Una Energía Cinética Alternativa

Antonio A. Blatter

(2015) Buenos Aires
Argentina

Este trabajo presenta una energía cinética alternativa que es invariante bajo transformaciones entre sistemas de referencia inerciales y no inerciales.

Introducción

La posición inercial $\mathbf{r}$, la velocidad inercial $\mathbf{v}$ y la aceleración inercial $\mathbf{a}$ de una partícula, están dadas por:

$$\mathbf{r} \doteq (\vec{r} - \vec{R})$$

$$\mathbf{v} \doteq (\vec{v} - \vec{V}) - \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{R})$$

$$\mathbf{a} \doteq (\vec{a} - \vec{A}) - 2\, \vec{\omega} \times (\vec{v} - \vec{V}) + \vec{\omega} \times [\, \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{R})\,] - \vec{\alpha} \times (\vec{r} - \vec{R})$$

($\mathbf{v} \doteq d(\mathbf{r})/dt$) y ($\mathbf{a} \doteq d^2(\mathbf{r})/dt^2$) donde $\vec{r}$ es el vector de posición de la partícula, $\vec{R}$ es el vector de posición del centro de masa del free-system y $\vec{\omega}$ es el vector de velocidad angular del free-system (ver Anexo I)

El momento inercial $\mathbf{P}$ de una partícula, está dado por:

$$\mathbf{P} \doteq m\,\mathbf{v}$$

donde m es la masa de la partícula y $\mathbf{v}$ es la velocidad inercial de la partícula.

La fuerza neta $\mathbf{F}$ que actúa sobre una partícula m produce una aceleración inercial $\mathbf{a}$, según la siguiente ecuación:

$$\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}$$

Los sistemas de referencia inerciales y no inerciales no deben introducir las fuerzas ficticias sobre $\mathbf{F}$.

Las magnitudes m, $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{P}$ y $\mathbf{F}$ son invariantes bajo transformaciones entre sistemas de referencia inerciales y no inerciales.

W, K, U, E y L

En este trabajo, el trabajo W realizado por la fuerza neta $\mathbf{F}$ que actúa sobre una partícula, está dado por:

$$\mathrm{W} \doteq \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d(\mathbf{r}) = \Delta\, 1/2\, m\, (\mathbf{v})^2$$

donde $\mathbf{r}$ es la posición inercial de la partícula, m es la masa de la partícula y $\mathbf{v}$ es la velocidad inercial de la partícula.

La energía cinética K de una partícula, está dada por:

$$\mathrm{K} \doteq 1/2\, m\, (\mathbf{v})^2$$

donde m es la masa de la partícula y $\mathbf{v}$ es la velocidad inercial de la partícula.

Por lo tanto, la energía cinética K^{T} de un sistema de N partículas, está dada por:

$$\mathrm{K}^{\mathrm{T}} \doteq \sum_i^{\mathrm{N}} 1/2\, m_i\, (\mathbf{v}_i)^2$$

donde m_i es la masa de la i-ésima partícula y $\mathbf{v}_i$ es la velocidad inercial de la i-ésima partícula.

El trabajo W realizado por las fuerzas conservativas $\mathbf{F}$ que actúan sobre una partícula es igual y de signo opuesto a la variación en la energía potencial U de la partícula.

$$\Delta\,\mathrm{U} \doteq -\int_1^2 \mathbf{F} \cdot d(\mathbf{r})$$

donde $\mathbf{r}$ es la posición inercial de la partícula.

Por lo tanto, la energía mecánica E de una partícula permanece constante si la partícula está sujeta sólo a fuerzas conservativas.

$$\Delta\,\mathrm{E} \doteq \Delta\,\mathrm{K} + \Delta\,\mathrm{U} = 0$$

$$\mathrm{E} \doteq \mathrm{K} + \mathrm{U} = \text{constante}$$

donde K es la energía cinética de la partícula y U es la energía potencial de la partícula.

