On the Inexistence of Navier-Stokes Solutions

Valdir Monteiro dos Santos Godoi
valdir.msgodoi@gmail.com

Abstract – We have proved in a few lines that there are initial velocities $u^0(x)$ and forces $F(x,t)$ such that there is no solution to the Navier-Stokes equations, which corresponds to the cases (C) and (D) of the problem relating to Navier-Stokes equations available on the website of the Clay Institute.

Keywords – Navier-Stokes equations, Euler equations, continuity equation, breakdown, existence, smoothness, solutions, gradient field, conservative field, velocity, pressure, external force, millenium problem.

§ 1

Minha intenção neste pequeno artigo é transformar através de equações diferenciais mais simples o problema sobre as equações de Navier-Stokes, descrito especialmente na página do Instituto Clay[1], de modo a tornar sua solução mais compreensível, fácil e aceitável.

As opções que percebemos como possíveis de serem resolvidas dentre as quatro alternativas disponíveis em [1] são as provas de inexistência de soluções (breakdown) para as equações de Navier-Stokes, que correspondem aos casos (C) e (D) descritos em [1], sendo o primeiro destes casos referente às soluções em geral e o segundo específico às soluções espacialmente periódicas. O problema conforme proposto está restrito a $n = 3$ dimensões espaciais.

Nossos estudos preliminares sobre o assunto já foram dados em [2] e de forma abreviada em [3], e aqui pretendemos resumir ainda mais nossas conclusões sobre estas equações em uma pequena demonstração básica "padrão", aceitável inclusive para ser uma demonstração que possa (eventualmente) ser dada como resposta a uma questão de disciplina universitária, sem precisar gastar horas e mais horas em sua solução ou páginas e mais páginas na demonstração, mas tão rigorosa quanto possível. Propositalmente este é um artigo que pode ser considerado pequeno, adequado (acreditamos) a um aluno de Engenharia, mas também a alunos de Física, Meteorologia, Geofísica, Astronomia e mesmo de Matemática. Entendemos a importância prática deste assunto.

A equação de Navier-Stokes, em forma vetorial, pode ser escrita como

$$(1) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u = \nu\, \nabla^2 u - \nabla p + F,$$

para $u, F: \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ e $p: \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$, onde u é a velocidade do fluido, F a "força" externa aplicada (por exemplo, gravidade), p a pressão e ν o coeficiente (constante) de viscosidade, medidas feitas na posição $x \in \mathbb{R}^n$ e tempo $t \geq 0, t \in \mathbb{R}$ (chamamos por hábito equações de Navier-Stokes, no plural, quando pensamos nas respectivas equações das suas n componentes $i, 1 \leq i \leq n$).

Costuma-se juntar a (1) a condição de incompressibilidade (densidade de massa constante na equação da continuidade)

(2) $$\nabla \cdot u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 \qquad (n = 3),$$

condição esta que também deve ser satisfeita para atender [1]. No que segue estará subentendido que estamos nos referindo sempre à dimensão espacial $n = 3$.

Outra forma de escrever (1) é

(3) $$\nabla p = \nu\, \nabla^2 u - \frac{\partial u}{\partial t} - (u \cdot \nabla)u + F = \varphi + F = \phi.$$

Chamando de ϕ o lado direito de (3), a solução de (3), quando existe, é dada por

(4) $$p = \int_L \phi \cdot dl + \theta(t),$$

sendo L um caminho contínuo por partes de classe C^1 que vai de x_0 a x, com $x_0, x \in \mathbb{R}^3$. Suponhamos θ contínua, limitada e diferenciável em $t \geq 0$. Também supomos que L não passe por nenhuma singularidade de ϕ.

De (3) vemos imediatamente que (1) pode ser transformada na equação diferencial mais simples

(5) $$\nabla p = \phi, \qquad \phi(x,t)\colon \mathbb{R}^3 \times [0, \infty) \to \mathbb{R}^3,$$

que só terá solução se ϕ for um campo gradiente, i.e., conservativo, e sua solução neste caso é (4). A referência [4] contém a teoria básica sobre os campos gradientes.

