Una Mecánica Clásica Alternativa

Antonio A. Blatter

(2015) Buenos Aires
Argentina

Este trabajo presenta una mecánica clásica alternativa que es invariante bajo transformaciones entre sistemas de referencia inerciales y no inerciales y que puede ser aplicada en cualquier sistema de referencia sin necesidad de introducir las fuerzas ficticias.

Introducción

La posición inercial $\mathbf{r}_i$, la velocidad inercial $\mathbf{v}_i$ y la aceleración inercial $\mathbf{a}_i$ de una partícula i, están dadas por:

$$\mathbf{r}_i \doteq (\vec{r}_i - \vec{R})$$

$$\mathbf{v}_i \doteq (\vec{v}_i - \vec{V}) - \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R})$$

$$\mathbf{a}_i \doteq (\vec{a}_i - \vec{A}) - 2\,\vec{\omega} \times (\vec{v}_i - \vec{V}) + \vec{\omega} \times [\,\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R})\,] - \vec{\alpha} \times (\vec{r}_i - \vec{R})$$

($\mathbf{v}_i \doteq d(\mathbf{r}_i)/dt$) y ($\mathbf{a}_i \doteq d^2(\mathbf{r}_i)/dt^2$) donde $\vec{r}_i$ es el vector de posición de la partícula i, $\vec{R}$ es el vector de posición del centro de masa del free-system y $\vec{\omega}$ es el vector de velocidad angular del free-system (ver Anexo I)

La fuerza neta $\mathbf{F}_i$ que actúa sobre una partícula i (m_i) produce una aceleración inercial $\mathbf{a}_i$, según la siguiente ecuación:

$$\mathbf{F}_i = m_i\,\mathbf{a}_i$$

Los sistemas de referencia inerciales y no inerciales no deben introducir las fuerzas ficticias sobre $\mathbf{F}_i$.

Las magnitudes [m_i, $\mathbf{r}_i$, $\mathbf{v}_i$, $\mathbf{a}_i$ y $\mathbf{F}_i$] son invariantes bajo transformaciones entre sistemas de referencia inerciales y no inerciales.

Un sistema de referencia S es no rotante si la velocidad angular $\vec{\omega}$ del free-system respecto a S es igual a cero y además S es inercial si la aceleración $\vec{A}$ del centro de masa del free-system respecto a S es igual a cero.

Bipartícula

Un par de partículas es una bipartícula. El sistema de partículas $\{\, a,\ b,\ c$ y $d \,\}$ puede formar el sistema de bipartículas $\{\, ab,\ ac,\ ad,\ bc,\ bd$ y $cd \,\}$ o también el sistema de bipartículas $\{\, ad,\ bd$ y $cd \,\}$

La masa m_{ij} de una bipartícula ij, está dada por: $m_{ij} \doteq m_i\, m_j/M$, donde m_i es la masa de las partícula i, m_j es la masa de la partícula j y M $(\doteq \sum_k m_k)$ es la masa del sistema de partículas en observación.

La posición inercial $\mathbf{r}_{ij}$, la velocidad inercial $\mathbf{v}_{ij}$ y la aceleración inercial $\mathbf{a}_{ij}$ de una bipartícula ij, están dadas por:

$$\mathbf{r}_{ij} \doteq (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

$$\mathbf{v}_{ij} \doteq (\vec{v}_i - \vec{v}_j) - \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

$$\mathbf{a}_{ij} \doteq (\vec{a}_i - \vec{a}_j) - 2\, \vec{\omega} \times (\vec{v}_i - \vec{v}_j) + \vec{\omega} \times [\, \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_j)\,] - \vec{\alpha} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

$(\, \mathbf{v}_{ij} \doteq d(\mathbf{r}_{ij})/dt \,)$ y $(\, \mathbf{a}_{ij} \doteq d^2(\mathbf{r}_{ij})/dt^2 \,)$ donde $\vec{r}_i$ es el vector de posición de la partícula i, $\vec{r}_j$ es el vector de posición de la partícula j y $\vec{\omega}$ es el vector de velocidad angular del free-system (ver Anexo II)

