La teoría puramente afín de la gravedad y del electromagnetismo de Schrödinger (IV)

The theory purely affine of the gravity and electromagnetism of Schrödinger (IV)

Wenceslao Segura González
Investigador independiente
e-mail: wenceslaoseguragonzalez@yahoo.es
web: http://wenceslaoseguragon.wix.com/wenceslao-segura

Sinopsis. En el año 1943 Erwin Schrödinger inició una serie de publicaciones de lo que llamó Teoría Unitaria de Campo, con la que pretendía unificar los campos gravitatorio, electromagnético y mesónico sobre una base geométrica. En este artículo que, es continuación de [34], [35] y [36], analizamos la cuarta y definitiva de las teorías puramente afín de Schrödinger (Schrödinger-IV), que basó en una conexión y un tensor métrico ambos asimétricos y en la más simple densidad lagrangiana, aquella que es proporcional a la raíz cuadrada del determinante del tensor de Ricci.

Abstract. In 1943 Erwin Schrödinger began a series of publications on Unitary Field Theory, with which wanted to unify the gravitational, electromagnetic and mesonics fields on a geometric basis. In this article, which is a continuation of [34], [35] and [36], we analyze the fourth of the purely affine theories of Schrödinger (Schrödinger-IV), where he used a connection asymmetric and a metric tensor also asymmetric and the simplest Lagrangian density that is proportional to the square root of the determinant of the Ricci tensor.

Contenido

La versión *v1* del artículo «La teoría puramente afín de la gravedad y del electromagnetismo de Schrödinger (IV)» fue publicada el día 6 de marzo de 2015

La teoría puramente afín de la gravedad y del electromagnetismo de Schrödinger (IV)

The theory purely affine of the gravity and electromagnetism of Schrödinger (IV)

Wenceslao Segura González
Investigador independiente
e-mail: wenceslaoseguragonzalez@yahoo.es
web: http://wenceslaoseguragon.wix.com/wenceslao-segura

1.- Introducción

Durante los años cuarenta del siglo pasado Erwin Schrödinger desarrolló una amplia investigación sobre lo que hoy llamamos teoría puramente afín, un proyecto que tiene sus antecedentes en Weyl, Eddington y principalmente Einstein a quien hay que considerar como el primero que desarrolló una teoría de estas características en varios trabajos publicados en el año 1923. Schrödinger, al igual que antes Einstein, consideró como el principal elemento geométrico la conexión, cuyas componentes son los únicos potenciales del campo, debiendo la densidad lagrangiana depender de la conexión y de sus derivadas primeras. El tensor métrico aparece como magnitud derivada y por tanto en un segundo nivel con relación a la conexión.

El primer trabajo de Schrödinger sobre este asunto data del año 1943, posteriormente fue formulando distintas teorías cada vez más generales. La teoría que denominamos Schrödinger-I la examinamos en [34] y considera una conexión simétrica. Si bien en esta investigación Schrödinger pudo formular las ecuaciones de campo sólo logró la unificación de la gravitación y del electromagnetismo. El proyecto de Schrödinger era incluir en esta unificación el campo mesónico, en la época entendido como el responsable de las fuerzas de cohesión de las partículas nucleares. Por esta razón Schrödinger se vio en la necesidad de generalizar Schrödinger-I.

En su investigación sobre teoría unitaria de campo, Schrödinger quería obtener tres conjuntos de intensidades de campo que sirvieran para la descripción de los campos gravitatorio, electromagnético y mesónico. Mientras que el primero tiene que venir descrito (tal como ocurre en Relatividad General) por un tensor de segundo orden simétrico, los dos restantes que corresponden a campos vectoriales, vienen descritos por sendos tensores de segundo orden antisimétricos.

En su primera teoría puramente afín formulada en 1943 Schrödinger partió de una densidad lagrangiana que dependía de las componentes simétricas y antisimétricas del tensor de Ricci, que se derivan de una conexión simétrica. De esta densidad lagrangiana se obtienen los tensores de las intensidades de campo gravitatorio y electromagnético por las ecuaciones

$$\boldsymbol{g}^{ik} = \frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial R_{(ik)}}; \qquad \boldsymbol{f}^{ik} = \frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial R_{[ik]}}$$

pero no era posible obtener las intensidades del campo mesónico. (Las densidades escalares y tensoriales son representadas con letras negritas; los paréntesis redondos significan simetrización y los cuadrados antisimetrización).

La primera sugerencia de Schrödinger se inclinó en suponer la existencia de dos conexiones ambas simétricas de las que se derivarían dos tensores de Ricci R_{ik} y R'_{ik}, que serían los argumentos de la densidad lagrangiana. De esta manera se derivarían dos tensores antisimétricos de segundo orden: los asociados a $R_{[ik]}$ y a $R'_{[ik]}$, pero, a su vez, aparecerían dos tensores métricos, lo que no puede ser. Para evitar esta situación es necesario condicionar la dependencia funcional de la densidad lagrangina. Schrödinger supuso

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}\left\{R_{(ik)} + R'_{(ik)}; R_{[ik]} + R'_{[ik]}; R_{[ik]} - R'_{[ik]}\right\}$$

entonces como

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R_{(ik)}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R'_{(ik)}}$$

el tensor métrico es único, existiendo a su vez dos tensores antisimétricos diferentes

$$\mathbf{f}^{ik} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R_{[ik]}}; \qquad \mathbf{m}^{ik} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R'_{[ik]}}$$

los cuales representarían al campo electromagnético y al mesónico.

Al final del artículo de 1943 [16] el mismo Schrödinger decía que había sido advertido por A. J. McConnell que no era necesario duplicar la conexión afín porque la idea «aunque admisible era después de todo extraña» y que si se partía de una conexión asimétrica, además de la parte simétrica de la conexión, existiría su parte antisimétrica, las cuales podrían servir para acomodar los tres campos.

En la generalización que llamamos teoría Schrödinger-II publicada en 1944 bajo el título «La unión de los tres campos fundamentales (gravitación, mesón, electromagnetismo)» [17], Schrödinger consideró una conexión no simétrica, lo que permitía acomodar además del campo tensorial de la gravitación, dos campos vectoriales. No obstante, y probablemente por razones simplificadoras, Schrödinger impuso la condición semisimétrica (ver [35]) por la cual reducía a sólo cuatro las componetes de la parte antisimétrica de la conexión.

Si la conexión no es simétrica entonces surge un nuevo vector dependiente de las derivadas de la conexión. Se trata de la curvatura homotética V_{ik}, que en el caso especial de conexión simétrica coincide con la parte antisimétrica del tensor de Ricci. Por tanto, Schrödinger-II considera una densidad lagrangiana con la dependencia funcional

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\left[R_{(ik)}, R_{[ik]}, V_{ik}\right]$$

de la cual se derivan los tres campos (uno tensorial y dos vectoriales).

El siguiente intento de Schrödinger se publicó en el año 1946 con el título «The general affine field laws». [20] En esta teoría que llamaremos Schrödinger-III se avanza en la generalización pues considera una conexión asimétrica sin ninguna limitación. Al igual que en las teorías anteriores, también ésta es puramente afín en el sentido de que el tensor métrico aparece como un elemento derivado, tomándose como potenciales del campo las componentes de la conexión.

Schröndiger abordó esta tercera teoría descomponiendo la conexión en tres partes: las componentes simétricas de la conexión, las componentes sin traza de la parte antisimétrica y un vector. Esta descomposición no significa ninguna limitación de la conexión, pero nos permite simplificar los cálculos matemáticos.

Con esta teoría Schrödinger pretendía la unificación de los campos: gravitatorio, electromagnético y mesónico. No obstante, en esta tercera teoría encuentra que los dos campos antisimétricos que deben representar a los campos electromagnético y mesónico eran únicos y su identificación inequívoca, en el sentido de que uno de los campos era estrictamente lineal como corresponde a las ecuaciones de Maxwell, mientras que el otro campo antisimétrico no lo era y por tanto debía ser entendido como el campo de los mesones.

Señalar, por último, que en Schröginder-III no se elige ninguna densidad lagrangiana, es decir sólo se tiene en consideración la dependencia funcional de la densidad lagrangiana pero sin proponer ninguna función específica para ella. Esto significa que Schrödinger pudo encontrar las relaciones auxiliares que surgen en la teoría puramente afín, o sea, expresiones que nos permiten relacionar la conexión con las intensidades secundarias de campo y sus primeras derivadas, pero no encuentra las ecuaciones finales de campo.

En este artículo exponemos la última y más elaborada teoría puramente afín de Schröndinger, a la que denominamos Schrödinger-IV. En ella se vuelve a considerar como principal magnitud geométrica a las componentes de la conexión que son, por tanto, los potenciales del campo. La conexión al igual que el tensor métrico que de ella se deriva, son ambos asimétricos.

En esta teoría Schrödinger opta por elegir una determinada densidad lagrangiana, la misma que años antes propusiera Eddington y que representa la más simple expresión que cumple las condiciones para ser una adecuada densidad lagrangiana.

En lo que sigue procedemos a derivar las ecuaciones de campo mediante las técnicas ya familiares en anteriores investigaciones de Schrödinger. La teoría es suficientemente amplia para incluir otras teorías más simples, como la de Einstein de 1923, las varias planteadas por Schrödinger o la de Einstein-Strauss y naturalmente a la Relatividad General.

Finalmente exponemos cómo Schrödinger deriva las ecuaciones de la Relatividad General y las ecuaciones electromagnéticas de Maxwell. Al igual que en sus anteriores investigaciones, tampoco en esta desarrolla la teoría, ni trata de obtener resultados que puedan ser comprobados experimentalmente. No obstante, Schrödinger insiste en la creencia de que su teoría podría explicar el magnetismo planetario como un fenómeno que tiene su origen en la rotación mecánica, sin aportar cálculos que demuestren esta posibilidad.

