduction, we have:

$$158^4 + 59^4 = 134^4 + 133^4, 158^4 - 134^4 = 133^4 - 59^4,$$
$$a^2 = 158^2;\ x^2 = 59^2; y^2 = 134^2; b^2 = 133^2$$
$$a^2 + y^2 = 2m_1m_2 = 158^2 + 134^2 = 2^3 \times 5 \times 29 \times 37 \times 73$$
$$a^2 - y^2 = 2n_1n_2 = 158^2 - 134^2 = 2^5 \times 3 \times 73$$
$$b^2 + x^2 = 2m_1n_2 = 2 \times 5 \times 29 \times 73 = 133^2 + 59^2$$
$$b^2 - x^2 = 2m_2n_1 = 133^2 - 59^2 = 2^7 \times 3 \times 37$$

and

4.2. $m_1 = 5 \times 29;\ n_1 = 2^4 \times 3;\ m_2 = 2^2 \times 37;\ n_2 = 73,$

,then

1)

$$a^2 = m_1m_2 + n_1n_2 =$$
$$= (5 \times 29) \times (2^2 \times 37) + (2^4 \times 3) \times (73) = 158^2$$
$$y^2 = m_1m_2 - n_1n_2 =$$
$$(5 \times 29) \times (2^2 \times 37) - (2^4 \times 3) \times (73) = 134^2$$
$$b^2 = m_1n_2 + n_1m_2 =$$
$$= (5 \times 29) \times (73) + (2^4 \times 3) \times (2^2 \times 37) = 133^2$$
$$x^2 = m_1n_2 - n_1m_2 =$$
$$= (5 \times 29) \times (73) - (2^4 \times 3)(2^2 \times 37) = 59^2.$$

2)

$$(ay)^2 = (m_1m_2)^2 - (n_1n_2)^2 =$$
$$(5 \times 29 \times 2^2 \times 37)^2 - (2^4 \times 3 \times 73)^2 = (158 \times 134)^2$$
$$(xb)^2 = (m_1n_2)^2 - (n_1m_2)^2 =$$
$$= (5 \times 29 \times 73)^2 - (2^4 \times 3 \times 2^2 \times 37)^2 = (133 \times 59)^2.$$

3)

$$(m_1^2 - n_1^2)(m_2^2 + n_2^2) = (ay)^2 + (xb)^2 =$$
$$= [(5 \times 29)^2 - (2^4 \times 3)^2] \times [(2^2 \times 37)^2 + (73)^2] =$$
$$= (158 \times 134)^2 + (133 \times 59)^2$$
$$(m_1^2 + n_1^2)(m_2^2 - n_2^2) = (ay)^2 - (bx)^2 =$$
$$[(5 \times 29)^2 + (2^4 \times 3)^2] \times [(2^2 \times 37)^2 - (73)^2] =$$

$$= (158 \times 134)^2 - (133 \times 59)^2$$

4)

$$(m_1^4 - n_1^4)(m_2^4 - n_2^4) = (ay)^4 - (bx)^4$$
$$(145^4 - 48^4) \times (148^4 - 73^4) = (21172)^4 - (7847)^4$$

5)

$$(64^4 - 1^4)(69745^4 - 14784^4) =$$
$$= (278588)^4 - (36977)^4$$

6)

$$n_1(a^2 + y^2) = m_1(b^2 - x^2)$$
$$(2^4 \times 3) \times (2^3 \times 5 \times 29 \times 37) = (5 \times 29) \times (2^7 \times 3 \times 37)$$

7)

$$n_1 \times (b^2 + x^2) = m_1(a^2 - y^2)$$
$$(2^4 \times 3) \times (2 \times 5 \times 29 \times 73) = (5 \times 29) \times (2^5 \times 3 \times 73)$$

8)

$$n_2(b^2 - x^2) = m_2(a^2 - y^2)$$
$$(73) \times (2^7 \times 3 \times 37) = (2^2 \times 37) \times (2^5 \times 3 \times 73)$$

9)

$$n_2(a^2 + y^2) = m_2(b^2 + x^2)$$
$$(73) \times (2^3 \times 5 \times 29 \times 37) = (2^2 \times 37) \times (2 \times 5 \times 29 \times 73)$$

4.3. Continuing in the same way, we should note the following interesting facts related to the solutions in the **§ 1**:

$$x' = -\sqrt{7} \times 127;\ y' = -2 \times 23;$$

$$a' = -2\sqrt{2} \times 107;\ b' = 257:$$

$$257 - 107 = 150 \qquad 257 - 127 = 130$$

$$127 + 23 = 150 \qquad 107 + 23 = 130$$

$$127 + 107 = 234 \qquad 257 = 127 + 107 + 23$$

$$257 - 23 = 234 \qquad 257 + 23 = 150 + 130$$

4.4. More number of examples of some relations elements Pythagorean equation

$$A^2 = B^2 + C^2$$

with elements of the equation

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2:$$

1)

$$y_0(\pm x_0 a_0 - y_0 b_0) \equiv b_0(a_0^2 - y_0^2) + a_0(\pm x_0 y_0 - a_0 b_0).$$

Here x_0, y_0, a_0, b_0- are arbitrary numbers

2) But, if

$$x_0^2 + y_0^2 = a_0^2 + b_0^2$$

,then

$$(\pm x_0 a_0 - y_0 b_0)^2 = (a_0^2 - y_0^2)^2 + (\pm x_0 y_0 - a_0 b_0)^2$$

3) If

$$(A = 17)^2 = (B = 15^2)^2 + (C = 8)^2$$

and

$$(x = 35)^2 + (y = 13)^2 = (a = 37)^2 + (b = 5)^2$$

,then

$$Aa = Bx + Cy \qquad 17 \times 37 = 15 \times 35 + 8 \times 13$$
$$Ax = Ba + Cb \qquad 17 \times 35 = 15 \times 37 + 8 \times 5$$

4)

$$Aa = Bx + Cy \quad 41 \times 37 = 40 \times 35 + 9 \times 13 \quad 41^2 = 40^2 + 9^2$$
$$Ba = Ax + Cb \quad 40 \times 37 = 41 \times 35 + 9 \times 5$$

5)

$$Aa = Cx + By \quad 11 \times 5 = 3 \times 9 + 4 \times 7 \quad 3^2 + 4^2 = 5^2$$
$$Bx = Ab + cy \quad 4 \times 9 = 3 \times 5 + 3 \times 7 \quad 9^2 + 7^2 = 11^2 + 3^2$$