Finalmente, el Lagrangiano L de una partícula, está dado por:

$$\mathrm{L} \doteq \mathrm{K} - \mathrm{U}$$

donde K es la energía cinética de la partícula y U es la energía potencial de la partícula.

Sistema de N Partículas

Definiciones

$$\mathrm{M} \doteq \sum_i^{\mathrm{N}} m_i$$

$$\mathbf{V}_{cm} \doteq \mathrm{M}^{-1} \sum_i^{\mathrm{N}} m_i \, \mathbf{v}_i$$

$$\mathrm{K}^{\mathrm{L}} \doteq \sum_{j>i}^{\mathrm{N}} 1\!/\!_2 \, m_i \, m_j \, \mathrm{M}^{-1} \left[\left(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j \right) \right]^2$$

$$= \sum_i^{\mathrm{N}} 1\!/\!_2 \, m_i \left[\left(\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_{cm} \right) \right]^2$$

$$= \sum_i^{\mathrm{N}} 1\!/\!_2 \, m_i \left(\mathbf{v}_i \right)^2 - 1\!/\!_2 \, \mathrm{M} \, \mathbf{V}_{cm}^2$$

$$\mathrm{K}^{\mathrm{T}} \doteq \sum_i^{\mathrm{N}} 1\!/\!_2 \, m_i \left(\mathbf{v}_i \right)^2$$

$$\mathrm{K}^{\mathrm{P}} \doteq 1\!/\!_2 \, \mathrm{M} \, \mathbf{V}_{cm}^2$$

$$\mathrm{K}^{\mathrm{A}} \doteq \sum_{j>i}^{\mathrm{N}} 1\!/\!_2 \, m_i \, m_j \, \mathrm{M}^{-1} \left[\left(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j \right) \times \left(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j \right) / \left| \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j \right| \right]^2$$

$$\mathrm{K}^{\mathrm{R}} \doteq \sum_{j>i}^{\mathrm{N}} 1\!/\!_2 \, m_i \, m_j \, \mathrm{M}^{-1} \left[\left(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j \right) \cdot \left(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j \right) / \left| \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j \right| \right]^2$$

Relaciones

$$\mathrm{K}^{\mathrm{L}} = \mathrm{K}^{\mathrm{T}} - \mathrm{K}^{\mathrm{P}}$$

$$\mathrm{K}^{\mathrm{L}} = \mathrm{K}^{\mathrm{A}} + \mathrm{K}^{\mathrm{R}}$$

$$\mathrm{K}^{\mathrm{T}} = \mathrm{K}^{\mathrm{P}} + \mathrm{K}^{\mathrm{A}} + \mathrm{K}^{\mathrm{R}}$$

$\mathrm{K}^{\mathrm{L}} =$ La energía cinética lineal del sistema de partículas.

$\mathrm{K}^{\mathrm{T}} =$ La energía cinética del sistema de partículas.

$\mathrm{K}^{\mathrm{P}} =$ La energía cinética del centro de masa del sistema de partículas.

$\mathrm{K}^{\mathrm{A}} =$ La energía cinética angular del sistema de partículas.

$\mathrm{K}^{\mathrm{R}} =$ La energía cinética radial del sistema de partículas.

Observaciones

La energía cinética K^{T} de un sistema de partículas puede ser separada en tres partes:

K^{P} = La energía cinética del centro de masa del sistema de partículas.

K^{A} = La energía cinética angular del sistema de partículas.

K^{R} = La energía cinética radial del sistema de partículas.

La energía cinética K^{T} de un sistema de partículas puede ser representada por un par de partículas iguales, en el cual:

1) La masa del sistema de partículas es representada por la masa del par de partículas.

2) El centro de masa del sistema de partículas es representado por el centro de masa del par de partículas.

3) La energía cinética del centro de masa del sistema de partículas es representada por la energía cinética del centro de masa del par de partículas.

4) La energía cinética angular del sistema de partículas es representada por la energía cinética angular del par de partículas.

5) La energía cinética radial del sistema de partículas es representada por la energía cinética radial del par de partículas.

