Härledning av tröghetskrafter (och energin) i Newtons mekanik.

Författare **Carl-Gustav Hedenby**[1]
Dokumentet initierat *7 april 2015*.

Extrakt

Jag visar hur tröghetskrafterna i ett roterande system samt vid likformig, linjär acceleration kan härledas från den klassiska kinetiska energin, samt repeterar min härledning av denna.

Bakgrund

Tröghetskrafter i roterande system (centrifugalkraften) har diskuterats ända sedan Newtons tid och då i samband med att man velat fastställa huruvida det accelererade systemet rör sig relativt något eller om saken är fråga om absolut rörelse (experimentet med spannen samt tanke-experimentet med roterande glober). Även Einstein har efterfrågat en förklaring till varför en roterande sfär buktar ut i jämförelse med en icke roterande. Förslag har funnits om att fixstjärnor sammantaget är upphov till centrifugalkrafter lokalt. I sitt år 1916 publicerade arbete om sin allmänna relativitetsteori säger Einstein i §2 att Newtons teori inte innehåller någon förklaring till centrifugalkrafter och att orsaken måste sökas hos inflytandet från avlägsna massor. Han nämner även att Ernst Mach gjort iakttagelser där.

Min teori

I mitt i januari 2007 publicerade arbete "Odd Notes" visade jag i "Item #4, Centrifugal Force, sid. 3" att vid likformig rotation rumsderivatan av den kinetiska energin är lika med med centrifugalkraften[2]. Jag hade då ingen aning om ifall denna omständighet var känd på annat håll och har det fortfarande inte. Men jag har blivit medveten om den problematik som nämns i avsnittet "Bakgrund" här. Jag kom nyligen att tänka på att om en allmän sådan princip förelåg som visade sig vid centrifugalkraften, skulle även tröghetskrafter vid rörelse utan riktningsförändring kunna uttryckas. Jag har forskat fram följande uträkning vid konstant acceleration i *x*-riktningen med Newtons kinematik:

Låt accelerationen vara konstant och lika med *(a)*. Då är

$$d^2x/dt^2 = a \; .$$

Man får genom integration att hastigheten

$$dx/dt = v(t) = a\cdot t + (\text{konstant1})$$

som benämns ekvation (1). Ännu en integration ger vägen

$$x(t) = a\cdot t^2/2 + (\text{konstant1})\cdot t + (\text{konstant2})$$

som kallas ekvation (2). I det enklaste fallet är *(konstant1)* och *(konstant2)* lika med noll. Nu ger ekvation (2) att

$$t = (2x/a)^{1/2} \; ,$$

vilket insatt i ekvation (1) medför att

$$v(x) = (2a\cdot x)^{1/2} \; .$$

Den kinetiska energin $mv^2/2$, där m är massan, som funktion av (x) blir då

$$mv^2(x)/2 = ma \cdot x \ .$$

Rumsderivatan av energin $d(ma \cdot x)/dx$ blir även i detta fall lika med tröghetskraftens belopp, nämligen $F = ma$. Enär man måste använda Newtons andra lag för att få energin* är detta dock inget bevis av den.

I rotationsfallet pekar tröghetskraften i ökande energiriktning medan den i "raka" fallet pekar motsatt. Man skulle ha velat skriva att $\boldsymbol{F} = - grad(E)$ men får då något problem vid rotation. Vektorn $grad(E)$ är som vanligt $(dE/dx, dE/dy, dE/dz)$. Men om jag skriver att

$$/\mathbf{F}/ = \mathrm{grad}(E)$$

är det förenligt med det som jag hittills visat. I båda fallen är tröghetskraften motsatt hastighetens förändringsriktning.

***Härledning av energin**
I "Odd Notes", "Item#10, dE/dp in Mechanics, sid. 5" härleder jag energin från Newtons andra lag och definitionen på arbete. Med momentum $p=mv$ är $dp=F \cdot dt$ samt $dE=F \cdot dx$ som kombinerat ger att $dE/dp = dx/dt = v = p/m$. Integration medför att $E = p^2/2m + (funktion)$, där funktionen är lägesenergin som inte beror av p.

Litteratur
Einstein, Albert: Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie, 1916 översatt i The Principle of Relativity, Dover Publications 1st ed 1952
Maudlin, Tim: Philosophy of Physics - Space and Time, Princeton University Press 2012
Maxwell, James Clerk: Matter and Motion, Dover Publications 1991 (1952)

---

[1] Född 7 juli 1952 i Malmö, Sverige. Pseudonym Rei Beaumanner.
[2] Citerat från "Odd Notes":

> Let a mass m move in a circular orbit with radius r at constant velocity magnitude v and angular velocity ω. Hence $v=\omega \cdot r$ and the kinetic energy $mv^2/2$ is equally
>
> $$E = m\omega^2 r^2 / 2.$$
>
> Taking the derivative of the energy into the radius:
>
> $$dE / dr = m\omega^2 r = mv^2 / r.$$
>
> The space derivative of the kinetic energy is equal to the centrifugal force.

Dokumentet utskrifvet *20 juni 2015*.