La teoría 1/4 de Einstein

The theory 1/4 of Einstein

Wenceslao Segura González
Investigador independiente
e-mail: wenceslaoseguragonzalez@yahoo.es
web: http://wenceslaoseguragon.wix.com/wenceslao-segura

Sinopsis. En el año 1919 Einstein publicó un artículo donde expuso que las partículas cargadas eran estables por efecto de una fuerza de origen gravitatorio. Einstein modificó la ecuación de la Relatividad General, cambiando el coeficiente numérico 1/2 por el de 1/4. La nueva teoría satisface todos los resultados de la Relatividad General, e introduce de forma natural la constante cosmológica, explicando la tensión de Poincaré como un efecto gravitatorio. Analizamos esta teoría de Einstein y comprobamos que no existen partículas esféricas y estáticas.

Abstract. In 1919 Einstein published an article in which he stated that the charged particles were stable as a result of a force of gravitational origin. Einstein modified the equation of general relativity, changing the numerical coefficient 1/2 by 1/4. The new theory satisfies all the results of General Relativity, and introduced naturally the cosmological constant, explaining the tension of Poincare as a gravitational effect. We analyze this theory of Einstein and check that there are no spherical particles and static.

Contenido

La versión *v1* del artículo «Teoría 1/4 de Einstein» fue publicada el día 17 de junio de 2015

La teoría 1/4 de Einstein

The theory 1/4 of Einstein

Wenceslao Segura González
Investigador independiente
e-mail: wenceslaoseguragonzalez@yahoo.es
web: http://wenceslaoseguragon.wix.com/wenceslao-segura

1.- Introducción

La interpretación electromagnética de la naturaleza surgida a final del siglo XIX pretendía no sólo explicar todas las fuerzas (entre ellas la gravitatoria) como un efecto electromagnético, sino que perseguía explicar la materia, la cual se entendía como formada por el campo electromagnético.

La densidad de carga eléctrica de una partícula se ve sometida a la fuerza repulsiva de Coulomb, por tanto una partícula cargada no puede ser estable a menos que exista una fuerza que contrarreste a la fuerza eléctrica desintegradora. A estas fuerzas cohesionadoras se le llamó tensiones de Poincaré, que se trataron de explicadas como fuerzas electromagnéticas.

En este debate sobre la explicación electromagnética de la materia terció Einstein con su artículo titulado: «¿Juegan los campos gravitatorios una parte esencial en la estructura de las partículas elementales de materia?» publicado en el año 1919, cuatro años después de la formulación de la Relatividad General. La idea de Einstein consiste en explicar la tensión de Poincaré como una fuerza gravitatoria atractiva, capaz de generar la presión negativa necesaria para estabilizar a una partícula cargada.

Einstein reformuló la ecuación de la gravitación de la Relatividad General, sustituyendo el coeficiente numérico 1/2 por el de 1/4, de aquí el nombre que le hemos dado a la teoría. La nueva ecuación de la gravedad entiende que toda la materia es de origen electromagnético, con tensión de Poincaré gravitatoria; además, aparece la constante cosmológica de forma natural, no como en la Relatividad General donde se introduce *ad hoc*.

En esta investigación vamos a exponer la que llamamos «teoría 1/4» de Einstein, analizamos el tensor de energía-momento de Poincaré y comprobamos que no existe como solución partículas cargadas esféricas y estáticas. Añadimos tres apéndices que pueden favorecer un entendimiento más profundo de la temática tratada en este artículo.

2.- La ecuación de campo gravitatorio de la Relatividad General

La ecuación de campo gravitatorio de la Relatividad General es

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = -\chi T_{ik} \tag{1}$$

donde R_{ik} es el tensor de Ricci * definido como la contracción del tensor de curvatura $R^r{}_{iks}$

$$R_{ik} = R^r{}_{ikr} = \Gamma_{ir,k}{}^r - \Gamma_{ik,r}{}^r + \Gamma_{ir}{}^t \Gamma_{tk}{}^r - \Gamma_{ik}{}^t \Gamma_{tr}{}^r$$

siendo $\Gamma_{ik}{}^r$ los símbolos de Christoffel; R es la curvatura escalar o contracción del tensor de Ricci; g_{ik} es el tensor métrico simétrico; T_{ik} es el tensor simétrico de energía-momento de la fuente del campo y χ es una constante relacionada con la constante de gravitación universal G por $\chi = 8\pi G/c^2$. Indiquemos que las fuentes del campo son tanto los cuerpos materiales como los campos y en general cualquier forma de energía. Se admite

* Para lo referente a la matemática empleada en este artículo nos remitimos al libro SEGURA GONZÁLEZ, Wenceslao: *La conexión afín. Aplicación a la teoría clásica de campo*, eWT Ediciones, 2015, que se puede descargar gratuitamente en la dirección http://vixra.org/abs/1504.0085.

una generalización de (1)

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R + \lambda g_{ik} = -\chi T_{ik} \, .$$

donde λ es la constante cosmológica que dada su extremada pequeñez sólo debe ser considerada en los cálculos cósmológicos.

Por aplicación de la identidad de Bianchi se llega a

$$D_i \left(R^i{}_k - \frac{1}{2} \delta^i_k R \right) = 0,$$

por tanto por (1) también se tiene que cumplir

$$D_i T^i{}_r = 0, \tag{2}$$

como el espacio es riemaniano se cumple $D_r g_{ik} = 0$, entonces (2) es equivalente a

$$D_i \boldsymbol{T}^i{}_r = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \partial_i \boldsymbol{T}^i{}_r - \frac{1}{2} \boldsymbol{T}^{sr} \partial_r g_{sr} = 0$$

siendo $\boldsymbol{T}^i{}_r$ la densidad tensorial $\boldsymbol{T}^i{}_r = \sqrt{g} T^i{}_r$ y g es el valor absoluto del determinante de la matriz formada por las componentes covariantes del tensor métrico.

