Another Remark on the Breakdown of Smooth Solutions for the 3-D Euler Equations

Valdir Monteiro dos Santos Godoi
valdir.msgodoi@gmail.com

Reanalyzed the validity condition of the theorem and corollary of Beale-Kato-Majda.
Reanalisamos a condição de validade do teorema e corolário de Beale-Kato-Majda.

Mencionamos em nosso estudo sobre a quebra das soluções da equação de Navier-Stokes[1] que há um artigo escrito em 1983 que trata de assunto semelhante, mas com uma abordagem bem diferente da nossa[2].

Em [2] prova-se o seguinte teorema:

“Seja u uma solução das equações de Euler e suponha que há um tempo T_* tal que a solução não pode ser contínua na classe

$$u \in C([0,T];H^s) \cap C^1([0,T];H^{s-1}) \tag{1}$$

para $T = T_*$. Assuma que T_* é o primeiro deste tempo. Então

$$\int_0^{T_*} |\omega(t)|_{L^\infty}\, dt = \infty$$

e em particular

$$\lim_{t\uparrow T_*} sup\, |\omega(t)|_{L^\infty} = \infty.\text{”}$$

$H^s(\mathbb{R}^3)$ é o espaço de Sobolev, consistindo das funções cujas distribuições tem derivadas até a ordem s em $L^2(\mathbb{R}^3)$, sendo s um inteiro positivo e $L^2(D)$ o espaço de Hilbert que obedece à propriedade do produto interno

$$< f,\ g >= \int_D\ f(x)\bar{g}\,(x)dx.$$

O corolário a que [2] também chega é o seguinte:

“Para alguma solução das equações de Euler, suponhamos que há constantes M_0 e T_* tais que sobre qualquer intervalo $[0,T]$ de existência de solução na classe (1), com $T < T_*$, o vórtice satisfaz *a priori* a estimativa

$$\int_0^{T_*} |\omega(t)|_{L^\infty}\, dt \leq M_0.$$

Então a solução pode ser contínua na classe (1) no intervalo $[0,T_*]$.”

$|\omega(t)|_{L^\infty}$ é a norma de $\omega(t)$ no espaço L^∞, como definido usualmente em Teoria da Medida e Análise Funcional.

Nos mencionados teorema e corolário assume-se que há a vorticidade, ou seja, $\omega = \nabla \times u$, mas para se provar ambos os resultados assume-se também que existe a pressão p, e é tal que $\nabla \times \nabla p = 0$. Sendo assim, aplicando o rotacional à equação de Euler

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = 0, \qquad (2)$$

com

$$\nabla \cdot u = 0,$$

chega-se à equação da vorticidade

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \cdot \nabla \omega = \omega \cdot \nabla u, \qquad (3)$$

cuja solução para u em função de ω é

$$u = -\nabla \times (\nabla^{-1}\omega),$$

usando o produto interno em $L^2 = H^0$

$$\big((u \cdot \nabla)w,\ w\big) = 0.$$

Desenvolvendo mais estes resultados e usando-se relações de desigualdades chega-se ao teorema e respectivo corolário.

O fato de ser $\nabla \times \nabla p = 0$, entretanto, faz com que as propriedades que devem ser obedecidas pela pressão p não sejam necessárias, ou levadas em consideração, no estudo feito em [2], enquanto a pressão tem fundamental importância na análise que fizemos em [1], estudo este sintetizado em [3].

Pode então existir um tempo $t = T_N$ ou todo $t \geq 0$ ou um intervalo de tempo $T_N \leq t < \infty$ tal que não seja gradiente a função ϕ em

$$\nabla p = -\left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u\right) = \phi,$$

tornando impossível o cálculo de p no instante t, e assim configurando a quebra ou inexistência de solução (u, p) para (2). Isto invalidaria nesse caso o uso de (3) e as conclusões de [2] nestes valores de t. Mas quando ϕ é uma função gradiente continuam válidos os resultados de Beale-Kato-Majda, e isto pode não ser tão óbvio quanto parece, exceto quando mencionamos.

O mesmo se pode dizer para as equações de Navier-Stokes, com as devidas adaptações.

Referências

1. Godoi, V.M.S., *Breakdown of Navier-Stokes Solutions*, http://www.vixra.org/abs/1505.0083 (2015).

2. Beale, J. T., Kato, T. and Majda, A., *Remarks on the Breakdown of Smooth Solutions for the 3-D Euler Equations*, Commun. Math. Phys. **94**, 61-66 (1984).

3. Godoi, V.M.S., *On the Inexistence of Navier-Stokes Solutions*, http://www.vixra.org/abs/1505.0184 (2015).