La primera teoría métrico-afín de Einstein

The first theory metric-affine of Einstein

Wenceslao Segura González
Investigador independiente
e-mail: wenceslaoseguragonzalez@yahoo.es
web: http://wenceslaoseguragon.wix.com/wenceslao-segura

Sinopsis. El primer intento serio de Einstein de construir una teoría de campo unificado se desarrolló durante al año 1923 cuando publicó varios artículos sobre la teoría puramente afín que fue rápidamente olvidada. En los dos años siguientes, Einstein siguió trabajando en este campo y el resultado fue una teoría métrico-afín publicada en el año 1925 y que presentamos en este artículo. Seguimos la investigación de Einstein detallando todos sus cálculos y añadiéndole aportaciones posteriores de otros autores.

Abstract. The first serious attempt by Einstein to construct a unified field theory was developed during the year 1923 when he published several articles on the purely affine theory which was quickly forgotten. In the next two years, Einstein continued working in this field and the result was a metric-affine theory published in 1925 and which we present in this article. We continue the investigation of Einstein detailing all subsequent calculations and adding contributions from other authors.

Contenido

La versión *v1* del artículo «La primera teoría métrico-afín de Einstein» fue publicada el día 3 de junio de 2015

La primera teoría métrico-afín de Einstein
The first theoy metric-affine of Einstein

Wenceslao Segura González
Investigador independiente
e-mail: wenceslaoseguragonzalez@yahoo.es
web: http://wenceslaoseguragon.wix.com/wenceslao-segura

1.- Introducción

La investigación sobre una teoría unificada de campo que uniera bajo una base geométrica la teoría gravitatoria nacida de la Relatividad General y la teoría electromagnética maxweliana, surgió muy poco tiempo después de la formulación por Einstein y Hilbert de la teoría general de la Relatividad en 1915.

Los trabajos de Weyl llevaron a Eddington a plantear que la conexión afín debía estar, al menos, al mismo nivel fundamental que el tensor métrico, el cual era el único potencial en la Relatividad General. Estaba plantada la semilla para la primera investigación sobre una teoría puramente afín, la que toma como únicos potenciales las componentes de la conexión afín y apareciendo la métrica como una magnitud derivada. Esta teoría fue primeramente elaborada por Einstein en una serie de publicaciones en el año 1923.

Einstein, que ya por entonces lideraba la investigación en teoría unificada de campo, abandonó la teoría puramente afín y tras dos años de estudio abordó la teoría métrico-afín que analizamos en este artículo. En 1925 Einstein publicó su primera teoría de esta especie con el título «Teoría unificada de campo de la gravitación y la electricidad». Fue un primer intento que puso las bases para posteriores estudios. Esta teoría que ha recibido el nombre de Einstein, Einstein-Schródinger y Einstein-Schrödinger-Strauss, fue retomada con más constancia por Einstein en el año 1945 y permaneció como la teoría de campo unificada más elaborada.

En este artículo seguimos el trabajo original de Einstein de 1925, haciendo algunas modificaciones en aras de la simplicidad y explicitando todos los cálculos, detalles que están ausente en la obra de Einstein. Completamos esta investigación con las aportaciones de Thomas y Eisenhart realizadas a los pocos meses de dar Einstein a la publicidad su primera teoría métrico-afín de campo unificado.

2.- Generalidades

La teoría de campo unificado que examinamos es métrico-afín y no simétrica, lo que significa que los potenciales del campo son las 16 componentes del tensor métrico asimétrico g_{ik} y las 64 componentes de la conexión $\Gamma_{ik}^{\ \ r}$ también asimétrica *. Ambas cantidades se descomponen en parte simétrica y antisimétrica

$$g_{ik} = g_{(ik)} + g_{[ik]}; \qquad \Gamma_{ik}^{\ \ r} = \Gamma_{(ik)}^{\ \ \ r} + \Gamma_{[ik]}^{\ \ \ r}$$

los paréntesis redondos significan simetrización y los cuadrados antisimetriación. De la conexión se deriva el tensor de Ricci por contracción del tensor de curvatura de cuarto orden

$$R_{ik} = \Gamma_{ir,k}^{\ \ \ r} - \Gamma_{ik,r}^{\ \ \ r} + \Gamma_{ir}^{\ \ t}\Gamma_{tk}^{\ \ r} - \Gamma_{ik}^{\ \ t}\Gamma_{tr}^{\ \ r}.$$

las comas representan derivación parcial respecto a las coordenadas. Notemos que R_{ik} tiene parte simétrica y parte antisimétrica, que en general no es nula.

Las densidades tensoriales $\boldsymbol{A}_{ik}$ están formadas por un tensor A_{ik} multiplicado por la raíz cuadrada del valor absoluto de un determinante a de un tensor de segundo orden covariante a_{ik}

* Para lo referente a la matemática empleada en este artículo nos remitimos al libro SEGURA GONZÁLEZ, Wenceslao: *La conexión afín. Aplicación a la teoría clásica de campo*, eWT Ediciones, 2015, que se puede descargar gratuitamente en la dirección http://vixra.org/abs/1504.0085.