Nosso problema central pode então ser escrito assim, simbolicamente e em forma de pergunta (uma sentença lógica e uma interrogação):

(P1) $$\exists \phi^0(x) = \phi(x, 0),\ \nexists(\phi, p) /\ \nabla p = \phi?$$

Se $\phi^0(x)$ for um campo não gradiente então $\phi(x,t)$ é não gradiente em $t = 0$, então (ao menos) em $t = 0$ não há solução para $\nabla p = \phi$, qualquer que seja $\phi(x,t)$ com $\phi(x,0) = \phi^0(x)$ não gradiente.

A resposta para (P1) é Sim, e teríamos que buscar algum $\phi^0(x)$ não gradiente para exemplificar a verdade da sentença lógica. Vejam que podemos encontrar muitos exemplos de funções $\phi(x,t)$, inclusive para poder valer $\phi^0(x) = \phi(x,0)$, porém o que não existirá usando nosso exemplo é a função p. Em nossa prova a função $\phi(x,t)$ deverá existir, para que também exista $\phi^0(x)$, e assim provaremos a inexistência de p.

Uma equivalência lógica que representa a inexistência do par de variáveis (ϕ, p) como utilizada em (P1) é

(6) $$\nexists(\phi, p) \leftrightarrow ((\nexists\phi \wedge \exists p) \vee (\exists\phi \wedge \nexists p) \vee (\nexists\phi \wedge \nexists p)),$$

e das três alternativas possíveis descritas acima para provar a inexistência do par (ϕ, p) escolhemos a existência de ϕ com a inexistência de p, i.e.

(7) $(\exists\phi \wedge \nexists p) \rightarrow \nexists(\phi, p)$.

Neste e nos problemas que seguem admitimos que $p: \mathbb{R}^3 \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função escalar e todas as outras funções são vetores com imagem em $\mathbb{R}^3$.

§ 2

Uma variante de (P1) é dada pelo problema (P2) a seguir.

(P2) $\exists\varphi^0(x) = \varphi(x, 0), \exists F(x, t), \nexists(\varphi, p) / \nabla p = \varphi + F$?

Busquemos novamente a quebra das soluções em $t = 0$. Se $\phi^0 = \varphi^0 + F(x, 0)$ for não gradiente então em $t = 0$ a equação $\nabla p = \varphi + F$ não terá solução, o caso de quebra de soluções. Resposta: Sim, e para que a sentença lógica em (P2) mostre-se verdadeira deveremos buscar $\varphi^0(x)$ e $F(x, t)$ cuja respectiva soma em $t = 0$ resulte em um campo não gradiente.

§ 3

Nosso terceiro problema é uma versão facilitada de (3), onde substituímos ∇p por P, com $P: \mathbb{R}^3 \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$.

(P3) $\exists u^0(x) = u(x, 0), \exists F(x, t), \nexists(u, P) / P = \nu\, \nabla^2 u - \frac{\partial u}{\partial t} - (u \cdot \nabla)u + F$?

Ao contrário das duas respostas anteriores, desta vez a resposta é Não. Supondo que a operação $\nu\, \nabla^2 u - \frac{\partial u}{\partial t} - (u \cdot \nabla)u + F$ possa ser computada, i.e., que para todo $u(x, t)$ com $u(x, 0) = u^0(x)$ existam as derivadas parciais de u em relação às coordenadas espaciais até a segunda ordem e em relação ao tempo até a primeira ordem e que exista o respectivo valor computável para P, então sempre existem u e P que satisfaçam a equação diferencial dada em (P3), de maneira muito óbvia. Dado u com $u(x, 0) = u^0$ então P, em última análise, é o resultado de uma computação algébrica, por mais complicadas que sejam as derivações envolvidas, i.e., é falsa a afirmação $\nexists(u, P)$ em (P3). Não parece ser o foco de [1] a busca de alguma função "patológica", alguma função estranha, rara, para u^0, u ou F tal que a equação dada em (1) nem sequer possa ser computada (com a possível exceção de ∇p). Pelo contrário, [1] preocupa-se com funções e soluções fisicamente razoáveis, e elenca várias condições que devem ser obedecidas por u^0, u, F, p.

