“Polvo fractal con dimensión entera”.

Fractal powder with entire dimension

Autor: José Salvador Ruiz Fargueta

Telefónica de España S.A.

Av. Del Puerto 19-2ªpl. 46020 Valencia España

Salvador.ruizfargueta@telefonica.es   **srfargueta@gmail.com**

Cuando no eran conocidos los fractales resultaba extraño hablar de dimensiones no enteras. Ahora que son conocidos nos puede ayudar a comprenderlos mejor los casos de figuras fractales con dimensión entera.

When the fractals was not known it was strange to speak of non entiers dimensions. Now that they are known it can help us to understand them better the cases of figures fractals with entier dimension.

En 1975 Benoit Mandelbrot publicó un ensayo titulado" Los objetos fractales: forma, azar y dimensión". En la introducción comentaba los conceptos de objeto fractal y fractal como términos que había inventado a partir del adjetivo latino "fractus" (roto, fracturado). Posteriormente, en 1982, publicó el libro "The Fractal Geometry of Nature", en donde proponía : "Un fractal es, por definición, un conjunto cuya dimensión de Hausdorff-Besicovitch es estrictamente mayor que su dimensión topológica."

De forma simplificada, esa dimensión tan rara se podría entender de la siguiente manera: Una línea recta de longitud N queda recubierta por un número N de segmentos de longitud unidad. Podemos expresarlo diciendo que longitud_línea = $N^{(+1)}$. Un cuadrado con lado N queda recubierto por N^2 pequeños cuadrados de lado la unidad. De forma similar a la línea se puede expresar que superficie_cuadrado = $(N)^{(+2)}$. Sabemos que una línea recta tiene dimensión topológica 1 y una superficie dimensión 2. Para recubrirlos necesitamos un elemento similar pero más pequeño N^D veces (en estos ejemplos de magnitud unidad). En general, el exponente D , generalizado a cualquier objeto, representa la dimensión de Hausdorff-Besicovitch del objeto.

Han sido propuestas otras definiciones y, de hecho, estamos ante un concepto geométrico para el que aún no existe un una definición precisa, ni una teoría única y comúnmente aceptada.
Kenneth Falconer, en su obra titulada "Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications", en 1990, describe un concepto de estructura fractal 'F' como la que satisface alguna(s) de las propiedades siguientes:

(1).- "F" posee detalle a todas las escalas de observación;
(2).- No es posible describir "F" con Geometría Euclidiana, tanto local como globalmente;
(3).- "F" posee alguna clase de autosemejanza, posiblemente estadística;
(4).- La dimensión fractal de "F" es mayor que su dimensión topológica;
(5).- El algoritmo que sirve para describir "F" es muy simple, y posiblemente de carácter recursivo.

En resumen, una técnica análoga a la que los biólogos aplican al concepto de vida. Cuando observamos un fractal, de hecho, apreciamos algo que nos es familiar, más cercano que las perfectas figuras geométricas clásicas que nos han enseñado en el colegio.

Las ramificaciones de los árboles, las roturas imperfectas de una montaña o una costa, la disposición de la máxima superficie en un mínimo espacio de nuestro tejido pulmonar...

Los fractales nos acercan a la compleja simplicidad de la Naturaleza.

En el ámbito de la ciencia física, la existencia del cuanto de acción ha destruido por completo la propia noción de trayectoria clásica.
Laurent Nóttale complementó la definición de Richard Feynman (1965) y A. Hibbs

sobre las trayectorias virtuales típicas de una partícula cuántica, indicando que los caminos cuánticos posibles son, en número infinitos, y todos son curvas fractales caracterizadas por una propiedad geométrica común: su dimensión fractal es 2.

Creo que no acaba de entenderse bien lo de la dimensión fractal entera, en este caso 2, pero tal como indicaba en la expresión general de la dimensión fractal:

Dimensión fractal = dimensión topológica + factor dimensional

(El factor dimensional, siempre positivo, es tanto mayor cuanto más irregular es el fractal: indica la capacidad de ocupar más espacio del que indica su propia dimensión topológica)

Si el factor dimensional es entero, también lo será la dimensión fractal. Eso es lo que ocurre con las trayectorias virtuales en mecánica cuántica y también en una serie de fractales típicos, como puede ser el fractal del movimiento browniano en un plano (dimensión fractal 2) o la curva de Peano (dimensión fractal 2) que tiene más de 100 años de existencia.

