One Common Property of Overdetermined Differential Equations

LIU Changli (liucl78@pku.org.cn)

**Abstract**: Usually, the numbers of unknowns are equal to the numbers of differential equations. However, there are some exceptions. One example is Maxwell equations; there are 6 unknowns and 8 equations. The other example is elasticity equilibrium equations in stress form; there are 6 unknowns and 9 equations. Both equations seem overdetermined. In the paper, I generalize the definition of linear dependence in algebra to the definition of *differential linear dependence* in differential equations, and I use this definition to explain the overdetermined problem. All overdetermined equations have the property: *differential linear dependence*.

**PACS**：02.30.Jr，02.10.Ud
Key words: Maxwell equations, Elasticity equations, Overdetermination

## 1. Introduction

In linearly algebraic system, the overdetermined equations, whose independent equations are more than knowns, have no solution. This is well known. In linearly differential equations, there are some exceptions. Maxwell equations have 6 unknowns and 8 equations [1]; elasticity equilibrium equations in stress form have 6 unknowns and 9 equations [2]. Unknowns are not equal to equations in the above both. It should be noted that both equations' solutions are unique.

In the following I will explain the overdetermined problem in another way.

## 2. Definition of *differential linear dependence*

There is a linearly partial differential equation:

$$\begin{cases} \sum_{ij} a_{ij}^{(1)} \dfrac{\partial y_j}{\partial x_i} + f_1 = 0 \\ \sum_{ij} a_{ij}^{(2)} \dfrac{\partial y_j}{\partial x_i} + f_2 = 0 \\ \vdots \\ \sum_{ij} a_{ij}^{(n)} \dfrac{\partial y_j}{\partial x_i} + f_n = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Where $x_i$ are independent variables; $y_j$ are dependent variables; $a_{ij}^{(k)}$ are coefficients; and $f_k$ fare non-homogeneous items. And I make $Z_k = \sum_{ij} a_{ij}^{(k)} \dfrac{\partial y_j}{\partial x_i} + f_k$.

Two definitions are as following.

**Definition I:** In algebra, when there are coefficients ($c_i$), not all zero, such that $\sum_{i=1}^{n} c_i Z_i \equiv 0$; the equation (1) is linearly dependent. This definition can be referred in any of algebraic textbook.

Both Maxwell equations and elasticity equations in stress form are over-determined in definition I.

Now I generalize the definition of linearly dependence in differential equations.

**Definition II (*differential linear dependence*):** When there are coefficients ($c'_{kl}$), not all zero, such that $\sum_k c_k Z_k + \sum_{kl} c'_{kl} \frac{\partial Z_k}{\partial x_l} \equiv 0$, the Eq. (1) are thought as differential linearly dependent. If $c'_{kl} \equiv 0$, definition II becomes definition I.

The difference between definition I and II is: I take one (or more) differentiation on $Z_k$ in differential equation.

## 3. Maxwell equations

Now I will discuss Maxwell equations. There are two curl equations in Maxwell equations [1]: $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$, $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$.

As we all know

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{E} \equiv 0, \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{B} \equiv 0 \qquad (2)$$

Therefore, there are two differential linearly dependent equations, and the number of independent equations are six (8-2=6), which are equal to unknowns.

Maxwell's equations are overdetermined in definition I. Usually, this is related to a certain limited kind of redundancy in Maxwell's equations [1]: It can be proven that any system satisfying Faraday's law and Ampere's law automatically also satisfies the two Gauss's laws, as long as the system's initial condition does. [1]

However, this explanation cannot be used to electrostatic fields ($\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho, \nabla \times \mathbf{E} = 0$), which have four equations and three unknowns. In electrostatic fields, $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$ cannot be explained the initial condition of $\nabla \times \mathbf{E} = 0$. Therefore the explanation is not correct.

Now, Maxwell equations are not overdetermined in definition II. All eight equations have equal status, and all of them are basic equations, and no one is the initial condition of another. All eight equations should be solved in electromagnetism, while not omitting divergence equations.