La fuerza neta $\mathbf{F}_{ij}$ que actúa sobre una bipartícula ij (m_{ij}) produce una aceleración inercial $\mathbf{a}_{ij}$, según la siguiente ecuación:

$$\mathbf{F}_{ij} \doteq m_{ij}\, (\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_j/m_j) = m_{ij}\, (\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j) = m_{ij}\, \mathbf{a}_{ij}$$

donde $\mathbf{F}_i$ es la fuerza neta que actúa sobre la partícula i, $\mathbf{F}_j$ es la fuerza neta que actúa sobre la partícula j, m_i es la masa de las partícula i, m_j es la masa de la partícula j, $\mathbf{a}_i$ es la aceleración inercial de la partícula i y $\mathbf{a}_j$ es la aceleración inercial de la partícula j.

Los sistemas de referencia inerciales y no inerciales no deben introducir las fuerzas ficticias sobre $\mathbf{F}_i$ ni sobre $\mathbf{F}_j$.

Las magnitudes $[\, m_{ij},\ \mathbf{r}_{ij},\ \mathbf{v}_{ij},\ \mathbf{a}_{ij}$ y $\mathbf{F}_{ij} \,]$ son invariantes bajo transformaciones entre sistemas de referencia inerciales y no inerciales.

Si la partícula j de una bipartícula ij es el centro de masa del free-system ($\mathbf{F}_j = 0$ y $\mathbf{a}_j = 0$) entonces de la última ecuación de arriba se obtiene:

$$\mathbf{F}_i = m_i\, \mathbf{a}_i$$

Por lo tanto, se puede considerar que la dinámica de la partícula es un caso especial de la dinámica de la bipartícula.

Dinámica Lineal

La dinámica lineal para una partícula m o para una bipartícula m (debiéndose agregar el subíndice «i» o el subíndice «ij» a todas las magnitudes y en todas las ecuaciones según sea el caso) está dada por:

Momento L1	$\mathbf{P}_{\text{L1}} \doteq m\,[\,(\mathbf{v})\,]$
Momento L2	$\mathbf{P}_{\text{L2}} \doteq m\,[\,(\mathbf{v})\,\lvert\,\mathbf{r}\,\rvert\,]$
Momento L3	$\mathbf{P}_{\text{L3}} \doteq m\,[\,(\mathbf{v})/\lvert\,\mathbf{r}\,\rvert\,]$
Energía Cinética L1	$\mathrm{K}_{\text{L1}} \doteq {}^1\!/_2\, m\,[\,(\mathbf{v})^2\,]$
Energía Cinética L2	$\mathrm{K}_{\text{L2}} \doteq {}^1\!/_2\, m\,[\,(\mathbf{v})^2\,(\,\mathbf{r}\,)^2\,]$
Energía Cinética L3	$\mathrm{K}_{\text{L3}} \doteq {}^1\!/_2\, m\,[\,(\mathbf{v})^2/(\,\mathbf{r}\,)^2\,]$
Energía Potencial L1	$\mathrm{U}_{\text{L1}} \doteq -\,[\,(\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r})\,]$
Energía Potencial L2	$\mathrm{U}_{\text{L2}} \doteq -\,[\,(\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r})\,(\,\mathbf{r}\,)^2\,]$
Energía Potencial L3	$\mathrm{U}_{\text{L3}} \doteq -\,[\,(\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r})/(\,\mathbf{r}\,)^2\,]$
Energía Mecánica L1	$\mathrm{E}_{\text{L1}} \doteq \mathrm{K}_{\text{L1}} + \mathrm{U}_{\text{L1}}$
Energía Mecánica L2	$\mathrm{E}_{\text{L2}} \doteq \mathrm{K}_{\text{L2}} + \mathrm{U}_{\text{L2}}$
Energía Mecánica L3	$\mathrm{E}_{\text{L3}} \doteq \mathrm{K}_{\text{L3}} + \mathrm{U}_{\text{L3}}$
Lagrangiano L1	$\mathrm{L}_{\text{L1}} \doteq \mathrm{K}_{\text{L1}} - \mathrm{U}_{\text{L1}}$
Lagrangiano L2	$\mathrm{L}_{\text{L2}} \doteq \mathrm{K}_{\text{L2}} - \mathrm{U}_{\text{L2}}$
Lagrangiano L3	$\mathrm{L}_{\text{L3}} \doteq \mathrm{K}_{\text{L3}} - \mathrm{U}_{\text{L3}}$