La ecuación (2) cabe descomponerla en dos partes

$$D_i T^i{}_0 = 0; \qquad D_i T^i{}_\alpha = 0$$

(α va de 1 a 3), la primera de estas ecuaciones corresponde a la conservación de la energía y el segundo grupo es la ecuación de conservación del momento lineal.

3.- Ecuación de movimiento

Supongamos que el sistema está formado por un medio continuo que se encuentra en un campo electromagnético, entonces el tensor energía-momento se descompone

$$T^i{}_r = T^{(e)i}{}_r + T^{(m)i}{}_r$$

el primer sumando es la parte electromagnética y el segundo es el de la materia que forma el medio continuo. El tensor de campo electromagnético como aparece en la teoría de Maxwell es

$$T^{(e)i}{}_r = -\varepsilon_0 F^{iq} F_{rq} + \delta^i_r \frac{\varepsilon_0}{4} F_{pq} F^{pq} \tag{3}$$

F_{ik} es el tensor de campo electromagnético definido * por

$$F^{ik} = \frac{\partial \phi^k}{\partial x_i} - \frac{\partial \phi^i}{\partial x_k}$$

y $\phi^k = (\phi, c\mathbf{A})$ el tetrapotencial electromagnético, siendo ϕ el potencial electroestático y $\mathbf{A}$ el potencial vector.

Con estas definiciones encontramos

$$D_i T^{(e)i}{}_r = -\varepsilon_0 D_i F^{iq} F_{rq} \tag{4}$$

en la deducción hemos tenido en cuenta el carácter antisimétrico de F^{ik} y que es posible alterar el orden de las derivaciones covariantes $D_i D_k \equiv D_k D_i$. El primer grupo de ecuaciones de campo electromagnético es

$$D_i F^{qi} = -\frac{1}{\varepsilon_0} j^q$$

donde $j^k = \rho_0^{(e)} u^k / c$ es la densidad de corriente eléctrica de un elemento de volumen, $\rho_0^{(e)}$ es la densidad propia de carga eléctrica y u^k es la tetravelocidad del elemento de volumen, por tanto (4) es

$$D_i T^{(e)i}{}_r = -j^q F_{rq} \, . \tag{5}$$

Al aplicar la ecuación de conservación (2)

---

* No se puede definir el tensor de campo electromagnético por

$$F_{ik} = \frac{\partial \phi_k}{\partial x^i} - \frac{\partial \phi_i}{\partial x^k}$$

este tensor no es la componente covariante del F^{ik} definido en el texto. ambas definiciones son diferentes.

$$D_i T^{(e)i}{}_r + D_i T^{(m)i}{}_r = 0$$

por (A.15) y (5)

$$f_r = j^q F_{rq} \tag{6}$$

que corresponde a la fuerza de Lorentz o ecuación de movimiento de un elemento de volumen de un medio continuo que se encuentran en un campo electromagnético.

4.- Modificación de la ecuación de la Relatividad General

Una teoría de campo debe explicar no solamente el origen de las fuerzas, sino también la formación de la materia y su interacción con los campos. Desde final del siglo XIX se multiplicaron los intentos para explicar la existencia de las cargas eléctricas a partir del campo electromagnético. No obstante un problema surgió. Una partícula cargada, por ejemplo un electrón, estaría íntegramente formada por electricidad negativa, la cual se vería sometida a la fuerza repulsiva de Coulomb, lo que singificaría que sería inestable y se desintegraría. Para conseguir una partícula cargada estable había que suponer que dentro de ella existieran fuerzas atractivas que contrarestaran a la eléctrica y que dieran estabilidad a la carga, estas fuerzas recibieron el nombre de tensiones de Poincaré.

Se intentó interpretar las tensiones de Poincaré como fuerzas de origen electromagnético, para lo que había que modificar la teoría electromagnética.

Al poco de formularse la teoría general de la relatividad, Einstein sugirió que la materia estaría formada por el campo electromagnético, pero las tensiones de Poincaré tendrían un origen gravitatorio. Se trata de la que llamamos teoría «un cuarto» por el coeficiente numérico que aparece en las ecuaciones que más adelante planteamos.

Einstein supone que la única fuente de campo gravitatorio es el campo electromagnético puesto que la matería no existe como algo independiente, sino que está constiuida por campos electromagnéticos. Además, supone que las ecuaciones de campo gravitatorio deben ser del estilo de (1)

$$G_{ik} = -\chi T^{(e)}_{ik}$$

es decir una expresión tensorial G_{ik} en función del tensor métrico y sus primeras y segundas derivadas que se iguala al tensor de energía-momento $T^{(e)}_{ik}$ del campo electromagnético.

En la teoría «un cuarto» siguen siendo válidas las ecuaciones de Maxwell

$$D_i F^{qi} = -\frac{1}{\varepsilon_0} j^q \ ; \qquad \frac{\partial F^{iq}}{\partial x_k} + \frac{\partial F^{qk}}{\partial x_i} + \frac{\partial F^{ki}}{\partial x_q} = 0$$

de donde se deriva el tensor de energía-momento (3), que posee la propiedad de tener traza nula

$$T^{(e)i}{}_i = 0$$

por tanto también se tiene que cumplir $G^i{}_i = 0$, esta propiedad la tiene la expresión

$$G_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{4} g_{ik} R$$

por consiguiente la teoría que propone Einstein tiene de ecuación de campo gravitatorio

$$R_{ik} - \frac{1}{4} g_{ik} R = -\chi T^{(e)}_{ik} \tag{7}$$

a primera vista parece una ecuación diferente de (1) pero como más adelante veremos, de (7) se pueden deducir los resultados a los que se llega con (1).