Por otro lado, todas las ecuaciones de este trabajo pueden ser aplicadas en cualquier sistema de referencia inercial o no inercial.

Los sistemas de referencia inerciales y no inerciales no deben introducir las fuerzas ficticias sobre **F**.

En este trabajo, las magnitudes $[\, m, \mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{a}, \mathbf{P}, \mathbf{F}, \mathrm{W}, \mathrm{K}, \mathrm{U}, \mathrm{E} \text{ y } \mathrm{L} \,]$ son invariantes bajo transformaciones entre sistemas de referencia inerciales y no inerciales.

Un sistema de referencia S es no rotante si la velocidad angular $\vec{\omega}$ del free-system respecto a S es igual a cero y además S es inercial si la aceleración $\vec{A}$ del centro de masa del free-system respecto a S es igual a cero.

Este trabajo no contradice la dinámica de Newton. De hecho, la ecuación $[\, \mathbf{F} = m\,\mathbf{a} \,]$ es una simple reformulación de la segunda ley de Newton.

Finalmente, este trabajo considera que es posible desarrollar una dinámica clásica alternativa basada en el Lagrangiano L que puede ser aplicada en cualquier sistema de referencia inercial o no inercial sin necesidad de introducir las fuerzas ficticias.

Anexo I

Free-System

El free-system es un sistema de N partículas que está siempre libre de fuerzas externas e internas, que es tridimensional y que las distancias relativas entre las N partículas permanecen siempre constantes.

La posición $\vec{R}$, la velocidad $\vec{V}$ y la aceleración $\vec{A}$ del centro de masa del free-system respecto a un sistema de referencia S, la velocidad angular $\vec{\omega}$ y la aceleración angular $\vec{\alpha}$ del free-system respecto al sistema de referencia S, están dadas por:

$$\mathrm{M} \doteq \sum_i^{\mathrm{N}} m_i$$

$$\vec{R} \doteq \mathrm{M}^{-1} \sum_i^{\mathrm{N}} m_i \, \vec{r}_i$$

$$\vec{V} \doteq \mathrm{M}^{-1} \sum_i^{\mathrm{N}} m_i \, \vec{v}_i$$

$$\vec{A} \doteq \mathrm{M}^{-1} \sum_i^{\mathrm{N}} m_i \, \vec{a}_i$$

$$\vec{\omega} \doteq \overleftrightarrow{I}^{-1} \cdot \vec{L}$$

$$\vec{\alpha} \doteq d(\vec{\omega})/dt$$

$$\overleftrightarrow{I} \doteq \sum_i^{\mathrm{N}} m_i \, [\, |\vec{r}_i - \vec{R}\,|^2 \, \overleftrightarrow{1} - (\vec{r}_i - \vec{R}) \otimes (\vec{r}_i - \vec{R})\,]$$

$$\vec{L} \doteq \sum_i^{\mathrm{N}} m_i \, (\vec{r}_i - \vec{R}) \times (\vec{v}_i - \vec{V})$$

donde M es la masa del free-system, $\overleftrightarrow{I}$ es el tensor de inercia del free-system (respecto a $\vec{R}$) y $\vec{L}$ es el momento angular del free-system respecto al sistema de referencia S.

Transformaciones

$$(\vec{r} - \vec{R}) \doteq \mathbf{r} = \mathbf{r}'$$

$$(\vec{r}\,' - \vec{R}\,') \doteq \mathbf{r}' = \mathbf{r}$$

$$(\vec{v} - \vec{V}) - \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{R}) \doteq \mathbf{v} = \mathbf{v}'$$

$$(\vec{v}\,' - \vec{V}\,') - \vec{\omega}\,' \times (\vec{r}\,' - \vec{R}\,') \doteq \mathbf{v}' = \mathbf{v}$$

$$(\vec{a} - \vec{A}) - 2\,\vec{\omega} \times (\vec{v} - \vec{V}) + \vec{\omega} \times [\,\vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{R})\,] - \vec{\alpha} \times (\vec{r} - \vec{R}) \doteq \mathbf{a} = \mathbf{a}'$$

$$(\vec{a}\,' - \vec{A}\,') - 2\,\vec{\omega}\,' \times (\vec{v}\,' - \vec{V}\,') + \vec{\omega}\,' \times [\,\vec{\omega}\,' \times (\vec{r}\,' - \vec{R}\,')\,] - \vec{\alpha}\,' \times (\vec{r}\,' - \vec{R}\,') \doteq \mathbf{a}' = \mathbf{a}$$

