A Discussion on Curl Equations in Mathematical Physics[1]

LIU Changli (liucl78@pku.org.cn)

Abstract: Usually, the numbers of unknowns are equal to the numbers of differential equations. However, there are some exceptions. One example is Maxwell equations; there are 6 unknowns and 8 equations. The other example is elasticity equations in stress form; there 6 unknowns and 9 equations. In the paper, I generalize the definition of linearly dependent in algebra to the concept of differential linearly dependent in differential equations, and I use this definition to explain the above problem.

In algebra, there are some vectors Y_i (i=1,…,n) in a vector space. When there are coefficients (c_i) which are not all zero, those make $\sum_{i=1}^{n} c_i Y_i = 0$. The vectors Y_i (i=1,…,n) are linearly dependent. Now I generalize the definition of linearly dependent in differential equations.

There is a linearly partial differential equation:

$$\begin{cases} \sum a_{ij}^{1} \dfrac{\partial Z_j}{\partial x_i} = 0 \\ \sum a_{ij}^{2} \dfrac{\partial Z_j}{\partial x_i} = 0 \\ \qquad \vdots \\ \sum a_{ij}^{n} \dfrac{\partial Z_j}{\partial x_i} = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

And we make $Y_k = \sum a_{ij}^{k} \dfrac{\partial Z_j}{\partial x_i}$.

The definition of linearly dependent in differential equations is: When there are coefficients (c_{ij}) which are not all zero, those make

$$\sum c_{ij} \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} = 0 \qquad (2)$$

The difference between both definitions is: we take one (or more) differentiation on Y_i in differential equation. If Eq.(2) is satisfied, we think the linearly partial differential equation (1) is linearly dependent.

Now we will discuss Maxwell equations. There are two curl equations in Maxwell

[1] This paper is a concise edition of the one in Chinese.

equations: $\nabla\times\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{J}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$, $\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$.

As we all know

$$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{E}\equiv 0 \qquad (3)$$

Eq.(3) is satisfied with Eq.(2). Therefore, there are two differential linearly dependent equations, and the number of independent equations are six (8-2=6), which are equal to the number of the unknowns.

We derive the elasticity equations in stress form by the equation of compatibility of strains $\nabla\times\mathbf{\Gamma}\times\nabla=0$, where $\mathbf{\Gamma}$ the second order symmetric strain tensor.

As we know $\nabla\bullet\left(\nabla\times\mathbf{\Gamma}\times\nabla\right)\equiv 0,\quad \left(\nabla\times\mathbf{\Gamma}\times\nabla\right)\bullet\nabla\equiv 0$. Because $\mathbf{\Gamma}$ is symmetric, the two identical equations above only have 3 different component equations. There for the independent equations in elasticity equations are six (9-3=6), which are equal to the number of the unknowns.

In summary, I generalize the definition of linearly dependent in differential equations; and discuss Maxwell equations and elasticity equations by this definition.

关于数学物理中旋度方程的一点理解

刘长礼（liucl78@pku.org.cn）

摘要：线性代数方程中线性独立方程个数和未知量个数需相等才能保证解的唯一性。在线性偏微分方程组中，如果方程解具有唯一性，一般情况下需方程个数和未知量个数相等；但在特殊个例中两者可以不等。典型的例子就是 Maxwell 方程组；此方程组 6 个未知量，8 个方程。另外一个典型例子是以应力表示的弹性力学平衡方程；此方程组 6 个未知量，9 个方程。其实这两个方程组中方程个数多于未知量个数主要是由于旋度方程引起的。本文定义一个微分线性相关的概念，从不同的角度来理解方程个数和未知量个数不等的问题。

关键字：Maxwell 方程组；弹性力学平衡方程；旋度；散度

PACS：02.30.Jr，02.10.Ud

1. 引言

在线性代数方程组中，如果独立方程个数多于未知量个数，方程超定，无解；如果方程数少于未知量数，则有无穷多解；两者相等则有唯一解。这是早已熟知的定论。对于线性偏微分方程组，如果解具有唯一性，一般要求两者相等。对于绝大多数具有解唯一性的线性偏微分方程组，两者是相等的；然而有些例外。典型的有两个：一个是 Maxwell 方程组。此方程组 6 个未知量，8 个方程[1]。另外一个例子是以应力表示的弹性力学平衡方程；此方程组 6 个未知量，9 个方程[2]。需要注意的是上述两个方程组在适当定界条件下方程解都有唯一性。

对于线性偏微分方程组中未知量个数和方程个数是否需要相等，有着不同看法。我个人认为方程个数仍需等于未知量个数，这是方程组解的唯一性的必要条件。然而对于上述两个方程组的问题又如何理解呢？很多人如下解释。