$$\boldsymbol{A}_{ik} = \sqrt{a} A_{ik} .$$

Las ecuaciones de campo se obtienen del principio de mínima acción aplicado a la acción

$$I = \int \boldsymbol{L} \, d\Omega$$

donde $\boldsymbol{L}$ es una densidad lagrangiana, o sea es una densidad escalar que está formada por un escalar multiplicado por la raíz cuadrada del valor absoluto del determinante de un tensor de segundo orden; $d\Omega$ es el producto de las diferenciales de las coordenadas espacio-temporales $d\Omega = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$. La variación se hace tanto respecto al tensor métrico δg_{ik} como con respecto a la conexión $\delta \Gamma_{ik}{}^{r}$, es decir que se hacen variaciones arbitrarias del tensor métrico y de la conexión, con la condición de que esas variaciones se anulan en los límites de la integral de acción. Al variar la conexión resulta una variación del tensor de Ricci

$$\delta R_{ik} = D_k \, \delta \Gamma_{is}{}^{s} - D_s \, \delta \Gamma_{ik}{}^{s} + \tau_{mk}{}^{s} \, \delta \Gamma_{is}{}^{m} \tag{1}$$

siendo D_k la derivada covariante de la variación de la conexión (que es un tensor); $\tau_{mk}{}^{t}$ es el tensor de torsión definido por $\tau_{mk}{}^{t} = \Gamma_{mk}{}^{t} - \Gamma_{km}{}^{t}$. A la igualdad (1) se le llama identidad de Palatini.

3.- Las ecuaciones de campo

Como en el principio de mínima acción se hacen dos variaciones independientes, se obtendrán dos conjuntos de ecuaciones de campo, unas relacionadas con la variación del tensor métrico y las otras con la variación de la conexión. La teoría métrico-afín de Einstein toma como densidad lagrangiana

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{g}^{ik} R_{ik}$$

entonces

$$\delta I = \delta \int \boldsymbol{L} \, d\Omega = \int \delta \boldsymbol{L} \, d\Omega = \int \left[\frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial \boldsymbol{g}^{ik}} \delta \boldsymbol{g}^{ik} + \frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial R_{ik}} \delta R_{ik} \right] d\Omega = 0 \tag{2}$$

como la variación $\delta \boldsymbol{g}^{ik}$ es arbitraria * entonces la primera de las ecuaciones de campo es

$$\frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial \boldsymbol{g}^{ik}} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{ik} = 0. \tag{3}$$

Para obtener el segundo conjunto de ecuaciones de campo tenemos que utilizar la identidad de Palatini (1) y la segunda de las integrales del último miembro de (2) resultando

$$\int \frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial R_{ik}} \delta R_{ik} \, d\Omega = \int \boldsymbol{g}^{ik} \left(D_k \, \delta \Gamma_{is}{}^{s} - D_s \, \delta \Gamma_{ik}{}^{s} + \tau_{mk}{}^{s} \, \delta \Gamma_{is}{}^{m} \right) d\Omega, \tag{4}$$

a continuación se integra por partes y se aplica el teorema de Gauss que en el caso de que haya torsión es

$$\int_V D_k \boldsymbol{A}^k d\Omega = \int_\Sigma A^k dS_k + \int_V \boldsymbol{A}^k \tau_k \, d\Omega ,$$

τ_k es el vector de torsión definido por $\tau_k = \tau_{km}{}^{m}$, finalmente imponemos la condición de que $\delta \Gamma_{ik}{}^{s}$ se anule en la superficie Σ de integración. Por ejemplo, para la primera integral del segundo miembro de (4) se tiene

$$\int \boldsymbol{g}^{ik} D_k \, \delta \Gamma_{is}{}^{s} d\Omega = \int D_k \left(\boldsymbol{g}^{ik} \delta \Gamma_{is}{}^{s} \right) d\Omega - \int D_k \boldsymbol{g}^{ik} \delta \Gamma_{is}{}^{s} d\Omega =$$

$$= \int g^{ik} \delta \Gamma_{is}{}^{s} dS_k + \int \boldsymbol{g}^{ik} \delta \Gamma_{is}{}^{s} \tau_k d\Omega - \int D_k \boldsymbol{g}^{ik} \delta \Gamma_{is}{}^{s} d\Omega$$

como las variaciones de las componentes de la conexión se anulan en la superficie de integración, entonces

$$\int \boldsymbol{g}^{ik} D_k \, \delta \Gamma_{is}{}^{s} d\Omega = \int \boldsymbol{g}^{ik} \tau_k \, \delta \Gamma_{is}{}^{s} d\Omega - \int D_k \boldsymbol{g}^{ik} \delta \Gamma_{is}{}^{s} d\Omega =$$
$$= \int \delta_s^k \left(\boldsymbol{g}^{ir} \tau_r - D_r \boldsymbol{g}^{ir} \right) \delta \Gamma_{ik}{}^{s} d\Omega,$$

haciendo el mismo razonamiento con las restantes integrales del último miembro de (4) y reagrupando se encuentra

$$\delta I = \int \left[\delta_s^k \boldsymbol{g}^{ir} \tau_r - \delta_s^k D_r \boldsymbol{g}^{ir} - \boldsymbol{g}^{ik} \tau_s + D_s \boldsymbol{g}^{ik} + \boldsymbol{g}^{ir} \tau_{sr}^{k} \right] \delta \Gamma_{ik}{}^{s} \, d\Omega = 0$$

---

* Hemos supuesto previamente que la variación arbitraria es la de g_{ik} pero δg_{ik} y $\delta \boldsymbol{g}_{ik}$ están relacionadas de tal forma que una variación arbitraria de g_{ik} implica otra variación también arbitraria de $\boldsymbol{g}_{ik}$ y viceversa, véase Wenceslao Segura González, *La conexión afín. Aplicación a la teoría clásica de campo*, ob. cit.

y como las $\delta\Gamma_{ik}^{\ \ s}$ son todas independientes y arbitrarias, hallamos el segundo conjunto de ecuaciones de campo

$$\delta_s^k \boldsymbol{g}^{ir}\tau_r - \delta_s^k D_r \boldsymbol{g}^{ir} - \boldsymbol{g}^{ik}\tau_s + D_s \boldsymbol{g}^{ik} + \boldsymbol{g}^{ir}\tau_{sr}^k = 0 \tag{5}$$

que son 64 ecuaciones, que sumandas a las 16 ecuaciones de (3) hacen un total de 80 ecuaciones para igual número de variables: las 64 componentes de la conexión y las 16 del tensor métrico.