Si sobre m sólo actúan fuerzas conservativas entonces E_{L1}, E_{L2} y E_{L3} se conservan.

Del momento lineal $\mathbf{P}_{\text{L1}}$ se obtiene la fuerza lineal ($\mathbf{F}_{\text{L1}}$) más sencilla para utilizar,

$$\mathbf{F}_{\text{L1}} \doteq d(\mathbf{P}_{\text{L1}})/dt = m\,d(\mathbf{v})/dt = m\,\mathbf{a} = \mathbf{F}$$

El momento lineal $\mathbf{P}_{\text{L1}}$ de un sistema aislado de partículas se conserva si las fuerzas internas del sistema obedecen la tercera ley de Newton en su forma débil ($\sum_i \mathbf{F}_i = 0$)

Dinámica Radial

La dinámica radial para una partícula m o para una bipartícula m (debiéndose agregar el subíndice «i» o el subíndice «ij» a todas las magnitudes y en todas las ecuaciones según sea el caso) está dada por:

Momento R1 $\quad \mathrm{P}_{\mathrm{R1}} \doteq m\,[\,(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})/|\,\mathbf{r}\,|\,]$

Momento R2 $\quad \mathrm{P}_{\mathrm{R2}} \doteq m\,[\,(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})\,]$

Momento R3 $\quad \mathrm{P}_{\mathrm{R3}} \doteq m\,[\,(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})/(\,\mathbf{r}\,)^2\,]$

Energía Cinética R1 $\quad \mathrm{K}_{\mathrm{R1}} \doteq {}^1\!/_2\, m\,[\,(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})^2/(\,\mathbf{r}\,)^2\,]$

Energía Cinética R2 $\quad \mathrm{K}_{\mathrm{R2}} \doteq {}^1\!/_2\, m\,[\,(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})^2\,]$

Energía Cinética R3 $\quad \mathrm{K}_{\mathrm{R3}} \doteq {}^1\!/_2\, m\,[\,(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})^2/(\,\mathbf{r}\,)^4\,]$

Energía Potencial R1 $\quad \mathrm{U}_{\mathrm{R1}} \doteq -\,[\,(\,\int[\,2\int\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}+\mathbf{F}\cdot\mathbf{r}\,]\;d\,{}^1\!/_2(\,\mathbf{r}\,)^2\,)/(\,\mathbf{r}\,)^2\,]$

Energía Potencial R2 $\quad \mathrm{U}_{\mathrm{R2}} \doteq -\,[\,(\,\int[\,2\int\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}+\mathbf{F}\cdot\mathbf{r}\,]\;d\,{}^1\!/_2(\,\mathbf{r}\,)^2\,)\,]$

Energía Potencial R3 $\quad \mathrm{U}_{\mathrm{R3}} \doteq -\,[\,(\,\int[\,2\int\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}+\mathbf{F}\cdot\mathbf{r}\,]\;d\,{}^1\!/_2(\,\mathbf{r}\,)^2\,)/(\,\mathbf{r}\,)^4\,]$

Energía Mecánica R1 $\quad \mathrm{E}_{\mathrm{R1}} \doteq \mathrm{K}_{\mathrm{R1}} + \mathrm{U}_{\mathrm{R1}}$