§ 4

Aqui trataremos do problema principal, que corresponde a uma condição necessária para a inexistência de solução para (3), e consequentemente de (1). É uma das provas que pretendemos dar como padrão aceitável.

(P4) $\exists u^0(x) = u(x, 0), \exists F(x, t), \nexists(u, p) / \nabla p = \nu\, \nabla^2 u - \frac{\partial u}{\partial t} - (u \cdot \nabla)u + F$?

Se $\exists u^0(x) = u(x, 0)$ então deve existir $u(x, t)$ ao menos em $t = 0$. Como buscamos soluções para (1) em todo $t \geq 0$ então podemos supor a existência de $u(x, t)$ em $t \geq 0$, por hipótese. Além disso, o problema original em [1] define que o domínio $D(u)$ de u seja

$\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$, ou seja, podemos supor por hipótese a existência de u em todo $t \geq 0, t \in \mathbb{R}$, e para todo $x \in \mathbb{R}^3$.

A afirmação $\nexists(u, p)$ não implica apenas em $(\nexists u \wedge \nexists p)$. Optaremos por encontrar algum campo vetorial de velocidades u, com $u(x, 0) = u^0$ dado, tal que não exista pressão p alguma que satisfaça a equação diferencial dada em (P4), igual a (3).

Assim sendo, chegamos a

$$\left(\exists u^0(x) = u(x, 0)\right) \wedge \left(D(u) = \mathbb{R}^3 \times [0, \infty)\right) \to \exists u\colon \mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$$

(P4') $\quad (\exists u \wedge \nexists p) \to \nexists(u, p) \;/\; \nabla p = \nu\, \nabla^2 u - \frac{\partial u}{\partial t} - (u \cdot \nabla) u + F = \phi.$

Se o campo ϕ em (P4') for não gradiente então não haverá p que satisfaça à requerida equação, e existem infinitos exemplos de u^0, u, F que podem ser dados tais que resultem em campos ϕ não gradientes. O mais simples exemplo que penso são as velocidades $u(x, t) = u^0(x) = 0$, e assim bastará encontrar (ao menos) uma função $F(x, t)$ não gradiente de modo a tornar (P4') verdadeira, o que fará ser Sim a resposta para o problema (P4). Se a resposta fosse Não então não haveria quebra de soluções para as equações de Navier-Stokes.

Para o caso (C) do problema do milênio damos como exemplo $F(x, t) = (e^{-x_2^2}, 0, 0)$ e para o caso (D), correspondente às soluções espacialmente periódicas, damos como exemplo $F(x, t) = (\cos(2\pi x_2), 0, 0)$, função trigonométrica de período 1. São exemplos de funções limitadas que obedecem às condições de continuidade, derivabilidade, não divergência, smoothness (C^∞), etc. e também satisfazem à equação (2) dos fluidos incompressíveis. Portanto existem casos de inexistência de soluções para p nas equações de Navier-Stokes, dados u^0, u, F.

§ 5

Neste problema verificaremos uma condição suficiente para a inexistência de solução para (3), e consequentemente de (1). É uma importante prova deste artigo.

Incluindo-se em (P4) a condição $\forall u(x, t)/u(x, 0) = u^0(x)$ chegamos a

(P5) $\quad \exists u^0(x) = u(x, 0), \exists F(x, t), \forall u(x, t)/u(x, 0) = u^0(x), \nexists(u, p)/$

$\quad \nabla p = \nu\, \nabla^2 u - \frac{\partial u}{\partial t} - (u \cdot \nabla) u + F?$

que requer que sua resposta seja válida para qualquer velocidade $u(x, t)$ possível e que obedeça a $u(x, 0) = u^0(x)$. Não bastará, portanto, apenas um ou alguns poucos exemplos de velocidades, como é possível em (P4).