Si una curva clásica tiene dimensión topológica 1, cuando hablamos de curvas fractales con una dimensión entre 1 y 2 estamos indicando que son capaces de ocupar parte del plano. Y es precisamente esa capacidad la que viene expresada por el factor dimensional. En el caso de la curva de Peano o del movimiento browniano, en el límite, ocupan todo el plano, de ahí que su dimensión fractal sea 2 , la propia dimensión del plano.

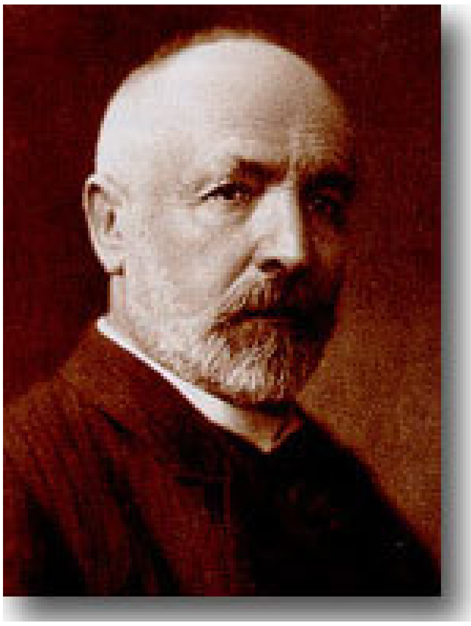

Fig 1. **George Cantor**.

Como ejemplo, todavía más llamativo, observamos en la figura un fractal clásico (el primero que se conoce), el polvo de Cantor que toma toma su nombre de Georg Cantor que en 1883 lo utilizó como herramienta de investigación para una de sus principales preocupaciones: el continuo.

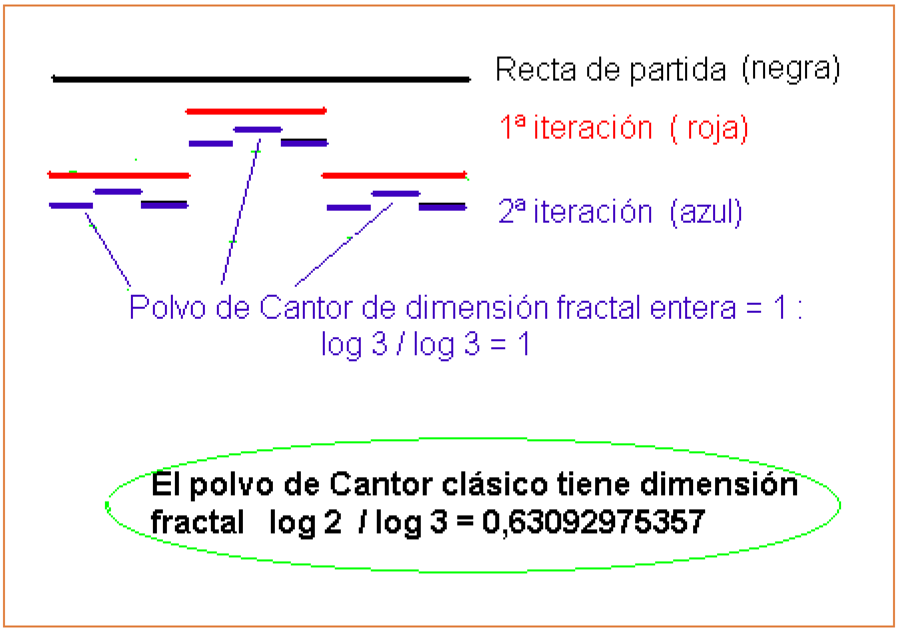

Fig.2 **Diferencias entre el polvo clásico de Cantor y el polvo de dimensión entera**.