La ecuación (5) se puede poner en función de las componentes de la conexión, en vez de en función del vector y tensor de torsión. Si además tenemos presente que

$$D_k \boldsymbol{A}^{ir} = \partial_k \boldsymbol{A}^{ir} + \boldsymbol{A}^{sr}\Gamma_{sk}^{\ \ i} + \boldsymbol{A}^{is}\Gamma_{sk}^{\ \ r} - \boldsymbol{A}^{ir}\Gamma_{lk}^{\ \ l},$$

entonces (5) queda

$$\partial_s \boldsymbol{g}^{ik} + \boldsymbol{g}^{rk}\Gamma_{rs}^{\ \ i} + \boldsymbol{g}^{ir}\Gamma_{sr}^{\ \ k} - \delta_s^k\left(\partial_r \boldsymbol{g}^{ir} + \boldsymbol{g}^{pq}\Gamma_{pq}^{\ \ i}\right) - \boldsymbol{g}^{ik}\Gamma_{sr}^{\ \ r} = 0 \tag{6}$$

que es la forma en que Einstein presentó el segundo grupo de ecuaciones de campo.

La ecuación (6) puede simplificarse. Al contraer k y s

$$3\left(\partial_r \boldsymbol{g}^{ir} + \boldsymbol{g}^{pq}\Gamma_{pq}^{\ \ i}\right) + \boldsymbol{g}^{ir}\left(\Gamma_{sr}^{\ \ s} - \Gamma_{rs}^{\ \ s}\right) = 0,$$

y al contraer i y s en (6)

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}^{sk}}{\partial x^s} - \frac{\partial \boldsymbol{g}^{ks}}{\partial x^s} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \boldsymbol{g}^{[ks]}}{\partial x^s} = 0.$$

Hacemos la definición

$$\boldsymbol{f}^i = \frac{1}{3}\boldsymbol{g}^{ir}\left(\Gamma_{rs}^{\ \ s} - \Gamma_{sr}^{\ \ s}\right)$$

que es una densidad vectorial, y por tanto la ecuación (6) también puede ponerse como

$$\partial_s \boldsymbol{g}^{ik} + \boldsymbol{g}^{rk}\Gamma_{rs}^{\ \ i} + \boldsymbol{g}^{ir}\Gamma_{sr}^{\ \ k} - \boldsymbol{g}^{ik}\Gamma_{sr}^{\ \ r} + \delta_s^k \boldsymbol{f}^i = 0. \tag{7}$$

4.- El tensor métrico en forma covariante

Definimos g como

$$g = \det\left(\boldsymbol{g}^{ik}\right)$$

mientras que g^{ik} es definido tal que cumpla la relación

$$g^{ik} = \frac{1}{\sqrt{g}}\boldsymbol{g}^{ik}, \tag{8}$$

entendida esta relación como una igualdal matricial se encuentra que $\det\left(g^{ik}\right) = 1/g$. Se definen las cantidades g_{ik} por

$$g_{ik}g^{ir} = \delta_k^r \tag{9}$$

de donde se encuentra que $\det\left(g_{ik}\right) = g$. Nos queda por demostrar el carácter tensorial de g_{ik} y de g^{ik}. Como $\boldsymbol{g}^{ik}$ es una densidad tensorial, por definición puede expresarse como

$$\boldsymbol{g}^{ik} = \sqrt{a}\,\hat{g}^{ik}$$

donde a es el valor absoluto del determinante de un tensor a_{ik} de momento desconocido, mientras que $\hat{g}^{ik}$ es un tensor contravariante de segundo orden, que en general es diferente de g^{ik} definido en (8). La ley de transformación de (8) es

$$\boldsymbol{g}'^{ik} = \sqrt{a'}\,\hat{g}'^{ik} = \frac{1}{A}\sqrt{a}A_m^i A_n^k \hat{g}^{mn} = \frac{1}{A}A_m^i A_n^k \boldsymbol{g}^{mn}$$

donde A_m^i es la matriz de transformación de las coordenadas $A_m^i = \partial x'^i / \partial x^m$ y A es su determinante. Suponiendo la anterior como una igualdad matricial entonces encontramos la relación entre los determinantes

$$g' = \frac{1}{A^4}A^2 g = \frac{1}{A^2}g.$$

Si exigimos que (8) se cumpla en todos los sistemas de referencia, entonces su ley de transformación es

$$g'^{ik} = \frac{1}{\sqrt{g'}}\boldsymbol{g}'^{ik} = \frac{A}{\sqrt{g}}\frac{1}{A}A_m^i A_n^k \boldsymbol{g}^{mn} = A_m^i A_n^k g^{mn}$$

lo que muestra el carácter tensorial de g^{ik} y por (9) también g_{ik} es un tensor. Por tanto $\mathfrak{g}_{ik} = \sqrt{g}\, g_{ik}$ es una densidad tensorial.

