Breakdown of Navier-Stokes Solutions

Valdir Monteiro dos Santos Godoi
valdir.msgodoi@gmail.com

Abstract – We have proved that there are initial velocities $u^0(x)$ and forces $F(x,t)$ such that there is no solution to the Navier-Stokes equations, which corresponds to the cases (C) and (D) of the problem relating to Navier-Stokes equations available on the website of the Clay Institute. First we study these cases at $t = 0$ and then at $t \geq 0$.

Keywords – Navier-Stokes equations, Euler equations, continuity equation, breakdown, existence, smoothness, solutions, gradient field, conservative field, velocity, pressure, external force, millenium problem.

Eureka! (Arquimedes) *It´s!*

1. Introdução

O fato de não ser possível resolver sempre o sistema $\frac{\partial p}{\partial x_i} = \phi_i$, $1 \leq i \leq 3$, nos leva a acreditar que não pode ser sempre possível encontrar solução para a Equação de Navier-Stokes em n=3 dimensões espaciais com força externa, ou seja,

$$(1) \qquad \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \nu \nabla^2 u_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + F_i, \ 1 \leq i \leq 3,$$

para u_i, p, F_i funções da posição $x \in \mathbb{R}^3$ e do tempo $t \geq 0, t \in \mathbb{R}$. A constante $\nu \geq 0$ é o coeficiente de viscosidade, p representa a pressão e $u = (u_1, u_2, u_3)$ é a velocidade do fluido, medidas na posição x e tempo t. A rigor, $F = (F_1, F_2, F_3)$ tem dimensão de aceleração ou força por unidade de massa, mas seguiremos denominando este vetor e suas componentes pelo nome genérico de força.

Sejam ϕ_i funções da posição $x \in \mathbb{R}^3$ e tempo $t \geq 0$ tal que não haja solução para o sistema $\frac{\partial p}{\partial x_i} = \phi_i$, $i = 1, 2, 3$, nossa hipótese.

Então, quaisquer que sejam u_i e os respectivos $u_i^0(x) = u_i(x, 0)$ é sempre possível encontrar forças F_i tais que

$$(2) \qquad \frac{\partial p}{\partial x_i} = \nu \nabla^2 u_i - \frac{\partial u_i}{\partial t} - \sum_{j=1}^{3} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + F_i = \phi_i,$$

ou seja,

(3) $\quad F_i = \phi_i - \nu\nabla^2 u_i + \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$,

para todo i tal que $1 \leq i \leq 3$, desde que as derivadas parciais dos campos vetoriais u_i existam.

Como não há uma solução possível para o sistema $\frac{\partial p}{\partial x_i} = \phi_i$, $1 \leq i \leq 3$, por hipótese, as funções F_i obtidas em (3) resultarão em não possibilidade de solução para o sistema (1), portanto é possível encontrar funções F_i para as componentes da força externa F tais que não haja solução para o sistema de equações diferenciais parciais (1), que são as equações de Navier-Stokes, para $i = 1, 2, 3$.

Verifica-se assim que existe a "quebra das soluções de Navier-Stokes" sobre $\mathbb{R}^3$ para específicas funções da força externa $F = (F_1, F_2, F_3)$, e então é possível solucionar este que é um dos mais difíceis problemas de Matemática em aberto.

A prova que fazemos é, em linhas gerais, bastante simples, por redução ao absurdo. Supomos por hipótese que não há equação de Navier-Stokes (1) sem solução (p, u) possível, ou seja, supomos que sempre existe solução para (1) dados $u^0(x)$ e $F(x,t)$, para $x \in \mathbb{R}^3$ e todo $t \geq 0$, e assim não existe quebra de soluções da equação de Navier-Stokes, supondo satisfeitas todas as demais condições que $p: \mathbb{R}^3 \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ e $F, u: \mathbb{R}^3 \times [0, \infty) \to \mathbb{R}^3$ também devem obedecer neste problema, por exemplo, a equação da continuidade para densidade de massa constante (fluidos incompressíveis). Mas verificaremos que existem campos de velocidade $u(x,t) \in \mathbb{R}^3, x \in \mathbb{R}^3, t \geq 0$, os correspondentes $u^0(x) = u(x, 0)$ e campos $F(x,t) \in \mathbb{R}^3$ que obedecem a todas estas condições necessárias e tais que (1) não tem solução alguma em $t \geq 0$, para nenhuma pressão $p(x,t) \in \mathbb{R}$, seja periódica ou não, o que contradiz nossa hipótese inicial. Provaremos primeiro para $t = 0$, utilizando a condição inicial adicional $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\big|_{t=0}$, e a seguir para um tempo genérico $t \geq 0$.

Por outro lado, seguindo método similar ao aqui descrito, também é possível encontrar forças externas F tais que (1) tenha solução, inclusive para uma mesma velocidade inicial u^0 válida no caso de ocorrência de quebra de solução. E mesmo para os casos de existência de soluções, a solução de (1) não é única. Se $(p(x,t), u(x,t))$ é uma solução de (1), para $F(x,t)$ igual a zero ou não, haverá uma infinidade de outras soluções para (1), em especial as soluções da forma $(p(x,t) + \theta(t), u(x,t))$, já que a pressão na equação de Navier-Stokes aparece recebendo uma aplicação diferencial em relação ao espaço, $\nabla p = \left(\frac{\partial p}{\partial x_1}, \frac{\partial p}{\partial x_2}, \frac{\partial p}{\partial x_3}\right)$, sem proporcionar nenhuma influência no comportamento da velocidade u a soma da pressão com uma constante numérica ou função $\theta(t)$ diferenciável, dependente unicamente do tempo t, pois $\nabla p(x,t) = \nabla\big(p(x,t) + \theta(t)\big)$, para todo (x,t). Para obediência de condições iniciais, basta assumir $\theta(t=0)=0$, e assim $p(x,t) = p(x,t) + \theta(t)$ em $t = 0$.

Chega-se assim à conclusão de que não há unicidade de soluções para as Equações de Navier-Stokes: seja $F = 0$ (vetor nulo) ou não, seja $\nu = 0$ ou não, se há alguma solução (p, u) para (1) então há infinitas outras soluções para (1), para os mesmos F e ν, dadas as mesmas condições iniciais, por exemplo,

$$(4) \qquad \begin{cases} u(x,0) = u^0(x) \\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\big|_{t=0} = a^0(x) \\ p(x,0) = p^0(x) \end{cases}$$

devido à infinidade de soluções $\theta(t)$ possíveis de serem somadas à pressão $p(x,t)$, função da posição x e do tempo t. Mesmo o acréscimo de mais condições iniciais para p podem não resolver (1) de maneira única.

Assim como não há unicidade de soluções também não há unicidade em não soluções: se $\big(p(x,t), u(x,t)\big)$ não resolve (1) então $(p(x,t) + \theta(t), u(x,t))$ também não resolverá. Além disso, uma mesma velocidade inicial $u^0(x)$ e pressão inicial $p^0(x)$ podem corresponder tanto a casos de existência quanto de quebra de soluções, conforme a força externa $F(x,t)$, calculada em função de u e da derivada temporal de u, $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$, implicar em um sistema de equações diferenciais parciais na incógnita p solúvel ou não.

Quer fixemos nossa análise unicamente ao tempo inicial $t = 0$ ou não, para um mesmo valor das condições iniciais (4) é possível encontrar uma força F que implique em não solução para (1) e outra força G que implique em existência de soluções, conforme veremos na seção 3. Simbolicamente, dados $u(x,t), a^0(x) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\big|_{t=0}$ e $u^0(x) = u(x,0)$ pode-se encontrar forças $F(x,t)$ e $G(x,t)$ tais que

$$(5) \qquad \forall u(x,t), \exists u^0(x), \exists a^0(x), \exists F(x,t), \nexists p \ /$$

$$\nabla p = \nu \nabla^2 u - \frac{\partial u}{\partial t} - (u \cdot \nabla) u + F,$$

$$(6) \qquad \forall u(x,t), \exists u^0(x), \exists a^0(x), \exists G(x,t), \exists p \ /$$

$$\nabla p = \nu \nabla^2 u - \frac{\partial u}{\partial t} - (u \cdot \nabla) u + G.$$

A condição inicial envolvendo $a^0(x)$ será utilizada nas seções 3 §3 e 4 §1, mas torna-se irrelevante na continuação destas seções 3 e 4, dando-se provas mais gerais em 3 §4 e 4 §2 para $t \geq 0$. A seção 3 §5 contém alguns esclarecimentos sobre as demonstrações utilizadas, no que diz respeito a usarmos a força F como uma função da velocidade u, e não apenas de u^0, x, t.