A partir de una recta se le van quitando los segmentos centrales hasta conseguir una serie infinita de puntos aislados, de ahí el nombre de polvo. Si restablecemos de forma escalonada el segmento que antes le quitábamos, el nuevo fractal sigue teniendo estructura quebrada y autosemejante , pero ahora en lugar de tener una dimensión fractal igual a log 2/ log 3 tiene una dimensión entera: log 3/ log 3 =1. Nos ayuda, también, a entender como se calcula, de forma práctica, la dimensión fractal de una figura.

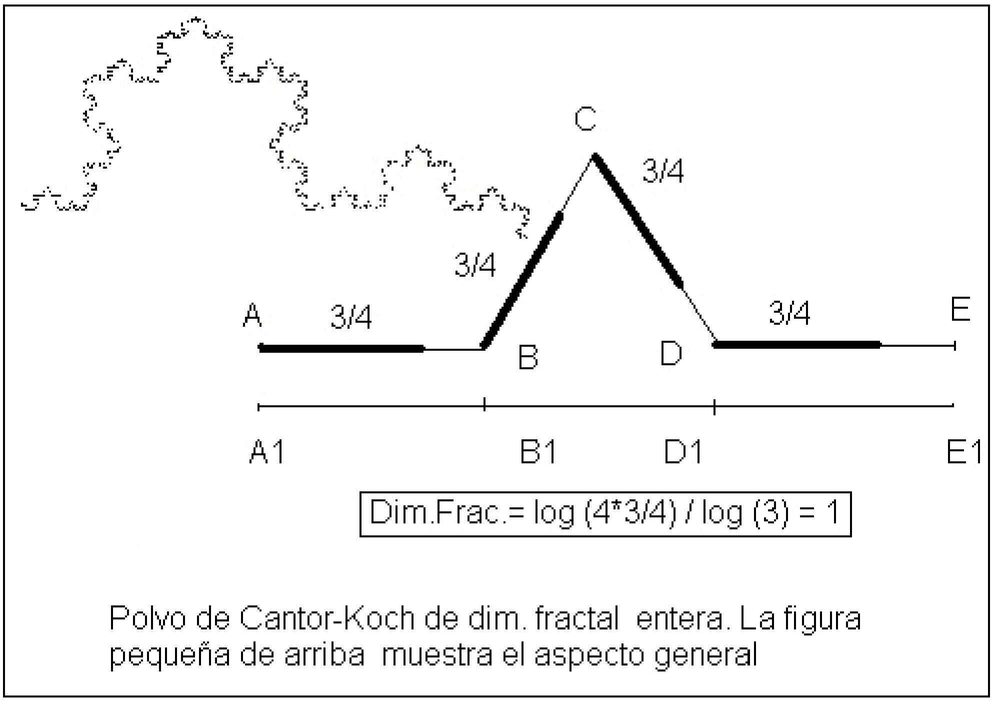

Fig. 3 **Polvo de Cantor-Koch de dimensión fractal entera.**

Esta otra figura es una síntesis de dos de los fractales clásicos, Koch y Cantor, y nos ayuda de forma intuitiva a entender el cálculo de su dimensión fractal. En la figura original de Koch, sobre los segmento A1-B1-D1-E1 se construye la figura que forman los segmentosA-B-C-D-E. Su dimensión fractal es log 4/ log 3 (cuatro segmentos sobre tres). En la nueva construcción se ha sustraido 1/4 de cada uno de los segmentos superiores para dejar 4 segmentos de longitud 3/4: al final son 3 sobre 3 (log 3/ log 3 = 1).

***Se pueden construir infinidad de fractales con dimensión entera** y, precisamente, esa irregularidad que representa una dimensión fractal entera en un fractal creo que nos ayuda a entendelos mejor.*

Bibliografía:

Fractal Geometry: **Mathematical Foundations and Applications 2nd edition**
KJ **Falconer** - Wiley, 2003

The fractal geometry of Nature
BB **Mandelbrot** - CA: WH Freeman and Co, San Francisco1982

Los objetos fractales, BB **Mandelbrot.**Tusquets Editores. Barcelona 1987