Hacemos la observación que en su investigación original de 1925 Einstein hace una definición de $\mathfrak{g}_{ik}$ diferente de la dada por nosotros; definida como lo hace Einstein $\mathfrak{g}_{ik}$ no es una densidad tensorial.

5.- El potencial ϕ_s

Vamos a reformar la ecuación (7) para lo que la multiplicamos por g_{ik}

$$4\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_s\sqrt{g} + g_{ik}\partial_s g^{ik} + \Gamma_{rs}{}^{r} + \Gamma_{sr}{}^{r} - 4\Gamma_{sr}{}^{r} + \frac{1}{3}\left(\Gamma_{sr}{}^{r} - \Gamma_{rs}{}^{r}\right) = 0 \qquad (10)$$

como

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_s\sqrt{g} = -\frac{1}{2}g_{ik}\partial_s g^{ik}$$

insertando este resultado en (10)

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_s\sqrt{g}^{ik} = -\frac{1}{3}\Gamma_{rs}{}^{r} + \frac{4}{3}\Gamma_{sr}{}^{r}$$

llevando este resultado a la ecuación

$$g^{ik}\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_s\sqrt{g} + \partial_s g^{ik} + g^{rk}\Gamma_{rs}{}^{i} + g^{ir}\Gamma_{sr}{}^{k} - g^{ik}\Gamma_{sr}{}^{r} + \frac{1}{3}\delta_s^k g^{ir}\left(\Gamma_{rs}{}^{s} - \Gamma_{sr}{}^{s}\right) = 0$$

que se deriva de (7) y multiplicando toda la expresión por $g_{in}g_{mk}$, se encuentra tras algún cálculo

$$-\partial_s g_{mn} + g_{in}\Gamma_{ms}{}^{i} + g_{mi}\Gamma_{sn}{}^{i} + \frac{1}{3}g_{mn}\left(\Gamma_{sr}{}^{r} - \Gamma_{rs}{}^{r}\right) + \frac{1}{3}g_{ms}\left(\Gamma_{nr}{}^{r} - \Gamma_{rn}{}^{r}\right) = 0.$$

Einstein definió el tetravector

$$\phi_s = \frac{1}{3}\left(\Gamma_{sr}{}^{r} - \Gamma_{rs}{}^{r}\right) \qquad (11)$$

o bien $\phi_s = \tau_s/3$, por tanto las ecuaciones de campo de la teoría métrico-afín resultan ser

$$\begin{aligned} &-\partial_s g_{mn} + g_{in}\Gamma_{ms}{}^{i} + g_{mi}\Gamma_{sn}{}^{i} + g_{mn}\phi_s + g_{ms}\phi_n = 0 \\ &R_{ik} = 0 \end{aligned} \qquad (12)$$

conjuntamente con la definición (11) *.

Einstein impuso a su teoría métrico-afín la condición de que el potencial ϕ_s fuese nulo, lo que es equivalente a afirmar la nulidad del vector de torsión, condición que permanece con independencia de que exista o no campo electromagnético. Esta condición aumenta en cuatro el número de ecuaciones algebraicamente independientes, por tanto el sistema de ecuaciones de campo queda sobredeterminado, ya que las ecuaciones de campo son 64+16+4=84, mientras que las variables de campo son 64 (componentes de la conexión) y 16 (componentes del tensor métrico), 80 en total.

Siguiendo a Schrödinger, la primera de las ecuaciones (12) puede plantearse en función de la conexión afín estrellada definida por

$$\overset{*}{\Gamma}_{ik}{}^{r} = \Gamma_{ik}{}^{r} + \frac{1}{3}\delta_i^r\tau_k \qquad (13)$$

que es una conexión puesto que es la suma de una conexión y un tensor. La conexión afín estrellada tiene la propiedad simétrica

$$\overset{*}{\Gamma}_{rk}{}^{r} = \overset{*}{\Gamma}_{kr}{}^{r},$$

los correspondientes vector y tensor de torsión derivados de la conexión estrellada son

$$\overset{*}{\tau}_r = \frac{4}{3}\tau_r\,; \qquad \tau_{ik}{}^{s} = \overset{*}{\tau}_{ik}{}^{s} + \frac{1}{4}\delta_i^s\overset{*}{\tau}_k - \frac{1}{4}\delta_k^s\overset{*}{\tau}_i\,. \qquad (14)$$

Fácilmente se comprueba que la primera ecuación (12) puesta en función de la conexión estrellada es

* Entre las ecuaciones de campo Einstein incluyó $\partial\mathfrak{g}^{[ks]}/\partial x^s = 0$ pero esta ecuación es una integral primera, por tanto ponerla junto a las restantes ecuaciones de campo es una reiteración.

$$\partial_s g_{mn} - g_{in}\Gamma^{*\ i}_{ms} - g_{mi}\Gamma^{*\ i}_{sn} = 0, \tag{15}$$

notemos que (15) no coincide, en general, con la derivada covariante del tensor métrico, a consecuencia del orden de los índices de la segunda conexión. Se define una nueva derivada covariante, introducida por primera vez por Joseph Thomas

$$\hat{D}_s g_{mn} = \partial_s g_{mn} - g_{in}\Gamma_{ms}^{\ i} - g_{mi}\Gamma_{sn}^{\ i}$$

por tanto la primera ecuación (12) queda

$$\hat{D}_s g_{mn} = -g_{mn}\phi_s - g_{ms}\phi_n,$$

o bien

$$\hat{D}^*_s g_{mn} = 0$$

donde $\hat{D}^*_s$ es la derivada covariante de Thomas formada con la conexión estrellada $\Gamma^{*\ r}_{ik}$. De (15) es posible obtener las componentes de la conexión en función del tensor métrico.