对于 Maxwell 方程组，文献[1,3]把两个散度方程解释成旋度方程的初始条件（详见文献中论述，此处不赘述）。我个人认为这种解释有些小问题。散度方程在含时的 Maxwell 方程组中被当成初始条件；而在不含时的 Maxwell 方程组（也就是静电场、静磁场）中，散度方程又成了基本方程。这前后多少有些悖论。

以应变表示的弹性力学平衡方程组的未知量个数和方程个数是相等；而以应力表示的平衡方程两者却不等。与 Maxwell 方程类似，文献[2]把散度方程解释成边界条件。同样这多少有些不合理。

以上两组方程有一个共同特点：就是都包含旋度方程。下面我从不同角度来理解方程个数与未知量个数不等的问题。本文并未引进任何新的定理，所有内容均是成熟的；只是理解角度不同罢了。为了从不同角度来解释这个问题，需要引入微分线性相关的概念。

2. 旋度、散度方程

首先叙述一个定理（有人称之为 Helmholtz 定理。）：对于在给定区域的某未知矢量场，如果给定其散度和旋度，在适定边界条件下，则矢量场唯一确定。用数学语言描述就是：在给定区域 Ω 中有未知矢量场 **E**，如果有

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\mathbf{E}-\rho=0 \\ \nabla\times\mathbf{E}-\mathbf{S}=0 \end{aligned} \qquad (1)$$

其中标量 ρ 和矢量 S 是已知量，且 $\nabla\cdot\mathbf{S}\equiv 0$（相容性条件），在适定边界条件下，方程组(1)有唯一解。

这个定理的证明十分简单，很多文献都有详细论述（如[4]），此处不再赘述。可以看到方程(1)只有 3 个未知量（矢量 E 的三个分量）；而方程个数却是 4 个，散度方程是一个，旋度矢量方程包含三个分量方程，总共是 4 个方程。两者并不相等。

可以很容易看出靠 4 个方程间的加加减减是不可能使之恒为 0 的，即没有不全为 0 的系数 a_n 使得 $\sum a_n Y_n \equiv 0$；其中 Y_n 代表方程(1) 各个分方程左端项。也就是说从代数学角度讲 4 个方程是线性独立的。

然而，我们都知道 $\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{E}\equiv 0$，也就是任一矢量的旋度再求散度恒为 0，这相当于一个约束方程，因此旋度方程之间应该有某种内在联系。

现在我将线性相关的概念加以推广。在线性偏微分方程构成的线性空间中，定义**微分线性相关**（或称为弱线性相关）的概念：如果存在不全为 0 的系数 a_{nm} 使得 $\sum a_{nm}\dfrac{\partial Y_n}{\partial x_m}\equiv 0$，则称这个线性偏微分方程组是相关的。其中 Y_n 代表方程(1)各个分方程左端项。微分线性相关是代数学中线性相关的推广，其内容基本相同，只不过对线性空间的矢量求了一次微分再求和。当然也可以求多次导数或混合偏导。

由于有$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{E}\equiv 0$，在微分线性相关的概念下，方程组(1)虽然有 4 个方程，但旋度方程中有一个线性微分相关式（$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{E}\equiv 0$），也就是方程组(1)的秩实际上是 3，而不是 4。这样线性微分独立的方程个数就与未知量个数相等了。可见方程组(1)中未知量个数和方程个数不等的主要原因是旋度矢量方程中含有微分不独立的成分。

下面我们看 Maxwell 方程组。

3. Maxwell 方程组

真空中 Maxwell 方程组为：

$$\begin{cases}\nabla\cdot\mathbf{E}=\rho/\varepsilon_0\\ \nabla\times\mathbf{E}=-\dfrac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\mathbf{B}=0\\ \nabla\times\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{J}+\mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\end{cases}\tag{2}$$

上面方程有 **B**、**E** 两个矢量未知量，共 6 个未知数；8 个分量方程。Maxwell 方程组含有两个旋度方程，用上面的讨论可知此方程共有两个微分线性相关式，或者说有两个微分不独立的方程。这样剩下 6 个微分独立的方程。

因为参考文献[1、3]中解释的存在，计算电磁学中经常不求解两个散度方程。此时方程组(2)解没有唯一性。由于计算误差总是存在的，随着时间逐渐积累，必出现非物理解（即$\mathbf{E}+\nabla f(\mathbf{r})$和$\mathbf{B}+\nabla g(\mathbf{r})$都是旋度方程的解，但并非散度方程解。）。参考文献[1、3]中的解释不能保证不出现非物理解，更没有提供避免出现非物理解的方法、途径。除了解散度方程外，这种非物理解无法剔除。