2. O Problema do Milênio

No famoso problema do milênio referente às equações de Navier-Stokes, descrito na página do Instituto Clay[1], das quatro possibilidades para sua solução as duas primeiras pedem uma prova de que existe uma solução para as funções da pressão $p(x,t)$ e velocidades $u_i(x,t)$ em $\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$, $1 \le i \le 3$, para o caso específico de $F(x,t) = (F_1, F_2, F_3)(x,t) = 0$ (ausência de força externa, vetor nulo 0) e $\nu > 0$. As duas últimas possibilidades pedem uma prova de que existem funções para a força externa $F(x,t) = (F_1, F_2, F_3)(x,t)$ e velocidade inicial $u^0(x)$ tais que não existe solução para as equações de Navier-Stokes com $\nu > 0$. O caso $\nu = 0$ resulta na chamada Equação de Euler, que também não tem solução geral conhecida para $n = 3$, mas esta não faz parte do problema do milênio.

Além de $\nu > 0$ e dimensão espacial $n = 3$ as quatro alternativas têm em comum a condição de divergente nulo para a velocidade, propriedade dos fluidos incompressíveis (densidade de massa constante na equação da continuidade),

$$(7) \qquad div\, u \equiv \nabla \cdot u = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \qquad \text{(fluidos incompressíveis)}$$

e ser a velocidade inicial $u^0(x) = u(x,0)$ um campo vetorial C^∞ com divergente nulo ($\nabla \cdot u^0 = 0$) sobre $\mathbb{R}^3$. Para que uma solução (p,u) seja fisicamente razoável, se requer que $u(x,t)$ não cresça infinitamente para $|x| \to \infty$ e que

$$(8) \qquad p, u \in C^\infty \qquad (\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$$

e

$$(9) \qquad \int_{\mathbb{R}^3} |u(x,t)|^2 dx < C, \text{ para todo } t \ge 0, \qquad \text{(bounded energy)}$$

satisfazendo (1) e (7).

Alternativamente, a condição (9) de energia total limitada pode ser substituída pela condição de periodicidade espacial da velocidade e respectiva velocidade inicial, assim como pressão e força externa espacialmente periódicas, i.e.,

$$(10) \qquad u(x,t) = u(x + e_j, t),$$

$$(11) \qquad u^0(x) = u^0(x + e_j),$$

$$(12) \qquad p(x,t) = p(x + e_j, t)$$

e

(13) $F(x,t) = F(x+e_j,t)$,

onde e_j é o j^{th} vetor unitário em $\mathbb{R}^3$, para $1 \le j \le 3$, igualdades válidas para u, p, F sobre $\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$ e u^0 sobre $\mathbb{R}^3$.

Neste artigo estamos tratando principalmente dos casos (C) e (D) descritos em [1], ou seja:

(C) Quebra das soluções da Equação de Navier-Stokes sobre $\mathbb{R}^3$. Para $\nu > 0$ e dimensão espacial $n = 3$ existem um campo vetorial suave e com divergência nula $u^0(x) = u(x,0)$ sobre $\mathbb{R}^3$ e uma força externa suave $F(x,t)$ sobre $\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$ satisfazendo

(14) $|\partial_x^\alpha u^0(x)| \le C_{\alpha k}(1+|x|)^{-k}$ sobre $\mathbb{R}^3$, para quaisquer $\alpha \in \mathbb{N}$ e $k \ge 0$,

e

(15) $|\partial_x^\alpha \partial_t^m F(x,t)| \le C_{\alpha m k}(1+|x|+t)^{-k}$ sobre $\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$, para quaisquer $\alpha \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}$ e $k \ge 0$,

tais que não existe solução (p,u) sobre $\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$ satisfazendo (1), (7), (8) e (9).

(D) Quebra das soluções da Equação de Navier-Stokes sobre $\mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$. Para $\nu > 0$ e dimensão espacial $n = 3$ existem um campo vetorial suave e com divergência nula $u^0(x) = u(x,0)$ sobre $\mathbb{R}^3$ e uma força externa suave $F(x,t)$ sobre $\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$ satisfazendo as condições de periodicidade espacial (11) e (13), a condição

(16) $|\partial_x^\alpha \partial_t^m F(x,t)| \le C_{\alpha m k}(1+t)^{-k}$ sobre $\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$, para quaisquer $\alpha \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}$ e $k \ge 0$,

tais que não existe solução (p,u) sobre $\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$ satisfazendo (1), (7), (8), (10) e (12).

Na seção 5 faremos alguns comentários sobre os casos (A) e (B), de existência de soluções.

3. O caso (C)

§ 1

Vamos encontrar primeiramente funções $u: \mathbb{R}^3 \times [0,\infty) \to \mathbb{R}^3$ que são soluções da equação diferencial parcial (equação da continuidade para densidade de massa constante)

(17) $\nabla \cdot u = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$,

a condição de incompressibilidade (7).

Esta equação equivale à lei de Gauss para o campo magnético e para os campos elétrico e gravitacional no vácuo.

Soluções de (17) que correspondem a campos elétricos ou gravitacionais no vácuo, para uma única partícula na origem, fonte do campo (carga ou massa, respectivamente), são da forma

(18) $u = \frac{\alpha}{r^2}\hat{r} = \frac{\alpha}{r^3}\vec{r},$

onde $\vec{r} = (x, y, z)$ é o vetor posição, $\hat{r}$ seu versor, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ o módulo de $\vec{r}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ o fator de proporcionalidade dependente do valor da carga ou massa, respectivamente.

Não fosse a condição (9) de energia total limitada, a existência de divergência na origem e sua derivabilidade nesse ponto as componentes dos campos elétricos e gravitacionais poderiam ser candidatas às funções u_i de componentes de velocidades, mas não às funções ϕ_i mencionadas na Introdução, tais que não exista solução para o sistema de equações diferenciais parciais

(19) $\frac{\partial p}{\partial x_i} = \phi_i,\ 1 \leq i \leq 3.$

Para satisfazer (9) vamos escolher para u campos vetoriais com decaimento exponencial tais que

(20) $\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0,\ 1 \leq i \leq 3,$

o que também obedece (7), por exemplo,

(21) $u_i = a_i e^{-b_i x_{i+1}^2},\ a_i \in \mathbb{R}^*, b_i \in\ (0, 1],$

um campo de velocidades sem aceleração local, estacionário, com a convenção de ser $x_4 \equiv x_1$. Observo aqui que (9) bem poderia ser desprezada, ou pelo menos modificada, caso a força externa total aplicada $\int_V\ |F(x,t)|dx$ fosse infinita. Uma força total infinita corresponde normalmente a uma energia total também infinita, portanto, no que diz respeito aos fundamentos físicos, não haveria necessidade de limitar a uma constante C a integração do quadrado da velocidade sobre todo o espaço $\mathbb{R}^3$. Uma substituta mais natural para (9) seria, por exemplo,

(22) $\int_V\ |u(x,t)|^2 dx \leq A + B\int_V\ |F(x,t)|dx,\ A > 0, B \geq 0,$

para todo $t \geq 0$, e em todo subconjunto $V \subseteq \mathbb{R}^3$ onde estiver sendo aplicada esta força.

Sabemos que a integração do sistema (19) só é possível no caso de campos conservativos e neste caso resulta em

(23) $$p = \int_L \phi \cdot dl + \theta(t),$$

com $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ contínua e $\theta: [0, \infty) \to \mathbb{R}$ diferenciável, correspondendo no caso destes campos conservativos à função trabalho, ou variação da energia cinética (quando ϕ é a força elétrica ou gravitacional e $\theta(t) = 0$), igual à variação (negativa) da energia potencial. Nessa situação a integral sempre existe e, a menos da função $\theta(t)$, independe do caminho L entre os pontos $x_o \in \mathbb{R}^3$ e $x \in \mathbb{R}^3$, supondo que L seja contínuo por partes, de classe C^1 e não passe por nenhuma singularidade de ϕ. Diz-se que p é uma função potencial para ϕ.

Precisamos então buscar um campo vetorial $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ que não seja gradiente, i.e., não deve existir uma função $p: \mathbb{R}^3 \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ tal que exista solução para a equação

(24) $$\nabla p = \phi,$$

que equivale ao sistema (19) anterior.