## 4. Elasticity equilibrium equations

In the following, I will discuss elasticity equations. We derive the elasticity equations in stress form by the equation of conditions of compatibility: $\nabla\times\boldsymbol{\Gamma}\times\nabla=0\left(\Leftrightarrow\varepsilon_{pij}\varepsilon_{qks}\partial_i\partial_s\Gamma_{jk}=0\right)$, where $\boldsymbol{\Gamma}$ the second order symmetric strain tensor.

As we all know

$$\nabla\bullet\left(\nabla\times\boldsymbol{\Gamma}\times\nabla\right)\equiv 0,\quad\left(\nabla\times\boldsymbol{\Gamma}\times\nabla\right)\bullet\nabla\equiv 0\qquad(3)$$

Because $\boldsymbol{\Gamma}$ is symmetric, the two identical equations above only have 3 different component equations (3 differential linearly dependent equations). Therefore the independent equations in elasticity equations are six (9-3=6), which are equal to unknowns.

## 5. Conclusions

In summary, I generalize the definition of linear dependence in differential equations; and discuss Maxwell equations and elasticity equations by this definition. Both equations seem overdetermined in definition I, but both are not overdetermined in definition II.

Therefore, the definition of over-determination in differential equations should be changed to definition II.

## References:


1. Stratton JA, 1941 *ELECTROMAGNETIC THEORY* (New York: McGraw-Hill Book Company) p2-6
2. Sadd MH, 2005, *Elasticity, Theory, Applications, and Numerics*, (Oxford: Elsevier Butterworth-Heinemann), chapter 5

# 超定偏微分方程组的一个共有属性

刘长礼（liucl78@pku.org.cn）

**摘要**：在线性偏微分方程组中，如果方程解具有唯一性，一般情况下需方程个数和未知量个数相等；但在特殊个例中两者可以不等。典型的例子就是麦克斯韦（Maxwell）方程组，此方程组有 6 个未知量，8 个方程。另一个典型例子是以应力表示的弹性力学平衡方程；此方程组有 6 个未知量，9 个方程。本文定义一个微分线性相关的概念，并说明这些超定方程组在这个定义下不超定。指出超定偏微分方程组的一个共有属性：微分线性相关。

**关键字**：麦克斯韦（Maxwell）方程组；弹性力学平衡方程；超定

中文图书分类号：O411，O175

## 1. 引言

在线性代数方程组中，如果独立方程个数多于未知量个数，方程超定，无解；如果方程数少于未知量数，则有无穷多解；两者相等则有唯一解。这是早已熟知的定论。对于线性偏微分方程组，如果解具有唯一性，一般要求两者相等。对于绝大多数具有解唯一性的线性偏微分方程组，两者是相等的；然而有些例外。典型的有两个：一个是麦克斯韦方程组，此方程组 6 个未知量，8 个方程[1]。另外一个例子是以应力表示的弹性力学平衡方程；此方程组 6 个未知量，9 个方程[2]。需要注意的是上述两个方程组在适当定解条件下方程解都有唯一性。

下面，作者将指出此类超定方程组有一个共同属性。

本文并未引进任何新的定理，所有内容均是成熟的；只是理解角度不同罢了。

## 2. 线性相关定义的推广

现有一阶线性偏微分方程组

$$\begin{cases} \sum_{ij} a_{ij}^{(1)} \dfrac{\partial y_j}{\partial x_i} + f_1 = 0 \\ \sum_{ij} a_{ij}^{(2)} \dfrac{\partial y_j}{\partial x_i} + f_2 = 0 \\ \vdots \\ \sum_{ij} a_{ij}^{(n)} \dfrac{\partial y_j}{\partial x_i} + f_n = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

其中 $y_j$ 是未知量，$f_j$ 是非齐次项，$a_{ij}^{(k)}$ 是系数。方程组共有 $n$ 个方程，未知量个数不一定等于方程个数。令 $Z_k = \sum_{ij} a_{ij}^{(k)} \dfrac{\partial y_j}{\partial x_i} + f_k$，代表每个方程的左端项。