6)

$$7^2 + 4^2 = 8^2 + 1^2 \qquad 3^2 + 4^2 = 5^2$$

$$5 \times 8 = 4 \times 7 + 3 \times 4$$
$$5 \times 7 = 4 \times 8 + 3 \times 1$$

7)

$$(ax + by)a \equiv (a^2 + b^2)x + (ay - bx)b$$
$$(a^2 + b^2)x \equiv (ax - by)a + (ay + bx)b$$
$$(a^2 - b^2)x \equiv (ax + by)a - (ay + bx)b$$
$$(ax - by)a \equiv (a^2 - b^2)x - (ax - bx)b$$

x, y, a, b – are arbitrary numbers

4.4.1. Considering these trivial identities connecting four independent parameters:

$$x_1(x_2 + x_4) + x_2(x_3 - x_1) + x_3(x_4 - x_2) \equiv x_4(x_1 + x_3)$$

$$x_1(x_4 - x_2) + x_3(x_4 + x_2) \equiv x_2(x_3 - x_1) + x_4(x_1 + x_3)$$

$$(x_1 + x_2) \equiv (x_2 - x_3) + (x_1 - x_2) + (x_2 + x_3)$$
$$(x_1 + x_2) + (x_3 - x_2) \equiv (x_1 - x_2) + (x_2 + x_3)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = x_4,$$

it can be argued that there is significantly trivial identities connecting with each other as of four prime terms, although examples are numerous:

$$3 + 5 + 11 = 19, \qquad 3 + 5 + 23 = 31, \qquad 3 + 5 + 29 = 37$$

and etc,

$$3 + 7 + 7 = 17, \qquad 3 + 11 + 17 = 31,$$

and etc.

A non-trivial and promising way of finding such connections shown in **§ 2**

$$23 + 107 + 127 = 257.$$

4.5. With respect to **1.3** and **1.4** we get

$$(x_0 = 158)^4 + (y_0 = 59)^4 = (a_0 = 134)^4 + (b_0 = 133)^4$$

after a reduction by

$$\delta = 3 \times 5^2 \times 13 \times 17 = 16575$$

we have:

$$(A_1 = 23329)^2 = (B_1 = 18721)^2 + (C_1 = 13920)^2;$$

1)

$$(b_0^2 A_1 = 133^2 \times 23329) = (y_0^2 B_1 = 59^2 \times 18721)^2 +$$
$$+(x_0^2 C_1 = 158^2 \times 13920)$$

2)

$$(b_0^2 B_1 = 133^2 \times 18721) = (y_0^2 A_1 = 59^2 \times 23329) +$$
$$(a_0^2 C_1 = 134^2 \times 13920).$$

Comment:

If

$$x^{2n} + y^{2n} = a^{2n} + b^{2n}$$

,then

$$(a^n x^n \pm b^n y^n)^2 = (a^{2n} - y^{2n})^2 + (x^n y^n \pm a^n b^n)^2;$$
$$(a^n x^n \pm b^n y^n)^2 = (x^{2n} - b^{2n})^2 + (x^n y^n \pm a^n b^n)^2$$

,where

$n = 1,2,3, \ldots.$

$$a^{2n} x^{2n} \pm \cancel{2a^n x^n b^n y^n} + b^{2n} y^{2n} =$$

$$= a^{4n} 2a^{2n} y^{2n} + y^{4n} + x^{2n} y^{2n} \pm \cancel{2x^n y^n a^n b^n} + a^{2n} b^{2n};$$

$$a^{2n}(a^{2n} + b^{2n} - x^{2n} - y^{2n}) - y^{2n}(a^{2n} + b^{2n} - x^{2n} - y^{2n}) = 0,$$

and

$$x^{2n} + y^{2n} = a^{2n} + b^{2n}.$$

§ 5

Algorithm recurrent finding countless coprime integer solutions of the equation

$$x^4 = y^4 + a^4 + b^4 \quad [\mathbf{10}].$$

5.1. Suppose that identity

$$(2m^2 + n^2) \equiv (2m^2)^2 + (2mn)^2 + (n^2)^2$$

$$m = 2; n = 1.$$

Then,

$$9^2 = 8^2 + 4^2 + 1^2$$

And in the

$$x_0^4 - y_0^4 = a_0^4 + b_0^4 \quad [\mathbf{11}];$$

$$x_0 = \sqrt{9};\ y_0' = \sqrt{4};\ a_0 = \sqrt{8};\ b_0 = 1$$

5.2. Let $[\mathbf{11}]$ be

$$x_0^4 + (y_0'\sqrt{i})^4 = a_0^4 + b_0^4 \ [\mathbf{12}],$$

then

$$x_0 = \sqrt{9};\ y_0 = \sqrt{4i};\ a_0 = \sqrt{8}; b_0 = 1 \ [\mathbf{13}],$$

that allows using the algorithm $[\mathbf{8}]$ to obtain new solutions of the equation $[\mathbf{12}]$ and similar consequences and, hence, the solutions of the equation$[\mathbf{10}]$.

5.3. Combining $[\mathbf{3}], [\mathbf{4}], [\mathbf{5}]$ and $[\mathbf{13}]$

$$A_1 = \left(\sqrt{9}\right)^2 \times (\sqrt{8})^2 - \left(\sqrt{4i}\right)^2 = 72 - 4i$$

$$B_1 = (\sqrt{8})^4 - \left(\sqrt{4i}\right)^4 = 80$$

$$C_1 = (\sqrt{9})^2 \times (\sqrt{4i})^2 - \left(\sqrt{8}\right)^2 \times 1^2 = 36i - 8.$$

5.4.

$$A_1^2 = B_1^2 + C_1^2; (72 - 4i)^2 = 80^2 + (36i - 8)^2$$

$$5184 - \cancel{576i} - 16 = 6400 - 1296 - \cancel{576i} + 64$$

5.5.

$$y_0^2 A_1 = b_0^2 B_1 + a_0^2 C_1$$

$$(\sqrt{4i})^2 \times (72 - 4i) = 1^2 \times 80 + (\sqrt{8})^2 \times (36i - 8)$$

$$288i + 16 = 80 + 288i - 64$$ end etc.