Entiéndase que este trabajo es continuación de [34], [35] y [36] por lo que se aconseja previamente su lectura. En lo referente a la matemática empleada seguimos la notación y las definiciones de [33].

2.- La derivada del determinante

Consideremos un tensor covariante de segundo orden a_{ik}. Lo podemos entender como los elementos de una matriz de orden dos $A=(a_{ik})$. Su determinante a se calcula por

$$a=\varepsilon^{pqrs}a_{1p}a_{2q}a_{3r}a_{4s} \tag{1}$$

para concretar suponemos un espacio de cuatro dimensiones. La matriz inversa de A la representamos por los elementos $A^{-1}=(\hat{a}^{ik})$ que no se corresponden con las componentes del tensor en forma contravariante a^{ik}, cumpliéndose la relación

$$a_{ik}\hat{a}^{kr}=\hat{a}^{rk}a_{ki}=\delta_i^r \quad \Leftrightarrow \quad A\cdot A^{-1}=A^{-1}A=I$$

I es la matriz unidad. El determinante (1) se puede desarrollar por los menores adjuntos. Por ejemplo, se puede desarrollar (1) por los menores adjuntos de la primera fila de la matriz A

$$a=a_{1p}\left(\varepsilon^{pqrs}a_{2q}a_{3r}a_{4s}\right)=a_{1p}\alpha^{1p} \tag{2}$$

donde α^{1p} es el menor adjunto del elemento $1,p$ de la matriz A. De (2) se comprueba que se cumple

$$a_{ip}\alpha^{kp}=a\delta_i^k$$

entonces

$$a_{ip}\left(\frac{1}{a}\alpha^{kp}\right)=\delta_i^k \quad \Rightarrow \quad \hat{a}^{pk}=\frac{1}{a}\alpha^{kp}. \tag{3}$$

El anterior razonamiento se aplica al tensor métrico g_{ik} y a su correspondiente matriz $G=(g_{ik})$. No obstante, las componentes contravariantes del tensor métrico g^{ik} no coinciden con los elementos de la matriz inversa G^{-1}, es decir

$$g_{ik}g^{kr}\neq\delta_i^r,$$

por definición las componentes contravariantes del tensor métrico coinciden con la traspuesta de los elementos de la matriz inversa $G^{-1}=(g'^{ik})$

$$g^{ik}=g'^{ki}=\tilde{g}'^{ik}$$

entonces

$$g_{ik}g'^{kr}=\delta_k^r \quad \Rightarrow \quad g_{ik}g^{rk}=\delta_k^r \quad \Rightarrow \quad g^{ik}=\frac{1}{g}\alpha^{ik}.$$

La derivada de un determinante se calcula a partir de (2)

$$da=a_{1p}\left(\varepsilon^{pqrs}a_{2q}a_{3r}a_{4s}\right)+da_{2q}\left(\varepsilon^{pqrs}a_{1p}a_{3r}a_{4s}\right)+da_{3r}\left(\varepsilon^{pqrs}a_{1p}a_{2q}a_{4s}\right)+da_{4s}\left(\varepsilon^{pqrs}a_{1p}a_{2q}a_{3r}\right)$$

o bien

$$da=da_{ik}\alpha^{ik}$$

que por (3) queda

$$da=a\hat{a}^{ki}da_{ik}. \tag{4}$$

Para el caso del tensor métrico tenemos, por lo antes expuesto, que

$$dg=g\,g^{ik}dg_{ik} \tag{5}$$

de (4) y (5) deducimos

$$\begin{gathered} d\sqrt{a}=\frac{1}{2}\sqrt{a}\,\hat{a}^{ki}da_{ik} \\ d\sqrt{g}=\frac{1}{2}\sqrt{g}\,g^{ik}dg_{ik}. \end{gathered} \tag{6}$$

3.- La densidad lagrangiana

Entendemos por densidad escalar $\boldsymbol{L}$ un ente que frente a transformaciones de coordenadas

$$dx'^i = A^i_k \, dx^k$$

se transforma según la ley

$$\boldsymbol{L}' = \frac{1}{|A|}\boldsymbol{L}$$

donde $|A|$ es el determinante de la matriz de la transformación A^i_k . Dado que la raíz cuadrada del determinante a de cualquier tensor de tensor de segundo orden a_{ik} se transforma según

$$\sqrt{a'} = \sqrt{a} \big/ |A|$$

podemos entender que la densidad escalar tiene la estructura

$$\boldsymbol{L} = \sqrt{a}\, L$$

donde L es un invariante.

Las ecuaciones de campo son obtenidas a partir de un principio de mínima acción que afirma que la variación de la acción del campo

$$I = \int \boldsymbol{L}\, d\Omega$$

es una extremal, siendo $d\Omega = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$ para el caso del espacio-tiempo tetradimensional.

La densidad lagrangiana $\boldsymbol{L}$ debe depender de los potenciales (que son las componentes de la conexión) y sus primeras derivadas. Hay dos tensores de segundo orden que son formados por la conexión y sus primeras derivadas: el tensor de Ricci y la curvatura homotética, y que por tanto sirven para formar la densidad lagrangiana. La más simple de estas expresiones propuesta primeramente por Eddington [1] es

$$\boldsymbol{L} = \frac{2}{\lambda}\sqrt{-\det R_{ik}} = \frac{2}{\lambda}\sqrt{-|R|} \tag{7}$$

donde λ es una constante y con $|R|$ representamos el determinante de la matriz formada por las componentes covariantes del tensor de Ricci R_{ik} . Ponemos como condición de que el determinante de R_{ik} es negativo en todo punto del espacio, o al menos no positivo, por razones que veremos más adelante. Por esta condición aparece el signo menos en el radicando de (7).

Schrödinger notó que aún siendo (7) la densidad lagrangiana más simple, probablemente era la correcta y por ello es la que usa para construir la teoría que llamamos Schrödinger-IV.

El plan de trabajo de Schrödinger en esta nueva teoría cuyos ragos principales aparecen en un artículo de 1947 titulado «The final affine field laws I» (véase también [21] y [31]), es diferente de las técnicas aplicadas en las investigaciones anteriores que hemos examinado en [34], [35] y [36]. En estos trabajos Schrödinger obtuvo unas relaciones auxiliares a partir exclusivamente de la dependencia funcional de la densidad lagrangiana, sin necesidad de especificarla explíticamente. Sin embargo, en el trabajo que ahora examinamos, Schrödinger siguiendo las «técnicas maestras de Einstein» inicia su investigación con la densidad lagrangiana (7). Si bien sus resultados dejan de ser generales, resultan más simples. Además en Schröginder-IV se elude descomponer las entidades geométricas prematuramente, como veremos en el siguiente epígrafe, siguiendo también en este asunto a Einstein.

4.- Cálculo de $\boldsymbol{g}^{ik}$

Las teorías de campo unificado que Schrödinger fue estudiando durante los años cuarenta del siglo pasado son puramente afín, lo que significa que las magnitudes geométricas primarias son las componentes de la conexión, que son los potenciales del campo. El tensor métrico no es definido previamente, sino que se deriva de la conexión y sus primeras derivadas, convirtiéndose en una magnitud secundaria a diferencia de lo que ocurre en la formulación métrica de la teoría de campo.

En Schrödinger-IV la conexión es asimétrica, lo que significa que igual propiedad tiene el tensor de Ricci, entonces la densidad del tensor métrico definido por

$$\boldsymbol{g}^{ik} = \frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial R_{ik}} \tag{8}$$

también es asimétrico y cabe descomponerlo en parte simétrica y antisimétrica.

Aplicando (7) en (8) y teniendo en cuenta la primera de las ecuaciones (6) se obtiene

$$\boldsymbol{g}^{ik}=\frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial R_{ik}}=\frac{2}{\lambda}\frac{-1}{2\sqrt{-|R|}}\frac{\partial |R|}{\partial R_{ik}}=\frac{1}{\lambda}\frac{-|R|}{\sqrt{-|R|}}\hat{R}^{ki}=\frac{1}{\lambda}\sqrt{-|R|}\,\hat{R}^{ki} \tag{9}$$

$\hat{R}^{ki}$ representa los elementos de la matriz inversa de la matriz de elementos (R_{ik}). Si $|\hat{R}|$ es el determinante de la matriz de elementos $\hat{R}^{ik}$, entonces

$$|\hat{R}|=\frac{1}{|R|}$$

y de (9) se deduce

$$\boldsymbol{g}=\frac{1}{\lambda^4}|R|$$

donde $\boldsymbol{g}$ es el determinante de la matriz formada por los $\boldsymbol{g}^{ik}$.

Como hemos dicho, una densidad tensorial es el producto de un tensor por la raíz cuadrada del determinante de un tensor de segundo orden, la misma definición se aplica a una densidad escalar. Cabe preguntarse en (7) cuál es el tensor cuya raíz cuadrada se utiliza para definir la densidad escalar de la lagrangiana. Este tensor está indefinido, vamos a elegirlo arbitrariamente como R_{ik}/λ entonces la raíz cuadrada de su determinante, que define a las densidades, es $\sqrt{-|R|}/\lambda^2$, elección que hacemos por razones que veremos más adelante.