Energía Mecánica R2 $\quad \mathrm{E}_{\mathrm{R2}} \doteq \mathrm{K}_{\mathrm{R2}} + \mathrm{U}_{\mathrm{R2}}$

Energía Mecánica R3 $\quad \mathrm{E}_{\mathrm{R3}} \doteq \mathrm{K}_{\mathrm{R3}} + \mathrm{U}_{\mathrm{R3}}$

Lagrangiano R1 $\quad \mathrm{L}_{\mathrm{R1}} \doteq \mathrm{K}_{\mathrm{R1}} - \mathrm{U}_{\mathrm{R1}}$

Lagrangiano R2 $\quad \mathrm{L}_{\mathrm{R2}} \doteq \mathrm{K}_{\mathrm{R2}} - \mathrm{U}_{\mathrm{R2}}$

Lagrangiano R3 $\quad \mathrm{L}_{\mathrm{R3}} \doteq \mathrm{K}_{\mathrm{R3}} - \mathrm{U}_{\mathrm{R3}}$

Si sobre m sólo actúan fuerzas conservativas entonces E_{R1}, E_{R2} y E_{R3} se conservan.

Del momento radial P_{R2} se obtiene la fuerza radial (F_{R2}) más sencilla para utilizar,

$$\mathrm{F}_{\mathrm{R2}} \doteq d(\mathrm{P}_{\mathrm{R2}})/dt = m\,d(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})/dt = m\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}) = 2\int\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}+\mathbf{F}\cdot\mathbf{r} \doteq \mathrm{T}$$

La magnitud radial $\mathrm{E}' \doteq \mathrm{K}' + \mathrm{U}' \doteq [\,m\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\,] + [-\,2\int\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}-\mathbf{F}\cdot\mathbf{r}\,]$ se conserva si sobre m sólo actúan fuerzas conservativas.

Dinámica Angular

La dinámica angular para una partícula m o para una bipartícula m (debiéndose agregar el subíndice «i» o el subíndice «ij» a todas las magnitudes y en todas las ecuaciones según sea el caso) está dada por:

Momento A1	$\mathbf{P}_{\text{A1}} \doteq m\,[\,(\mathbf{r}\times\mathbf{v})/|\,\mathbf{r}\,|\,]$
Momento A2	$\mathbf{P}_{\text{A2}} \doteq m\,[\,(\mathbf{r}\times\mathbf{v})\,]$
Momento A3	$\mathbf{P}_{\text{A3}} \doteq m\,[\,(\mathbf{r}\times\mathbf{v})/(\mathbf{r})^2\,]$
Energía Cinética A1	$\mathrm{K}_{\text{A1}} \doteq {}^1\!/_2\, m\,[\,(\mathbf{r}\times\mathbf{v})^2/(\mathbf{r})^2\,]$
Energía Cinética A2	$\mathrm{K}_{\text{A2}} \doteq {}^1\!/_2\, m\,[\,(\mathbf{r}\times\mathbf{v})^2\,]$
Energía Cinética A3	$\mathrm{K}_{\text{A3}} \doteq {}^1\!/_2\, m\,[\,(\mathbf{r}\times\mathbf{v})^2/(\mathbf{r})^4\,]$
Energía Potencial A1	$\mathrm{U}_{\text{A1}} \doteq -\,[\,((\int\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r})\,(\mathbf{r})^2 - \int[\,2\int\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \mathbf{F}\cdot\mathbf{r}\,]\;d{}^1\!/_2(\mathbf{r})^2\,)/(\mathbf{r})^2\,]$
Energía Potencial A2	$\mathrm{U}_{\text{A2}} \doteq -\,[\,((\int\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r})\,(\mathbf{r})^2 - \int[\,2\int\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \mathbf{F}\cdot\mathbf{r}\,]\;d{}^1\!/_2(\mathbf{r})^2\,)\,]$
Energía Potencial A3	$\mathrm{U}_{\text{A3}} \doteq -\,[\,((\int\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r})\,(\mathbf{r})^2 - \int[\,2\int\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \mathbf{F}\cdot\mathbf{r}\,]\;d{}^1\!/_2(\mathbf{r})^2\,)/(\mathbf{r})^4\,]$
Energía Mecánica A1	$\mathrm{E}_{\text{A1}} \doteq \mathrm{K}_{\text{A1}} + \mathrm{U}_{\text{A1}}$
Energía Mecánica A2	$\mathrm{E}_{\text{A2}} \doteq \mathrm{K}_{\text{A2}} + \mathrm{U}_{\text{A2}}$
Energía Mecánica A3	$\mathrm{E}_{\text{A3}} \doteq \mathrm{K}_{\text{A3}} + \mathrm{U}_{\text{A3}}$
Lagrangiano A1	$\mathrm{L}_{\text{A1}} \doteq \mathrm{K}_{\text{A1}} - \mathrm{U}_{\text{A1}}$
Lagrangiano A2	$\mathrm{L}_{\text{A2}} \doteq \mathrm{K}_{\text{A2}} - \mathrm{U}_{\text{A2}}$
Lagrangiano A3	$\mathrm{L}_{\text{A3}} \doteq \mathrm{K}_{\text{A3}} - \mathrm{U}_{\text{A3}}$