5.6. We give from the beginning to the end of the least unwieldy example of the solution of equation

$$x^4 = y^4 + a^4 + b^4:$$

Example $N2_5$ (without affecting the generality)

$$m = 1\ n = 1; x_0 = \sqrt{3};\ y_0 = \sqrt{i}; a_0 = \sqrt{2}; b_0 = \sqrt{2}.$$

$$A = 6 - 2i; B = 5; C = 3i - 4.$$

$$(6 - 2i)^2 = 5^2 + (3i - 4)^2$$

$$\left(\sqrt{i}\right)^2 (6 - 2i) = (\sqrt{2})^2 \times 5 + \left(\sqrt{2}\right)^2 (3i - 4)$$

$$M = 2^3 \times 3^3 \times 5 \times (7 - 24i); N = 2 \times 3^2 \times 5 \times (9 - 13i)$$

$$x = \sqrt{3} \times 2^3 \times 3^3 \times 5 \times (7 - 24i)$$

$$y = \sqrt{i} \times [-2^3 \times 3^2 \times 5 \times (7 - 24i)$$

$$a = \sqrt{2} \times 2^3 \times 3^2 \times 5 \times (179 - 78i)$$

$$b = \sqrt{2} \times [-2^3 \times 3^2 \times 5 \times (109 + 162i)$$

$$(\sqrt{3})^4 \times 3^4 \times (7 - 24i)^4 + (\sqrt{i})^4 \times 13^4 \times (7 - 24i)^4 =$$

$$= -27832(7 - 24i)^4 =$$

$$= -27832 \times (164833 + 354144i) =$$

$$= -4.587.632.056 - 9.856.535.808i =$$

$$= \left(\sqrt{2}\right)^4 (179 - 78i)^4 + (\sqrt{2})^4 (109 + 162i)^4 =$$

$$= 4 \times (-1146908014) + 4 \times (-2464133952i).$$

It follows that $[\mathbf{8}]$ are recurrence formulas for an infinite set of coprime integer solutions of the equation$[\mathbf{10}]$, using the above-mentioned integer particular solutions

$$x^4 = y^4 + a^4 + b^4 \quad [\mathbf{10}]$$

, for example,

$$95800^4 + 217519^4 + 414560^4 = 422481^4.$$

§ 6

6.1. Let us prove that, the consequences of **§ 3 3.2-3.4**. It can be extended to the equation

$$x^4 = y^4 + a^4 + b^4$$

It follows from **5.2.** $x_0 = \sqrt{9}; y_0 = \sqrt{4i};\ a_0 = \sqrt{8};\ b_0 = 1;$

6.1.1.

$$x_0^4 - b_0^4 = a_0^4 - (y_0'\sqrt{i})^4$$

$$(\sqrt{9})^4 - 1^4 = \left(\sqrt{8}\right)^4 - (\sqrt{4i})^4$$

6.1.2.

$$a^2 + y^2 = 8 + 4i = 2m_1m_2$$

$$a^2 - y^2 = 8 - 4_i = 2n_1n_2$$

$$x^2 + b^2 = 9 + 1 = 2m_1n_2 = 10$$

$$x^2 - b^2 = 9 - 1 = 2m_2n_1 = 8$$

6.1.3.

$$\frac{2m_1m_2}{2m_1n_2} \equiv \frac{8+4i}{10};\ \frac{m_2}{n_2} = \frac{4+2i}{5};\ m_2 = 4+2i;\ n_2 = 5.$$

$$\frac{2m_1m_2}{2m_2n_1} = \frac{4+2i}{8} = \frac{2+i}{4};\ m_1 = 2+i;\ n_1 = 4$$

6.1.4.

$$[(2+i)^4 - 4^4][(4+2_i)^4 - 5^4] = (\sqrt{8}\sqrt{4i})^4 - (\sqrt{9}\times 1)^4$$

$$[(2+i)^2 - 16][(2+i)^2 + 16][(4+2i)^2 - 25][(4+2i)^2 + 25] =$$

$$= (4i-13)(4i+19)(32i-13)(16i+37) = -2^{10} - 3^4 \quad [\mathbf{14}].$$

References:

1. Singh, Simon (2000). Fermat's Last Theorem, IV
2. В.Серпинсккий , “О решении уравнений в целых числах”, Физматгиз ,Москва, 1961, стр. 58 п.13.3.
3. А.Г. Курш, “Курс высшей алгебры”, Физматгиз, Москва, 1951.

Алгоритм рекуррентного нахождения бесчисленного множества взаимно-простых целочисленных решений диофантовых уравнений

$x^4 + y^4 = a^4 + b^4$ и

$x^4 = y^4 + a^4 + b^4$

и некоторые вытекающие из этого неординарные следствия (элементарный аспект)

REUVEN TINT[1], MICHAEL TINT[2]

Number Theorist, Israel[1]

Software Engineer, Israel[2]

Email: reuven.tint@gmail.com, tintmisha@gmail.com

http://ferm-tint.blogspot.co.il/

Аннотация. В настоящей работе получен алгоритм (тождества) рекуррентного нахождения бесчисленного множества взаимно-простых целочисленных решений уравнений

$$x^4 + y^4 = a^4 + b^4 \quad ,$$

$$x^4 = y^4 + a^4 + b^4$$

и некоторые вытекающие из этого неординарные следствия.

Введение.

За всю историю математики попытки к нахождению общих решений в целых числах уравнений

$$x^4 + y^4 = a^4 + b^4 \text{ и}$$

$$x^4 = y^4 + a^4 + b^4$$

были безуспешными (кроме перебора чисел). Так, в 1988 г. Наум Элькис из Гарвардского университета нашёл следующие решение:

$$2682440^4 + 15365639^4 + 187960^4 = 20615673^4.$$

Он же доказал, что уравнение

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = x_4^4$$

имеет бесконечно много решений в целых числах. А Роджер Фрай, затратив 110 часов работы суперкомпьютера, получил единственное решение до 1000000

$$95800^4 + 217519^4 + 414560^4 = 422481^4.$$

(Саймон Сингх, "Великая теорема Ферма", 2000 г., гл. IV). Существуют также решения

$$133^4 + 134^4 = 59^4 + 158^4;$$

$$103^4 + 542^4 = 359^4 + 514^4.$$

(В. Серпинский, "О решении уравнений в целых числах", Физматгиз, Москва, 1961, стр. 58, п. 13.3). В настоящей работе получен алгоритм (тождества), позволяющий получать бесчисленное множество взаимно простых целочисленных решений этих уравнений, и некоторые вытекающие из них неординарные следствия, в частности, "произведение разности четвёртых степеней целых чисел на разность четвёртых степеней целых чисел есть снова разность четвёртых степеней целых чисел" и другие (см. ниже).