5.- La estabilidad de las partículas cargadas

El primer sumando de (7) no cumple el requisito de que su divergencia sea nula tal como ocurría con (1), sino que toma el valor

$$D_i \left(R^i{}_k - \frac{1}{4} \delta^i_k R \right) = \frac{1}{4} \partial_k R$$

expresión que hemos calculado usando la identidad de Bianchi y teniendo presente que la derivada covariante de un escalar (como es el caso de *R*) es igual a su derivada parcial. Por (5) y (6) se encuentra al hallar la divergenia de (7)

$$f_k - \frac{1}{4\chi}\frac{\partial R}{\partial x^k} = 0. \tag{8}$$

Vamos a interpretar (8), para ello vamos a elevar los índices con el tensor métrico

$$g^{pk} f_k - \frac{1}{4\chi} g^{qk} \frac{\partial R}{\partial x^k} = 0 \quad \Rightarrow \quad f^q - \frac{1}{4\chi} g^{qk} \frac{\partial R}{\partial x^k} = 0\ , \tag{9}$$

f^q representa la tetrafuerza por unidad de volumen, que tiene de componentes espaciales $\mathbf{f} = d\mathbf{F}/dV$. (9) nos dice que las fuerzas electromagnéticas (representada por $f^k = g^{pk} j^q F_{kq} = j^q F^p{}_q$) son contrarrestada por una fuerza de origen gravitatorio expresada por

$$-\frac{1}{4\chi} g^{qk} \frac{\partial R}{\partial x^k} = 0 \tag{10}$$

consiguiendo de esta forma la estabilidad de una partícula cargada.

Para concretar vamos a suponer una distribución con simetría esférica y estática, entonces el elemento de línea en el interior de la partícula en coordenadas esféricas es

$$ds^2 = b(r)c^2dt^2 - a(r)dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)$$

las funciones $b(r)$ y $a(r)$ deben ser determinadas a partir de la ecuación de campo gravitatorio. Las únicas componentes de las fuerzas en el interior de la carga son las radiales. La fuerza de repulsión eléctrica es positiva, en el sentido de que se aleja del centro de la carga y se dirige en la dirección hacia afuera de la partícula, por tanto la fuerza gravitatoria que la contraresta (10) debe ser una fuerza negativa, es decir que debe estar dirigida hacia el centro de la partícula. Esto significa que

$$-\frac{1}{4\chi} g^{rr} \frac{\partial R}{\partial r} = \frac{1}{4\chi a}\frac{\partial R}{\partial r} < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial R}{\partial r} < 0$$

o sea, que la curvatura escalar aumenta a medida que nos acercamos al centro de la carga *. En la siguiente ilustración hacemos una representación de cómo varía la curvatura escalar. A partir de la «distancia» r_0 la curvatura escalar deja de tener el valor constante exigido por la constante cosmológica y va en aumento, lo que permite que surja una presión negativa que contrarrestre a la fuerza de repulsiva de Coulomb.

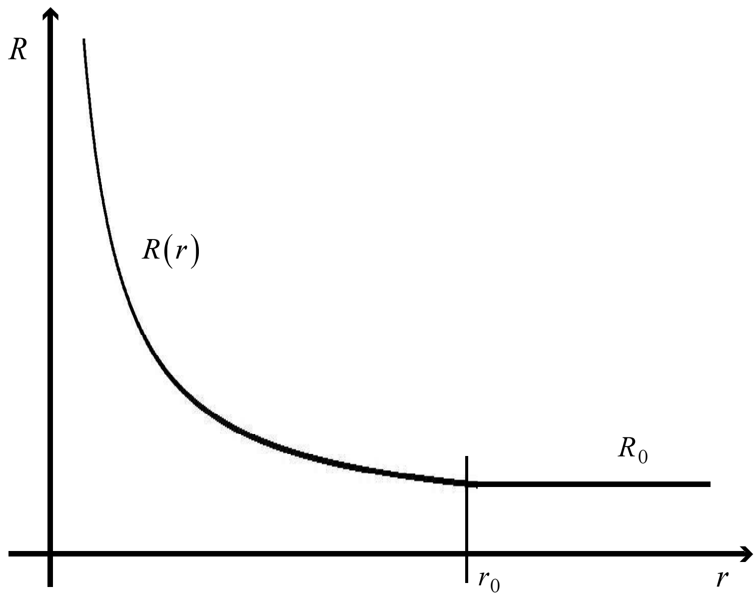

Ilustración 1.- Variación de la curvatura escalar fuera ($r > r_0$) y dentro ($r < r_0$) de la partícula cargada de radio r_0.

* En su reseña a la teoría un cuarto de Einstein, Pauli afirma sin demostración: «En el interior de una partícula material, *R* decrece continuamente desde el valor R_0 a más pequeños y más pequeños valores, hasta el centro de la partícula». No parece que sea así como mostramos en el texto, además la presencia de un tensor energía-momento electromagnético en el interior de la partícula producirá una curvatura del espacio-tiempo mayor que en el exterior.

6.- La curvatura escalar en el exterior de la materia

En el espacio exterior a la partícula cargada existirá campo electromagnético, pero no densidades de carga, es decir $f_k = 0$ entonces por (8)

$$\frac{\partial R}{\partial x^k} = 0$$

lo que significa que R es una constante que toma el mismo valor R_0 en todos los puntos exteriores a las partículas.