Si sobre m sólo actúan fuerzas conservativas entonces E_{A1}, E_{A2} y E_{A3} se conservan.

Del momento angular $\mathbf{P}_{\text{A2}}$ se obtiene la fuerza angular ($\mathbf{F}_{\text{A2}}$) más sencilla para utilizar,

$$\mathbf{F}_{\text{A2}} \doteq d(\mathbf{P}_{\text{A2}})/dt = m\,d(\mathbf{r}\times\mathbf{v})/dt = m\,(\mathbf{r}\times\mathbf{a}) = \mathbf{r}\times\mathbf{F} \doteq \mathbf{M}$$

El momento angular $\mathbf{P}_{\text{A2}}$ de un sistema aislado de partículas se conserva si las fuerzas internas del sistema obedecen la tercera ley de Newton en su forma fuerte ($\sum_i \mathbf{r}_i\times\mathbf{F}_i = 0$)

Relaciones

Energía Cinética 1	$\mathrm{K}_{\mathrm{L1}} = \mathrm{K}_{\mathrm{R1}} + \mathrm{K}_{\mathrm{A1}}$
Energía Cinética 2	$\mathrm{K}_{\mathrm{L2}} = \mathrm{K}_{\mathrm{R2}} + \mathrm{K}_{\mathrm{A2}}$
Energía Cinética 3	$\mathrm{K}_{\mathrm{L3}} = \mathrm{K}_{\mathrm{R3}} + \mathrm{K}_{\mathrm{A3}}$
Energía Potencial 1	$\mathrm{U}_{\mathrm{L1}} = \mathrm{U}_{\mathrm{R1}} + \mathrm{U}_{\mathrm{A1}}$
Energía Potencial 2	$\mathrm{U}_{\mathrm{L2}} = \mathrm{U}_{\mathrm{R2}} + \mathrm{U}_{\mathrm{A2}}$
Energía Potencial 3	$\mathrm{U}_{\mathrm{L3}} = \mathrm{U}_{\mathrm{R3}} + \mathrm{U}_{\mathrm{A3}}$
Energía Mecánica 1	$\mathrm{E}_{\mathrm{L1}} = \mathrm{E}_{\mathrm{R1}} + \mathrm{E}_{\mathrm{A1}}$
Energía Mecánica 2	$\mathrm{E}_{\mathrm{L2}} = \mathrm{E}_{\mathrm{R2}} + \mathrm{E}_{\mathrm{A2}}$
Energía Mecánica 3	$\mathrm{E}_{\mathrm{L3}} = \mathrm{E}_{\mathrm{R3}} + \mathrm{E}_{\mathrm{A3}}$
Lagrangiano 1	$\mathrm{L}_{\mathrm{L1}} = \mathrm{L}_{\mathrm{R1}} + \mathrm{L}_{\mathrm{A1}}$
Lagrangiano 2	$\mathrm{L}_{\mathrm{L2}} = \mathrm{L}_{\mathrm{R2}} + \mathrm{L}_{\mathrm{A2}}$
Lagrangiano 3	$\mathrm{L}_{\mathrm{L3}} = \mathrm{L}_{\mathrm{R3}} + \mathrm{L}_{\mathrm{A3}}$