Multipliquemos los dos miembros de (9) por $R_{ip}\,g_{rk}$

$$\lambda R_{ip}g_{rk}\boldsymbol{g}^{ik}=R_{ip}g_{rk}\sqrt{-|R|}\,\hat{R}^{ki} \quad\Rightarrow\quad \lambda\frac{1}{\lambda^2}R_{rp}\sqrt{-|R|}=\sqrt{-|R|}\,g_{rp} \quad\Rightarrow\quad R_{rp}=\lambda g_{rp}\,. \tag{10}$$

Al multiplicar (10) por $g^{ip}\hat{R}^{kr}$

$$g^{ip}\hat{R}^{kr}R_{rp}=\lambda g_{rp}g^{ip}\hat{R}^{kr} \quad\Rightarrow\quad g^{ik}=\lambda\hat{R}^{ki}\,. \tag{11}$$

Ahora podemos explicar la elección hecha anteriormente. De (10) deducimos que

$$\sqrt{g}=\frac{1}{\lambda^2}\sqrt{-|R|} \tag{12}$$

o sea, que la elección que hicimos es para que las densidades se calculen con la raíz cuadrada del tensor métrico. Debemos observar que el determinante del tensor métrico también es negativo por serlo el determinante del tensor de Ricci, por lo que en rigor deberíamos poner $\sqrt{-|g|}$, sin embargo, lo anterior lo representaremos por $\sqrt{g}$ para seguir con la misma notación que en los trabajos anteriores.

5.- Ecuaciones de campo en función del tensor métrico y de la conexión

El principio de mínima acción afirma que cuando se varían arbitrariamente las componentes de la conexión la variación de la acción del campo se anula

$$\delta I=\delta\int \boldsymbol{L}\,d\Omega=0$$

ahora bien por (8)

$$\delta I=\delta\int \boldsymbol{L}\,d\Omega=\int\delta\boldsymbol{L}\,d\Omega=\int\frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial R_{ik}}\delta R_{ik}\,d\Omega=\int \boldsymbol{g}^{ik}\delta R_{ik}\,d\Omega=0 \tag{13}$$

resultado que podemos reencontrar utilizando (7), en efecto

$$\delta\boldsymbol{L}=\delta\left(\frac{2}{\lambda}\sqrt{-|R|}\right)=\frac{1}{\lambda}\sqrt{-|R|}\hat{R}^{ki}\delta R_{ik}=\boldsymbol{g}^{ik}\delta R_{ik}$$

habiendo utilizado en el último paso las propiedades (11) y (12), hallando el resultado (13).

Para hacer la variación (13) usamos la identidad de Palatini (véase [33])

$$\delta R_{ik}=D_k\,\delta\Gamma_{is}{}^{s}-D_s\delta\Gamma_{ik}{}^{s}+\tau^{s}_{mk}\,\delta\Gamma_{is}{}^{m}$$

τ^{s}_{mk} es el tensor de torsión definido por

$$\tau_{ik}{}^{s}=\Gamma_{ik}{}^{s}-\Gamma_{ki}{}^{s}=2\Gamma_{[ik]}{}^{s}\,.$$

Para el posterior cálculo es necesario tener presente que el teorema de Gauss debe ser modificado cuando existe torsión, de tal forma que queda (ver [33])

$$\int_V D_k\boldsymbol{A}^k d\Omega=\int_\Sigma A^k dS_k+\int_V \boldsymbol{A}^k\tau_k\,d\Omega$$

donde τ_k es el vector de torsión definido por $\tau_k = \tau_{ks}{}^{s} = \Gamma_{ks}{}^{s} - \Gamma_{sk}{}^{s} = 2\Gamma_{[ik]}{}^{s}$.

Aplicando la identidad de Palatini a (13) queda

$$\delta I = \int \boldsymbol{g}^{ik} \delta R_{ik}\, d\Omega = \int \boldsymbol{g}^{ik} D_k\, \delta\Gamma_{is}{}^{s} d\Omega - \int \boldsymbol{g}^{ik} D_s \delta\Gamma_{ik}{}^{s} d\Omega + \int \boldsymbol{g}^{ik} \tau^{s}_{mk}\, \delta\Gamma_{is}{}^{m}\, d\Omega \tag{14}$$

ahora hay que integrar por partes y aplicar el teorema de Gauss, así para la primera integral del último miembro de (14) se tiene

$$\int \boldsymbol{g}^{ik} D_k\, \delta\Gamma_{is}{}^{s} d\Omega = \int D_k \left(\boldsymbol{g}^{ik} \delta\Gamma_{is}{}^{s}\right) d\Omega - \int D_k \boldsymbol{g}^{ik} \delta\Gamma_{is}{}^{s} d\Omega =$$
$$= \int g^{ik} \delta\Gamma_{is}{}^{s} dS_k + \int \boldsymbol{g}^{ik} \delta\Gamma_{is}{}^{s} \tau_k d\Omega - \int D_k \boldsymbol{g}^{ik} \delta\Gamma_{is}{}^{s} d\Omega$$

si ahora suponemos que las variaciones de las componentes de la conexión se anulan en superficie de integración entonces

$$\int \boldsymbol{g}^{ik} D_k\, \delta\Gamma_{is}{}^{s} d\Omega = \int \boldsymbol{g}^{ik} \tau_k\, \delta\Gamma_{is}{}^{s} d\Omega - \int D_k \boldsymbol{g}^{ik} \delta\Gamma_{is}{}^{s} d\Omega = \int \delta^{k}_{s} \left(\boldsymbol{g}^{ir} \tau_r - D_r \boldsymbol{g}^{ir}\right) \delta\Gamma_{ik}{}^{s} d\Omega,$$

haciendo el mismo razonamiento con la segunda integral del último miembro de (14) se encuentra

$$\delta I = \int \left[\delta^{k}_{s} \boldsymbol{g}^{ir} \tau_r - \delta^{k}_{s} D_r \boldsymbol{g}^{ir} - \boldsymbol{g}^{ik} \tau_s + D_s \boldsymbol{g}^{ik} + \boldsymbol{g}^{ir} \tau^{k}_{sr} \right] \delta\Gamma_{ik}{}^{s}\, d\Omega = 0$$

y como las $\delta\Gamma_{ik}{}^{s}$ son independientes y arbitrarias, nos queda las ecuaciones de campo

$$\delta^{k}_{s} \boldsymbol{g}^{ir} \tau_r - \delta^{k}_{s} D_r \boldsymbol{g}^{ir} - \boldsymbol{g}^{ik} \tau_s + D_s \boldsymbol{g}^{ik} + \boldsymbol{g}^{ir} \tau^{k}_{sr} = 0. \tag{15}$$

Al contraer (15) respecto a k y s

$$D_r \boldsymbol{g}^{ir} = \frac{2}{3} \boldsymbol{g}^{ir} \tau_r$$

que al sustituir en (15) queda

$$D_s \boldsymbol{g}^{ik} - \boldsymbol{g}^{ik} \tau_s - \frac{1}{3} \delta^{k}_{s} \boldsymbol{g}^{ir} \tau_r + \boldsymbol{g}^{ir} \tau_{sr}{}^{k} = 0 \tag{16}$$

que en unión de (10) son las ecuaciones de campo, que representan 80 ecuaciones diferenciales [se obtienen 16 ecuaciones de (10) y 64 de (16)] en donde existen 80 variables (16 correspondientes a $\boldsymbol{g}^{ik}$ y 64 a $\Gamma_{ik}{}^{s}$).

Notemos que (16) es la ecuación auxiliar, es decir aquella que nos relaciona la conexión con el tensor métrico, mientras que la genuina ecuación de campo es la (10). Advertimos que para deducir (16) no hemos necesitado expresar la densidad lagrangiana por (7), sólo hemos necesitado su dependencia funcional no su forma explícita. No obstante para encontrar (10) sí hemos necesitado (7).

6.- La conexión afín estrellada

Se define la conexión estrellada por

$$\overset{*}{\Gamma}_{ik}{}^{r} = \Gamma_{ik}{}^{r} + \frac{1}{3} \delta^{r}_{i} \tau_k$$

que es una conexión puesto que es la suma de una conexión y un tensor. La conexión estrellada tiene la propiedad

$$\overset{*}{\Gamma}_{rk}{}^{r} = \overset{*}{\Gamma}_{kr}{}^{r},$$

los correspondientes vector y tensor de torsión son

$$\overset{*}{\tau}_r = \frac{4}{3} \tau_r\,; \qquad \tau_{ik}{}^{s} = \overset{*}{\tau}_{ik}{}^{s} + \frac{1}{4} \delta^{s}_{i} \overset{*}{\tau}_k - \frac{1}{4} \delta^{s}_{k} \overset{*}{\tau}_i\,.$$

7.- Ecuaciones de campo en función de la conexión

Es posible expresar (16) en función de la conexión estrellada. Para ello recordamos que la derivada covariante de la densidad del tensor métrico es (ver [33])

$$D_s \boldsymbol{g}^{ik} = \partial_s \boldsymbol{g}^{ik} + \boldsymbol{g}^{rk} \Gamma_{rs}{}^{i} + \boldsymbol{g}^{ir} \Gamma_{rs}{}^{k} - \boldsymbol{g}^{ik} \Gamma_{rs}{}^{r},$$

entonces de (16) tenemos

$$\partial_s \boldsymbol{g}^{ik} + \boldsymbol{g}^{rk} \left(\overset{*}{\Gamma}{}^{i}_{rs} - \frac{1}{4} \delta^{i}_{r} \overset{*}{\tau}_s \right) + \boldsymbol{g}^{ir} \left(\overset{*}{\Gamma}{}^{k}_{rs} - \frac{1}{4} \delta^{k}_{r} \overset{*}{\tau}_s \right) - \boldsymbol{g}^{ik} \left(\overset{*}{\Gamma}{}^{r}_{rs} - \overset{*}{\tau}_s \right) -$$
$$- \frac{3}{4} \boldsymbol{g}^{ik} \overset{*}{\tau}_s - \frac{1}{4} \delta^{k}_{s} \boldsymbol{g}^{ir} \overset{*}{\tau}_r + \boldsymbol{g}^{ir} \left(\overset{*}{\tau}{}^{k}_{sr} + \frac{1}{4} \delta^{k}_{s} \overset{*}{\tau}_r - \frac{1}{4} \delta^{k}_{r} \overset{*}{\tau}_s \right) = 0$$

y al simplificar

$$\partial_s \boldsymbol{g}^{ik} + \boldsymbol{g}^{rk}\overset{*}{\Gamma}{}^{i}_{rs} + \boldsymbol{g}^{ir}\overset{*}{\Gamma}{}^{k}_{sr} - \frac{1}{2}\boldsymbol{g}^{ik}\left(\overset{*}{\Gamma}{}^{r}_{rs} + \overset{*}{\Gamma}{}^{r}_{sr}\right) = 0. \tag{17}$$