4. 应力表示的弹性力学平衡方程

上面的旋度方程中是矢量的旋度方程。如果是张量的旋度方程，则可同样讨论。下面以二阶张量为例，来讨论此事。设$\boldsymbol{\Gamma}$是二阶张量（不一定是对称张量）。如果某个解唯一的方程组中包含$\nabla\times\boldsymbol{\Gamma}=0$的方程，那么这个方程组的未知量个数和方程个数肯定不等，因为有$\nabla\cdot\nabla\times\boldsymbol{\Gamma}\equiv 0$。由于$\boldsymbol{\Gamma}$是二阶张量，这个微分线性相关式（$\nabla\cdot\nabla\times\boldsymbol{\Gamma}\equiv 0$）包含 3 个分式子；即未知量个数应该比方程个数少 3 个。

以应力表示的弹性力学平衡方程推导过程中用到了应变协调方程$\nabla\times\boldsymbol{\Gamma}\times\nabla=0$ [2]，其中$\boldsymbol{\Gamma}$是弹性体的应变张量，是一个二阶对称张量。从而导致了方程有 9 个，未知量却只有 6 个。

将应变协调方程写成分量形式[2]：

$$\nabla\times\boldsymbol{\Gamma}\times\nabla=0\quad\Leftrightarrow\quad\varepsilon_{pij}\varepsilon_{qks}\partial_i\partial_s\Gamma_{jk}=0\tag{3}$$

由于应变张量$\boldsymbol{\Gamma}$是二阶对称张量，式子(3)中只有 6 不同的方程。现在的任务是在这 6 个方程中找出 3 个微分线性相关的式子。显然式子(3)有两个微分线性相关的式子：

$$\begin{aligned}\nabla\bullet\left(\nabla\times\mathbf{\Gamma}\times\nabla\right)\equiv 0\\ \left(\nabla\times\mathbf{\Gamma}\times\nabla\right)\bullet\nabla\equiv 0\end{aligned}\qquad(4)$$

(4)式共 6 个分式子；由于$\mathbf{\Gamma}$是对称的，下面我们指出这两个微分线性相关式只有 3 个不同的分式子。方程组(3)中的自由指标是 p 和 q，我们记 $\Theta_{pq}=\varepsilon_{pij}\varepsilon_{qks}\partial\partial_i\Gamma_s$；由于$\mathbf{\Gamma}$是对称的，所以$\Theta_{pq}$关于 pq 也是对称的；即有 $\Theta_{12}=\Theta_{21},\Theta_{13}=\Theta_{31},\Theta_{23}=\Theta_{32}$。显然(4)式等价于$\partial_p\Theta_{pq}\equiv 0,\quad \partial_q\Theta_{pq}\equiv 0$；由于$\Theta_{pq}$关于 pq 对称，上两式虽有 6 个分式子，但展开后不同的式子只有 3 个；也就是只有 3 个微分线性相关式。

由于在导出应力表示的弹性力学平衡方程过程称用到了应变协调方程 $\nabla\times\mathbf{\Gamma}\times\nabla=0$，而应变协调方程中有 3 个微分线性不独立的式子，最终导致了平衡方程中多了 3 个“冗余”方程。但实际上应力表示的平衡方程中的 9 个方程都不是多余的，每个方程都是基本方程，只不过在微分线性相关意义下不独立罢了。

很多文献（例如[2]）把平衡方程中的 3 个基本方程解释成边界条件，虽然没有非常明显的硬伤，但我个人认为基本方程就是基本方程，不应当成边界条件。

5. 结论

本文中将线性相关的概念推广成微分线性相关（只适合于线性偏微分方程组构成的线性空间）。给出了旋度、散度方程组未知量个数和方程个数不等的解释，是旋度方程中有一个微分不独立的方程，因而从不同角度解释了 Maxwell 方程组和应力表示的弹性力学平衡方程组中未知量和方程个数不等的问题。需要注意的是：本文除了微分线性相关的概念外，没有引入任何新东西，只是理解角度不同罢了。对于 Maxwell 方程和应力表示的平衡方程，在微分线性相关的意义下，它们的方程个数和未知量个数又“再次”相等了。

进一步工作：假设某线性偏微分方程组的解唯一（不一定包含旋度方程），且方程个数和未知量个数不等。如果能够一般性的证明此方程组必然是微分线性相关的（或者说微分线性相关是其必要条件），那么对偏微分方程组的代数结构认识将大有裨益。

参考文献：

1. 俎栋林，2006 电动力学（北京：清华大学出版社）第 115 页
2. 王敏中等，2002 弹性力学教程（北京：北京大学出版社） 第 33-37 页和第 103-105 页
3. Stratton JA, 1941 *ELECTROMAGNETIC THEORY* (New York: McGraw-Hill Book Company) p2-6
4. Arfken GB, Weber HJ 2000 *Mathematical methods for physicists* (5th ed.) (San Diego: Academic Press) p96-97