Em muitos livros de Análise Matemática e Cálculo Diferencial e Integral pode-se encontrar a solução para este problema. Um dos grandes clássicos é o Apostol[2] (vol. II, cap. 10, Integrais de Linha), embora Courant, Elon Lages Lima, Guidorizzi, Kaplan, Piskunov, etc. sejam igualmente ótimas referências.

No teorema 10.6 de Apostol (seção 10.16) se prova que uma condição necessária para que um campo vetorial $f = (f_1, \dots, f_n)$ continuamente diferenciável em um conjunto aberto S de $\mathbb{R}^n$ seja um gradiente em S é que as derivadas parciais das componentes de f estejam ligadas pela relação

(25) $$D_i f_j(x) = D_j f_i(x),$$

para todo $i, j = 1,2, \dots, n$ e todo x de S. D_i é o operador diferencial $\frac{\partial}{\partial x_i}$.

No teorema 10.9 de Apostol (seção 10.21) se prova que a condição (25) também é uma condição suficiente se o conjunto S é um conjunto convexo aberto de $\mathbb{R}^n$.

Vamos então a seguir buscar um campo vetorial $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$, $\phi_i: \mathbb{R}^3 \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$, tal que

(26) $$\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} \neq \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i},\ i \neq j,$$

para algum par $(i,j), 1 \leq i,j \leq 3$, $x \in \mathbb{R}^3$ e tempos t não negativos. Adotaremos que nosso conjunto convexo aberto S é o próprio $\mathbb{R}^3$.

Além da condição (26) a condição (17) de incompressibilidade da velocidade também deve ser satisfeita, bem como as demais condições impostas neste problema do milênio, tais como (14) e (15).

Funções simples que obedecem (26) são, por exemplo,

1) $\big(ay, bx, c(x+y)\big)$, $\quad a \neq b \neq c$,

2) $(0, xzt, xyt)$, $\quad x, y, z \neq 0,\ t \geq 0$,

3) $(e^{-ayt}, e^{-bxt}, e^{-czt})$, $\quad a, b, c \neq 0,\ t \geq 0$,

onde usamos $x_1 \equiv x,\ x_2 \equiv y,\ x_3 \equiv z$, mas não podemos escolher arbitrariamente qualquer ϕ solução de (26).

Para que F não divirja no infinito, nem suas derivadas, e que obedeça (15), vamos escolher para ϕ uma função limitada, contínua, com todas as derivadas também contínuas (C^∞) e limitadas, que obedeça (26) e que resulte numa função F, conforme (3), tal que seja possível provar (15).

Analisemos as três situações possíveis para φ.

Se o campo vetorial $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ definido por

(27) $\quad \varphi_i = \nu \nabla^2 u_i - \frac{\partial u_i}{\partial t} - \sum_{j=1}^{3} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j},\ 1 \leq i \leq 3,$

não for um gradiente, i.e., for tal que

(28) $\quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \neq \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}$ para algum $i \neq j, 1 \leq i,j \leq 3$,

escolhemos $\phi_i = \varphi_i$, e então, conforme (3),

(29) $\quad F_i = \phi_i - \varphi_i = 0$, para todo i tal que $1 \leq i \leq 3$.

Vê-se que é possível uma força nula obedecer às condições deste problema do milênio no caso de quebra de soluções. Assim, não me parece possível resolver em toda sua generalidade os casos (A) e (B) deste problema, embora não seja minha pretensão provar isto neste artigo.

Se φ for um gradiente devemos encontrar um campo vetorial $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ que não seja gradiente, i.e., seja não conservativo, e assim o campo vetorial

(30) $\quad \phi = \varphi + \omega$

também não será gradiente, será não conservativo, e

(31) $F_i = \phi_i - \varphi_i = \omega_i$, para todo i tal que $1 \leq i \leq 3$.

Um campo vetorial $\omega = F$ fácil de ser obtido é

(32) $\omega = (c_1\varphi_1, c_2\varphi_2, c_3\varphi_3)$,

para constantes reais $c_i \neq c_j \neq 0,\ i \neq j$.

Como neste caso φ é gradiente, i.e., conservativo, então (condição necessária)

(33) $\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j} = \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}$ para todo i, j tais que $1 \leq i, j \leq 3$.

Mas se $\omega_i = c_i\varphi_i$ e as derivadas parciais $\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}$ não são identicamente nulas então

(34) $\frac{\partial\omega_i}{\partial x_j} = c_i \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j} \neq c_j \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i} \neq 0$, para $c_i \neq c_j \neq 0,\ i \neq j$,

i.e.,

(35) $\frac{\partial\omega_i}{\partial x_j} \neq \frac{\partial\omega_j}{\partial x_i},\ i \neq j$,

portanto ω não é gradiente e

(36) $F_i = \phi_i - \varphi_i = \omega_i = c_i\varphi_i$, para todo i tal que $1 \leq i \leq 3$,

O terceiro e último caso ocorre quando para todo $x \in \mathbb{R}^3, t \geq 0$,

(37) $\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j} = \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i} = 0$ para todo i, j tais que $1 \leq i, j \leq 3$,

indicando que φ é um campo conservativo e suas derivadas parciais de primeira ordem são iguais a zero.

Como buscamos algum par (i, j) tal que $\frac{\partial\phi_i}{\partial x_j} \neq \frac{\partial\phi_j}{\partial x_i}$ em geral e queremos alguma função F cujas sucessivas derivadas parciais sejam da ordem de $(1 + |x| + t)^{-k}$ sobre $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$ vamos escolher F tal que suas derivadas se anulem a partir da segunda ordem de derivação parcial mista, i.e.,

(38) $\frac{\partial^{p+q}}{\partial x_i^p \partial t^q} F = 0,\ p \geq 1,\ q \geq 1,\ 1 \leq i \leq 3$,

e seja F um campo não conservativo. Assim a soma $\varphi + F$, que deve ser igual a ∇p,

(39) $\quad \varphi + F = \phi = \nabla p,$

será igual a um campo ϕ não conservativo e portanto não haverá solução para (39), equivalente a (24) e (19). Usamos a propriedade de que a soma de um campo vetorial conservativo e um não conservativo é um campo vetorial não conservativo.

Escolhemos para F nesse caso um campo não conservativo que decresce exponencialmente em relação à posição e ao tempo em ao menos uma das coordenadas espaciais e pode ser igual a zero ou a uma constante nas coordenadas restantes (se houver). Por exemplo,

(40) $\quad F_i = a_i\left(1 + e^{-c_{1i}x_{i+1}^2} + b_i e^{-c_{2i}t}\right), 1 \leq i \leq 3,$

com $c_{1i} \neq c_{1j}$, $c_{ij} \in (0, 1]$, e $a_i \neq 0$. Adotamos acima a convenção de ser $x_4 \equiv x_1$. As componentes F_i podem depender do tempo ou não, conforme (40), sem alterar a propriedade de ser F um campo não conservativo.

Para que F seja fisicamente consistente é necessário que a_i tenha a dimensão de aceleração ou força por unidade de massa, c_{1i} tenha a dimensão de recíproco de comprimento, c_{2i} dimensão de recíproco de tempo e b_i seja adimensional, podendo ser igual a zero.

§ 2

Vistas as três situações possíveis para $\varphi = \phi - F$ vamos agora à demonstração com nosso exemplo específico. Suponhamos, por hipótese, que não há equação de Navier-Stokes sem solução (p, u) possível, ou seja, dados $u^0(x)$ e $F(x, t)$ para $x \in \mathbb{R}^3$ sempre há solução para (1), para todo instante $t \geq 0$, supondo ainda satisfeitas todas as condições que devem obedecer a pressão $p: \mathbb{R}^3 \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ e a velocidade $u: \mathbb{R}^3 \times [0, \infty) \to \mathbb{R}^3$ neste problema do milênio, por exemplo, a condição de incompressibilidade (7).

Iniciemos ampliando a condição inicial $u(x, 0) = u^0(x)$ do instante $t = 0$ para todo t do intervalo $0 \leq t \leq T,\ T \in \mathbb{R}_+$, ou seja, deve valer como condição de contorno

(41) $\quad u(x, t) = u^T(x, t),\ 0 \leq t \leq T,$

sendo $u^T: \mathbb{R}^3 \times [0, \infty) \to \mathbb{R}^3$.