Dentro de la partícula cargada tendrá plena validez (8) que se puede poner como

$$F_{kq}\,\rho_0^{(e)}\frac{u^q}{c} - \frac{1}{4\chi}\frac{\partial R}{\partial x^k} = 0$$

multiplicando toda la expresión por u^k

$$\frac{\partial R}{\partial x^k}\frac{dx^k}{d\tau} = \frac{dR}{d\tau} = 0 \qquad (11)$$

donde hemos aprovechado la propiedad de que F_{kq} es antisimétrico y por tanto se anula al multiplicarse por una expresión simétrica como $u^q u^k$. Un determinado punto interior de la partícula cargada describe una línea en el espacio-tiempo dada paramétricamente por $x^k = x^k(\tau)$, entonces (11) viene a decir que a lo largo de la línea del mundo que recorre ese punto de la partícula, R es invariable y por tanto independiente del tiempo, aunque el valor de R será diferente en otros puntos de la partícula.

7.- El tensor de energía-momento de Poincaré

La ecuación (7) para el campo gravitatorio no representa, en esencia, una nueva teoría y coincide en lo principal con las ecuaciones de la Relatividad General con término cosmológico; en efecto, de (7)

$$R_{ik} - \frac{1}{4}g_{ik}R + \frac{1}{4}g_{ik}R_0 = -\chi T_{ik}^{(e)} + \frac{1}{4}g_{ik}R_0$$

y reagrupando

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R + \frac{1}{4}g_{ik}R_0 = -\chi\left[T_{ik}^{(e)} + \frac{1}{4\chi}g_{ik}\left(R - R_0\right)\right]$$

interpretando la constante $\lambda = R_0/4$ como el término cosmológico, queda

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R + \lambda g_{ik} = -\chi T_{ik}$$

donde

$$T_{ik} = T_{ik}^{(e)} + \frac{1}{4\chi}g_{ik}\left(R - R_0\right)$$

es el tensor energía-momento total de la materia *; su segundo sumando

$$\overline{T}_{ik} = \frac{1}{4\chi}g_{ik}\left(R - R_0\right)$$

representa las tensiones de Poincaré de origen gravitatorio. Los elementos espaciales de su diagonal principal correponden al tensor de tensiones que existe en el interior de las partículas

$$\overline{T}^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\chi}g^{\alpha\beta}\left(R - R_0\right)$$

donde los índices griegos van de 1 a 3; si suponemos simetría esférica en el interior de la partícula cargada entonces el tensor de tensiones sólo tendrá distinto de cero los elementos de la diagonal principal, que representa la presión de Poincaré $\overline{p}$. Si usamos coordenadas pseudocartesianas, el elemento de línea en el interior de la partícula es

* El campo gravitatorio tiene fuentes internas y externas. El primer tipo de fuente es el propio campo gravitatorio, que a su vez produce gravedad. En la teoría general de la Relatividad el tensor energía-momento que aparece en su ecuación de campo T_{ik} se refiere exclusivamente a las fuentes externas. No obstante, en la teoría «un cuarto» T_{ik} además de las fuentes externas contiene fuentes internas, como el tensor de Poincaré $\overline{T}_{ik}$.

$$ds^2 = b(r)c^2dt^2 - \gamma(r)\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right)$$

por tanto

$$\overline{p} = -\frac{1}{4\chi\gamma}(R - R_0)$$

(R es mayor o igual a R_0), nótese que la presión de Poincaré es negativa.

La tensión de Poincaré de origen gravitatorio no tiene asociada una densidad de momento lineal, siempre y cuando consideremos que el interior de la partícula es un sistema es estático; sin embargo, sí existe una densidad de energía

$$\overline{T}^{00} = \frac{b}{4\chi}(R - R_0)$$

que depende de la «distancia» r del elemento de volumen al centro de la partícula. La energía total de la partícula cargada de origen gravitatoria es

$$W = \frac{1}{4\chi}\int_0^{r_0} b(r)\left[R(r) - R_0\right]dV$$

r_0 es el radio de la partícula, cuya superficie está caracterizada por $R(r_0) = R$ y $\rho_0^{(e)}(r_0) = 0$.

8.- Evaluación de la energía

Vamos suponer un sistema formado por partículas en forma de «polvo», es decir que no existe presión, y hay ausencia de campo electromagnético externo a las partículas (o al menos se puede despreciar). También vamos a suponer que el campo gravitatorio exterior a las partículas es suficientemente pequeño, hasta el extremo de que podemos considerar que el sistema se encuentra en un espacio euclídeo y por tanto el tensor métrico del espacio interpartícula es el tensor de Minkowski η_{ik} (en el caso de utilizar coordenadas pseudocartesianas); naturalmente la energía del campo gravitatorio externo a las partículas también es despreciable. Con estas suposiciones el sistema es un fluido perfecto, y si todas las partículas están en reposo, tendrá un tensor energía-momento dado por

$$T^{ik} = \rho_0 u^i u^k$$

donde ρ_0 es la densidad propia de masa del sistema de partículas, o en forma matricial

$$\left(T^{ik}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_0 c^2 \end{pmatrix},$$

las correspondientes componentes convariantes son

$$T_{ik} = \eta_{ip}\eta_{kq}T^{pq},$$

como el tensor de Minkowski (en coordenadas pseudocartesianas) sólo tiene distinto de cero los elementos de la diagonal principal y que son $(1, -1, -1, -1)$, entonces

$$T_{00} = \eta_{00}\eta_{00}T^{00} = T^{00} = \rho_0 c^2; \qquad T_{\alpha\alpha} = \eta_{\alpha\alpha}\eta_{\alpha\alpha}T^{\alpha\alpha} = T^{\alpha\alpha} = 0.$$