Si a la primera ecuación (12) la multiplicamos por $g^{mp}g^{qn}$ entonces encontramos la primera ecuación de campo en función de las componentes contravariantes del tensor métrico

$$\partial_s g^{pq} + g^{mp}\Gamma_{ms}^{\ q} + g^{qm}\Gamma_{sm}^{\ p} + g^{qp}\phi_s + \delta^p_s g^{qn}\phi_n = 0. \tag{16}$$

6.- El campo gravitatorio puro

La teoría métrico-afín de Einstein supone que la parte simétrica del tensor métrico $g_{(ik)}$ describe el campo gravitatorio y su parte antisimétrica $g_{[ik]}$ engloba a las seis componentes del campo electromagnético. Entonces si se supone que la parte antisimétrica del tensor métrico es nulo debemos reencontrar las ecuaciones de la Relatividad General. Intercambiando los índices m y n de (15) obtenemos

$$\partial_s g_{nm} = g_{im}\Gamma^{*\ i}_{ns} + g_{ni}\Gamma^{*\ i}_{sm}$$

que al sustraerla de (15) y teniendo en cuenta la simetría de g_{nm} queda

$$g_{im}\left(\Gamma^{*\ i}_{ns} - \Gamma^{*\ i}_{sn}\right) + g_{in}\left(\Gamma^{*\ i}_{sm} - \Gamma^{*\ i}_{ms}\right) = 0$$

utilizando el tensor de torsión en forma covariante la anterior expresión queda

$$\overset{*}{\tau}_{nsm} + \overset{*}{\tau}_{smn} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \overset{*}{\tau}_{snm} = \overset{*}{\tau}_{smn}, \tag{17}$$

donde hemos utilizado la antimetría de los dos primeros índices. La anterior relación nos dice que $\overset{*}{\tau}_{nsm}$ es antisimétrico respecto a los dos primeros índices y simétrico respecto a los dos últimos. Pero estas dos propiedades no se pueden mantener simultáneamente como se puede ver en el siguiente razonamiento

$$\overset{*}{\tau}_{snm} = -\overset{*}{\tau}_{nsm} = -\overset{*}{\tau}_{nms} = \overset{*}{\tau}_{mns} = \overset{*}{\tau}_{msn} = -\overset{*}{\tau}_{smn}$$

para que también se cumpla (17) es necesario que $\overset{*}{\tau}_{smn} = 0$. Esto significa que la torsión estrellada debe ser nula y por (14) también lo será la torsión no estrellada $\tau_{ik}^{\ s}$ y por tanto nulo también el vector de torsión τ_i, la conclusión final es que por (13) la conexión $\Gamma_{ik}^{\ r}$ es simétrica.

Como suponemos previamente que ϕ_s es nulo y hemos demostrado que cuando el tensor métrico es simétrico también lo es conexión, y además se cumple (12) que ahora significa que $D_s g_{mn} = 0$, entonces nos encontramos en un espacio-tiempo de Riemann que es el que caracteriza a la Relatividad General, siendo la ecuación de la gravedad en ausencia de materia $R_{ik} = 0$.

Podemos reencontrar la ecuación de la Relatividad General sin exigir que ϕ_s sea nulo, pero es necesario suponer que no sólo el tensor métrico, sino también la conexión es simétrica, lo que significa que ϕ_s sería idénticamente nula. Lógicamente si $\phi_s \neq 0$ la conexión no podría ser simétrica y no sería posible obtener la Relatividad General.

7.- Ecuaciones de campo electromagnético en primera aproximación

Si existe campo electromagnético la parte antisimétrica del tensor métrico es diferente de cero y entonces de las ecuaciones de campo (12) se debe encontrar las ecuaciones de campo electromagnético. En su trabajo del año 1925, Einstein abordó este problema en primera aproximación. Descompuso el tensor métrico según

$$g_{ik} = \eta_{ik} + \gamma_{ik} + \phi_{ik}$$

donde η_{ik} es el tensor métrico de Minkowski y de orden cero, γ_{ik} es simétrico y de primer orden y ϕ_{ik} es antisimétrico y también de primer orden. Si se desarrolla las componentes del tensor métrico en potencias de la inversa de la velocidad de la luz c, entonces γ_{ik} y ϕ_{ik} son del orden $1/c$. Entonces de la primera ecuación (12) en el caso de $\phi_s = 0$ queda en primera aproximación

$$\partial_s g_{mn} - \eta_{in} \Gamma_{ms}^{\ i} - \eta_{mi} \Gamma_{sn}^{\ i} = 0 \tag{18}$$

ya que la conexión al ser función de la derivada de g_{mn} es de primer orden en el tensor métrico y entonces

$$g_{in} \Gamma_{ms}^{\ i} \approx \eta_{in} \Gamma_{ms}^{\ i}.$$

(18) se pone igualmente como

$$\partial_s g_{mn} - \Gamma_{msn} - \Gamma_{snm} = 0 \tag{19}$$

donde hemos puesto $\Gamma_{msn} = \eta_{in} \Gamma_{ms}^{\ i}$. Permutando cíclicamente los índices de (19) obtenemos las tres relaciones

$$\begin{aligned} \partial_s g_{mn} - \Gamma_{msn} - \Gamma_{snm} = 0 \\ \partial_m g_{ns} - \Gamma_{nms} - \Gamma_{msn} = 0 \\ \partial_n g_{sm} - \Gamma_{snm} - \Gamma_{nms} = 0 \end{aligned}$$

sumando las dos primeras y restando la última obtenemos

$$\Gamma_{msn} = \frac{1}{2}\left(\partial_s g_{mn} + \partial_m g_{ns} - \partial_n g_{sm}\right)$$

o bien

$$\Gamma_{ms}^{\ r} = \frac{1}{2}\eta^{rn}\left(\partial_s g_{mn} + \partial_m g_{ns} - \partial_n g_{sm}\right) \tag{20}$$

expresión válida en primera aproximación.