A velocidade u escolhida em (21) independe do tempo t, assim deve valer, para $1 \leq i \leq 3$ e todo t em $0 \leq t \leq T$,

(42) $u_i(x,t) = u_i^T(x,t) = u^0(x) = a_i e^{-b_i x_{i+1}^2},\ a_i \in \mathbb{R}^*, b_i \in\ (0,1],$

e então, no intervalo de tempo $0 \leq t < T$,

(43) $\frac{\partial u_i}{\partial t} = 0,$

o que corresponde a um fluido sem aceleração local, uma solução estacionária, cuja velocidade em um ponto não varia no tempo.

As outras derivadas parciais em $0 \leq t \leq T$ são

(44) $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = 0,\ j \neq i+1,$

(45) $\frac{\partial u_i}{\partial x_{i+1}} = -2a_i b_i x_{i+1} e^{-b_i x_{i+1}^2},$

(46) $\nabla^2 u_i = \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right) u_i = \frac{\partial^2}{\partial x_{i+1}^2} u_i = -2a_i b_i e^{-b_i x_{i+1}^2}(1 - 2b_i x_{i+1}^2),$

(47) $\sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = u_{i+1} \frac{\partial u_i}{\partial x_{i+1}} = -2a_i b_i a_{i+1} x_{i+1} e^{-(b_i x_{i+1}^2 + b_{i+1} x_{i+2}^2)},$

e assim, de (27),

(48) $$\varphi_i = -2\nu \cdot a_i b_i e^{-b_i x_{i+1}^2}\left(1 - 2b_i x_{i+1}^2\right) + $$
$$+ 2a_i b_i a_{i+1} x_{i+1} e^{-(b_i x_{i+1}^2 + b_{i+1} x_{i+2}^2)}$$
$$= 2a_i b_i e^{-b_i x_{i+1}^2}(-\nu(1 - 2b_i x_{i+1}^2) + a_{i+1} x_{i+1} e^{-b_{i+1} x_{i+2}^2})$$

ou, definindo $x_4 \equiv x_1$ e $x_5 \equiv x_2$,

(49) $$\begin{cases} \varphi_1 = 2a_1 b_1 e^{-b_1 x_2^2}(-\nu(1 - 2b_1 x_2^2) + a_2 x_2 e^{-b_2 x_3^2}) \\ \varphi_2 = 2a_2 b_2 e^{-b_2 x_3^2}(-\nu(1 - 2b_2 x_3^2) + a_3 x_3 e^{-b_3 x_1^2}) \\ \varphi_3 = 2a_3 b_3 e^{-b_3 x_1^2}(-\nu(1 - 2b_3 x_1^2) + a_1 x_1 e^{-b_1 x_2^2}) \end{cases}$$

Comparando estas duas derivadas

(50) $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} = 4a_1 b_1^2 x_2 e^{-b_1 x_2^2}(\nu(3 - 2b_1 x_2^2) - a_2 x_2 e^{-b_2 x_3^2})$

e

(51) $\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} = -4a_2 a_3 b_2 b_3 x_1 x_3 e^{-(b_3 x_1^2 + b_2 x_3^2)}$

temos $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} \neq \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}$, em geral, então φ é um campo vetorial não conservativo. Conforme (29), escolhendo $\phi_i = \varphi_i$, para $i = 1, 2, 3$, chega-se a

(52) $\quad F_i = \phi_i - \varphi_i = 0.$

Descreveríamos assim o movimento de um fluido não acelerado (localmente) nas três direções ortogonais $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$, sem força externa, no intervalo de tempo $0 \leq t < T$, mas há o problema de não se encontrar a pressão do sistema.

Como φ é não conservativo e $\varphi = \phi$ então ϕ é não conservativo. Como deveria valer a equação (2)

(53) $\quad \frac{\partial p}{\partial x_i} = \phi_i, \; 1 \leq i \leq 3,$

para haver solução de (1), mas ϕ é um campo vetorial não conservativo, i.e., não gradiente, então o sistema acima não tem solução, e portanto encontramos uma velocidade inicial $u^0(x) = u^T(x,t) = u(x,t)$ e uma força externa $F(x,t) = 0$ tal que não há solução para a equação de Navier-Stokes (1) no intervalo de tempo $0 \leq t < T$. Como nossa hipótese inicial admite haver solução (p, u) em todo $t \geq 0$ chegamos a uma contradição, o que invalida nossa hipótese inicial.

§ 3

Para uma demonstração compatível ao problema do milênio é necessário que $T \to 0$. A condição inicial requerida para a velocidade é $u(x,0) = u^0(x)$, portanto não podemos prefixar $u(x,t) = u^T(x,t)$, para $0 \leq t \leq T$, $T \in \mathbb{R}_+$, em nossa demonstração final.

A equação de Navier-Stokes (1) e a condição de incompressibilidade (7) devem ser satisfeitas para todo instante $t \geq 0$, portanto também em $t = 0$.

Em $t = 0$ temos

(54) $\quad \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\Big|_{t=0} = \frac{\partial u_i^0}{\partial x_j},$

(55) $\quad \nabla^2 u_i\big|_{t=0} = \nabla^2 u_i^0,$

(56) $\quad \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\Big|_{t=0} = \sum_{j=1}^3 u_j^0 \frac{\partial u_i^0}{\partial x_j},$

(57) $\quad \frac{\partial p}{\partial x_j}\Big|_{t=0} = \frac{\partial p(x,0)}{\partial x_j},$

mas nem sempre vale

(58) $\frac{\partial u_i}{\partial t}|_{t=0} = \frac{\partial u_i^0}{\partial t}$,

pois $\frac{\partial u_i^0}{\partial t}$ é identicamente nulo, enquanto $\frac{\partial u_i}{\partial t}|_{t=0}$ pode ser nulo ou não nos movimentos acelerados em geral, independentemente do valor de $u_i^0(x)$.

A equação (1) em $t = 0$ pode então ser reescrita como

(59) $\frac{\partial u_i}{\partial t}|_{t=0} + \sum_{j=1}^{3} u_j^0 \frac{\partial u_i^0}{\partial x_j} = \nu \nabla^2 u_i^0 - \frac{\partial p}{\partial x_i}(x,0) + F_i(x,0),\ 1 \le i \le 3,$

ou, definindo $p(x,0) = p^0(x)$ e $F_i(x,0) = F_i^0(x)$,

(60) $\frac{\partial p^0}{\partial x_i} = \nu \nabla^2 u_i^0 - \frac{\partial u_i}{\partial t}|_{t=0} - \sum_{j=1}^{3} u_j^0 \frac{\partial u_i^0}{\partial x_j} + F_i^0 = \phi_i^0,$

equação similar a (2) para $t = 0$.

Já vimos que sistemas semelhantes a (60), para $1 \le i \le 3$, só terão solução se ϕ^0 for um campo vetorial gradiente, ou conservativo, qualquer que seja o valor de t, e obviamente para $t = 0$ esta exigência precisará também ser obedecida.

Tal como feito em (23), a solução de (60), no caso de ϕ^0 ser gradiente, é

(61) $p^0 = \int_L \phi^0 \cdot dl + \theta(t = 0),$

e assim fica claro que $\frac{\partial u_i}{\partial t}|_{t=0} = a_i^0(x)$, por não ter seu valor univocamente determinado através de u_i^0 e u^0, em geral, nem de F_i^0 e F^0, proporcionará um valor para a pressão inicial p^0 que dependerá deste valor de $\frac{\partial u_i}{\partial t}|_{t=0}$, a variação temporal inicial da componente u_i da velocidade.

Também podemos encontrar combinações de $\frac{\partial u_i}{\partial t}|_{t=0}$ e F_i^0, $1 \le i \le 3$, tais que o sistema (60) tenha solução ou não, conforme resultem em campos vetoriais ϕ^0 gradientes ou não, seguindo método semelhante ao indicado anteriormente nesta seção, por isso $u^0(x)$ e $F^0(x)$ não determinam de maneira única a quebra ou não das soluções das equações de Navier-Stokes em $t = 0$. Consequentemente, $u^0(x)$ e $F^0(x)$ não determinam de maneira única a quebra ou não das soluções das equações de Navier-Stokes sobre $\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$ (ver equações (5) e (6)).

Usando o exemplo de velocidade inicial utilizado na seção 3 §2, em (42),

(62) $u^0(x) = a_i e^{-b_i x_{i+1}^2},\ a_i \in \mathbb{R}^*, b_i \in\ (0,1],$

para $1 \leq i \leq 3$ e $0 \leq t \leq T$, façamos $T \to 0$, $F = 0$ e escolhamos $\frac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=0} = 0$ como mais uma condição inicial, tal qual (43). Isso fará com que não haja solução para p em $t = 0$, conforme os cálculos da seção 3 §2, e assim mostramos um exemplo de quebra de soluções da equação de Navier-Stokes em $t = 0$ pelo acréscimo de condição inicial adicional $a^0(x) = 0$. Sendo assim, não houve solução para (1) em todo $t \geq 0$, o que contraria nossa hipótese inicial. Tal exemplo satisfaz a todos os requisitos que devem ser obedecidos por $u^0(x)$ e $F(x,t)$.