La traza es

$$T^i{}_i = T = \rho_0 c^2; \qquad T^0{}_0 = \rho_0 c^2.$$

Como ya hemos señalado el tensor energía-momento total viene dado por

$$T_{ik} = T_{ik}^{(e)} + \overline{T}_{ik}$$

como la traza del tensor energía-momento electromagnético es nulo entonces

$$T = T^i{}_i = \overline{T}^i{}_i = \frac{1}{\chi}(R - R_0) \quad \Rightarrow \quad \overline{T}_{ik} = \frac{1}{4}\eta_{ik}T,$$

entonces

$$T_{ik}^{(e)} = T_{ik} - \overline{T}_{ik} = T_{ik} - \frac{1}{4}\eta_{ik}T = T_{ik} - \frac{1}{4}\eta_{ik}\rho_0 c^2,$$

o en forma mixta

$$T^{(e)i}{}_{k}=T^{i}{}_{k}-\frac{1}{4}\delta^{i}_{k}\rho_{0}c^{2},$$

de donde se deduce

$$T^{(e)1}{}_{1}=T^{(e)2}{}_{2}=T^{(e)2}{}_{2}=-\frac{1}{4}\rho_{0}c^{2}$$

pero como la traza del tensor energía-momento electromagnético es nulo debe ser

$$T^{(e)0}{}_{0}=\frac{3}{4}\rho_{0}c^{2},$$

ahora bien, como la densidad de energía total del sistema es $T^{00}=T^{0}_{0}=\rho_{0}c^{2}$ debemos admitir que la cantidad que le falta a la energía electromagnética para llegar a la energía total debe ser energía gravitatoria asociada a las tensiones internas de las partículas. La conclusión por tanto es que la energía de las partículas es 3/4 de origen electromagnética y 1/4 gravitatoria.

9.- Solución esférica y estática

Vamos a resolver la ecuación de campo (7) para el interior de una partícula cargada. Vamos a suponer que existe simetría esférica y que el sistema es estático, entonces el elemento de línea es

$$ds^{2}=b(r)c^{2}dt^{2}-a(r)dr^{2}-r^{2}\left(d\theta^{2}+\sin^{2}\theta d\varphi^{2}\right) \tag{12}$$

con $a(r)$ y $b(r)$ dos funciones que sólo dependen de la coordenada *r* y que se obtienen de las ecuaciones de campo gravitatorio. El tensor energía-momento que aparece en (7) es el del campo electromagnético. Como el sistema es estático el campo magnético es nulo, entonces el tetrapotencial es

$$\phi^{k}=(\phi,0)$$

donde ϕ es el potencial eléctrico que sólo depende de la coordenada *r*. El tensor de energía-momento expresado en coordenadas esféricas ($x^{1}=r$; $x^{2}=\theta$; $x^{3}=\varphi$) sólo tiene distinto de cero las componentes F^{10} y F^{01}

$$F^{10}=\frac{\partial\phi}{\partial x_{1}}=\frac{\partial\phi}{\partial x^{1}}\frac{\partial x^{1}}{\partial x_{1}}=g^{11}\frac{\partial\phi}{\partial r}=-\frac{1}{a}\frac{\partial\phi}{\partial r}=\frac{1}{a}E_{r}=-\frac{1}{a}E=-F^{01}$$

y las únicas componentes covariantes del tensor de campo electromagnético son

$$F_{pq}=g_{pm}g_{qn}F^{mn}\quad\Rightarrow\quad F_{10}=g_{11}g_{00}F^{10}=bE$$

y $F_{01}=-bE$. Entonces el tensor de energía-momento (3) es en notación matricial y en coordenadas esféricas

$$T^{(e)i}{}_{r}=\frac{1}{2}\varepsilon_{0}\frac{b}{a}E^{2}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \tag{13}$$

que como sabemos tiene traza nula.

Del tensor métrico del elemento de línea (12) se obtiene que las componentes mixtas del tensor de Ricci son

$$R^{1}_{1}=-\frac{1}{a}\frac{b''}{2b}+\frac{1}{4}\frac{b'}{ba}\left(\frac{b'}{b}+\frac{a'}{a}\right)+\frac{1}{r}\frac{a'}{a^{2}}$$

$$R^{2}_{2}=\frac{1}{r^{2}}+\frac{1}{2ar}\left(\frac{a'}{a}-\frac{b'}{b}\right)-\frac{1}{ar^{2}}$$

$$R^{3}_{3}=R^{2}_{2}$$

$$R^{0}_{0}=-\frac{b''}{2ab}+\frac{1}{4}\frac{b'}{ab}\left(\frac{a'}{a}+\frac{b'}{b}\right)-\frac{1}{r}\frac{b'}{ab}$$

la prima significa derivación respecto a *r*. Mientras que la curvatura escalar es

$$R=R^{1}_{1}+R^{2}_{2}+R^{3}_{3}+R^{0}_{0}=$$

$$=-\frac{b''}{ab}+\frac{1}{2}\frac{b'^{2}}{b^{2}a}+\frac{b'a'}{2ba^{2}}+\frac{2a'}{ra^{2}}-\frac{2b'}{abr}+\frac{2}{r^{2}}-\frac{2}{ar^{2}}.$$

Ahora se puede calcular el primer sumando de (7) obteniendo así las ecuaciones de campo ya que también es conocido el tensor energía-momento. Obtenemos tres ecuaciones diferenciales (ya que las correspondientes a las coordenadas θ y φ son iguales) de segundo orden y tres funciones desconocidas $E(r)$, $a(r)$ y $b(r)$.

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\frac{b''}{b}+\frac{1}{4}\frac{b'^2}{b^2}+\frac{1}{4}\frac{a'b'}{ab}+\frac{a'}{ar}+\frac{b'}{br}-\frac{a}{r^2}+\frac{1}{r^2}&=-\chi\varepsilon_0 bE^2 \\ \frac{1}{2}\frac{b''}{b}-\frac{1}{4}\frac{b'^2}{b^2}-\frac{1}{4}\frac{a'b'}{ab}+\frac{a}{r^2}+\frac{1}{r^2}&=\chi\varepsilon_0 bE^2 \\ -\frac{1}{2}\frac{b''}{b}+\frac{1}{4}\frac{b'^2}{b^2}+\frac{1}{4}\frac{a'b'}{ab}-\frac{a'}{ar}-\frac{b'}{br}-\frac{a}{r^2}+\frac{1}{r^2}&=-\chi\varepsilon_0 bE^2 \end{aligned} \tag{14}$$

Restando la primera y tercera ecuación se obtiene

$$\frac{a'}{a}=-\frac{b'}{b}$$

sustituyendo esta expresión en la primera y segunda ecuación y luego sumando ambas encontramos un resultado absurdo ($2/r^2=0$), lo que significa que no existe solución para el caso planteado de partícula cargada con simetría esféria y estática.