Igualando o lado direito da equação em (P5) a ϕ, conforme feito em (3), se ϕ for não gradiente a equação em (P5) não admitirá solução. Então quando a função F é igual a

(8) $\quad F = \phi - \nu\, \nabla^2 u + \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u$

a equação diferencial a ser resolvida é igual a $\nabla p = \phi$, que não tem solução para ϕ não gradiente. Escolhamos por essa razão a força F dada em (8).

Este é um exemplo explícito de força que varia com a velocidade, portanto a cada $u(x,t)$ que verifique (P5) teremos em geral um $F(x,t)$ diferente, ou seja, $F(x,t) = H(\phi(x,t), u^0(x), u(x,t), x, t)$. Vemos que tal definição para F não viola a condição $\exists F(x,t)$ deste problema, por isso a utilizamos. Pode parecer um procedimento inválido, mas está de acordo com a leitura que se faz de [1].

Encontramos assim uma maneira de construir F que resulta sempre em inexistência de soluções para (3), por isso, definindo ϕ uma função não gradiente, a resposta para (P5) é Sim, existem casos de quebra (inexistência) de soluções para Navier-Stokes. Transformamos através de (8) a equação original (1) na equação (5), problema que já foi respondido, também afirmativamente, em (P1).

§ 6

Não se aceitando (a comunidade matemática) uma força variável com a velocidade, escolha-se, por exemplo, $F = 0$, uma velocidade inicial $u^0(x)$ não gradiente ou igual a zero (para facilitar os cálculos) e uma condição inicial adicional $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = a^0(x)$ (podendo ser $a^0(x) = 0$ ou uma função não gradiente) que resultem para (3), em $t = 0$, uma função ϕ não gradiente.

O novo problema neste caso é

(P6) $\exists u^0(x) = u(x,0), \exists a^0(x) = \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}, \exists F(x,t), \forall u(x,t)/u(x,0) = u^0(x), \nexists(u,p)/$
$\nabla p = \nu\, \nabla^2 u - \frac{\partial u}{\partial t} - (u \cdot \nabla)u + F$?

Resposta: Sim.

A quebra das soluções ocorre (pelo menos) em $t = 0$, pois neste instante o lado direito da equação diferencial de (P6) será uma função não gradiente, e por isso a pressão p não poderá ser calculada (significando que não existirá). O exemplo $F = u^0 = 0$ resultará em $\nabla p^0 = -a^0(x)$, sendo $p^0(x) = p(x,0)$ e a^0 não gradiente, equação sem solução.

Tanto neste problema quanto nos anteriores, estamos admitindo, evidentemente, que as funções u^0, a^0, F escolhidas obedecem a todas as condições de funções “bem comportadas”, fisicamente razoáveis, descritas em [1], assim como a função u^0 também deve obedecer (2).

Percebe-se que mais importante que este tratamento específico em relação a Navier-Stokes (válido para as Equações de Euler) é sua aplicação a várias outras equações que também existem. Encontramos uma equivalência lógica e uma técnica úteis.

Wir müssen wissen. Wir werden wissen.

(*Nós precisamos saber. Nós iremos saber.*)

David Hilbert

Referências Bibliográficas

1. Fefferman, Charles L., *Existence and Smoothness of the Navier-Stokes Equation*, in http://www.claymath.org/sites/default/files/navierstokes.pdf

2. Godoi, Valdir M.S., *Breakdown of Navier-Stokes Solutions*, in http://vixra.org/abs/1505.0083 (2015).

3. Godoi, Valdir M.S., *Breakdown of Navier-Stokes Solutions (Short Version)*, in http://vixra.org/abs/1505.0138 (2015).

4. Apostol, Tom M., *Calculus*, vol. II. New York: John Wiley & Sons (1969).