Ahora vamos a poner (17) en función del tensor métrico en vez de la densidad del tensor métrico. Para lo cual multiplicamos (17) por g_{ik} y desarrollamos

$$g_{ik}g^{ik}\frac{\partial_s\sqrt{g}}{\sqrt{g}} + g_{ik}\partial_s g^{ik} + \overset{*}{\Gamma}{}^{r}_{rs} + \overset{*}{\Gamma}{}^{r}_{sr} - 2g_{ik}g^{ik}\left(\overset{*}{\Gamma}{}^{r}_{rs} + \overset{*}{\Gamma}{}^{r}_{sr}\right) = 0$$

como sabemos que (ver [33])

$$\frac{\partial_s\sqrt{g}}{\sqrt{g}} = -\frac{1}{2}g_{ik}\partial_s g^{ik}$$

obtenemos

$$\frac{\partial_s\sqrt{g}}{\sqrt{g}} = \frac{1}{2}\left(\overset{*}{\Gamma}{}^{r}_{rs} + \overset{*}{\Gamma}{}^{r}_{sr}\right) \tag{18}$$

de nuevo volvemos a (17) en donde sustituimos (18) y se encuentra

$$\partial_s g^{ik} + g^{rk}\overset{*}{\Gamma}{}^{i}_{rs} + g^{ir}\overset{*}{\Gamma}{}^{k}_{rs} = 0.$$

Al multiplicar la anterior expresión por $g_{in}g_{mk}$ queda

$$\partial_s g_{mn} - g_{rn}\overset{*}{\Gamma}{}^{r}_{ms} - g_{mr}\overset{*}{\Gamma}{}^{r}_{sn} = 0, \tag{19}$$

en este cálculo debemos advertir que por definición $g_{in}\, g^{ik} = \delta^i_n$ y $g_{mk}\, g^{ik} = \delta^i_m$ entonces $g_{in}g_{mk}\, g^{ik} = g_{mn}$. Hay que notar que el primer miembro de (19) no coincide con $D_s g_{mn}$, ambas ecuaciones se diferencian en el orden de los subíndices de la conexión afín que aparece en el último sumando.

El tensor de Ricci puede ponerse en función de la conexión afín estrellada, obteniéndose

$$R_{ik} = \overset{*}{R}_{ik} + F_{ik}$$

donde $\overset{*}{R}_{ik}$ es el tensor de Ricci calculado respecto a $\overset{*}{\Gamma}{}^{r}_{ik}$ y el tensor antisimétrico F_{ik} es definido por

$$F_{ik} = \frac{1}{3}\left(\frac{\partial\tau_i}{\partial x^k} - \frac{\partial\tau_k}{\partial x^i}\right),$$

entonces por (10) se puede poner la ecuación de campo (19) en función de los dos tensores anteriores

$$\partial_s\left(\overset{*}{R}_{mn} + F_{mn}\right) - \left(\overset{*}{R}_{rn} + F_{rn}\right)\overset{*}{\Gamma}{}^{r}_{ms} - \left(\overset{*}{R}_{mr} + F_{mr}\right)\overset{*}{\Gamma}{}^{r}_{sm} = 0 \tag{20}$$

que representan 64 ecuaciones diferenciales más las 4 condiciondes $\overset{*}{\Gamma}{}^{r}_{rk} = \overset{*}{\Gamma}{}^{r}_{kr}$, para 68 variables de campo: 64 componentes de $\overset{*}{\Gamma}{}^{r}_{ik}$ y 4 de τ_k.

Las ecuaciones (20) son las ecuaciones de campo de la teoría Schrödinger-IV que según palabras de su autor representan «las únicas que considero analíticamente trabajables». Sobre la ecuación (10) indicar que incluye el término cosmológico λ, como ocurre en general en las teorías puramente afín, un término que no puede ser nulo, lo que significa que el término cosmológico es un elemento necesario en Schrödinger-IV.

8.- Integrales primeras

De (18) y de la propiedad $\overset{*}{\Gamma}{}^{r}_{rk} = \overset{*}{\Gamma}{}^{r}_{kr}$, se obtiene

$$\overset{*}{\Gamma}{}^{r}_{rs} = \frac{\partial_s\sqrt{g}}{\sqrt{g}}$$

entonces deberá de cumplirse

$$\frac{\partial\overset{*}{\Gamma}{}^{r}_{rs}}{\partial x^i} - \frac{\partial\overset{*}{\Gamma}{}^{r}_{ri}}{\partial x^s} = 0$$

que corresponde a las primeras integrales de la ecuación de campo (20).

Contrayendo (17) primero respecto a *i* y *s* y luego respecto a *k* y *s*, es fácil encontrar que

$$\frac{\partial\boldsymbol{g}^{[ik]}}{\partial x^k} = 0 \tag{21}$$

donde $\boldsymbol{g}^{[ik]}$ representa la parte antisimétrica de $\boldsymbol{g}^{ik}$. Además de (10)

$$R^{*}_{ik} + F_{ik} = \lambda g_{ik} \ , \tag{22}$$

entonces las 80 ecuaciones (21) y (22) son otra forma de representar las ecuaciones de campo. Descomponiendo (22) en parte simétrica y antisimétrica nos permite replantear las ecuaciones de campo sin que aparezca F_{ik} es decir sin τ_k

$$\begin{aligned} R^{*}_{(ik)} - \lambda g_{(ik)} &= 0 \\ R^{*}_{[ik]} - \lambda g_{[ik]} &= -F_{ik} \end{aligned} \tag{23}$$

hallando la derivada parcial de la segunda ecuación y permutándola cíclicamente conseguimos que desaparezca F_{ik}

$$\partial_r \left[R^{*}_{[ik]} - \lambda g_{[ik]} \right] + \partial_k \left[R^{*}_{[ri]} - \lambda g_{[ri]} \right] + \partial_i \left[R^{*}_{[kr]} - \lambda g_{[kr]} \right] = 0 \tag{24}$$

notemos que la ecuación (21), la primera (23) y la (24) forman un sistema de 18 ecuaciones diferenciales (4, 10 y 4 ecuaciones respectivamente), para 16 variables (las componentes de $\boldsymbol{g}_{ik}$), habiendo en el sistema dos identidades diferenciales triviales lo que reduce a 16 el número de ecuaciones diferenciales independientes.

Si el tensor métrico fuera simétrico entonces de (19) se encuentra que $\Gamma^{*}{}_{ik}{}^{r}$ coincide con los símbolos de Christoffel, por tanto R^{*}_{ik} debe ser simétrico, con lo que la ecuación (24) deja de existir, quedando únicamente la primera de las ecuaciones (23), recuperándose, por tanto, la Relatividad General.

De (19) y (10) obtenemos otra forma de las ecuaciones de campo

$$\partial_s R_{mn} - R_{rn} \Gamma^{*}{}_{ms}^{\ r} - R_{mr} \Gamma^{*}{}_{sn}^{\ r} = 0 .$$

Schrödinger plantea que su teoría es, en esencia, la misma que la desarrollada poco tiempo antes por Einstein y Straus, excepto que en Schrödinger-IV existe el término cosmológico el cual no puede anularse.

9.- Las varias teorías de campo

En 1948, un año después de la publicación de los fundamentos de Schrödinger-IV, el autor concretó sus resultados en función de cuáles fueran los potenciales del campo y de sus propiedades de simetría [22].

Schrödinger expone la posibilidad de abordar la teoría de campo mediante tres procedimientos: la teoría métrica, la métrico-afín y la puramente afín, según que los potenciales sean el tensor métrico, el tensor métrico y la conexión o solamente la conexión.