Anexo II

Sistema de N Partículas

$\mathrm{M} \doteq \sum_i^{\mathrm{N}} m_i$

$\boldsymbol{\omega} \doteq \mathbf{I}^{-1} \cdot \mathbf{L}$

$\mathbf{R}_{cm} \doteq \mathrm{M}^{-1} \sum_i^{\mathrm{N}} m_i \, \mathbf{r}_i$

$\mathbf{V}_{cm} \doteq \mathrm{M}^{-1} \sum_i^{\mathrm{N}} m_i \, \mathbf{v}_i$

$\mathbf{I} \doteq \sum_{j>i}^{\mathrm{N}} m_i \, m_j \, \mathrm{M}^{-1} \, [\, |\, \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j |^2 \, \mathbf{1} - (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \otimes (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \,]$

$= \sum_i^{\mathrm{N}} m_i \, [\, |\, \mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm} |^2 \, \mathbf{1} - (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) \otimes (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) \,]$

$\mathbf{L} \doteq \sum_{j>i}^{\mathrm{N}} m_i \, m_j \, \mathrm{M}^{-1} \, [\, (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \,]$

$= \sum_i^{\mathrm{N}} m_i \, [\, (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) \times (\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_{cm}) \,]$

$\mathrm{I} \doteq \sum_{j>i}^{\mathrm{N}} m_i \, m_j \, \mathrm{M}^{-1} \, [\, (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \,]$

$= \sum_i^{\mathrm{N}} m_i \, [\, (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) \,]$

$\mathrm{G} \doteq \sum_{j>i}^{\mathrm{N}} m_i \, m_j \, \mathrm{M}^{-1} \, [\, (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \cdot (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \,]$

$= \sum_i^{\mathrm{N}} m_i \, [\, (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) \cdot (\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_{cm}) \,]$

$\mathrm{K}^{\mathrm{T}} \doteq \sum_i^{\mathrm{N}} {}^1\!/_2 \, m_i \, (\mathbf{v}_i)^2$

$\mathrm{K}^{\mathrm{P}} \doteq {}^1\!/_2 \, \mathrm{M} \, \mathbf{V}_{cm}^2$

$\mathrm{K}^{\mathrm{A}} \doteq \sum_{j>i}^{\mathrm{N}} {}^1\!/_2 \, m_i \, m_j \, \mathrm{M}^{-1} \, [\, (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \, / \, |\, \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j \,| \,]^2$

$\mathrm{K}^{\mathrm{R}} \doteq \sum_{j>i}^{\mathrm{N}} {}^1\!/_2 \, m_i \, m_j \, \mathrm{M}^{-1} \, [\, (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \cdot (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \, / \, |\, \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j \,| \,]^2$

$\mathrm{K}^{\mathrm{L}} \doteq \sum_{j>i}^{\mathrm{N}} {}^1\!/_2 \, m_i \, m_j \, \mathrm{M}^{-1} \, [\, (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \,]^2$

$= \sum_i^{\mathrm{N}} {}^1\!/_2 \, m_i \, [\, (\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_{cm}) \,]^2$

$= \sum_i^{\mathrm{N}} {}^1\!/_2 \, m_i \, (\mathbf{v}_i)^2 - {}^1\!/_2 \, \mathrm{M} \, \mathbf{V}_{cm}^2$

$= \mathrm{K}^{\mathrm{T}} - \mathrm{K}^{\mathrm{P}}$

$= \mathrm{K}^{\mathrm{A}} + \mathrm{K}^{\mathrm{R}}$