§ 4

Faremos agora uma demonstração genérica para a quebra de soluções de Navier-Stokes sem utilizarmos nenhuma condição de contorno adicional, e para todo $t \geq 0$. Assemelha-se ao que já foi feito na Introdução, com uma descrição mais apropriada para o domínio, imagem e condições das variáveis. De fato as seções 3 §2 e 3 §3 poderiam ser excluídas do presente trabalho, não são de leitura obrigatória, uma vez que a prova mais abrangente é a deste §4. Optei por preservá-las porque correspondem a uma sequência de pensamentos que pode apoiar o entendimento completo deste problema.

Para um tempo real $t \geq 0$ qualquer, dada uma velocidade $u(x,t): \mathbb{R}^3 \times [0,\infty) \to \mathbb{R}^3$ que obedeça a todas as condições deste problema, descritas na seção 2, e tais que

(63) $\quad u^0(x) = u(x,0)$

seja a velocidade inicial escolhida no nosso problema, para que haja solução de Navier-Stokes deve valer

(64) $\quad \frac{\partial p}{\partial x_i} = \nu\nabla^2 u_i - \frac{\partial u_i}{\partial t} - \sum_{j=1}^{3} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + F_i = \varphi_i + F_i = \phi_i, 1 \leq i \leq 3,$

com

(65) $\quad \varphi_i = \nu\nabla^2 u_i - \frac{\partial u_i}{\partial t} - \sum_{j=1}^{3} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, 1 \leq i \leq 3,$

onde se supõe que $u^0(x)$ por nós escolhido também obedece a todas as condições necessárias, em especial (14). Por convenção, escolhamos sempre $u^0(x)$ não gradiente, i.e., não conservativo.

Para este campo vetorial de velocidades $u(x,t)$ é possível calcular $\varphi(x,t)$, de (65), escolher um campo ϕ não conservativo com as mesmas propriedades razoáveis que devem obedecer u, p e F para o caso (C), e calcular

(66) $\quad F = \phi - \varphi = \phi - \nu\nabla^2 u + \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u.$

Escolhamos, por exemplo,

(67) $\phi(x,t) = u^0(x),$

que é um campo não conservativo pela nossa convenção e independente do tempo t. Suponhamos que a compatibilidade dimensional física entre ϕ e u^0 seja feita pela multiplicação do fator 1, cuja dimensão compatibiliza ambos os campos.

O valor para as componentes de $F(x,t)$ que obtemos de (66) é então

(68) $F_i = u_i^0 - \nu\nabla^2 u_i + \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, 1 \leq i \leq 3,$

que deve satisfazer às mencionadas condições da seção 2 e depende de $\frac{\partial u_i}{\partial t}$, qualquer que seja o valor de $t \geq 0$. Evidentemente, se os F_i obtidos em (68) não obedecerem aos requisitos esperados escolhe-se outros $u^0(x)$ e $u(x,t)$ e repete-se o processo até que se obtenham componentes F_i adequadas, em especial que pertençam a C^∞ e obedeçam (15).

A força $F = (F_1, F_2, F_3)$ calculada pelo método acima e a velocidade inicial u^0 escolhida convenientemente em (63) garantem que chegue-se a um valor impossível de ser obtido para a pressão p, pois $\phi = u^0$ é não conservativo, segundo nossa escolha, o que prova a ocorrência de quebra (inexistência) de soluções para as equações de Navier-Stokes, conforme queríamos. Nossa hipótese inicial de que sempre há solução (p,u) possível para (1) foi então violada: dado p talvez possamos sempre encontrar u, mas dado u (e respectivo u^0) podemos não encontrar p, quando ϕ é não gradiente.

Claro que este raciocínio também pode levar a encontrar uma solução para p, trocando-se as funções não gradientes por gradientes. Devemos encontrar como resultado de (64) uma função ϕ gradiente, e para isso as escolhas preferenciais a serem feitas são combinações de F, u^0, u e φ também gradientes. É o que formulamos resumida e simbolicamente nas equações (5) e (6) da Introdução.

§ 5

Neste parágrafo explica-se melhor a prova do § 4 anterior.

Substituindo (68) em (64) obtemos

(69) $\frac{\partial p}{\partial x_i} = u_i^0, 1 \leq i \leq 3,$

que não possui solução por ser u^0 não gradiente, pela nossa definição, e assim encontramos $u^0(x)$, $u(x,t)$ e $F(x,t) = H(u^0(x),\ u(x,t))$ que levam à quebra (inexistência) das soluções de Navier-Stokes. Transformamos então a equação original (1) nesta equação (69).

Talvez seja difícil (ou até muito difícil) entender como é possível fazer com que $F(x,t) = H(u^0(x),\ u(x,t))$ possa ser calculado e usado na demonstração. Pode-se pensar que devemos apenas encontrar "de alguma maneira" velocidades iniciais $u^0(x)$ e forças externas $F(x,t)$ únicas, fixas, tais que (1) não tenha solução alguma, para qualquer par de variáveis (p,u) que possam existir. Mais exatamente, parece que não podemos dar como exemplo uma força que depende da velocidade em $t \geq 0$.

Vejamos então.

(I) Se u resolve (1) então u é uma função de F e u^0, suponhamos $u = f(F, u^0, x, t) = g(x,t)$.

(II) Se u é uma função de F e u^0 então F é uma função ou uma relação de u e u^0, mesmo que tal relação não seja unívoca, i.e., $F = f^{-1}(u, u^0, x, t) = g^{-1}(x,t)$.

(III) Se F pode ser expressa como função (ou relação) de u e u^0 a equação (68) que utilizamos pode ser aceita, no que diz respeito a ser F dependente de u e u^0. Vejam também que a definição do problema não proíbe que F seja função de u, o que nos dá liberdade para que seja parte da estratégia de nossa solução.

A segunda objeção que pode ser feita é o fato de prefixarmos u, e não apenas u^0, de tal modo que escolhemos F dado por (68) igual a

(70) $$F = u^0 - \nu\nabla^2 u + \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u.$$

Mas qual o significado de não existir (p,u), na definição do problema dado em [1]? Simbolicamente, usando Lógica, a não existência do par de variáveis (p,u) equivale à seguinte sentença:

(71) $$\nexists(p,u) \leftrightarrow ((\exists p \wedge \nexists u) \vee (\exists u \wedge \nexists p) \vee (\nexists p \wedge \nexists u)).$$

A opção que adotamos dentre as três possibilidades acima foi a existência de u com a não existência de p, i.e.,

(72) $$(\exists u \wedge \nexists p) \rightarrow \nexists(p,u).$$

Acredito que com estas explicações as dúvidas sobre a validade das demonstrações anteriores sejam eliminadas. A seguir um resumo da definição do problema para o caso (C), onde se acrescentou um novo requisito referente à existência de u (destacado na cor azul), mantendo-se a de não existência de (p,u), equivalente a $\nexists p$, não existência de p. Os números entre asteriscos (*) referem-se à numeração original das respectivas equações em [1].

~~~~~~~~

$\nu > 0, n = 3$

$\exists u^0(x): \mathbb{R}^3$ smooth (C^∞), divergence-free ($\nabla \cdot u^0 = 0$)(ver nota A)

$\exists F(x,t): \mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$ smooth (C^∞)

(*4*) $|\partial_x^\alpha u^0(x)| \leq C_{\alpha k}(1+|x|)^{-k}: \mathbb{R}^3,\ \forall \alpha, k$

(*5*) $|\partial_x^\alpha \partial_t^m F(x,t) \leq C_{\alpha m k}(1+|x|+t)^{-k}: \mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$, $\forall \alpha, m, k$

$\exists u(x,t): \mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$ smooth (C^∞)

$\nexists (p,u): \mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$ /

(*1*) $\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \nu \nabla^2 u_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + F_i(x,t), 1 \leq i \leq 3$ $(x \in \mathbb{R}^3, t \geq 0)$

(*2*) $\nabla \cdot u = 0$

(*3*) $u(x,0) = u^0(x)$ $(x \in \mathbb{R}^3)$

(*6*) $p, u \in C^\infty$ $(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$

(*7*) $\int_{\mathbb{R}^3} |u(x,t)|^2 dx < C, \forall t \geq 0$ (bounded energy)