Schrödinger parte de la acción del campo

$$I = \int \boldsymbol{g}^{ik} R_{ik} \, d\Omega$$

que será de aplicación a todas las teorías y su variación en el caso de la teoría métrica nos conduce a las ecuaciones de la Relatividad General

$$\delta I = \int \delta \boldsymbol{g}^{ik} R_{ik} \, d\Omega = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{ik} = 0 \tag{25}$$

donde suponemos tensor métrico simétrico y que la conexión coincide con los símbolos de Christoffel. Schrödinger no considera la teoría métrica en el caso de que el tensor métrico no sea simétrico, porque «no habría una pista simple y natural para saber qué conexión tendría que sustituir a los símbolos de Christoffel». Pasamos a continuación las diversas teorías examinadas por Schrödinger.

a) *Teoría métrico afín: la Relatividad General*

Si consideramos que el tensor métrico es simétrico al igual que la conexión y usamos el método métrico afín, se encuentra al variar la acción

$$\delta I = \int \delta \boldsymbol{g}^{ik} R_{ik} \, d\Omega + \int \boldsymbol{g}^{ik} \delta R_{ik} \, d\Omega = 0$$

de la primera de las integrales volvemos a obtener (25), para resolver la segunda integral usamos la relación de Palatini aplicable cuando la conexión es simétrica

$$\delta R_{ik} = D_k \, \delta \Gamma_{is}{}^{s} - D_s \delta \Gamma_{ik}{}^{s}$$

entonces

$$\int \boldsymbol{g}^{ik} \delta R_{ik} \, d\Omega = \int \boldsymbol{g}^{ik} D_k \, \delta \Gamma_{is}{}^{s} d\Omega - \int \boldsymbol{g}^{ik} D_s \delta \Gamma_{ik}{}^{s} d\Omega$$

integrando por partes y posteriormente aplicando el teorema de Gauss nos queda

$$\int \boldsymbol{g}^{ik} \delta R_{ik} \, d\Omega = \int -D_k \boldsymbol{g}^{ik} \delta \Gamma_{is}{}^{s} d\Omega + \int D_s \boldsymbol{g}^{ik} \delta \Gamma_{ik}{}^{s} d\Omega = \int \left(D_s \boldsymbol{g}^{ik} - \delta^{k}_{s} D_r \boldsymbol{g}^{ir} \right) \delta \Gamma_{ik}{}^{s} d\Omega .$$

Antes de tener en cuenta la arbitrareidad de la variación de la conexión, hay que advertir que como es simétrica encontramos que si $i \neq k$

$$b^{ik}\delta\Gamma_{ik}{}^{s} = \left(b^{ik} + b^{ki}\right)\delta\Gamma_{ik}{}^{s}\left(i > k\right) \Rightarrow b^{ik} + b^{ki} = 0$$

porque si $i \geq k$ entonces todas las $\delta\Gamma_{ik}{}^{s}$ son independientes. Sin embargo si $i = k$ entonces

$$b^{ii}\delta\Gamma_{ii}{}^{s} \Rightarrow b^{ii} = 0 \Rightarrow b^{ii} + b^{ii} = 0$$

en resumen

$$b^{ik}\delta\Gamma_{ik}{}^{s} = \left(b^{ik} + b^{ki}\right)\delta\Gamma_{ik}{}^{s}\left(i \geq k\right) \Rightarrow b^{ik} + b^{ki} = 0.$$

Entonces en nuestro caso

$$2D_s\boldsymbol{g}^{ik} - \delta_s^k D_r\boldsymbol{g}^{ir} - \delta_s^i D_r\boldsymbol{g}^{kr} = 0. \tag{26}$$

Para resolver (26) primero vamos a contraer con respecto a s y k

$$2D_s\boldsymbol{g}^{is} - 4D_r\boldsymbol{g}^{ir} - D_r\boldsymbol{g}^{ir} = 0 \quad \Rightarrow \quad D_r\boldsymbol{g}^{ir} = 0$$

entonces (26) queda

$$D_s\boldsymbol{g}^{ik} = 0. \tag{27}$$

(27) es equivalente a $D_s g^{ik} = 0$ (ver [33]) que unido al carácter simétrico del tensor métrico y de la conexión viene a significar que la conexión es idéntica a los símbolos de Christoffel; volviendo, por tanto, a reencontrar las ecuaciones de la Relatividad General, las mismas que fueron halladas mediante la teoría métrica.

b) *Teoría métrico afín: conexión no simétrica y tensor métrico simétrico*

Permutando los índices de (19) encontramos

$$\begin{aligned} \partial_s g_{mn} - g_{rn}\overset{*}{\Gamma}{}_{ms}^{r} - g_{mr}\overset{*}{\Gamma}{}_{sn}^{r} &= 0 \\ \partial_m g_{ns} - g_{rs}\overset{*}{\Gamma}{}_{nm}^{r} - g_{nr}\overset{*}{\Gamma}{}_{ms}^{r} &= 0 \\ \partial_n g_{sm} - g_{rm}\overset{*}{\Gamma}{}_{sm}^{r} - g_{sr}\overset{*}{\Gamma}{}_{nm}^{r} &= 0 \end{aligned} \tag{28}$$

notemos que el cálculo para llegar a (19) por la teoría puramente afín es el mismo que el utilizado en la presente teoría métrico afín.

Restando la segunda de las ecuaciones (28) de la primera, sumándole la tercera y teniendo en cuenta el carácter simétrico del tensor métrico

$$\partial_s g_{mn} + \partial_m g_{ns} - \partial_n g_{sm} = g_{rn}\overset{*}{\Gamma}{}_{ms}^{r} + g_{mr}\overset{*}{\Gamma}{}_{sn}^{r}$$

multiplicando ambos miembros por g^{rs}

$$g^{rs}\left(\partial_s g_{mn} + \partial_m g_{ns} - \partial_n g_{sm}\right) = 2\overset{*}{\Gamma}{}_{mn}^{r}$$

lo que significa que $\overset{*}{\Gamma}{}_{mn}^{r}$ es idéntico a los símbolos de Christoffel, además sigue siendo válida (25), aún así no reencontramos a la Relatividad General, puesto que existe torsión y por tanto la conexión del espacio Γ_{mn}^{r} no es idéntico a los símbolos de Christoffel. La ecuación de campo (25) la descomponemos en parte simétrica y antisimétrica

$$R_{(ik)} = \overset{*}{R}_{(ik)} = 0; \quad R_{[ik]} = \overset{*}{R}_{[ik]} + F_{ik} = 0$$

con las definiciones de $\overset{*}{R}_{ik}$ y F_{ik} dadas en el epígrafe 7. Como $\overset{*}{\Gamma}{}_{mn}^{r}$ son los símbolos de Christofel, entonces $\overset{*}{R}_{ik}$ es simétrico (ver [33]), por tanto $F_{ik} = 0$ y las ecuaciones de campo son

$$\overset{*}{R}_{(ik)} = 0; \quad \overset{*}{R}_{[ik]} = 0$$

por tanto encontramos un campo gravitatorio puro y nada más, puesto que F_{ik} no da ninguna información y el vector de torsión τ_k queda totalmente indeterminado.

c) *Teoría métrico afín: conexión y tensor métrico simétricos*

Por el mismo razonamiento del apartado anterior la conexión debe coincidir con los símbolos de Christoffel, es nulo el tensor de torsión y por lo tanto también el vector de torsión. La ecuación de campo siguen siendo la (25). Es decir, nos encontramos con la teoría general de la relatividad.

d) *Teoría métrico afín: conexión y tensor métrico no simétricos*

Como en las restantes teorías que estamos analizando sigue siendo válido el mismo principio variacional, de tal forma que la variación de las componentes del tensor métrico nos lleva a la ecuación (25). Para la variación con respecto a las componentes de la conexión se sigue el mismo procedimiento desarrollado en los epígrafes 5, 6, 7 y 8, es decir que encontramos las mismas ecuaciones halladas en el epígrafe 8, excepto que ahora $\lambda = 0$. O sea, hallamos la teoría de Einstein-Straus.

e) *Teoría métrico afín: conexión simétrica y tensor métrico no simétrico*
De nuevo es válida la ecuación (25). Para la variación con respecto a las componentes de la conexión la situación es muy parecida a la que desarrollaremos en el epígrafe 10-b, excepto que λ es nula.

10.- Desarrollo de la teoría Schrödinger-IV

Hemos examinado en el epígrafe anterior las teorías métrica y métrico-afín, ahora volvemos a tratar con la teoría puramente afín, tal como la desarrollada a lo largo de este artículo. Consideramos a continuación los dos casos posibles.

a) *Teoría puramente afín: conexión asimétrica*
Corresponde a la teoría general que hemos desarrollado y cuyas ecuaciones aparecen en el epígrafe 8, siempre y cuando se elija como densidad lagrangiana a (7). Como hemos visto, la ecuación de campo es

$$\partial_s R_{mn} - R_{rn} \overset{*}{\Gamma}{}_{ms}^{r} - R_{mr} \overset{*}{\Gamma}{}_{sn}^{r} = 0$$

que son 64 ecuaciones diferenciales, tantas como componentes de la conexión que representan los potenciales del campo. Nótese que el tensor métrico es proporcional al tensor de Ricci, por tanto conocido éste se averigua aquel.

b) *Teoría puramente afín: conexión simétrica*
En este caso es de aplicación (13) y hay que seguir el razonamiento del epígrafe 5, excepto que ahora la conexión es simétrica y por tanto la identidad de Palatini se escribe sin el tensor de torsión que es nulo

$$\delta R_{ik} = D_k \,\delta\Gamma_{is}{}^{s} - D_s \delta\Gamma_{ik}{}^{s}$$

el resultado es el mismo que el del epígrafe 5 pero no aparece en el resultado final ni el vector ni el tensor de torsión

$$\delta I = \int \left[D_s \boldsymbol{g}^{ik} - \delta_s^k D_r \boldsymbol{g}^{ir} \right] \delta\Gamma_{ik}{}^{s} \, d\Omega = 0.$$

Ahora las $\delta\Gamma_{ik}{}^{s}$ son arbitrarias pero no independientes, a causa de su carácter simétrico, teniendo en cuenta esta propiedad encontramos del principio de mínima acción

$$D_s \boldsymbol{g}^{ik} + D_s \boldsymbol{g}^{ki} - \delta_s^k D_r \boldsymbol{g}^{ir} - \delta_s^i D_r \boldsymbol{g}^{kr} = 0, \tag{29}$$

contrayendo respecto a los índices k y s

$$4 D_r \boldsymbol{g}^{ir} = D_r \boldsymbol{g}^{ri}$$

si hacemos la definición

$$\boldsymbol{i}^{i} = D_r \boldsymbol{g}^{[ir]}$$

entonces

$$D_r \boldsymbol{g}^{ir} = -\frac{2}{3} \boldsymbol{i}^{i}$$

y sustituyendo en (29)

$$D_s \boldsymbol{g}^{(ik)} + \frac{1}{3} \delta_s^k \boldsymbol{i}^{i} + \frac{1}{3} \delta_s^i \boldsymbol{i}^{k} = 0. \tag{30}$$