Tanto Einstein como Pauli afirman que «cualquier distribución estática y esféricamente simétrica de electricidad está en equilibrio», lo cual entendían como un resultado negativo pues la experiencia muestra que sólo existen en la naturaleza partículas con determinados valores de masa y carga.º

No encontramos, sin embargo, ningún problema cuando se analiza el exterior de la partícula, que como hemos dicho tiene asociada una curvatura escalar constante R_0 que está relacionada con la constante cosmológica. En efecto, en el exterior de la partícula donde $R=R_0$ la ecuación de campo es

$$R_{ik}-\frac{1}{4}g_{ik}R_0=-\chi T_{ik}^{(e)} \qquad \Rightarrow \qquad R_{ik}-\lambda g_{ik}=-\chi T_{ik}^{(e)}$$

cuya solución es la métrica de Reissner–Nordström.

10.- Conclusión

Examinamos la teoría con la que Einstein interpreta la estabilidad de las partículas cargadas constituidas por campo electromagnético. La llamamos teoría «un cuarto» por el coeficiente numérico que aparece en la nueva ecuación de campo gravitatorio (7). La tensión de Poincaré es de origen gravitatorio, resultado de una presión que obedece a que la curvatura escalar en el interior de la carga es distinta del exterior y además es variable, aumentando a medida que nos acercamos al centro de la partícula.

De la nueva ecuación de campo gravitatorio de Einstein (7) se deducen los mismos resultados que con la ecuación de la Relatividad General (1) y además la nueva teoría admite con naturalidad la constante cosmológica que en la teoría general de la Relatividad hay que introducir *ad hoc*.

La tensión de Poincaré gravitatoria exige la aparición de un tensor de energía-momento en función de la curvatura escalar responsable de la presión que permite la estabildiad de las partículas cargadas y que además aporta una energía gravitatoria.

Concluimos este trabajo aplicando la teoría a una partícula cargada esférica y estática, resultando que no existe solución para esta clase de partículas, exigiéndose por tanto o la presencia de campo magnético en el interior de la partícula cargada o que no sea esférica.

Añadimos como apéndice a esta investigación un breve resumen de la mecánica relativista de los medios continuos cuyos resultados son de aplicación al texto principal.

APÉNDICE A: Mecánica relativista del medio continuo

1.A.- Ecuación de movimiento de un medio continuo en mecánica clásica

En Relatividad no es admisible el concepto de sólido rígido. Si sobre un cuerpo actúa una fuerza sobre uno de sus extremos, esa acción tardará un tiempo en propagarse a lo largo del cuerpo, siempre con una velocidad igual o menor que la de la luz. De tal forma que una parte del cuerpo (aquella sometida a la fuerza) empezará a adquirir una aceleración (o bien una deformación) mientras que el resto del cuerpo (al que aún no le ha llegdo la acción de la fuerza) no estaría experimentando aceleración (ni deformación en su caso). El resultado es la deformación del cuerpo. Por esta razón el concepto de medio continuo adquiere en Relatividad un papel preponderante.

Uno de los conceptos básicos en la descripción de los medios continuos es el tensor de tensiones. Démonos cuenta que sobre una porción del medio continuo pueden actuar dos tipos de fuerzas: las originadas por acción a distancia o fuerzas del volumen (tales como la gravedad) y las fuerzas de superficie o de contacto, que son aplicadas a través de la superficie del elemento de volumen sobre el que actúan. Para describir esta fuerza es necesario introducir el tensor de tensiones $t_{\alpha\beta}$ (donde α y β van de 1 a 3), ya que la fuerza y la superficie sobre la que actúa no siempre están alineados. La fuerza dF_α que actúa sobre un elemento de superficie dS_β de un volumen del medio continuo es dada por

$$dF_\alpha = -t_{\alpha\beta}\, dS_\beta$$

donde sumamos respecto a índices repetidos. Estamos suponiendo que el vector superficie está dirigido hacia afuera del volumen, entonces debe aparecer el signo menos, pues la fuerza de la expresión anterior es la que el medio exterior aplica sobre el elemento de volumen, naturalmente también existe una fuerza de este volumen aplicado al medio exterior.

La ecuación de movimiento de un medio continuo en mecánica clásica resulta de la aplicación del segundo principio newtoniano

$$\int \rho a_\alpha dV = \int f_\alpha dV - \int t_{\alpha\beta}\, dS_\beta$$

donde ρ es la densidad de materia, a_α la aceleración del elemento de volumen dV y f_α la fuerza de acción a distancia por unidad de volumen. Aplicando el teorema de Gauss

$$\rho a_\alpha = f_\alpha - \frac{\partial t_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} \tag{A.1}$$

la aceleración de un elemento de volumen del medio continuo se define por

$$a_\alpha = \frac{du_\alpha}{dt} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} u_\beta = \partial_t u_\alpha + u_\beta \partial_\beta u_\alpha \tag{A.2}$$

hay que advertir que si bien en el caso de una partícula material su velocidad sólo puede depender del tiempo, no ocurre así en un medio continuo, pues la aceleración no sólo depende del tiempo sino también del elemento de medio continuo que se considere, es decir $u_\alpha = u_\alpha\left(x_\beta, t\right)$.