Observaciones

Todas las ecuaciones de este trabajo pueden ser aplicadas en cualquier sistema de referencia inercial o no inercial sin necesidad de introducir las fuerzas ficticias sobre $\mathbf{F}_i$ ni sobre $\mathbf{F}_j$.

En este trabajo, las magnitudes [$m_i, \mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i, \mathbf{a}_i, \mathbf{F}_i, \mathbf{P}_i, \mathrm{F}_i, \mathrm{P}_i, \mathrm{K}_i, \mathrm{U}_i, \mathrm{E}_i, \mathrm{L}_i, m_{ij}, \mathbf{r}_{ij}, \mathbf{v}_{ij}, \mathbf{a}_{ij}, \mathbf{F}_{ij}, \mathbf{P}_{ij}, \mathrm{F}_{ij}, \mathrm{P}_{ij}, \mathrm{K}_{ij}, \mathrm{U}_{ij}, \mathrm{E}_{ij}$ y L_{ij}] son invariantes bajo transformaciones entre sistemas de referencia inerciales y no inerciales.

Este trabajo no contradice la dinámica de Newton. De hecho, la ecuación [$\mathbf{F}_i = m_i\,\mathbf{a}_i$] y la ecuación [$\mathbf{F}_{ij} = m_{ij}\,\mathbf{a}_{ij}$] son simples reformulaciones de la segunda ley de Newton.

Por último, las integrales usadas en este trabajo son integrales indefinidas. Si ninguna fuerza actúa sobre la partícula i, sobre la partícula j o sobre la bipartícula ij entonces las integrales dan como resultado constantes.

Anexo I

Free-System

El free-system es un sistema de N partículas que está siempre libre de fuerzas externas e internas, que es tridimensional y que las distancias relativas entre las N partículas permanecen siempre constantes.

La posición $\vec{R}$, la velocidad $\vec{V}$ y la aceleración $\vec{A}$ del centro de masa del free-system respecto a un sistema de referencia S, la velocidad angular $\vec{\omega}$ y la aceleración angular $\vec{\alpha}$ del free-system respecto al sistema de referencia S, están dadas por:

$$\mathrm{M} \doteq \textstyle\sum_i^{\mathrm{N}} m_i$$

$$\vec{R} \doteq \mathrm{M}^{-1} \textstyle\sum_i^{\mathrm{N}} m_i \, \vec{r}_i$$

$$\vec{V} \doteq \mathrm{M}^{-1} \textstyle\sum_i^{\mathrm{N}} m_i \, \vec{v}_i$$

$$\vec{A} \doteq \mathrm{M}^{-1} \textstyle\sum_i^{\mathrm{N}} m_i \, \vec{a}_i$$

$$\vec{\omega} \doteq \overleftrightarrow{I}^{-1} \cdot \vec{L}$$

$$\vec{\alpha} \doteq d(\vec{\omega})/dt$$

$$\overleftrightarrow{I} \doteq \textstyle\sum_i^{\mathrm{N}} m_i \, [\, |\vec{r}_i - \vec{R}\,|^2 \, \overleftrightarrow{1} - (\vec{r}_i - \vec{R}) \otimes (\vec{r}_i - \vec{R})\,]$$

$$\vec{L} \doteq \textstyle\sum_i^{\mathrm{N}} m_i \, (\vec{r}_i - \vec{R}) \times (\vec{v}_i - \vec{V})$$

donde M es la masa del free-system, $\overleftrightarrow{I}$ es el tensor de inercia del free-system (respecto a $\vec{R}$) y $\vec{L}$ es el momento angular del free-system respecto al sistema de referencia S.