El paso siguiente es hallar $\Gamma_{ik}{}^{s}$, para lograr este objetivo vamos a definir un nuevo tensor que más adelante identificaremos con el tensor métrico. Este nuevo tensor que representaremos por s_{ik} tiene el determinante

$$s = \det\left(s_{ik}\right) = \det\left[\boldsymbol{g}^{(ik)}\right]$$

y sus componentes contravariantes son definidas por

$$s^{ik} = \frac{\boldsymbol{g}^{(ik)}}{\sqrt{s}}$$

con s representamos el valor positivo del determinante de s_{ik} . La relación entre las componentes covariantes y contravariantes es

$$s^{ik}s_{ir}=\delta_r^k .$$

lo que singifica que utilizamos el mismo criterio que el usado para el tensor métrico (ver epígrafe 2), es decir la matriz de elementos (s^{ik}) no es la inversa de la matriz de elementos (s_{ik}), sino que lo es la matriz traspuesa de (s^{ik}). Con esta definición (30) queda

$$D_r\boldsymbol{s}^{ik}+\frac{1}{3}\delta_r^k\boldsymbol{i}^i+\frac{1}{3}\delta_r^i\boldsymbol{i}^k=0 \tag{31}$$

de donde será posible hallar las componentes de la conexión como a continuación veremos. La conexión la podemos descomponer como

$$\Gamma_{ik}^{\ \ r}=L_{ik}^{*\ r}+X_{ik}^{\ \ r}$$

donde $L_{ik}^{*\ r}$ son los símbolos de Christoffel respecto a s_{ik} que a su vez es una conexión y $X_{ik}^{\ \ r}$ es un tensor. Advertimos que como s_{ik} es simétrico y por la definición de los símbolos de Christoffel encontramos que $D_r^* s_{ik}=0$ donde D^* es la derivada covariante calculada respecto a $L_{ik}^{*\ r}$, entonces de (31)

$$D_r\left(\sqrt{s}s^{ik}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{s}s^{ik}s^{pq}\left(-D_s^*s_{pq}-s_{ps}X_{qr}^{\ \ s}-s_{sq}X_{pr}^{\ \ s}\right)+$$
$$+\sqrt{s}\left(D_s^*s^{ik}+s^{sk}X_{sr}^{\ \ i}+g^{is}X_{sr}^{\ \ k}\right)=-\frac{1}{3}\left(\delta_r^k\boldsymbol{i}^i+\delta_r^i\boldsymbol{i}^k\right),$$

donde hemos tenido en cuenta que

$$D_r s=ss^{pq}D_r s_{pq} .$$

Siguiendo el mismo procedimiento que en [34] encontramos

$$X_{qr}^{\ \ k}=-\frac{1}{2}s_{qr}i^k+\frac{1}{6}\delta_q^k i_r+\frac{1}{6}\delta_r^k i_q$$

por tanto la conexión buscada es

$$\Gamma_{qr}^{\ \ k}=L_{qr}^{*\ k}-\frac{1}{2}s_{qr}i^k+\frac{1}{6}\delta_q^k i_r+\frac{1}{6}\delta_r^k i_q \tag{32}$$

los índices los estamos bajando con el tensor s_{ik}. La conexión (32) coincide con la que se obtiene de la teoría Schrödinger-I [16], teniendo i_k el mismo significado que a_k en aquella teoría.

Sustituyendo (32) en (10) se obtiene

$$R_{ik}=R_{ik}^*+\frac{1}{6}\left(i_{i,k}-i_{k,i}\right)+\frac{1}{6}i_i\,i_k=\lambda g_{ik} \tag{33}$$

donde R_{ik}^* es el tensor de Ricci calcuado a partir de los símbolos de Christoffel $L_{ik}^{*\ r}$ y en el cálculo hemos considerado $i_{,k}^k=0$ como se desprende de la definición de $\boldsymbol{i}^k$. Descomponiendo (33) en parte simétrica y antisimétrica y teniendo en cuenta que R_{ik}^* es simétrica

$$\begin{aligned} &R_{ik}^*+\frac{1}{6}i_i\,i_k=\lambda g_{(ik)} \\ &\frac{1}{6}\left(i_{i,k}-i_{k,i}\right)=\lambda g_{[ik]}, \end{aligned} \tag{34}$$

que son las ecuaciones de campo que Schrödinger identifica con las formuladas por Einstein en el año 1923.

Al contrario del caso asimétrico donde es válida (21) en la teoría de conexión simétrica que ahora examinamos se exige que i_k no sea nula, puesto que de serlo entonces por la segunda ecuación (34) $g_{[ik]}=0$ y por tanto $s_{ik}=g_{(ik)}=g_{ik}$, entonces la primera ecuación (34) sería idéntica a la ecuación de la Relatividad General.

Observar de la segunda ecuación (34) que dado el extremadamente pequeño valor de λ (que identificamos con la constante cosmológica) pequeños valores de la variación de i_k producen valores elevados de la parte antisimétrica de g_{ik}, lo que nos viene a señalar que aún siendo λ muy pequeña tiene una significativa importancia en la teoría.

Como ya habíamos indicado, la teoría que acabamos de desarrollar es muy parecida a la teoría métrico-afín de conexión simétrica y tensor métrico asimétrico (apartado e del epígrafe 9), con la diferencia de que en este último caso la constante cosmológica es nula. Aunque esto parezca muy poca diferencia, mas cuando la constante cosmológica es muy pequeña, resulta que no es así. En efecto, ahora la segunda ecuación (34) quedaría

$$i_{k,i}=i_{k,i}$$

lo que muestra que el rotacional de i_k es nulo, de donde se desprende que i_k debe ser el gradiente de una función escalar ϕ: $i_k = \partial_k \phi$. Entonces es siempre posible elegir un sistema de referencia respecto al cual i_k sea constante. Basta con hacer una transformación de coordenadas en la que una de ellas sea idéntica a ϕ, entonces una de las componentes de i_k sería constante e igual a la unidad y nulas las restantes. La primera de las ecuaciones (34) queda

$$R^*_{ik} = cte$$

lo que es una «una generalización absurdamente trivial» de la Relatividad General.

Cabe en este momento plantearse cuál de los tensores $g_{(ik)}$, s_{ik} representa al tensor métrico que debe aparecer en el elemento de línea. Schrödinger al igual que otros suponen que el tensor métrico es el s_{ik} lo que resulta la opción más simple.

11.- Las componentes simétrica y antisimétrica de $\boldsymbol{g}^{ik}$

Consideramos que el tensor $\boldsymbol{g}_{ik}$ es asimétrico y queremos expresar las componentes $\boldsymbol{g}^{(ik)}, \boldsymbol{g}^{[ik]}$ en función de las componentes simétrica y antisimétrica del tensor en forma covariante $\boldsymbol{g}_{(ik)}$, $\boldsymbol{g}_{[ik]}$. Para simplificar la notación vamos a poner

$$g_{(ik)} = h_{ik}; \qquad g_{[ik]} = f_{ik}\,.$$

Con $\hat{h}^{ik}$ representamos los elementos de la matriz inversa de aquella cuyos elementos son h_{ik}, de tal forma que

$$h_{ik}\hat{h}^{kr} = \delta_i^r\,,$$

e igual hacemos con la parte antisimétrica de g_{ik}

$$f_{ik}\hat{f}^{kr} = \delta_i^r\,.$$

En un espacio de cuatro dimensiones, al que suponemos con signatura -2, el determinante de un tensor antisimétrico como f_{ik} es

$$f = \left(f_{12}f_{34} + f_{31}f_{24} + f_{23}f_{14}\right)^2.$$

Por cómputo directo se comprueba que

$$\varepsilon^{ikpq} f_{ik} f_{pq} = 8\sqrt{f}$$

donde f es el valor absoluto del determinante de f_{ik}; e igualmente tenemos

$$\varepsilon^{ikpq} f_{im} f_{pq} = 0$$

si $k \neq m$. Entonces

$$\varepsilon^{ikpq} f_{im} f_{pq} = 2\sqrt{f}\,\delta_m^k\,.$$

Como h_{ik} es simétrico y real es siempre posible elegir en cada punto del espacio un sistema de coordenadas respecto al cual h_{ik} tenga la siguiente forma diagonal

$$\left(h_{ik}\right) = \begin{pmatrix} \chi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\chi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\chi \end{pmatrix}$$

donde χ es un número positivo cualquiera. En el sistema de coordenadas elegido el determinante de h_{ik} es $h = -\chi^4$. Démonos cuenta que en otro punto del espacio el tensor h_{ik} tendrá, en general, una forma distinta de la diagonal, pero nosotros los cálculos lo estamos haciendo con referencia a un sólo punto, aquel en que h_{ik} presenta forma diagonal.