~~~~~~~~

4. O caso (D)

§ 1

Na seção 3 anterior dividimos o caso (C) em três situações possíveis para $\varphi = \phi - F$:

1) φ é um campo vetorial não gradiente

2) φ é um campo vetorial gradiente, com $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \neq 0,\ 1 \leq i,j \leq 3$

3) φ é um campo vetorial gradiente, com $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} = 0,\ 1 \leq i,j \leq 3$

Como uma demonstração genérica para o caso (C) não exclui a possibilidade de serem espacialmente periódicas as funções $u^0(x)$ e $F(x,t)$, assim como a função velocidade $u(x,t)$, seremos nesta seção mais breve que na anterior; o essencial da técnica utilizada nesta demonstração está dado na seção 3. Quanto à pressão p, uma vez que nosso método se baseia na prova de que p não existe, será irrelevante admitir que p seja ou não periódica. Não existirá pressão $p(x,t)$ alguma, periódica ou não, que resolva para todo $t \geq 0$ as equações de Navier-

Stokes (1) com a condição de incompressibilidade (7), para específicas funções $u^0(x)$ e $F(x,t)$, levando-se em consideração a condição inicial adicional $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = a^0(x)$.

Escolhamos então para $u_0(x)$ uma função trigonométrica de período 1 na direção e_1 e igual a zero nas outras duas direções, e_2 e e_3, ou seja,

(73) $u_0(x) = (sen(2\pi x_2), 0, 0)$.

Em $t = 0$ temos então

(74) $\frac{\partial u_1}{\partial x_2}|_{t=0} = +2\pi\cos(2\pi x_2)$

(75) $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}|_{t=0} = 0, (i,j) \neq (1,2)$

(76) $\nabla^2 u_i = \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right) u_i = \begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} u_1 = -4\pi^2 sen(2\pi x_2), \ i = 1 \\ 0, \ i \neq 1 \end{cases}$

(77) $\sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = 0, \ 1 \le i \le 3.$

Por simplicidade, escolhamos também

(78) $\frac{\partial u_i}{\partial t}|_{t=0} = a^0(x) = 0, \ 1 \le i \le 3,$

e assim a equação (1) fica, em $t = 0$,

(79) $\frac{\partial p^0}{\partial x_i} = \varphi_i^0 + F_i^0 = \phi_i^0 = \begin{cases} -\nu \cdot 4\pi^2 sen(2\pi x_2) + F_1^0, i = 1 \\ F_i^0, i \neq 1 \end{cases}$

definindo $p^0(x) = p(x,0)$, assim como os demais índices superiores 0 (zero) correspondem à respectiva função em $(x,0)$.

Para $\nu \neq 0$ e $F^0 = 0$ vemos que ϕ^0 dada em (79) é não gradiente, logo, não há solução para o sistema (79) escolhendo $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0, F = 0, \nu \neq 0$ e a velocidade inicial dada por (73), o que é então mais um exemplo de quebra de soluções da equação de Navier-Stokes em $t = 0$, e que também satisfaz a todos os requisitos que devem obedecer $u^0(x)$ e $F(x,t)$, como é fácil de ver.

§ 2

Semelhantemente ao que fizemos na seção 3 §4, para um tempo real $t \ge 0$ qualquer, dada uma velocidade $u(x,t): \mathbb{R}^3 \times [0,\infty) \to \mathbb{R}^3$ que obedeça a todas as condições deste problema, descritas na seção 2, e tais que

(80) $u(x,0) = u^0(x) = (sen(2\pi x_2), 0, 0)$,

usando o mesmo exemplo (73) da subseção anterior, para que haja solução de Navier-Stokes deve valer,

(81) $\frac{\partial p}{\partial x_i} = \nu\nabla^2 u_i - \frac{\partial u_i}{\partial t} - \sum_{j=1}^{3} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + F_i = \varphi_i + F_i = \phi_i, 1 \le i \le 3,$

com

(82) $\varphi_i = \nu\nabla^2 u_i - \frac{\partial u_i}{\partial t} - \sum_{j=1}^{3} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, 1 \le i \le 3.$

Para este campo vetorial de velocidades $u(x,t)$ é possível calcular $\varphi(x,t)$, de (82), escolher um campo ϕ não conservativo com as mesmas propriedades razoáveis que devem obedecer u, p e F para o caso (D), e calcular

(83) $F = \phi - \varphi = \phi - \nu\nabla^2 u + \frac{\partial u}{\partial t} + (u\cdot\nabla)u,$

que deve ser uma função espacialmente periódica de período unitário nas três direções ortogonais $e_j, 1 \le j \le 3$.

Escolhamos, por exemplo,

(84) $\phi(x,t) = u^0(x) = (sen(2\pi x_2), 0, 0)$,

que é um campo não conservativo e independente do tempo t. Suponhamos novamente que a compatibilidade dimensional física entre ϕ e u^0 seja feita pela multiplicação do fator 1 cuja dimensão compatibiliza ambos os campos.

O valor das componentes de $F(x,t)$ que obtemos de (83) é então

(85) $F_i = \begin{cases} sen(2\pi x_2) - \varphi_i, & i = 1 \\ -\varphi_i, & i = 2, 3 \end{cases}$

com φ_i dado em (82), que deve ser espacialmente periódico de período unitário, e finalmente, de (81),

(86) $\frac{\partial p}{\partial x_i} = \phi_i = \begin{cases} sen(2\pi x_2), & i = 1 \\ 0, & i = 2, 3 \end{cases}$

que é claramente um sistema sem solução para a função escalar p, qualquer que seja a velocidade $u(x,t)$ aceitável que possamos ter utilizado inicialmente como nossa escolha, com $u(x,0) = u^0(x)$ e $t \ge 0$.

A força $F(u(x,t))$ calculada pelo método acima e a velocidade inicial u^0 escolhida em (80) garantem que para qualquer velocidade $u(x,t)$ admissível para solução de Navier-Stokes neste problema chegue-se a um valor impossível de ser obtido para a pressão p, pois $\phi = u^0$ é não conservativo, segundo nossa escolha, o que prova a existência de quebra de soluções para as equações de Navier-Stokes, conforme queríamos.

Lembremos que a utilização da força como uma função da velocidade já foi justificada na seção 3 §5.

Vejam ainda que o caso (D) é de menor interesse, pois nos obriga a buscar uma não solução espacialmente periódica de período unitário, quando poderia haver uma solução não espacialmente periódica ou de período não unitário em alguma direção. Velocidades iniciais e forças externas periódicas podem também implicar, talvez, em uma solução não periódica, ou seja, mesmo que todas as condições do problema no caso (D) sejam satisfeitas pode haver ainda alguma solução para as equações de Navier-Stokes.

5. Comentários sobre os casos (A) e (B): existência de soluções

Os casos mais difíceis de serem tratados neste problema do milênio, em minha opinião, são as duas primeiras alternativas, que pedem solução para as equações de Navier-Stokes dada uma velocidade inicial genérica qualquer $u^0(x)$ satisfazendo determinadas condições, conforme descrito a seguir.

(A) <u>Existência e lisura das soluções da Equação de Navier-Stokes sobre $\mathbb{R}^3$.</u> Para coeficiente de viscosidade $\nu > 0$, dimensão espacial $n = 3$, força externa $F = 0$ e qualquer campo vetorial suave e com divergência nula $u^0(x) = u(x, 0)$ sobre $\mathbb{R}^3$ existe solução (p, u) sobre $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$ para as equações de Navier-Stokes satisfazendo (1), (7), (8), (9) e (14).

(B) <u>Existência e lisura das soluções da Equação de Navier-Stokes sobre $\mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$.</u> Para coeficiente de viscosidade $\nu > 0$, dimensão espacial $n = 3$, força externa $F = 0$ e qualquer campo vetorial suave e com divergência nula $u^0(x) = u(x, 0)$ sobre $\mathbb{R}^3$ satisfazendo a condição de periodicidade espacial (11) existe solução (p, u) sobre $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$ para as equações de Navier-Stokes satisfazendo (1), (7), (8), (10) e (12).