Al calcular el tensor de Ricci en primera aproximación sólo tenemos que ocuparnos de sus dos primeros sumandos pues los dos restantes son de al menos segundo orden. Para este cálculo tenemos en cuenta (20) y obtenemos

$$\begin{aligned} R_{ik} \approx \Gamma_{ir,k}^{\ r} - \Gamma_{ik,r}^{\ r} = \frac{1}{2}\eta^{rn}\left(\partial_k\partial_r g_{in} + \partial_k\partial_i g_{nr} - \partial_k\partial_n g_{ri} - \partial_r\partial_k g_{in} - \partial_r\partial_i g_{nk} + \partial_r\partial_n g_{ki}\right) = \\ = \frac{1}{2}\eta^{rn}\left(\partial_k\partial_i g_{nr} - \partial_k\partial_n g_{ri} - \partial_r\partial_i g_{nk} + \partial_r\partial_n g_{ki}\right). \end{aligned} \tag{21}$$

En la primera aproximación que estamos considerando las densidades tensoriales son iguales a los tensores

$$\boldsymbol{g}_{ik} \approx g_{ik}; \qquad \boldsymbol{g}^{ik} \approx g^{ik}.$$

por tanto

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}^{[ks]}}{\partial x^s} = 0 \ \Rightarrow \ \frac{\partial \phi^{ks}}{\partial x^s} = 0 \tag{22}$$

que es el primer conjunto de ecuaciones de campo electromagnético en el vacío, entendiendo a ϕ^{ks} como el tensor de campo electromagnético. En notación covariante la ecuación (22) es

$$\frac{\partial \phi_{ks}}{\partial x_s} = 0.$$

Observemos que en nuestra aproximación los índices tensoriales se suben y bajan con el tensor métrico de Minkowski η_{ik}. Sobre este asunto decir que damos por sentado que utilizamos coordenadas pseudocartesianas (ct, x, y, z) en cuyo caso el tensor η_{ik} sólo tiene distinto de cero los elementos de la diagonal principal que son $(1, -1, -1, -1)$.

La segunda de las ecuaciones (12) se descompone en parte simétrica y antisimétrica. Esta última queda utilizando (21)

$$-\partial_k \partial^r \phi_{ri} - \partial_i \partial^r \phi_{rk} + \partial_r \partial^r \phi_{ki} = 0$$

y teniendo en cuenta (22)

$$\partial_r \partial^r \phi_{ik} = 0 \tag{23}$$

esta ecuación no es exactamente igual al segundo grupo de ecuaciones de campo electromagnético

$$\frac{\partial \phi_{ik}}{\partial x^r} + \frac{\partial \phi_{kr}}{\partial x^i} + \frac{\partial \phi_{ri}}{\partial x^k} = 0 \tag{24}$$

no obstante, y partiendo de (23) se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial x_r}\frac{\partial \phi_{ik}}{\partial x^r}+\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial \phi_{kr}}{\partial x_r}-\frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial \phi_{ir}}{\partial x_r}=0$$

donde los dos últimos sumandos son nulos por (22), por tanto

$$\frac{\partial}{\partial x_r}\left(\frac{\partial \phi_{ik}}{\partial x^r}+\frac{\partial \phi_{kr}}{\partial x^i}+\frac{\partial \phi_{ri}}{\partial x^k}\right)=0 \tag{25}$$

que Einstein afirma que es «sustancialmente idéntica» al segundo grupo de ecuaciones de Maxwell. La ecuación (23) son las ecuaciones de onda de los campos eléctrico y magnético en el vacío, que conjuntamente con (22) representan las ecuaciones de campo electromagnético de la teoría de Einstein; si las expresamos en notación vectorial tridimensional tenemos

$$\begin{gathered}\nabla \mathbf{E}=0; \quad \nabla\wedge\mathbf{B}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\\ \nabla^2\mathbf{B}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2}=0; \quad \nabla^2\mathbf{E}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}=0\end{gathered} \tag{26}$$

correspondiendo las dos primeras ecuaciones a (22) y las dos segundas a (23). Este grupo de ecuaciones es compatible con las ecuaciones de Maxwell, pues de esta teoría se derivan las anteriores ecuaciones, se trata de saber si ocurre lo contrario. Notamos que el grupo de ecuaciones electromagnéticas de la teoría de Einstein son de segundo orden, mientras que las de Maxwell son de primer orden, lo que signfica que hay que integrar las de Einstein, surgiendo por tanto una magnitud indeterminada.