Llevando (A.2) a (A.1) se obtiene

$$\rho \partial_t u_\alpha + \rho u_\beta \partial_\beta u_\alpha = f_\alpha - \partial_\beta t_{\alpha\beta}. \tag{A.3}$$

La ecuación de continuidad que expresa la conservación de la masa en forma diferencial es

$$\partial_t \rho + \partial_\beta\left(\rho u_\beta\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad u_\alpha \partial_t \rho + u_\alpha \partial_\beta\left(\rho u_\beta\right) = 0$$

que al sumarla a (A.3) queda

$$\partial_t\left(\rho u_\alpha\right) + \partial_\beta\left(\rho u_\alpha u_\beta + t_{\alpha\beta}\right) = f_\alpha \tag{A.4}$$

que es la ecuación de movimiento de un medio continuo en mecánica clásica. En todo momento el elemento de volumen de un medio continuo se encuentra en reposo en un sistema de referencia inercial, a este sistema le llamamos propio. En este sisstema de referencia $u_\alpha = 0$ aunque no tiene que ser nula $\partial_t u_\alpha$, por tanto (4) es

$$\partial_t g_\alpha + \partial_\beta t_{\alpha\beta} = f_\alpha \tag{A.5}$$

siendo g_α el momento lineal por unidad de volumen.

2.A.- Ecuación de movimiento de un medio continuo en mecánica relativista

Queremos extender (A.5) a la Relatividad Especial. Para ello vamos a suponer que la ecuación relativista coincide con (A.5) cuando se aplica al sistema propio, pero generalizando la densidad de momento lineal.

Vamos a suponer, para simplificar los cálculos, que tratamos con un fluido perfecto, que son aquellos donde el tensor de tensiones se puede poner como

$$t_{\alpha\beta} = p\delta_{\alpha\beta}$$

($\delta_{\alpha\beta}$ es la delta de Kronecker) lo que significa que sólo son distintas de cero las componentes del tensor de tensiones de la diagonal principal de su representacion matricial, o dicho de otra forma, que la fuerza de contacto que actúa sobre un volumen es perpendicular a la superficie sobre la que se aplica. La magnitud p es la presión tal como es definida en física elemental: fuerza que actúa por unidad de superficie.

En Relatividad Especial existe una relación entre el momento lineal y la energía de una partícula que lleva una velocidad **u**

$$\mathbf{p} = \frac{E\mathbf{u}}{c^2}$$

ecuación que se generaliza al caso de un medio continuo

$$\mathbf{g} = \frac{\varepsilon \mathbf{u}}{c^2}, \tag{A.6}$$

ε es la densidad de volumen de energía y **g** la densidad de volumen de momento lineal, **u** es la velocidad del elemento de volumen. Lo anterior significa que todas las formas de energía contribuyen al momento lineal, no sólo la energía cinética como ocurre en mecánica clásica. Si un fluido se encuentra en tensión, en nuestro caso sometido a una presión, tiene una energía de tipo elástico y por tanto un momento lineal asociado, el cual debe aparacer en la ecuación de movimiento del medio continuo.

Cuando un fluido está sometido a una presión p puede liberar energía expandiéndose, el trabajo realizado sobre un sistema exterior cuando se expande un volumen dV es dado por

$$dW = pdV,$$

cuando se ha expandido completamente el fluido, la energía total transferida al medio exterior es

$$W = \int_V^\infty p\,dV$$

esto quiere decir que p es la energía por unidad de volumen almacenada en el fluido en forma de tensión. Esta energía por unidad de volumen tendrá asociada una densidad de momento lineal (siempre y cuando el volumen esté en movimiento) que es dado por (A.6)

$$\mathbf{g} = \frac{p\mathbf{u}}{c^2}.$$

Este término debe ser añadido a la densidad de momento lineal que le corresponde al movimiento, suma que debe de aparecer en la expresión (A.5) con lo que habremos obtenido la ecuación de movimiento de un medio continuo en Relatividad Especial pero limitado al sistema propio de referencia. Ahora es necesario generalizar a un sistema de coordenadas distinto del propio.

Vamos a considerar un paralelepípedo rectangular tal que uno de sus lados esté alineado con la dirección de su velocidad. Por la contracción de longitudes de Fitzgerald sabemos que el volumen será diferente según el sistema de referencia respecto al cual es medido, existiendo la relación

$$V = V_o\sqrt{1 - u^2/c^2}$$

donde V_o es el volumen como es medido en el sistema propio y V el volumen medido por el sistema respecto al cual se mueve el sistema propio con velocidad u. También las áreas de las caras del paralelepípedo serán diferentes dependiendo del sistema de referencia, cumpliéndose

$$A_x = A_x^0 \qquad A_y = A_y^0\sqrt{1-u^2/c^2} \qquad A_z = A_z^0\sqrt{1-u^2/c^2}$$

donde suponemos que el movimiento es a lo largo del eje x y el ínidice 0 se refiere al sistema propio.

Se define la tetrafuerza por

$$F^k = \frac{dp^k}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\frac{d}{dt}\left(\mathbf{p}, \frac{E}{c}\right) = \left(\frac{\mathbf{F}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{u}}{c\sqrt{1-u^2/c^2}}\right)$$

τ es el tiempo propio y

$$p^k = mu^k = m\frac{dx^k}{d\tau}.$$

En el sistema propio la tetrafuerza es

$$F_0^k = (\mathbf{F}_0, 0).$$

La ley de transformación de la tetrafuerza entre los dos sistemas considerados es

$$\begin{pmatrix} F^1 \\ F^2 \\ F^3 \\ F^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma u/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma u/c & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_x^0 \\ F_y^0 \\ F_z^0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{A.7}$$

siendo

$$\gamma = 1\Big/\sqrt{1-u^2/c^2}$$

entonces la relación entre las componentes espaciales de la tetrafuerza es

$$F^1 = \frac{F_x}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{F_x^0}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \quad \Rightarrow \quad F_x = F_x^0$$

y para las restantes componentes

$$F_y = F_y^0\sqrt{1-u^2/c^2} \qquad F_z = F_z^0\sqrt{1-u^2/c^2}.$$

Con la ley de transformación de la fuerza podemos averiguar la ley de transformación de la presión

$$t_{11} = p = \frac{F_x}{A_x} = \frac{F_x^0}{A_x^0} = p_0 \qquad t_{22} = p = \frac{F_x}{A_x} = \frac{F_x^0\sqrt{1-u^2/c^2}}{A_x^0\sqrt{1-u^2/c^2}} = p_0 \qquad t_{33} = p = p_0$$

por tanto la presión es un invariante relativista.