La parte antisimétrica del tensor métrico es

$$\left(f_{ik}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\delta & \beta & -X \\ \delta & 0 & -\alpha & -Y \\ -\beta & \alpha & 0 & -Z \\ X & Y & Z & 0 \end{pmatrix},$$

al hallar directamente el determinante de g_{ik} se encuentra

$$g=-\chi^4-\chi^2\left(\alpha^2+\beta^2+\delta^2-X^2-Y^2-Z^2\right)+\left(\alpha X+\beta Y+\delta Z\right)^2,$$

un cálculo directo nos da

$$f=\left(\alpha X+\beta Y+\delta Z\right)^2$$

entonces

$$g=h+\varphi-\chi^2\left(\alpha^2+\beta^2+\delta^2-X^2-Y^2-Z^2\right). \tag{35}$$

Teniendo presente que

$$\left(\hat{h}^{ik}\right)=\frac{1}{\chi}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$$

entonces se calcula directamente que

$$\frac{\chi^2}{2}\hat{h}^{im}\hat{h}^{kr}f_{mr}f_{ik}=-\left(\alpha^2+\beta^2+\delta^2-X^2-Y^2-Z^2\right)$$

notemos que si definimos las matrices $\hat{H}=\left(\hat{h}^{ik}\right)$ y $F=\left(f_{ik}\right)$ la expresión anterior en notación matricial queda

$$\frac{\chi^2}{2}\left(\hat{H}\cdot F\right)\cdot\left(F\cdot\hat{H}\right)=-\left(\alpha^2+\beta^2+\delta^2-X^2-Y^2-Z^2\right)$$

por tanto (35) queda

$$g=h+f+\frac{h}{2}\hat{h}^{im}\hat{h}^{kr}f_{mr}f_{ik},$$

o bien

$$g=h+f+\frac{h}{2}\hat{h}^{im}\hat{h}^{kr}f_{mr}f_{ik}=h+\frac{h}{2}\hat{h}^{im}\hat{h}^{kr}f_{mr}f_{ik}+\left(\frac{1}{8}\varepsilon^{ikpq}f_{ik}f_{pq}\right)^2. \tag{36}$$

El determinante de g es negativo, al igual que el de h, por tanto podemos poner

$$|g|=|h|-\varphi+\frac{|h|}{2}\hat{h}^{im}\hat{h}^{kr}f_{mr}f_{ik}$$

donde $|g|$ y $|h|$ son los valores absolutos de g y h respectivamente.

(36) la hemos calculado para un determinado sistema de coordenadas, aquel en que la parte simétrica del tensor métrico tiene forma diagonal. Los tres sumandos del segundo miembro de (36) dependen del determinante de un tensor de segundo orden y los últimos cuatro factores forman un invariante. Ante una transformación de coordenadas los tres determinantes que aparecen en (36) se transforman con la misma ley, es decir, (36) es una expresión invariante aunque no tensorial. Entonces si es válida para un determinado sistema de coordenadas, seguirá siendo válida en cualquier otro sistema, por tanto (36) tiene carácter general.

Para obtener las partes simétrica y antisimétrica de las componentes contravariantes del tensor métrico partimos de (5)

$$dg=gg^{ik}dg_{ik}=g\left[g^{(ik)}+g^{[ik]}\right]\left[dh_{ik}+df_{ik}\right]=gg^{(ik)}dh_{ik}+gg^{[ik]}df_{ik} \tag{37}$$

hemos tenido en consideración que son nulos los productos de las componentes simétricas por las antisimétricas. Introduciendo las densidades tensoriales

$$dg=\sqrt{g}\left[\boldsymbol{g}^{(ik)}dh_{ik}+\boldsymbol{g}^{[ik]}df_{ik}\right]$$

donde ahora g es el valor absoluto del determinante del tensor métrico g_{ik}, o sea $|g|$. De (37) deducimos

$$\boldsymbol{g}^{(ik)}=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial g}{\partial h_{ik}};\qquad \boldsymbol{g}^{[ik]}=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial g}{\partial f_{ik}} \tag{38}$$

Para llevar a cabo la diferenciación (38) debemos considerar la relación (4) aplicada a h_{ik} que recordemos es un tensor simétrico al igual que $\hat{h}^{ik}$

$$\frac{\partial h}{\partial h_{ik}}=h\hat{h}^{ki}=h\hat{h}^{ik}, \tag{39}$$

además como

$$d\left(\hat{h}^{pk}\hat{h}^{qi}h_{pq}\right)=d\hat{h}^{ki}=d\hat{h}^{ik}+d\hat{h}^{ki}+\hat{h}^{pk}\hat{h}^{qi}dh_{pq} \quad\Rightarrow\quad d\hat{h}^{ik}=-\hat{h}^{pk}\hat{h}^{qi}dh_{pq},$$

entonces

$$\frac{\partial \hat{h}^{ik}}{\partial h_{pq}}=-\frac{1}{2}\left(\hat{h}^{pk}\hat{h}^{qi}+\hat{h}^{qk}\hat{h}^{pi}\right) \tag{40}$$

donde hemos simetrizado la expresión dado el carácter simétrico de $\hat{h}^{ik}$ y de h_{pq}.

Ahora estamos en condiciones de resolver las dos ecuaciones (38), utilizando para ello (36), (39 y (40) resultando

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g}^{(ik)}&=\frac{h}{\sqrt{g}}\left[\hat{h}^{ik}\left(1+\frac{1}{2}f_{mr}f^{mr}\right)-f^{iq}f^{k}_{\ q}\right]\\ \boldsymbol{g}^{[ik]}&=\frac{h}{\sqrt{g}}\left[f^{ik}+\frac{1}{2h}\left(\frac{1}{8}\varepsilon^{mnpq}f_{mn}f_{pq}\right)\varepsilon^{ikpq}f_{pq}\right]\end{aligned} \tag{41}$$

indiquemos que los índices de f_{ik} han sido elevados por $\hat{h}^{ik}$.

Si suponemos que h_{ik} es del orden la unidad y f_{ik} es infinitesimal o de primer orden, entonces tenemos

$$g\equiv h+O(2);\quad \boldsymbol{g}^{(ik)}\equiv\sqrt{h}\,\hat{h}^{ik}+O(2)$$

$O(2)$ representa infinitésimos de segundo orden ya que se encuentran productos de f_{ik} por sí mismo; nótese que en el cálculo que hemos hecho hemos puesto $g\approx h$. Además

$$\boldsymbol{g}^{[ik]}=\sqrt{h}f^{ik}+O(2)=O(1)+O(2)$$

por tanto en las condiciones establecidas podemos hacer

$$g\approx h;\quad g^{(ik)}\approx\hat{h}^{ik};\quad g^{[ik]}\approx f^{ik} \tag{42}$$

o bien

$$g_{(ik)}\approx h_{ik};\quad g_{[ik]}\approx f_{ik} \tag{43}$$

donde los índices son bajados por h_{ik}, obteniéndose el mismo resultado si se utilizara $g_{(ik)}$ o g_{ik}.

12.- El campo electromagnético en la teoría Schrödinger-IV

En el caso de teoría puramente afín con conexión y tensor métrico asimétrico las ecuaciones de campo son (21), primera ecuación (23) y (24). Si consideramos el campo electromagnético débil, cuya intensidad identificamos por el tensor antisimétrico f_{ik}, entonces serán válidas las aproximaciones (42) y (43) y las ecuaciones de campo quedan

$$\begin{gathered}\frac{\partial \boldsymbol{f}^{ik}}{\partial x^k}=0\\ \partial_r\left[\overset{*}{R}_{[ik]}-\lambda f_{ik}\right]+\partial_k\left[\overset{*}{R}_{[ri]}-\lambda f_{ri}\right]+\partial_i\left[\overset{*}{R}_{[kr]}-\lambda f_{kr}\right]=0\\ \overset{*}{R}_{(ik)}=\lambda h_{ik}.\end{gathered} \tag{44}$$

Mientras que la tercera ecuación de (44) se identifica con el campo gravitatorio que viene representado por el tensor simétrico h_{ik}, las dos primeras ecuaciones (44) deben ser las del campo electromagnético. Si bien la primera de ellas coincide con el primer conjunto de ecuaciones de Maxwell, no ocurre lo mismo con la segunda ecuación (44).

Pero es posible reinterpretar la segunda ecuación de (44). En efecto, si la reescribimos como

$$f_{\{ik,r\}}=\frac{1}{\lambda}\overset{*}{R}_{\{ik,r\}} \tag{45}$$

donde $\{\ldots\}$ representa permutación de los índices y la coma significa la derivación parcial. Podemos entender (45) como el segundo conjunto de ecuaciones de Maxwell con fuentes, donde éstas vienen expresadas por $\overset{*}{R}_{\{ik,r\}}/\lambda$.

En su análisis Schrödinger no asegura que esta interpretación sea la correcta, pero indica que es una de las posibles. Nota que las fuentes del campo electromagnético no aparecen, como en la teoría de Maxwell, en el primer conjunto de ecuaciones [primera de (44)] sino en el segundo conjunto. Pero esto no es considerado un problema, pues significa que hay que cambiar la identificación de las componentes de f_{ik} con los campos eléctrico y magnético, así habrá que definir

$$\left(f_{ik}\right)=\begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & -cE_z & cE_y \\ -B_y & cE_z & 0 & -cE_x \\ -B_z & -cB_y & cE_x & 0 \end{pmatrix},$$

y de esta forma derivamos de las dos primeras ecuaciones de (44) las ecuaciones vectoriales de Maxwell.