首先先给出两个定义。

**定义 I**：如果存在不全为 0 的系数$c_k$使得$\sum_k c_k Z_k \equiv 0$成立，则称偏微分方程(1)是线性相关的。

这个定义在任何一本线性代数书中都能查到。显然麦克斯韦方程组[1]和应力表示的弹性力学平衡方程[2]在这个定义下都是超定的（方程的具体形式就不赘述了，在相应的参考文献或其他教材中都能查到。）。一般说方程组超定也都是在这个意义下的超定。

为了更好的说明超定偏微分现在我将线性相关的概念加以推广。

**定义 II（微分线性相关）**：存在不全为 0 的系数$c'_{kl}$使得$\sum_k c_k Z_k + \sum_{kl} c'_{kl} \frac{\partial Z_k}{\partial x_l} \equiv 0$成立；系数$c_k$是否不为 0 没有要求。如果方程组(1)满足上述条件，则称方程组(1)微分线性相关。显然如果$c'_{kl} \equiv 0$，则定义 II 就回到了定义 I。

微分线性相关是代数学中线性相关的推广。对比代数中的定义，多了一些内容，即对线性空间的矢量（微分方程式的左端项$Z_k$）求微分再求和。

麦克斯韦方程组和以应力表示的弹性力学平衡方程组，都有定义 II 所描述的属性：微分线性相关。

## 3. 麦克斯韦方程组

### 3.1 B、E 形式的麦氏方程组

真空中麦克斯韦方程组，其包含两个旋度方程[1]

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \qquad (2)$$

对于旋度方程，我们有恒等式$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{E} \equiv 0, \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{B} \equiv 0$，显然这两个恒等式满足定义 II 中的条件。由于存在两个微分线性相关式子，这样 8 个麦克斯韦方程中独立的方程个数变成了 6 个，与未知量个数相等了。因此麦氏方程组有定义 II 所描述的属性：微分线性相关。

静电场（$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \varepsilon_0, \nabla \times \mathbf{E} = 0$）是一个有三个未知量四个方程的方程组。由于有恒等式$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{E} \equiv 0$；所以静电场中的旋度方程中有一个微分线性相关式，线性独立方程只有 2 个，再加上散度方程，总共有 3 个独立的方程，与未知量个数相等。

在定义 I 下超定的麦克斯韦方程组，在定义 II 下不超定，是适定的。如果我们把定义 II 当成线性相关的定义，那么麦氏方程组就不存在超定问题了。既然在定义 II 下不超定，那么麦氏方程中的 8 个分量方程都是基本方程，是具有相同地位的 8 个基本方程。不能够把散度方程解释成旋度方程的初始条件[1]；因

为在这种理解下，散度方程不是基本方程，和旋度方程地位不对等。同时需要注意一点：文献[1]中将散度方程解释成旋度方程初始条件的方法无法应用于静电场（在定义 I 意义下）超定问题。

计算电磁学中经常只解旋度方程而不解散度方程；这是不完备的，容易造成解不唯一，出现非物理解。由于麦克斯韦方程组中的 8 个方程的地位是平等的，都是基本方程，散度方程不是旋度方程的推论，所以 8 个方程都需要求解。

a) 标势矢势形式的麦氏方程组

麦克斯韦方程组还有另外一种形式，那就是标势矢势形式。具体表达式以及推导过程在[1]可以找到。就是通过下面的变量代换得到的。

$$\begin{cases} \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \\ \mathbf{E} = -\nabla \phi - \dfrac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \end{cases}$$

然而我们知道只有 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ 一个旋度方程不足以确定矢势 **A**；由于在物理上对矢势 A 没有其他限制条件，只能从数学角度给出一个限制条件，一般给洛伦茨规范或者库仑规范[1,3]；也就是给出一个关于矢势 A 的散度方程。这样包括规范条件在内的标势矢势方程组的解就唯一了；但这个时候方程个数比未知量个数多一个，其原因还是矢势 A 旋度方程的微分线性相关性质。