Vejamos. Não fosse a exigência de ser $F = 0$ seria muito simples resolver Navier-Stokes. Poderíamos escolher pressões $p(x, t)$ fisicamente razoáveis, velocidades $u(x, t)$ fisicamente razoáveis satisfazendo $u(x, 0) = u^0(x)$ e ainda que p e u (e consequentemente u^0) obedecessem às demais condições requeridas para este problema, a exemplo de $\nabla \cdot u = 0$, o que resultaria enfim numa força externa $F = (F_1, F_2, F_3)(x, t)$ tal que

$$(87) \quad F_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \nu \nabla^2 u_i - \frac{\partial p}{\partial x_i}, \; 1 \le i \le 3.$$

Nossa atenção se concentraria em provar que F não viola nenhuma regra, nenhuma condição que F deveria obedecer pela imposição do problema.

A equação (87) mostra claramente que existem combinações das variáveis (p, u) que são proibidas nos movimentos de fluidos sem força externa, pois se o lado direito de (87) resultar para ao menos uma das componentes i um valor não nulo para a força externa chegaríamos a uma contradição, já que o movimento seria, por definição, sem força externa.

Também não podemos utilizar qualquer velocidade inicial $u^0(x)$. Todas as condições que devem obedecer $u(x,t)$ em $t \geq 0$ devem ser obedecidas por $u^0(x)$, já que esta equivale a $u(x,t)$ no instante inicial $t = 0$. Em especial, $u^0(x)$ deve obedecer também às equações de Navier-Stokes (1) e de incompressibilidade (7).

Isto nos sugere que $u^0(x)$ pode ser, ela própria, a procurada solução de (1), inclusive para todo $t \geq 0$, com a imposição da condição de contorno adicional $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$. Temos assim o caso de fluidos sem aceleração local, uma solução estacionária. Se a correspondente função ϕ em

$$(88) \quad \frac{\partial p}{\partial x_i} = \nu\nabla^2 u_i^0 - \sum_{j=1}^{3} u_j^0 \frac{\partial u_i^0}{\partial x_j} = \phi_i, \ 1 \leq i \leq 3,$$

for gradiente então o problema está resolvido, para uma infinidade de pressões possíveis, admitindo-se satisfeitas as demais condições que devem ser obedecidas por u e p. No caso de fornecermos $p^0(x)$ como condição inicial ao invés de $a^0(x)$, sempre haverá solução em $t = 0$, e teremos

$$(89) \quad a_i^0 = \nu\nabla^2 u_i^0 - \frac{\partial p^0}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{3} u_j^0 \frac{\partial u_i^0}{\partial x_j}, \ 1 \leq i \leq 3.$$

Se o valor de a^0 que se obtém acima for igual a zero então $u(x,t) = u^0(x)$ e $p(x,t) = p^0(x) + \theta(t)$ são uma solução do problema, para $t \geq 0$.

Mas o caso geral ainda nos foge neste momento: dado $u^0(x)$ obter $u(x,t)$ e $p(x,t)$, soluções das equações de Navier-Stokes. Para mim parece claro que é preciso ao menos mais uma condição inicial, como já vimos com o uso de $a^0(x) = \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}$ nas seções anteriores. Além disso, nas diversas equações diferenciais ordinárias e parciais de segunda ordem da Física Matemática[3] e que já foram amplamente estudadas é comum (até necessário) a utilização de (pelo menos) duas condições iniciais ou de contorno para a sua completa solução, e não vejo motivo para aqui ser diferente.

Mesmo assim, do ponto de vista da realidade física, realidade que certamente motiva este problema, uma questão de Matemática aplicada aos fluidos, também me parece não ser possível resolver Navier-Stokes sem força externa em todas as condições, seja $\nabla \cdot u = 0$ ou não, seja $\nu = 0$ ou não.

Suponhamos $u^0(x) = (0, 0, 0) = 0$ e, por definição, $F(x,t) = (0, 0, 0) = 0$ (estamos utilizando o mesmo símbolo 0 tanto para o vetor nulo quanto para a constante numérica igual a zero, mas que não seja isso fonte de confusão).

Em $t = 0$ a equação a ser resolvida é

(90) $\nabla p^0 = -\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}$,

com $p^0(x) = p(x, 0)$, $x \in \mathbb{R}^3$.

Para que haja solução devemos ter que $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}$ seja um campo vetorial gradiente, i.e., alguma função $a^0(x)$ gradiente. A solução $u = 0$ satisfaz esta condição e é uma solução fisicamente razoável: sem velocidade inicial, sem força externa, teremos um fluido imóvel, estático, estacionário, sem acelerações(ver nota B), sem ventos e marés, exatamente o comportamento observado na natureza. Por outro lado, $\nabla p^0 = 0$ tem uma infinidade de soluções possíveis da forma $p^0(x) = cte.$, o que pode não ser fisicamente razoável. Por que haveria pressão não nula se a velocidade não varia no tempo e espaço e não há força? Nesse caso não há colisões entre as partículas, então não há pressão não nula em instante algum. Aceitar unicamente $p^0(x) = 0$ seria o mais razoável, ainda que seja de fato uma idealização do comportamento físico dos fluidos (não utilizamos teoria atômica e molecular, termodinâmica, mecânica quântica, etc.).

Se impusermos uma velocidade inicial da forma $u^0 = (u_1^0(x_2, x_3), 0, 0)$, fisicamente razoável, para u_1^0 diferente de constante, u^0 não gradiente e com $\frac{\partial u_1^0}{\partial x_2} \neq 0$ e $\frac{\partial u_1^0}{\partial x_3} \neq 0$, como $F(x,t) = (0, 0, 0)$ e esperamos um sistema fisicamente razoável, a solução $u(x,t)$ ao longo do tempo deve evoluir para uma velocidade da forma $u(x,t) = (u_1(x_1, x_2, x_3, t), 0, 0)$, com $u_1(x,t)$ não identicamente nulo, que representa o movimento do fluido apenas na direção e_1. Tal como no exemplo anterior, não é fisicamente razoável, abstraindo-se das complexidades termodinâmicas e quânticas a nível microscópico, esperar um movimento macroscópico nas direções e_2 e e_3 quando não há velocidades iniciais e forças nessas direções.

Assim o sistema final a ser resolvido será da forma

(91) $\nabla p = (\phi_1(x,t), 0, 0)$,

que não admitirá solução para p em geral, para todo $t \geq 0$. Isto é mais um exemplo de quebra das soluções de Navier-Stokes, desta vez sem usar $F(x,t) = H\big(u^0(x),\ u(x,t)\big)$ não nula. Admitimos também nesta análise um ambiente sem bordas (ou bordas muito distantes do ponto em estudo) e velocidade inicial baixa, para que não ocorram, na realidade, efeitos caóticos, de turbilhões, etc.

6. Conclusão

Na seção 3 §3 vimos que $u^0(x)$ e $F^0(x)$ não determinam de maneira única a quebra ou não das soluções das equações de Navier-Stokes em $t = 0$. Foi necessário saber o valor de $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}$. Consequentemente, $u^0(x)$ e $F^0(x)$ não determinam de maneira única a quebra ou não das soluções das equações de Navier-Stokes sobre $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$. Além disso, a pressão $p(x, t)$ sempre pode ser somada a alguma função do tempo $\theta(t)$, o que não altera nem o valor de ∇p e nem a velocidade u, quaisquer que sejam a velocidade inicial $u^0(x)$ e a força externa $F(x, t)$, ou seja, também não há nem unicidade de soluções, nem de não soluções, exceto se forem dadas mais condições iniciais e de contorno convenientes para a unicidade de $p(x, t)$.

Resolvemos o problema do milênio para as equações de Navier-Stokes primeiramente nos casos de inexistência de soluções (para a pressão) em $t = 0$ pelo acréscimo de mais uma condição inicial, a derivada parcial temporal do vetor velocidade em $t = 0$, que chamamos de $a^0(x) = \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}$. Este raciocínio não poderá ser utilizado, entretanto, se nossa condição inicial adicional for $p(x, 0) = p^0(x)$, ao invés da condição para a variação temporal de u, pois nesse caso sempre haverá algum valor que poderá ser encontrado para $a^0(x)$ em $t = 0$, dado por (89). Isto sugere que existem velocidades e acelerações proibidas nos movimentos de fluidos, assim como nos casos das combinações de (p, u) para os movimentos sem força externa.