Transformaciones

$$(\vec{r}_i - \vec{R}) \doteq \mathbf{r}_i = \mathbf{r}'_i$$

$$(\vec{r}'_i - \vec{R}') \doteq \mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i$$

$$(\vec{v}_i - \vec{V}) - \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}) \doteq \mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i$$

$$(\vec{v}'_i - \vec{V}') - \vec{\omega}' \times (\vec{r}'_i - \vec{R}') \doteq \mathbf{v}'_i = \mathbf{v}_i$$

$$(\vec{a}_i - \vec{A}) - 2\,\vec{\omega} \times (\vec{v}_i - \vec{V}) + \vec{\omega} \times [\,\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R})\,] - \vec{\alpha} \times (\vec{r}_i - \vec{R}) \doteq \mathbf{a}_i = \mathbf{a}'_i$$

$$(\vec{a}'_i - \vec{A}') - 2\,\vec{\omega}' \times (\vec{v}'_i - \vec{V}') + \vec{\omega}' \times [\,\vec{\omega}' \times (\vec{r}'_i - \vec{R}')\,] - \vec{\alpha}' \times (\vec{r}'_i - \vec{R}') \doteq \mathbf{a}'_i = \mathbf{a}_i$$

Anexo II

Free-System

El free-system es un sistema de N partículas que está siempre libre de fuerzas externas e internas, que es tridimensional y que las distancias relativas entre las N partículas permanecen siempre constantes.

La posición $\vec{R}$, la velocidad $\vec{V}$ y la aceleración $\vec{A}$ del centro de masa del free-system respecto a un sistema de referencia S, la velocidad angular $\vec{\omega}$ y la aceleración angular $\vec{\alpha}$ del free-system respecto al sistema de referencia S, están dadas por:

$$\mathrm{M} \doteq \textstyle\sum_i^{\mathrm{N}} m_i$$

$$\vec{R} \doteq \mathrm{M}^{-1} \textstyle\sum_i^{\mathrm{N}} m_i \, \vec{r}_i$$

$$\vec{V} \doteq \mathrm{M}^{-1} \textstyle\sum_i^{\mathrm{N}} m_i \, \vec{v}_i$$

$$\vec{A} \doteq \mathrm{M}^{-1} \textstyle\sum_i^{\mathrm{N}} m_i \, \vec{a}_i$$

$$\vec{\omega} \doteq \overleftrightarrow{I}^{-1} \cdot \vec{L}$$

$$\vec{\alpha} \doteq d(\vec{\omega})/dt$$

$$\overleftrightarrow{I} \doteq \textstyle\sum_i^{\mathrm{N}} m_i \, [\, |\vec{r}_i - \vec{R}\,|^2 \, \overleftrightarrow{1} - (\vec{r}_i - \vec{R}) \otimes (\vec{r}_i - \vec{R})\,]$$

$$\vec{L} \doteq \textstyle\sum_i^{\mathrm{N}} m_i \, (\vec{r}_i - \vec{R}) \times (\vec{v}_i - \vec{V})$$

donde M es la masa del free-system, $\overleftrightarrow{I}$ es el tensor de inercia del free-system (respecto a $\vec{R}$) y $\vec{L}$ es el momento angular del free-system respecto al sistema de referencia S.