Решение

§ 1

1.8. Пусть взаимно-простые целочисленные x_0, y_0, a_0, b_0 такие, что

$$x_0^4 + y_0^4 = a_0^4 + b_0^4 \quad [\mathbf{1}],$$

т.е. являются каким-либо нетривиальным решением уравнения

$$x^4 + y^4 = a^4 + b^4 \; [\mathbf{2}].$$

1.9. Примем

$$A = \pm x_0^2 a_0^2 - y_0^2 b_0^2 \;\; [\mathbf{3}]$$
$$B = a_0^4 - y_0^4 = x_0^4 - b_0^4 \;\; [\mathbf{4}]$$
$$C = \pm x_0^2 y_0^2 - a_0^2 b_0^2 \; [\mathbf{5}]$$

(знаки находятся в соответсвии)

$$M = (a_0 b_0 A)^4 - (y_0 a_0 B)^4 - (y_0 b_0 C)^4 \; [\mathbf{6}]$$
$$N = a_0^2 b_0^2 A^3 - y_0^2 a_0^2 B^3 - y_0^2 b_0^2 C^3 \; [\mathbf{7}]$$

Тогда,

$$\left.\begin{array}{c} x = \frac{x_0 M}{\delta} \\[2ex] y = \dfrac{y_0(M - 4a_0^2 b_0^2 A N)}{\delta} \\ a = \dfrac{a_0(M - 4y_0^2 b_0^2 C N)}{\delta} \\ b = \dfrac{b_0(M - 4y_0^2 a_0^2 B N)}{\delta} \end{array}\right| \qquad [\mathbf{8}]$$

также будут взаимно-простым решением уравнения $[\mathbf{2}]$,что проверяется непосредственной подстановкой $[\mathbf{8}]$ во $[\mathbf{2}]$.

1.2.1.

$$\cancel{x_0^4 M^4} + \cancel{y_0^4 M^4} - 16y_0^4 M^3 a_0^2 b_0^2 A N +$$
$$+96 y_0^4 M^2 a_0^4 b_0^4 A^2 N^2 - 256 y_0^4 M a_0^6 b_0^6 A^3 N^3 +$$
$$+256 y_0^4 a_0^8 b_0^8 A^4 N^4 =$$
$$= \cancel{a_0^4 M^4} - 16 a_0^4 M^3 y_0^2 b_0^2 C N + 96 a_0^4 M^2 y_0^4 b_0^4 C^2 N^2 -$$
$$-256 a_0^4 M y_0^6 b_0^6 C^3 N^3 + 256 a_0^4 y_0^8 b_0^8 C^4 N^4 +$$
$$\cancel{+b_0^4 M^4} - 16 b_0^4 M^3 y_0^2 a_0^2 B N +$$
$$+96 b_0^4 M^2 y_0^4 a_0^4 B^2 N^2 -$$
$$-256 b_0^4 M y_0^6 a_0^6 B^3 N^3 + 256 b_0^4 y_0^8 a_0^8 B^4 N^4;$$

$$[\cancel{-16 y_0^2 a_0^2 b_0^2 N M^3} y_0^2 A + 1\cancel{6 y_0^2 a_0^2 b_0^2 M^3 N} a_0^2 C +$$

$$\cancel{+16y_0^2a_0^2b_0^2M^3Nb_0^2B}] +$$

$$+[\cancel{96y_0^4a_0^4b_0^4M^2N^2A^2} - \cancel{96y_0^4a_0^4b_0^4M^2N^2C^2} -$$

$$\cancel{-96y_0^4a_0^4b_0^4M^2N^2B^2}] +$$

$$+[-256y_0^4a_0^6b_0^6MN^3A^3 + 256y_0^6a_0^4b_0^6MN^3C^3 +$$

$$+256y_0^6a_0^6b_0^4MN^3B^3] + [256y_0^4a_0^8b_0^8N^4A^4 -$$

$$-256y_0^8a_0^4b_0^8N^4C^4 - 256y_0^8a_0^8b_0^4N^4B^4] =$$

$$= -256y_0^4a_0^4b_0^4N^3[M(a_0^2b_0^2A^3 - y_0^2b_0^2C^3 - y_0^2a_0^2B^3) +$$

$$+N(a_0^4b_0^4A^4 - y_0^4b_0^4C^4 - y_0^4a_0^4B^4)] = 0.$$

$$M = a_0^4b_0^4A^4 - y_0^4a_0^4B^4 - y_0^4b_0^4C^4$$

$$N = a_0^2b_0^2A^3 - y_0^2a_0^2B^3 - y_0^2b_0^2C^3$$

1.10. При проверке следует учесть, что

2) $A^2 = B^2 + C^2.$

$$(\pm x_0^2a_0^2 - y_0^2b_0^2)^2 = (a_0^4 - y_0^4)^2 + (\pm x_0^2y_0^2 - a_0^2b_0^2)^2$$

$$x_0^4a_0^4 \mp \cancel{2x_0^2a_0^2y_0^2b_0^2} + y_0^4b_0^4 = a_0^8 - 2a_0^4y_0^4 + y_0^8 +$$

$$+x_0^4y_0^4 \mp \cancel{2x_0^4y_0^4a_0^4b_0^4} + a_0^4b_0^4$$

$$a_0^4(x_0^4 + y_0^4) + y_0^4(a_0^4 + b_0^4) = a_0^4(a_0^4 + b_0^4) + y_0^4(x_0^4 + y_0^4),$$

если

$$x_0^4 + y_0^4 = a_0^4 + b_0^4$$

1.11.