Si hacemos la definición

$$\nabla\mathbf{B}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial\chi}{\partial t} \tag{27}$$

donde χ es una función de las coordenadas espacio-temporales. Aplicando el rotacional a ambos miembros de la segunda ecuación (26)

$$\nabla\wedge(\nabla\wedge\mathbf{B})=\frac{1}{c^2}\nabla\wedge\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \nabla(\nabla\mathbf{B})-\nabla^2\mathbf{B}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\wedge\mathbf{E})$$

de la tercera ecuación (26) y de (27) luego integrando respecto al tiempo y teniendo en cuenta que las derivadas de las coordenadas espaciales se pueden intercambiar con la derivadas temporales se llega a

$$\nabla\wedge\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}+\nabla\chi+\mathbf{f}\left(x^\alpha\right) \tag{28}$$

donde $\mathbf{f}\left(x^\alpha\right)$ es un vector que depende exclusivamente de las coordenadas espaciales. Si hacemos el cambio

$$\chi'=\chi+\int f_\alpha dx^\alpha$$

donde f_α es la componente α del vector **f**. Entonces las dos primeras ecuaciones (26), la (27) y la (28) quedan

$$\begin{gathered}\nabla\mathbf{E}=0; \quad \nabla\wedge\mathbf{B}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\\ \nabla\mathbf{B}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial\chi'}{\partial t} \quad \nabla\wedge\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}+\nabla\chi'\end{gathered}$$

donde χ' es una función espacio-temporal arbitraria. Naturalmente las ecuaciones de la teoría de Einstein coindicen con las ecuaciones de Maxwell siempre y cuando se tome $\chi'=\mathrm{cte}$. En este sentido las ecuaciones (22) y (23) son sustancialmente idénticas a las de Maxwell como Einstein afirma.

8.- Las ecuaciones generales de campo electromagnético

Lo que antes hemos expuesto es lo que aparece en el trabajo original de Einstein de 1925. Pero al poco de ver la luz esta publicación, Eisenhart dedujo a partir de la teoría métrico-afín de Einstein las ecuaciones de campo electromagnético sin necesidad de limitarse a la primera aproximación.

Debemos distinguir entre las partes simétrica y antisimétrica del tensor métrico tanto en su forma covariante como contravariante

$$g_{ik}=\gamma_{ik}+\phi_{ik}; \quad g^{ik}=h^{ik}+f^{ik}$$

donde γ_{ik} y h^{ik} son simétricos y ϕ_{ik} y f^{ik} son antisimétricos, y ahora γ_{ik} y ϕ_{ik} no se limitan a representar los términos de primer orden; la relación entre las componentes covariante y contravariante del tensor métrico es

$$g_{ik}g^{jk} = \delta_i^j .$$

Entonces el primer conjunto de ecuaciones de campo electromagnético es

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}^{[ks]}}{\partial x^s} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \boldsymbol{f}^{ks}}{\partial x^s} = 0. \tag{29}$$

Para los cálculos posteriores descomponemos la conexión en parte simétrica y antisimétrica

$$\Gamma_{ik}{}^r = \Gamma_{(ik)}{}^r + \Gamma_{[ik]}{}^r = \Upsilon_{ik}{}^r + \Omega_{ik}{}^r$$

la derivada covariante respecto a la parte simétrica de la conexión $\Upsilon_{ik}{}^r$ la representaremos por $\bar{D}$

$$\bar{D}_s\gamma_{ik} = \partial_s\gamma_{ik} - \gamma_{rk}\Upsilon_{is}{}^r - \gamma_{ir}\Upsilon_{ks}{}^r .$$

Con estas definiciones la primera ecuación (12) con $\phi_s = 0$ se puede descomponer en parte simétrica y antisimétrica, resultando

$$\begin{aligned} \bar{D}_s\gamma_{ik} &= \phi_{rk}\Omega_{is}{}^r + \phi_{ir}\Omega_{sk}{}^r \\ \bar{D}_s\phi_{ik} &= \gamma_{rk}\Omega_{is}{}^r + \gamma_{ir}\Omega_{sk}{}^r , \end{aligned} \tag{30}$$

por rotación cíclica de los índices de la segunda ecuación (30) obtenemos tres ecuaciones, sumando dos de ellas y restando la tercera, despejamos la parte antisimétrica de la conexión en función de las derivadas covariantes de la parte antisimétrica del tensor métrico

$$\Omega_{ij}{}^r = \frac{1}{2}\gamma^{rk}\left(\bar{D}_k\phi_{ij} - \bar{D}_i\phi_{jk} - \bar{D}_j\phi_{ki}\right), \tag{31}$$

estando definido γ^{rk} por

$$\gamma^{rk}\gamma_{ri} = \delta_i^k ,$$

notemos que $\gamma^{ik} \neq h^{ik}$.

La condición de que el vector de torsión sea nulo es idéntica a $\Omega_{ij}{}^i = 0$, entonces imponiendo esta condición en (31) se obtiene

$$\gamma^{ik}\bar{D}_k\phi_{ij} = 0,$$

donde hemos tenido en cuenta el carácter simétrico de γ^{ik} y el antisimétrico de ϕ_{ij}.