Transformaciones

$$(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \doteq \mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}'_{ij}$$

$$(\vec{r}'_i - \vec{r}'_j) \doteq \mathbf{r}'_{ij} = \mathbf{r}_{ij}$$

$$(\vec{v}_i - \vec{v}_j) - \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \doteq \mathbf{v}_{ij} = \mathbf{v}'_{ij}$$

$$(\vec{v}'_i - \vec{v}'_j) - \vec{\omega}' \times (\vec{r}'_i - \vec{r}'_j) \doteq \mathbf{v}'_{ij} = \mathbf{v}_{ij}$$

$$(\vec{a}_i - \vec{a}_j) - 2\,\vec{\omega} \times (\vec{v}_i - \vec{v}_j) + \vec{\omega} \times [\,\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_j)\,] - \vec{\alpha} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \doteq \mathbf{a}_{ij} = \mathbf{a}'_{ij}$$

$$(\vec{a}'_i - \vec{a}'_j) - 2\,\vec{\omega}' \times (\vec{v}'_i - \vec{v}'_j) + \vec{\omega}' \times [\,\vec{\omega}' \times (\vec{r}'_i - \vec{r}'_j)\,] - \vec{\alpha}' \times (\vec{r}'_i - \vec{r}'_j) \doteq \mathbf{a}'_{ij} = \mathbf{a}_{ij}$$

Anexo III

Fuerzas Cinéticas

La fuerza cinética $\mathbf{K}^a_{ij}$ ejercida sobre una partícula i de masa m_i por otra partícula j de masa m_j, causada por la interacción entre la partícula i y la partícula j, está dada por:

$$\mathbf{K}^a_{ij} \;=\; -\, m_i\, m_j\, \mathrm{M}^{-1}\, (\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j)$$

donde $\mathbf{a}_i$ es la aceleración inercial de la partícula i, $\mathbf{a}_j$ es la aceleración inercial de la partícula j y M es la masa del Universo.

La fuerza cinética $\mathbf{K}^u_i$ ejercida sobre una partícula i de masa m_i por el centro de masa del Universo, causada por la interacción entre la partícula i y el Universo, está dada por:

$$\mathbf{K}^u_i \;=\; -\, m_i\, \mathbf{A}_{cm}$$

donde $\mathbf{A}_{cm}$ es la aceleración inercial del centro de masa del Universo.

De las ecuaciones anteriores se deduce que la fuerza cinética neta $\mathbf{K}_i$ $(= \sum_j^{All} \mathbf{K}^a_{ij} + \mathbf{K}^u_i\,)$ que actúa sobre una partícula i de masa m_i, está dada por:

$$\mathbf{K}_i \;=\; -\, m_i\, \mathbf{a}_i$$

donde $\mathbf{a}_i$ es la aceleración inercial de la partícula i.

Las fuerzas cinéticas $\mathbf{K}^a$ obedecen siempre la tercera ley de Newton en su forma débil.

Si todas las fuerzas no cinéticas obedecen siempre la tercera ley de Newton en su forma débil entonces la aceleración inercial del centro de masa del Universo $\mathbf{A}_{cm}$ es siempre igual a cero.

Ahora, de la página [1] y de la página [2], se tiene:

$$\mathbf{F}_i \;=\; m_i\, \mathbf{a}_i$$

$$\mathbf{F}_{ij} \;=\; m_{ij}\, \mathbf{a}_{ij}$$

O sea:

$$\mathbf{F}_i - m_i\, \mathbf{a}_i \;=\; 0 \;=\; \mathbf{F}_i + \mathbf{K}_i$$

$$\mathbf{F}_{ij} - m_{ij}\, \mathbf{a}_{ij} \;=\; 0 \;=\; \mathbf{F}_{ij} - m_{ij}\, (\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j\,) \;=\; \mathbf{F}_{ij} + m_{ij}\, (\mathbf{K}_i/m_i - \mathbf{K}_j/m_j) \;=\; \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{K}_{ij}$$

Por lo tanto, la fuerza total $(\mathbf{F}_i + \mathbf{K}_i)$ que actúa sobre una partícula i y la fuerza total $(\mathbf{F}_{ij} + \mathbf{K}_{ij})$ que actúa sobre una bipartícula ij están siempre en equilibrio.