2) $y_0^2A = b_0^2B + a_0^2C$

$$y_0^2(\pm x_0^2a_0^2 - y_0^2b_0^2) \equiv b_0^2(a_0^4 - y_0^4) +$$

$$+a_0^2(\pm x_0^2y_0^2 - a_0^2b_0^2)$$

$$\cancel{\pm y_0^2x_0^2a_0^2} - \cancel{y_0^4b_0^2} \equiv \cancel{b_0^2a_0^4} - \cancel{b_0^2y_0^4} \cancel{\pm a_0^2x_0^2y_0^2} - \cancel{a_0^4b_0^2}$$

1.12. Здесь, δ - наибольший общий делитель выражений для $x, y, a, b.$

1.13. Очевидно, что в $[\mathbf{8}]$ "$\boldsymbol{M}$" не равно ни одному из последних трёх выражений, стоящих в скобках. Поэтому $[\mathbf{8}]$ является новым по сравнению с $[\mathbf{1}]$ решением уравнения $[\mathbf{2}]$. Отметим также, что

$$x_0 + y_0 < x^4 + y^4$$

(кроме, быть может, конечного числа случаев). Отсюда следует, что $[\mathbf{8}]$ являются рекуррентными формулами для получения бесконечного множества взаимно простых целочисленных решений уравнения $[\mathbf{2}]$,используя упомянутые выше частные решения.

1.13.1.

$$x_1 = x_0 M_1; y_1 = y_0 Q_{y_1};\ a_1 = a_0 Q_{a_1}; b_1 = b_0 Q_{b_1}.$$

$$x_k = x_0 M_1 \times \dots \times M_k$$

$$y_k = y_0 Q_{y_1} \times \dots \times Q_{y_k}$$

$$a_k = a_0 Q_{ai} \times \dots \times Q_{a_k}$$

$$b_k = b_0 Q_{b_1} \times \dots \times Q_{b_k}$$

$$k = 1,2,3 \dots$$

$M_k, Q_k -$соответствующие значения сомножителей при $x_0, y_0, a_0, b_0.$

1.14. В настоящей же работе для большой наглядности проверка правильности полученного алгоритма $[\mathbf{8}]$ для нахождения решений уравнения $[\mathbf{2}]$ проведена, ещё, не влияя на общность, на числовых примерах.

§ 2

2.1. Пусть в тождестве (пример $N1_2$)

$$(2m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 \equiv (2m^2)^2 + (n^2)^2$$

$$m = 2; n = 1.$$

Тогда,

$$7^2 + 4^2 = 8^2 + 1^2$$

и в уравнении

$$x_0^4 + y_0^4 = a_0^4 + b_0^4$$

$$x_0 = \sqrt{7};\ y_0 = \sqrt{4};\ a_0 = \sqrt{8};\ b_0 = 1.$$

2.2. В соответствии с [**3**], [**4**], [**5**]

$$A = \pm 7 \times 8 - 4 \times 1 \text{ и } A_1 = 52, A_2 = -60$$
$$B = a_0^4 - y_0^4 = x_0^4 - b_0^4 \text{ и } B_1 = B_2 = 48 = 64 - 16 = 49 - 1$$
$$C = \pm 7 \times 4 - 8 \times 1 \text{ и } C_1 = 20;\ C_2 = -36.$$

2.3.

$$A_1^2 = B_1^2 + C_1^2;\ 52^2 = 48^2 + 20^2$$
$$y_0^2 A_1 = b_0^2 B_1 + a_0^2 C_1;\ \ 4 \times 52 = 1 \times 48 + 8 \times 20$$

2.3.1.

$$A_2^2 = B_2^2 + C_2^2;\ (-60)^2 = 48^2 + (-36)^2$$
$$y_0^2 A_2 = b_0^2 B_2 + a_0^2 C_2;\ 4 \times (-60) = 1 \times 48 + 8 \times (-36)$$

2.4. В соответствии с [**6**] и [**7**]

$$M = 8^2 \times 1^2 \times 52^4 - 4^2 \times 8^2 \times 48^4 - 4^2 \times 1^2 \times 20^4 =$$
$$= -4970434560 = -2^{12} \times 3 \times 5 \times 7^2 \times 13 \times 127.$$
$$N = 8 \times 1 \times 52^3 - 4 \times 8 \times 48^3 - 4 \times 1 \times 20^3 = -2446080 =$$
$$= -2^{12} \times 3 \times 5 \times 7^2 \times 13.$$

2.5. В соответствии с [**8**]

$$x = -\sqrt{7} \times 2^{12} \times 3 \times 5 \times 13 \times 7^2 \times 127$$
$$y = 2 \times (-2^{12} \times 3 \times 5 \times 13 \times 6223 + 2^{15} \times 3 \times 5 \times 7^2 \times 13^2) =$$
$$= -2^{13} \times 3 \times 5 \times 13 \times 7^2 \times 23$$
$$a = -\sqrt{2} \times 2^{13} \times 3 \times 5 \times 13 \times 7^2 \times 107$$
$$b = 2^{12} \times 3 \times 5 \times 13 \times 7^2 \times 257$$

2.6. Сократив на общий множитель, окончательно получим:

$$x' = -\sqrt{7} \times 127 = -x_0 \times 127$$
$$y' = -2 \times 23 = -y_0 \times 23$$
$$a' = -2\sqrt{2} \times 107 = -a_0 \times 107$$
$$b' = 1 \times 257 = b_0 \times 257$$

и

$$(x')^4 = 12747087409$$
$$(y')^4 = 4477456$$
$$(a')^4 = 8389094464$$
$$(b')^4 = 4362470401.$$

Откуда,

$$12747087409 + 4477456 = 8389094464 + 4362470401 =$$
$$= 12751564865$$

§ 3

Следствия

3.1. Из **§ 2** имеем:

$$(\sqrt{7} \times 127)^4 + (2 \times 23)^4 = (2\sqrt{2} \times 107)^4 + (257)^4$$

Откуда,

$$x^2 = 7 \times 127^2 = 112903$$
$$y^2 = 2^2 \times 23^2 = 2116$$
$$a^2 = (2\sqrt{2})^2 \times 107^2 = 91592$$
$$b^2 = 257^2 = 66049$$

3.2.

$$x^2 + b^2 = 178952;\ \ a^2 + y^2 = 93708$$
$$x^2 - b^2 = 46854;\ \ a^2 - y^2 = 89476$$

3.3. Пусть

$$\left.\begin{aligned} a^2 + y^2 = 2m, m_2;\ m_1 m_2 = 46854 \\ a^2 - y^2 = 2n_1, n_2;\ n_1 n_2 = 44738 \\ x^2 + b^2 = 2m_1, n_2;\ m_1 n_2 = 89476 \\ x^2 - b^2 = 2n_1, m_2;\ n_1 m_2 = 23427 \end{aligned}\right\} \quad [\mathbf{9}]$$