Finalmente Schrödinger considera el problema de la simetría de carga, es decir investiga si al existir una solución con una carga existe también solución para una carga de signo opuesto. Como en Schrödinger-IV las cargas eléctricas están relacionadas con las componentes antismétricas de las distintas cantidades que manejamos, entonces un cambio en el signo de la carga inducirá un cambio en el signo de las cantidades antisimétricas, es decir

$$g_{[ik]} \to -g_{[ik]} = g_{[ki]}; \quad \Gamma_{[ik]}^{\;\;r} \to -\Gamma^{*\;\;r}_{[ik]} = \Gamma^{*\;\;r}_{[ki]}$$

mientras que las componentes simétricas quedan invariables, o lo que es lo mismo, al cambiar el signo de las cargas eléctricas se inducirá el cambio

$$g_{ik} \to g_{ki}; \quad \Gamma^{*\;r}_{ki} \to \Gamma^{*\;r}_{ik},$$

por lo visto en el epígrafe 6

$$\tau^*_r \to -\tau^*_r \quad \Rightarrow \quad \tau_r \to -\tau_r \quad \Rightarrow \quad F_{ik} \to -F_{ik},$$

finalmente teniendo en cuenta las propiedades que ya hemos expuesto

$$\Gamma^{*\;r}_{rk} = \Gamma^{*\;r}_{kr}; \qquad \frac{\partial \Gamma^{*\;r}_{rs}}{\partial x^i} = \frac{\partial \Gamma^{*\;r}_{ri}}{\partial x^s}$$

es fácil encontrar que ante una inversión en el signo de la carga

$$R^*_{ik} \to R^*_{ki}.$$

Entonces si g_{ik}, $\Gamma^{*\;r}_{ki}$ y F_{ik} es una solución de la ecuación (22), entonces las magnitudes correspondientes a una inversión de la carga eléctrica y definidas por

$$\overline{g}_{ik} = g_{ki}; \quad \overline{\Gamma}^{*\;r}_{ki} = \Gamma^{*\;r}_{ik}; \quad \overline{F}_{ik} = -F_{ik}$$

también corresponde a una solución de (22); en efecto de (22)

$$R^*_{ki} + F_{ki} = \lambda g_{ki} \quad \Rightarrow \quad R^*_{ki} - F_{ik} = \lambda g_{ki} \quad \Rightarrow \quad \overline{R}^*_{ik} + \overline{F}_{ik} = \lambda \overline{g}_{ik}$$

como queríamos demostrar.

13.- Conclusiones

En este artículo hemos expuesto la última y más elaborada teoría puramente afín de Schrödinger. Al igual que en las anteriores propuestas, los potenciales del campo son únicamente las componentes de la conexión, que es considerada asimétrica. El tensor métrico es una magnitud derivada y también es asimétrico.

En esta teoría Schrödinger se inclina por fijar la densidad lagrangiana, optando por usar la que ya propusiera Eddington (7), que aunque es la más simple es capaz de desarrollar una teoría unitaria de la gravitación y del electromagnetismo.

Las técnicas que hemos utilizado para la obtención de las ecuaciones de campo son las usuales, donde hay que ser precavido ya que al utilizar conexiones no simétricas es necesario generalizar tanto la identidad de Palatini como el teorema de Gauss.

Hemos comprobado que particularizando la teoría Schrödinger-IV podemos obtener otras teorías más simples, como la Relatividad General, la puramente afín de Einstein o la de Einstein-Strauss.

Finaliza nuestra investigación con un intento de obtener de Schrödinger-IV tanto las ecuaciones de la Relatividad General como las ecuaciones de campo electromagnético de Maxwell.

Bibliografía

[1] Eddington, A. S.: *The mathematical theory of Relativity*, Chelsea Publishing, 1975, pp. 213-240 y pp. 257-263.

[2] Einstein, Albert: «The Foundation of the General Theory of Relativity», en *The Principle of Relativity*, Dover, 1952, pp. 111-164, (primeramente editado en 1916).

[3] Einstein, Albert: «Hamilton's Principle and the General Theory of Relativity», en *The Principle of Relativity*, Dover, 1952, pp. 167-173, (primeramente editado en 1916).
[4] Einstein, A.: «Zür allgemeinen Relativitätstheorie», *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften su Berlin. Physikalisch-Matematische Klasse* (1923) 32-38.
[5] Einstein, A.: «Zür allgemeinen Relativitätstheorie», *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften su Berlin. Physikalisch-Matematische Klasse* (1923) 76–77.
[6] Einstein, A.: «Bemerkung zu meiner Arbeit 'Zur allegemeinen Relativitätstheorie», *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften su Berlin. Physikalisch-Matematische Klasse* (1923) 137-140.
[7] Einstein, A.: «The Theory of the Affine Field», *Nature* **112** (1923) 448-449.
[8] Einstein, A.: «Einheitliche Feldtheorie von Gravitation und Elektrizität», *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften su Berlin. Physikalisch-Matematische Klasse* (1925) 414-419, traducción al inglés con el título «Unified Field Theory of Gravitation and Electricity» por A. Unzicker and T. Case en www.alexander-unzicker.de/rep0.pdf.
[9] Goenner, Hubert F. M.: «On the History of Unified Field Theories», *Living Reviews Relativity* **7** (2004) 1-153.
[10] Goenner, Hubert F. M.: «On the History of Unified Field Theories. Part II. (ca. 1930 – ca. 1965)», *Living Reviews Relativity* **17** (2014) 1-241.
[11] Hittmair, O.: «Schrödinger's Unified Field Theory Seen 40 Years Later», en *Schrödinger: Centenary Celebration of a Polymath*, Kilmister, C. W. (editor), Cambridge University Press, 1989, pp.165-175,
[12] Schrödinger, Erwin: «Über die Unanwendbarkeit der Geometrie im Kleinen», *Naturwissenschaften* **22-31** (1934) 518-520.
[13] Schrödinger, Erwin: "Contributions to Born's New Theory of the Electromagnetic Field", *Proceedings of the Royal Society of London A* **150** (1935). 465-477.
[14] Schrödinger, Erwin: «Sur la théorie du monde d'Eddington», *Il Nuovo Cimento* **15-4** (1938) 246-254.
[15] Schrödinger, Erwin: «The Point Charge in the Unitary Field Theory», *Procedings of the Royal Irish Academy A* **49** (1943-1944) 225-235.
[16] Schrödinger, E.: «The General Unitary Theory of the Physical Fields», *Proceedings of the Royal Irish Academy A* **49** (1943) 43-58.
[17] Schrödinger, E.: «The Union of the three Fundamental Fields (Gravitation, Meson, Electromagnetism)», *Proceedings of the Royal Irish Academy A* **49** (1944) 275-287.
[18] Schrödinger, E.: «The Affine Connexion in Physical Field Theories», *Nature* **153** (1944) 572-575.
[19] Schrödinger, Erwin: «On Distant Affine Connection», *Proceedings of the Royal Irish Academy A* **50** (1944/1945) 143-154.
[20]Schrödinger, E.: «The general affine field laws», *Proceedings of the Royal Irish Academy Section A Mathematical and physical sciences* **51** (1946) 41-50.
[21] Schrödinger, Erwin: «The Final Affine Field Laws I», *Proceedings of the Royal Irish Academy A* **51** (1947) 163-171.
[22] Schrödinger, Erwin: «The Final Affine Field Laws II», *Proceedings of the Royal Irish Academy A* **51** (1948) 205-216.
[23] Schrödinger, Erwin: «The Final Affine Field Laws III», *Proceedings of the Royal Irish Academy A* **52** (1948) 1-9.
[24] Schrödinger, E.: «Studies in the Non-Symmetric Generalization of the Theory of Gravitation», *Communications of the Dublin Institute for Advanced Studies, Series A,* 1951, vol. 6.
[25] Schrödinger, E.; Hittmair, O.: «Studies in the Non-symmetric Generalization of the Theory of Gravitation II: The Velocity of Light», *Communications of the Dublin Institute for Advanced Studies A*, 1951, vol. 8.
[26] Schrödinger, Erwin y Papapetrou A.: «The Point-Charge in the Non-symmetric Field Theory», *Nature* **168** (1951) 40-41.
[27] Schrödinger, E.: «Unitary Field Theory: Conservation Identities and Relation to Weyl and Eddington», *Proceedings of the Royal Irish Academy A* **49** (1943-1944) 237-244.
[28] Schrödinger, E.: «The Relation between metric and affinity», *Proceedings of the Royal Irish Academy A* **51** (1945-1948) 147-150.
[29] Schrödinger, E.: «On the differential identities of an affinity», *Proceedings of the Royal Irish Academy A* **54** (1951-1952) 79-85.
[30] Schrödinger, Erwin: «Electric Charge and Current Engendered by Combined Maxwell-Einstein Fields»,

Proceedings of the Royal Irish Academy. Section A **56** (1953/1954) 13-21.
[31] Schrödinger, Erwin: *Space-Time Structure*, Cambridge University Press, 1991, pp. 106-119, (primera edición del año 1950).
[32] Segura González, Wenceslao: *Teoría de campo relativista*, eWT Ediciones, 2014.
[33] Segura González, Wenceslao: «Teoría general de la conexión afín», 2014, http://vixra.org/abs/1410.0160.
[34] Segura González, Wenceslao: «La teoría puramente afín de la gravedad y del electromagnetismo de Schrödinger (I)», 2015, http://vixra.org/abs/1501.0064.
[35] Segura González, Wenceslao: «La teoría puramente afín de la gravedad y del electromagnetismo de Schrödinger (II)», 2015, http://vixra.org/abs/1501.0143.
[36] Segura González, Wenceslao: «La teoría puramente afín de la gravedad y del electromagnetismo de Schrödinger (III)», 2015, http://vixra.org/abs/1502.0155.
[37] Tonnelat, Marie-Antoinette: *Les théories unitaires de l'electromagnétism et de la gravitation*, Gauthier-Villars, 1965, pp. 266-273.
[38] Vizgin, Vladimir P.: *Unified Field Theories in the first third of the 20th century*, Birkhäuser, 1994, pp. 137-149 y pp. 188-197.