El momento lineal

$$p^k = m u^k = m\frac{dx^k}{d\tau} = \left(\frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \frac{E/c}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right)$$

se transforma con la misma ley (A.7), entonces se encuentra

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

donde de nuevo el índice 0 significa valor medido en el sistema propio de referencia. De la anterior expresión deducimos

$$\varepsilon = \frac{dE}{dV} = \frac{dE_0/dV}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{dE_0/dV_0}{1-u^2/c^2}. \tag{A.8}$$

La energía del medio continuo está formado por la energía de la materia ρc^2 (donde agrupamos todas las formas de energía menos la de la tensión) más la debida a la tensión del medio, o sea $\rho c^2 + p$. Aplicando (A.8)

$$\rho c^2 + p = \frac{\rho_0 c^2 + p}{1-u^2/c^2}.$$

El momento lineal tridimensional de una partícula es

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{E_0\,\mathbf{u}/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}},$$

y al aplicarla a un medio continuo tenemos

$$\mathbf{g} = \frac{dE_0/dV\,\mathbf{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{dE_0/dV_0}{1-u^2/c^2}\frac{\mathbf{u}}{c^2} = \frac{\rho_0 c^2 + p}{1-u^2/c^2}\frac{\mathbf{u}}{c^2}. \tag{A.9}$$

Definimos la magnitud

$$P_{\alpha\beta} = g_\alpha u_\beta + t_{\alpha\beta}, \tag{A.10}$$

o sea

$$P_{11} = \frac{\rho_0 u^2 + p}{1-u^2/c^2} \qquad P_{22} = P_{33} = p$$

o bien

$$P_{11} = \frac{P_{11}^0 + \rho_0 c^2}{1 - u^2/c^2} \qquad P_{22} = P_{22}^0 \qquad P_{33} = P_{33}^0 \tag{A.11}$$

siendo nulos todos los demás elementos de $P_{\alpha\beta}$; tenemos que recordar que todos los cálculos lo estamos haciendo para el caso de una transformación especial de coordenadas, aquella que corresponde al movimiento del sistema a lo largo del eje *x*.

Definimos las cantidades T^{ik} por la matriz (donde *i*, *k* van de 0 a 3 y ahora distinguimos componentes covariantes y contravariantes)

$$T^{ik} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & cg_1 \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & cg_2 \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & cg_3 \\ cg_1 & cg_2 & cg_3 & \rho c^2 \end{pmatrix}, \tag{A.12}$$

para el caso de un fluido perfecto y teniendo en cuentra (A.9) y (A.10) se tiene

$$T^{ik} = \left(\rho_0 + p/c^2\right) u^i u^k - \eta^{ik} p \tag{A.13}$$

que nos muestra que T^{ik} es un tensor por serlo la tetravelocidad y el tensor métrico de Minkowski, y por ser la densidad de energía ρ_0 y la presión invariantes y además es simétrico. A T^{ik} se le llama tensor de energía-momento y en él se agrupa las tensiones, la energía y el momento de un medio continuo. La expresión (A.13) se extiende a la Relatividad General, con tal de sustituir el tensor de Minkowski por el tensor métrico g^{ik}.

En el sistema de referencia propio el tensor de energía-momento es

$$T_{ik}^0 = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & p & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_0 c^2 \end{pmatrix}.$$

Definimos la fuerza por unidad de volumen por el tetravector

$$f^k = \frac{dF^k}{dV_0} = \left(\frac{d\mathbf{F}/dV_o}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \frac{\mathbf{u}\cdot d\mathbf{F}/dV_0}{c\sqrt{1-u^2/c^2}} \right) = \left(\mathbf{f}, \frac{1}{c}\frac{d\varepsilon}{dt} \right)$$

siendo

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{F}}{dV}$$

y hemos tenido en cuenta que

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \mathbf{f}\cdot\mathbf{u}.$$

La ecuación

$$f^k = \frac{\partial T^{kr}}{\partial x^r} \tag{A.14}$$

al aplicarla al tensor de energía-momento (A.12) y particularizar posteriormente para el sistema propio, vemos que es idéntica a (A.5), por tanto (A.14) es la ecuación de movimiento de los medios continuos aplicable en Relatividad Especial. (A.14) se generaliza a la teoría general de la Realtividad con tal de sustituir el tensor de Minkowski por el tensor métrico y las derivadas parciales por derivadas covariantes, entonces

$$f^k = D_r T^{kr}. \tag{A.15}$$

Bibliografía

-Einstein, Albert: «Do gravitational fields play an essential part in the structure of the elementary particles of matter?», en *The Principle of Relativity*, Dover, 1952, pp. 191-198.
-Pauli, W.: *Theory of Relativity*, Dover, 1958, pp. 202-205.
-Vizgin, Vladimir P.: *Unfied Field Theories*, Birkhäuser, 2010, pp. 161-167.
-Goenner, Hubert F. M.: «On the History of Unified Field Theories», Living Reviews in Relativity 7 (2004) pp. 60-61