Тогда, из $[\mathbf{9}]$

$$\boxed{m_1 = 2;\ n_1 = 1;\ m_2 = 23427;\ n_2 = 44738}$$

3.4. Оказывается определённые таким образом наборы из четырёх чисел обладают уникальными свойствами:

5)

$$a^2 = m_1 m_2 + n_1 n_2 = 2 \times 23427 + 1 \times 44738 = 91592$$
$$y^2 = 2 \times 23427 - 1 \times 44738 = m_1 m_2 - n_1 n_2 = 2116$$
$$x^2 = m_1 n_2 + m_2 n_1 = 2 \times 44738 + 23427 \times 1 = 112903,$$
$$b^2 = m_1 n_2 - m_2 n_1 = 2 \times 44738 - 23427 \times 1 = 66049,$$

что указывает направление в поисках более элегантных, может быть, способов нахождения таких чисел и решений уравнения $[\mathbf{2}]$. Очевидно, что числа с такими свойствами - необходимое и достаточное условие нахождение решений уравнения $[\mathbf{2}]$ - обратная задача. Дальнейшие свойства приведены в общем виде, так как в следующем параграфе они будут продемонстрированы в целочисленном варианте от начала до конца.

6)

$$(ay)^2 = (m_1 m_2)^2 - (n_1 n_2)^2$$
$$(xb)^2 = (m_1 n_2)^2 - (n_1 m_2)^2$$

7)

$$(m_1^2 - n_1^2)(m_2^2 + n_2^2) = (ay)^2 + (xb)^2$$
$$(m_1^2 + n_1^2)(m_2^2 - n_2^2) = (ay)^2 - (xb)^2$$

8)

$$(m_1^4 - n_1^4)(m_2^4 - n_2^4) = (ay)^4 - (xb)^4,$$

т.е. “произведение разности четвёртых степеней целых чисел на разность четвёртых степеней целых чисел есть снова разность четвёртых степеней целых чисел.”

§ 4

4.1. Используя равенство, упомянутое в ведении, имеем:

$$158^4 + 59^4 = 134^4 + 133^4, 158^4 - 134^4 = 133^4 - 59^4,$$
$$a^2 = 158^2;\ x^2 = 59^2; y^2 = 134^2; b^2 = 133^2$$
$$a^2 + y^2 = 2m_1m_2 = 158^2 + 134^2 = 2^3 \times 5 \times 29 \times 37 \times 73$$
$$a^2 - y^2 = 2n_1n_2 = 158^2 - 134^2 = 2^5 \times 3 \times 73$$
$$b^2 + x^2 = 2m_1n_2 = 2 \times 5 \times 29 \times 73 = 133^2 + 59^2$$
$$b^2 - x^2 = 2m_2n_1 = 133^2 - 59^2 = 2^7 \times 3 \times 37$$

и

4.2. $m_1 = 5 \times 29;\ n_1 = 2^4 \times 3;\ m_2 = 2^2 \times 37;\ n_2 = 73,$

,откуда ,

10)

$$a^2 = m_1m_2 + n_1n_2 =$$
$$= (5 \times 29) \times (2^2 \times 37) + (2^4 \times 3) \times (73) = 158^2$$
$$y^2 = m_1m_2 - n_1n_2 =$$
$$(5 \times 29) \times (2^2 \times 37) - (2^4 \times 3) \times (73) = 134^2$$
$$b^2 = m_1n_2 + n_1m_2 =$$
$$= (5 \times 29) \times (73) + (2^4 \times 3) \times (2^2 \times 37) = 133^2$$
$$x^2 = m_1n_2 - n_1m_2 =$$
$$= (5 \times 29) \times (73) - (2^4 \times 3)(2^2 \times 37) = 59^2.$$

11)

$$(ay)^2 = (m_1m_2)^2 - (n_1n_2)^2 =$$
$$(5 \times 29 \times 2^2 \times 37)^2 - (2^4 \times 3 \times 73)^2 = (158 \times 134)^2$$
$$(xb)^2 = (m_1n_2)^2 - (n_1m_2)^2 =$$
$$= (5 \times 29 \times 73)^2 - (2^4 \times 3 \times 2^2 \times 37)^2 = (133 \times 59)^2.$$

12)

$$(m_1^2 - n_1^2)(m_2^2 + n_2^2) = (ay)^2 + (xb)^2 =$$
$$= [(5 \times 29)^2 - (2^4 \times 3)^2] \times [(2^2 \times 37)^2 + (73)^2] =$$
$$= (158 \times 134)^2 + (133 \times 59)^2$$

$$(m_1^2+n_1^2)(m_2^2-n_2^2)=(ay)^2-(bx)^2=$$
$$[(5\times 29)^2+(2^4\times 3)^2]\times[(2^2\times 37)^2-(73)^2]=$$
$$=(158\times 134)^2-(133\times 59)^2$$

13)

$$(m_1^4-n_1^4)(m_2^4-n_2^4)=(ay)^4-(bx)^4$$
$$(145^4-48^4)\times(148^4-73^4)=(21172)^4-(7847)^4$$

14)

$$(64^4-1^4)(69745^4-14784^4)=$$
$$=(278588)^4-(36977)^4$$

15)

$$n_1(a^2+y^2)=m_1(b^2-x^2)$$
$$(2^4\times 3)\times(2^3\times 5\times 29\times 37)=(5\times 29)\times(2^7\times 3\times 37)$$

16)

$$n_1\times(b^2+x^2)=m_1(a^2-y^2)$$
$$(2^4\times 3)\times(2\times 5\times 29\times 73)=(5\times 29)\times(2^5\times 3\times 73)$$

17)

$$n_2(b^2-x^2)=m_2(a^2-y^2)$$
$$(73)\times(2^7\times 3\times 37)=(2^2\times 37)\times(2^5\times 3\times 73)$$

18)

$$n_2(a^2+y^2)=m_2(b^2+x^2)$$
$$(73)\times(2^3\times 5\times 29\times 37)=(2^2\times 37)\times(2\times 5\times 29\times 73)$$