Em (87) vemos que sempre é possível encontrar uma força externa $F(x, t)$ tal que haja solução para as equações de Navier-Stokes, dados $u(x, t)$, e consequentemente $u^0(x)$, e $p(x, t)$, o que poderia nos fazer concluir que então não existem casos de quebra de soluções, mas o que ocorre é que a definição da questão feita neste problema para os casos de quebra de soluções impõe que a velocidade inicial e a força sejam os campos vetoriais que nos são dados, e assim a velocidade e a pressão em $t \geq 0$ são as incógnitas a serem encontradas. Nesta situação é possível encontrar exemplos onde não há solução para as equações, especificamente para a pressão em $t \geq 0$, conforme vimos.

Nas seções 3 §4 e 4 §2, utilizando implicitamente as relações lógicas (71) e (72), escolhe-se hipoteticamente uma velocidade válida u e respectivo $\frac{\partial u}{\partial t}$, com $u(x, 0) = u^0(x)$, e encontra-se uma força externa F que depende destes u, u^0 e $\frac{\partial u}{\partial t}$ e implique em um sistema de equações diferenciais parciais impossível de ser resolvido para a pressão p, de acordo com (2) e (3), pelo método descrito já na Introdução, o que resolve o problema de maneira geral para $t \geq 0$. Esta é a grande chave do método utilizado: $(\exists u \wedge \nexists p) \rightarrow \nexists(p, u)$.

Interessante observar que com esta lógica também podemos encontrar "inúmeras" combinações de $F(x,t)$ e $u(x,t)$, mesmo sem ser $F(x,t)$ uma função explícita de $u(x,t)$ e suas derivadas e inclusive para $F = 0$, tal que (1), e consequentemente (2), não tenham solução para p, por implicarem em uma função ϕ não gradiente. Dito desta forma, parece uma conclusão simples demais para que esta questão tenha se tornado um problema do milênio, mas de fato é o que conseguimos deduzir de pura Matemática.

Este método leva apenas a uma condição necessária, mas não ainda suficiente, introduzindo-se mais uma condição na tabela resumo do enunciado do problema descrito na seção 3 §5: $\forall u(x,t)/u(x,0) = u^0(x)$. Assim não bastaria encontrarmos apenas um único exemplo para $u(x,t)$, e sim todas as infinitas possibilidades. As provas suficientes seriam, neste caso, semelhantes às dadas nas seções 3 §4 e 4 §2, uma vez que a condição $\exists F(x,t)$ não proíbe que seja $F(x,t)$ uma função que varie instantaneamente com cada $u(x,t)$ possível, conforme vimos em 3 §5. Faltariam as provas de (15) para o caso (C) ou (13) e (16) para o caso (D).

Na seção 5 fizemos alguns comentários sobre os casos (A) e (B) de existência de soluções para as equações de Navier-Stokes e demos mais um exemplo de inexistência de solução para estas equações, com $F = 0$, usando a necessidade do sistema ser fisicamente razoável, ou compatível com a observação a nível macroscópico, em um ambiente sem bordas (ou bordas muito distantes do ponto em estudo) e velocidade inicial baixa.

É oportuno mencionar que estas dificuldades com relação à integração das equações de Navier-Stokes e Euler desaparecem quando passamos a considerar que a pressão é um vetor, e não mais um escalar, tal que $p(x,t)\colon \mathbb{R}^3 \times [0,\infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ e substitui-se ∇p por $\nabla \otimes p = \left(\frac{\partial p_1}{\partial x_1}, \frac{\partial p_2}{\partial x_2}, \frac{\partial p_3}{\partial x_3}\right)$, com $p = (p_1, p_2, p_3)$. Vejo como natural adotar esta ampliação do conceito de pressão. O caso em que $p_1 = p_2 = p_3$ leva a todos os resultados já aceitos na Mecânica dos Fluidos, por exemplo, o de fluidos no estado de equilíbrio. Veremos isso com mais detalhes em próximo artigo sobre o tema.

Observo também que existe um artigo escrito em 1983[4] cujo assunto é semelhante ao aqui tratado, porém sua abordagem é bem diferente desta. Em [4] analisa-se principalmente a Equação de Euler e nada se menciona sobre campos conservativos ou gradientes e sua influência para a determinação da pressão. Refere-se, por exemplo, a fluidos que tem um comportamento regular até determinado instante, mas a seguir perdem a regularidade (*smooth*) e podem apresentar divergências, etc. Talvez seja esta a maneira mais tradicional, acadêmica, previsível, de tratar este problema, talvez fosse esta a solução que os matemáticos esperassem, mas isto não invalida a análise e conclusão que aqui fizemos. Relacionando-a ao nosso método, seria como se um fluido apresentasse um campo ϕ gradiente até determinado instante ($t > 0$), mas a partir daí o campo ϕ deixasse de ser gradiente. De fato, aqui fizemos com que ϕ pudesse ser não gradiente desde o instante $t = 0$ e não apenas a partir de algum $t > T$ estritamente positivo.

Termino este artigo indicando três excelentes textos sobre Mecânica dos Fluidos, [5], [6] e [7], cuja leitura certamente contribuirá para a obtenção de resultados mais profundos sobre os problemas aqui tratados. Outra ótima referência é [8], mais voltada às equações de Euler (nossas conclusões independem do específico valor de ν, seja ele zero ou não).

O óbvio é aquilo que nunca é visto, até que alguém o manifeste com simplicidade.
(Kahlil Gibran)

Nota A: Em atenção aos meus leitores das versões anteriores, preciso me desculpar e dizer que cometi um engano ao traduzir o termo *divergence-free* para u^0, interpretando-o como a necessidade de ser limitada em todo ponto a velocidade inicial, tal que $\lim_{x \to x_0} |u^0(x)| < C$, i.e., livre de divergências. Na realidade o termo pede bem menos: que seja igual a zero o divergente da velocidade inicial, ou seja, $\nabla \cdot u^0 = 0$. (Tenho escrito este artigo desde o início preocupado em fazer com que a velocidade inicial u^0 não divirja, pela tradução errada que fiz do termo *divergence-free*. Não obstante, u^0 divergentes, convenientemente escolhidos, podem provocar quebra de soluções de maneira quase trivial. Idem para u^0 constante e outras funções cuja integral de seu quadrado em todo o espaço $\mathbb{R}^3$ divirja. Prova-se facilmente que nesse caso a condição (7) de [1], nossa equação (9), é violada em $t = 0$. Sendo assim, o caso (C) deste problema é provado mais uma vez, de outra maneira.)

Nota B: Por um abuso de linguagem, em versões anteriores chamei de aceleração o termo $\frac{\partial u}{\partial t}$, sendo que este é mais exatamente conhecido como aceleração local (a posição x de referência é fixa enquanto t varia). A derivada total da velocidade em relação ao tempo é $\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u$, conhecida como aceleração convectiva, derivada de transporte, derivada material ou derivada substancial. Esta é a aceleração que tem uma partícula do fluido inicialmente na posição $x(t = 0)$, segundo a descrição lagrangeana do movimento. A equação $\frac{Du}{Dt} = 0$ é conhecida como Equação de Burgers (André Nachbin, *Aspectos da Modelagem Matemática em Dinâmica dos Fluidos*, IMPA, 2001, e Merle C. Potter e David C. Wiggert, *Mecânica dos Fluidos*, Cengage Learning, 2004).

Referências

1. Fefferman, Charles L., *Existence and Smoothness of the Navier-Stokes Equation*, in http://www.claymath.org/sites/default/files/navierstokes.pdf (2000).

2. Apostol, Tom M., *Calculus*, vol. II. New York: John Wiley & Sons (1969).

3. Courant, Richard and Hilbert, David, *Methods of Mathematical Physics*, 2 vols. New York: Interscience Publishers John Wiley & Sons (1962).

4. Beale, J. T., Kato, T. and Majda, A., *Remarks on the Breakdown of Smooth Solutions for the 3-D Euler Equations*, Commun. Math. Phys. **94**, 61-66 (1984).

5. Childress, Stephen, *An Introduction to Theoretical Fluid Mechanics*, Courant Lecture Notes in Mathematics, 19. New York: Courant Institute of Mathematical Sciences (2009).

6. Novotný, Antonín and Straskraba, Ivan, *Introduction to the Mathematical Theory of Compressible Flow*, Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications, 27. New York: Oxford University Press (2004).

7. Landau, Lev D. and Lifshitz, Evgenii M., *Fluid Mechanics*, Course of Theoretical Physical, vol. 6. New York: Elsevier Butterworth Heinemann (2004).

8. Marchioro, Carlo and Pulvirenti, Mario, *Mathematical Theory of Incompressible Nonviscous Fluids*, Applied Mathematical Sciences, 96. New York: Springer-Verlag (1994).