El tensor de Ricci se descompone según

$$R_{ik} = \bar{R}_{ik} + \Omega_{ik}$$

donde $\bar{R}_{ik}$ es el tensor de Ricci formado con la parte simétrica de la conexión y Ω_{ik} es la expresión

$$\Omega_{ik} = \bar{D}_k\Omega_{ir}{}^r - \bar{D}_r\Omega_{ik}{}^r + \Omega_{ir}{}^h\Omega_{hk}{}^r - \Omega_{ik}{}^h\Omega_{hr}{}^r . \tag{32}$$

De la ecuación (7) y con la condición $\Gamma_{[ik]}{}^r = 0$ se obtiene

$$\partial_s g^{ik} + g^{ik}\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_s\sqrt{g} + g^{rk}\Gamma_{rs}{}^i + g^{ir}\Gamma_{sr}{}^k - g^{ik}\Gamma_{sr}{}^r = 0 \tag{33}$$

multiplicando toda la expresión por g_{ik} y teniendo en cuenta que

$$\delta g = -g g_{ik}\delta g^{ik} \quad \Rightarrow \quad g_{ik}\delta g^{ik} = -2\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_s\sqrt{g}$$

entonces de (33)

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_s\sqrt{g} - \Gamma_{(sr)}{}^r = 0 \quad \Rightarrow \quad \Upsilon_{sr}{}^r = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_s\sqrt{g} \tag{34}$$

donde de nuevo suponemos que es nula $\Gamma_{[sr]}{}^r$. De (34) se desprende que la parte antisimétrica de $\bar{R}_{ik}$

$$\bar{R}_{[ik]} = \frac{1}{2}\left(\Upsilon_{rk,i}{}^r - \Upsilon_{ri,k}{}^r\right)$$

es nula, por tanto de la segunda ecuación (12) se obtiene separando parte simétrica y antisimétrica

$$\bar{R}_{ik} + \Omega_{(ik)} = 0; \qquad \Omega_{[ik]} = 0$$

y por (32)

$$\Omega_{[ik]}=0 \quad \Rightarrow \quad \bar{D}_r \Omega_{ik}^{\ \ r}=0. \tag{35}$$

resultado que vamos a utilizar más adelante.

De la primera ecuación (12), suponiendo nulo ϕ_s y multiplicando toda la expresión por $g^{in}g^{mk}$ se obtiene la correspondiente ecuación para las componentes contravariantes del tensor métrico

$$\partial_s g^{ik}+g^{nk}\Gamma_{ns}^{\ \ i}+g^{in}\Gamma_{sn}^{\ \ k}=0,$$

ecuación que se puede descomponer en parte simétrica y antisimétrica, siendo esta última

$$\bar{D}_s f^{ik}+h^{in}\Omega_{ns}^{\ \ k}+h^{nk}\Omega_{sn}^{\ \ i}=0 \tag{36}$$

que es la equivalente a la segunda ecuación (36). Definimos las cantidades h_{ik} por $h_{ik}h^{rk}=\delta_i^r$, debiendo advertir que $h_{ik}\neq\gamma_{ik}$. Si (33) se multiplica por $h_{ip}h_{kq}$ se llega a

$$h_{ip}h_{kq}\bar{D}_s f^{ik}+\Omega_{psk}-\Omega_{qsp}=0$$

definiendo $\Omega_{psk}=h_{kq}\Omega_{ps}^{\ \ k}$. Ahora permutando cíclicamente los índices y sumando dos de las expresiones resultantes y restándole la tercera se encuentra que

$$\Omega_{ps}^{\ \ r}=\frac{1}{2}\left(h_{is}h_{kp}h^{qr}\bar{D}_q f^{ik}-h_{ip}\bar{D}_s f^{ir}-h_{ks}\bar{D}_p f^{rk}\right)$$

pero por (32) se halla

$$\bar{D}_r\left(h_{is}h_{kp}h^{qr}\bar{D}_q f^{ik}-h_{ip}\bar{D}_s f^{ir}-h_{ks}\bar{D}_p f^{rk}\right)=0$$

que representa el segundo conjunto de ecuaciones de campo electromagnético, obtenido con generalidad sin la suposición hecha inicialmente por Einstein de sólo considerar los términos de primero orden.

9.- Conclusiones

En este artículo tratamos la primera teoría métrico-afín asimétrica de Einstein tal como fue formulada en el año 1925. Exponemos detalladamente todo el razonamiento de Einstein, incluyendo las ecuaciones de la gravitación y del electromagnetismo en primera aproximación. Añadimos a la investigación las ecuaciones de campo electromagnético en su forma general tal como fueron obtenidas por Einserhart.

10 .- Bibliografía

[1] Einstein, A.: «Einheitliche Feldtheorie von Gravitation und Elekctrizität», *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften su Berlin. Physikalisch-Matematische Klasse* XXII (1925) 414-419, traducción al inglés de A. Unzicker and T. Case con el título «Unified Field Theory of Gravitation and Electricity», descarga desde www.alexander-unzicker.de/rep0.pdf.

[2] Einstein, A.: «Neue Möglichkeit für eine einsheitliche Feldtheorie von Gravitation und Elektrizität», Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, pp. 224-227, 14 junio 1928.

[3] Eisenhart, Luther Pfahler: «Einstein's recent theory of gravitation and electricity», *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 12 (1926) 125-129.

[4] Goenner, Hubert F. M. : «On the History of Unified field Theories», *Living Review Relativity* 7 (2004) 58-64.

[5] Segura González, Wenceslao: «La teoría puramente afín de la gravedad y del electromagnetismo de Schrödinger (IV)», http://vixra.org/abs/1503.0040, 2015.

[6] Segura González, Wenceslao: *La conexión afín. Aplicación a la teoría clásica de campo*, eWT Ediciones, 2015, http://vixra.org/abs/1504.0085.

[7] Thomas, Joseph Miller: «On various geometries giving a unified electric and gravitational theory», *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 12 (1926) 187-191.

[8] Tonnelat, Marie-Antoinette: Les théories unitaires de l'electromagnétism et de la gravitation, Gauthier-Villars, 1965, pp. 296-308.

[8] Vizgin, Vladimir P.: *Unified Field Theories. In the first third of the 20th century*, Birkhäuser, 1994, pp. 204-218.