4.3. На наш взгляд, следует отметить следующие интересные факты, связанные с решениями **§ 1**:

$$x'=-\sqrt{7}\times 127;\ y'=-2\times 23;$$

$$a'=-2\sqrt{2}\times 107;\ b'=257:$$

$$257-107=150 \qquad 257-127=130$$

$$127 + 23 = 150 \qquad 107 + 23 = 130$$

$$127 + 107 = 234 \qquad 257 = 127 + 107 + 23$$

$$257 - 23 = 234 \qquad 257 + 23 = 150 + 130$$

4.4. Ещё ряд примеров о некоторых связях элементов пифагорова уравнения

$$A^2 = B^2 + C^2$$

с элементами уравнения

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2:$$

8)

$$y_0(\pm x_0 a_0 - y_0 b_0) \equiv b_0(a_0^2 - y_0^2) + a_0(\pm x_0 y_0 - a_0 b_0).$$

Здесь x_0, y_0, a_0, b_0- произвольные числа

9) Но, если

$$x_0^2 + y_0^2 = a_0^2 + b_0^2$$

,то

$$(\pm x_0 a_0 - y_0 b_0)^2 = (a_0^2 - y_0^2)^2 + (\pm x_0 y_0 - a_0 b_0)^2$$

10) Если

$$(A = 17)^2 = (B = 15^2)^2 + (C = 8)^2$$

и

$$(x = 35)^2 + (y = 13)^2 = (a = 37)^2 + (b = 5)^2$$

,то

$$Aa = Bx + Cy \qquad 17 \times 37 = 15 \times 35 + 8 \times 13$$
$$Ax = Ba + Cb \qquad 17 \times 35 = 15 \times 37 + 8 \times 5$$

11)

$$Aa = Bx + Cy \quad 41 \times 37 = 40 \times 35 + 9 \times 13 \quad 41^2 = 40^2 + 9^2$$
$$Ba = Ax + Cb \quad 40 \times 37 = 41 \times 35 + 9 \times 5$$

12)

$$Aa = Cx + By \quad 11 \times 5 = 3 \times 9 + 4 \times 7 \quad 3^2 + 4^2 = 5^2$$
$$Bx = Ab + cy \quad 4 \times 9 = 3 \times 5 + 3 \times 7 \quad 9^2 + 7^2 = 11^2 + 3^2$$

13)

$$7^2 + 4^2 = 8^2 + 1^2 \qquad 3^2 + 4^2 = 5^2$$

$$5 \times 8 = 4 \times 7 + 3 \times 4$$
$$5 \times 7 = 4 \times 8 + 3 \times 1$$

14)

$$(ax + by)a \equiv (a^2 + b^2)x + (ay - bx)b$$
$$(a^2 + b^2)x \equiv (ax - by)a + (ay + bx)b$$
$$(a^2 - b^2)x \equiv (ax + by)a - (ay + bx)b$$
$$(ax - by)a \equiv (a^2 - b^2)x - (ax - bx)b$$

x, y, a, b –произвольные числа

4.4.1. Учитывая следующие тривиальные тождества, связывающие 4 независимых параметра:

$$x_1(x_2 + x_4) + x_2(x_3 - x_1) + x_3(x_4 - x_2) \equiv x_4(x_1 + x_3)$$

$$x_1(x_4 - x_2) + x_3(x_4 + x_2) \equiv x_2(x_3 - x_1) + x_4(x_1 + x_3)$$

$$(x_1 + x_2) \equiv (x_2 - x_3) + (x_1 - x_2) + (x_2 + x_3)$$
$$(x_1 + x_2) + (x_3 - x_2) \equiv (x_1 - x_2) + (x_2 + x_3)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = x_4,$$

можно утверждать, что нет существенно тривиальных тождеств, связывающих между собой в виде слагаемых 4 простых числа, хотя примеров можно привести множество:

$$3 + 5 + 11 = 19, \qquad 3 + 5 + 23 = 31, \qquad 3 + 5 + 29 = 37$$

и т.п.,

$$3 + 7 + 7 = 17, \qquad 3 + 11 + 17 = 31,$$

и т.п.

Нетривиальный и перспективный способ нахождения таких связей получился в **§ 2**

$$23 + 107 + 127 = 257.$$

4.5. Из п.п. 1.3 и 1.4 и

$$(x_0 = 158)^4 + (y_0 = 59)^4 = (a_0 = 134)^4 + (b_0 = 133)^4$$

после сокращения на

$$\delta = 3 \times 5^2 \times 13 \times 17 = 16575$$

получим:

$$(A_1 = 23329)^2 = (B_1 = 18721)^2 + (C_1 = 13920)^2;$$

3)

$$(b_0^2 A_1 = 133^2 \times 23329) = (y_0^2 B_1 = 59^2 \times 18721)^2 +$$
$$+(x_0^2 C_1 = 158^2 \times 13920)$$

4)

$$(b_0^2 B_1 = 133^2 \times 18721) = (y_0^2 A_1 = 59^2 \times 23329) +$$
$$(a_0^2 C_1 = 134^2 \times 13920).$$

Примечание:

Если

$$x^{2n} + y^{2n} = a^{2n} + b^{2n}$$

,то

$$(a^n x^n \pm b^n y^n)^2 = (a^{2n} - y^{2n})^2 + (x^n y^n \pm a^n b^n)^2;$$
$$(a^n x^n \pm b^n y^n)^2 = (x^{2n} - b^{2n})^2 + (x^n y^n \pm a^n b^n)^2$$

,где

$n = 1,2,3, \ldots.$

$$a^{2n} x^{2n} \pm \cancel{2a^n x^n b^n} y^n + b^{2n} y^{2n} =$$

$$= a^{4n} 2a^{2n} y^{2n} + y^{4n} + x^{2n} y^{2n} \pm \cancel{2x^n y^n} a^n b^n + a^{2n} b^{2n};$$

$$a^{2n}(a^{2n}+b^{2n}-x^{2n}-y^{2n})-y^{2n}(a^{2n}+b^{2n}-x^{2n}-y^{2n})=0,$$

и

$$x^{2n}+y^{2n}=a^{2n}+b^{2n}.$$

§ 5

Алгоритм рекуррентного нахождения бесчисленного множества взаимно-простых целочисленных решений уравнения

$$x^4=y^4+a^4+b^4 \quad [\mathbf{10}].$$

5.1. Пусть в тождестве

$$(2m^2+n^2)\equiv(2m^2)^2+(2mn)^2+(n^2)^2$$

$$m=2; n=1.$$

Тогда,

$$9^2=8^2+4^2+1^2$$

и в

$$x_0^4-y_0^4=a_0^4+b_0^4 \quad [\mathbf{11}];$$

$$x_0=\sqrt{9};\ y_0'=\sqrt{4};\ a_0=\sqrt{8};\ b_0=1$$

5.2. Представив $[\mathbf{11}]$ в виде

$$x_0^4+(y_0'\sqrt{i})^4=a_0^4+b_0^4\ [\mathbf{12}],$$

будем иметь

$$x_0=\sqrt{9};\ y_0=\sqrt{4i};\ a_0=\sqrt{8}; b_0=1\ [\mathbf{13}],$$

что позволяет использовать алгоритм $[\mathbf{8}]$ для получения новых решений уравнения $[\mathbf{12}]$ и аналогичных следствий, а, значит, и решений уравнения $[\mathbf{10}]$.