有很多文献（比如[3]）指出即便给出洛伦茨（或库仑）规范，矢势 A 仍旧有一定自由度，这叫做第二规范变换[3]。但需要指出的是：第二规范变换所带来的矢势 A 解不唯一的原因不是方程个数与未知量个数之间的关系，而是由于物理上无法给出矢势 A 的第一类边界条件（即 A 本身），只能给出第二类边界条件（即 A 的偏导数）。因为物理上可观测的量是 B、E，它们是 A 的偏导数；所以物理上不能给出 A 的第一类边界条件。如果从数学角度给出 A 的第一类边界条件，那包括规范条件在内的矢势标势形式麦氏方程组的解就唯一了，不存在所谓的第二规范变换。

## 4. 应力表示的弹性力学平衡方程

上面的旋度方程中是矢量的旋度方程。如果是张量的旋度方程，则可同样讨论。下面以二阶张量为例，来讨论此事。方程的具体形式请查阅文献[2]的相应章节。

以应力表示的弹性力学平衡方程就是包含二阶对称张量的一个方程组[2]。在推导过程中用到了应变协调方程 $\nabla \times \mathbf{\Gamma} \times \nabla = 0$ ($\Leftrightarrow \varepsilon_{pij}\varepsilon_{qks}\partial_i\partial_s\Gamma_{jk} = 0$)[2]，其中 $\mathbf{\Gamma}$ 是弹性体的应变张量，是一个二阶对称张量。

显然应变协调方程有两个微分线性相关矢量式：

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left(\nabla \times \mathbf{\Gamma} \times \nabla\right) \equiv 0 \\ \left(\nabla \times \mathbf{\Gamma} \times \nabla\right) \cdot \nabla \equiv 0 \end{aligned} \qquad (3)$$

上式共 6 个分式子；由于 $\mathbf{\Gamma}$ 是对称张量，式(3)只包含 3 个不同的分式子；

也就是只有 3 个微分线性相关式。

由于在导出应力表示的弹性力学平衡方程过程中用到了应变协调方程 $\nabla\times\mathbf{\Gamma}\times\nabla=0$，而应变协调方程中有 3 个微分线性不独立的式子，微分线性独立的平衡方程中只剩下 6 个了，与未知量个数相等了。此平衡方程也具有定义 II 描述的属性：微分线性相关。

## 5. 广义相对论场方程

广义相对论的爱因斯坦方程虽然有 10 方程 10 个未知量，但是由于 4 个比安奇恒等式的存在（即 4 个微分线性相关式）导致方程解存在自由度，需要补充 4 个坐标条件才能把解确定[4]。这样整个方程是 14 个 10 个未知量，解可以唯一。但爱因斯坦方程是非线性的，所以就暂且不多讨论了。

## 6. 结论

本文中将代数中线性相关的概念推广成微分线性相关（适用于线性微分方程组）。并指出在定义 I 下超定的麦氏方程和平衡方程，在定义 II 下不超定，是适定的。都具有定义 II 所描述的属性：微分线性相关。

一个猜想：假设线性偏微分方程组(1)的解存在、唯一，且在定义 I 意义下超定；那么方程组(1)必是微分线性相关的（或者说微分线性相关是其必要条件）。也就是说在定义 II 意义下方程组(1)不超定，是适定的。

也就是说作者把适用于麦氏方程和平衡方程的微分线性相关的概念推广到了所有定义 I 下超定的偏微分方程组；当然这个猜想需要严格证明。如果能够一般性地证明这个猜想，那么对超定偏微分方程组的代数结构认识将大有裨益。

**参考文献：**


1. 俎栋林. 电动力学[M]. 北京：清华大学出版社，2006，第 115 页
2. 王敏中等. 弹性力学教程[M]. 北京：北京大学出版社，2002， 第 33-37 页和第 103-105 页
3. 朱洪元. 量子场论[M]. 北京：北京大学出版社，2013， 第 49-51 页
4. 刘辽、赵峥. 广义相对论[M]. 北京：高等教育出版社，2004，第 83-84 页