5.3. В соответствии с $[\mathbf{3}], [\mathbf{4}], [\mathbf{5}]$ и $[\mathbf{13}]$

$$A_1 = \left(\sqrt{9}\right)^2 \times (\sqrt{8})^2 - \left(\sqrt{4i}\right)^2 = 72 - 4i$$

$$B_1 = (\sqrt{8})^4 - \left(\sqrt{4i}\right)^4 = 80$$

$$C_1 = (\sqrt{9})^2 \times (\sqrt{4i})^2 - \left(\sqrt{8}\right)^2 \times 1^2 = 36i - 8.$$

5.4.

$$A_1^2 = B_1^2 + C_1^2; (72 - 4i)^2 = 80^2 + (36i - 8)^2$$

$$5184 - \cancel{576i} - 16 = 6400 - 1296 - \cancel{576i} + 64$$

5.5.

$$y_0^2 A_1 = b_0^2 B_1 + a_0^2 C_1$$

$$(\sqrt{4i})^2 \times (72 - 4i) = 1^2 \times 80 + (\sqrt{8})^2 \times (36i - 8)$$

$$288i + 16 = 80 + 288i - 64$$ и т.д.

5.6. Приведём от начала и до конца наименее громоздкий пример решения уравнения

$$x^4 = y^4 + a^4 + b^4:$$

Пример $N2_5$ (не влияя на общность)

$$m = 1\ n = 1; x_0 = \sqrt{3};\ y_0 = \sqrt{i}; a_0 = \sqrt{2}; b_0 = \sqrt{2}.$$

$$A = 6 - 2i; B = 5; C = 3i - 4.$$

$$(6 - 2i)^2 = 5^2 + (3i - 4)^2$$

$$\left(\sqrt{i}\right)^2(6-2i) = (\sqrt{2})^2 \times 5 + \left(\sqrt{2}\right)^2(3i-4)$$

$$M = 2^3 \times 3^3 \times 5 \times (7-24i); N = 2 \times 3^2 \times 5 \times (9-13i)$$

$$x = \sqrt{3} \times 2^3 \times 3^3 \times 5 \times (7-24i)$$

$$y = \sqrt{i} \times [-2^3 \times 3^2 \times 5 \times (7-24i)$$

$$a = \sqrt{2} \times 2^3 \times 3^2 \times 5 \times (179-78i)$$

$$b = \sqrt{2} \times [-2^3 \times 3^2 \times 5 \times (109+162i)$$

$$(\sqrt{3})^4 \times 3^4 \times (7-24i)^4 + (\sqrt{i})^4 \times 13^4 \times (7-24i)^4 =$$

$$= -27832(7-24i)^4 =$$

$$= -27832 \times (164833 + 354144i) =$$

$$= -4.587.632.056 - 9.856.535.808i =$$

$$= \left(\sqrt{2}\right)^4(179-78i)^4 + (\sqrt{2})^4(109+162i)^4 =$$

$$= 4 \times (-1146908014) + 4 \times (-2464133952i).$$

Отсюда следует, что $[\mathbf{8}]$ являются рекуррентными формулами для получения бесконечного множества взаимно-простых целочисленных решений уравнения $[\mathbf{10}]$, используя упомянутые выше целочисленные частные решения уравнения

$$x^4 = y^4 + a^4 + b^4 \quad [\mathbf{10}]$$

, например,

$$95800^4 + 217519^4 + 414560^4 = 422481^4.$$

§ 6

6.1. Покажем, что следствия из **§ 3** п.п. 3.2-3.4. могут быть распространены и на уравнения

$$x^4 = y^4 + a^4 + b^4$$

Из п. 5.2. $x_0 = \sqrt{9}; y_0 = \sqrt{4i};\ a_0 = \sqrt{8};\ b_0 = 1;$

6.1.1.

$$x_0^4 - b_0^4 = a_0^4 - (y_0'\sqrt{i})^4$$

$$(\sqrt{9})^4 - 1^4 = \left(\sqrt{8}\right)^4 - (\sqrt{4i})^4$$

6.1.2.

$$a^2 + y^2 = 8 + 4i = 2m_1m_2$$

$$a^2 - y^2 = 8 - 4_i = 2n_1n_2$$

$$x^2 + b^2 = 9 + 1 = 2m_1n_2 = 10$$

$$x^2 - b^2 = 9 - 1 = 2m_2n_1 = 8$$

6.1.3.

$$\frac{2m_1m_2}{2m_1n_2} \equiv \frac{8+4i}{10};\ \frac{m_2}{n_2} = \frac{4+2i}{5};\ m_2 = 4+2i;\ n_2 = 5.$$

$$\frac{2m_1m_2}{2m_2n_1} = \frac{4+2i}{8} = \frac{2+i}{4};\ m_1 = 2+i;\ n_1 = 4$$

6.1.4.

$$[(2+i)^4 - 4^4][(4+2_i)^4 - 5^4] = (\sqrt{8}\sqrt{4i})^4 - (\sqrt{9}\times 1)^4$$

$$[(2+i)^2 - 16][(2+i)^2 + 16][(4+2i)^2 - 25][(4+2i)^2 + 25] =$$

$$= (4i - 13)(4i + 19)(32i - 13)(16i + 37) = -2^{10} - 3^4 \quad [\mathbf{14}].$$

Литература:

4. Саймон Сингх, “Великая теорема Ферма”, 2000, гл. IV

5. В.Серпинсккий , “О решении уравнений в целых числах”, Физматгиз ,Москва, 1961, стр. 58 п.13.3.

6. А.Г. Курш, “Курс высшей алгебры”, Физматгиз, Москва, 1951.