Una Reformulación de la Mecánica Clásica

Antonio A. Blatter

(2015) Buenos Aires
Argentina

Este trabajo presenta una reformulación de la mecánica clásica que es invariante bajo transformaciones entre sistemas de referencia inerciales y no inerciales y que puede ser aplicada en cualquier sistema de referencia sin necesidad de introducir las fuerzas ficticias.

Introducción

La posición inercial $\mathbf{r}$, la velocidad inercial $\mathbf{v}$ y la aceleración inercial $\mathbf{a}$ de una partícula, están dadas por:

$$\mathbf{r} \doteq (\vec{r} - \mathbf{R})$$

$$\mathbf{v} \doteq (\vec{v} - \mathbf{V}) - \boldsymbol{\omega} \times (\vec{r} - \mathbf{R})$$

$$\mathbf{a} \doteq (\vec{a} - \mathbf{A}) - 2\,\boldsymbol{\omega} \times (\vec{v} - \mathbf{V}) + \boldsymbol{\omega} \times [\,\boldsymbol{\omega} \times (\vec{r} - \mathbf{R})\,] - \boldsymbol{\alpha} \times (\vec{r} - \mathbf{R})$$

donde $\vec{r}$ es el vector de posición de la partícula, $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{\alpha}$ son la velocidad angular y la aceleración angular del free-system (ver Anexo) $\mathbf{R}$, $\mathbf{V}$ y $\mathbf{A}$ son la posición, la velocidad y la aceleración del centro de masa del free-system ($\mathbf{v} \doteq d(\mathbf{r})/dt$) y ($\mathbf{a} \doteq d^2(\mathbf{r})/dt^2$)

Un sistema de referencia S es no rotante si la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del free-system respecto a S es igual a cero y además S es inercial si la aceleración $\mathbf{A}$ del centro de masa del free-system respecto a S es igual a cero.

La fuerza neta $\mathbf{F}$ que actúa sobre una partícula m produce una aceleración inercial $\mathbf{a}$, según la siguiente ecuación:

$$\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}$$

Los sistemas de referencia inerciales y no inerciales no deben introducir las fuerzas ficticias sobre $\mathbf{F}$.

Las magnitudes $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{F}$, m y t son invariantes bajo transformaciones entre sistemas de referencia inerciales y no inerciales.

Dinámica Lineal

La dinámica lineal para una simple partícula m, está dada por:

Momento L1	$\mathbf{P}_{\text{L1}} \doteq m\,[\,(\mathbf{v})\,]$
Momento L2	$\mathbf{P}_{\text{L2}} \doteq m\,[\,(\mathbf{v})\,|\,\mathbf{r}\,|\,]$
Momento L3	$\mathbf{P}_{\text{L3}} \doteq m\,[\,(\mathbf{v})/|\,\mathbf{r}\,|\,]$
Energía Cinética L1	$\text{K}_{\text{L1}} \doteq {}^1\!/_2\, m\,[\,(\mathbf{v})^2\,]$
Energía Cinética L2	$\text{K}_{\text{L2}} \doteq {}^1\!/_2\, m\,[\,(\mathbf{v})^2\,(\mathbf{r})^2\,]$
Energía Cinética L3	$\text{K}_{\text{L3}} \doteq {}^1\!/_2\, m\,[\,(\mathbf{v})^2/(\mathbf{r})^2\,]$
Energía Potencial L1	$\text{U}_{\text{L1}} \doteq -\,[\,(\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r})\,]$
Energía Potencial L2	$\text{U}_{\text{L2}} \doteq -\,[\,(\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r})\,(\mathbf{r})^2\,]$
Energía Potencial L3	$\text{U}_{\text{L3}} \doteq -\,[\,(\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r})/(\mathbf{r})^2\,]$
Energía Mecánica L1	$\text{E}_{\text{L1}} \doteq \text{K}_{\text{L1}} + \text{U}_{\text{L1}}$
Energía Mecánica L2	$\text{E}_{\text{L2}} \doteq \text{K}_{\text{L2}} + \text{U}_{\text{L2}}$
Energía Mecánica L3	$\text{E}_{\text{L3}} \doteq \text{K}_{\text{L3}} + \text{U}_{\text{L3}}$
Lagrangiano L1	$\text{L}_{\text{L1}} \doteq \text{K}_{\text{L1}} - \text{U}_{\text{L1}}$
Lagrangiano L2	$\text{L}_{\text{L2}} \doteq \text{K}_{\text{L2}} - \text{U}_{\text{L2}}$
Lagrangiano L3	$\text{L}_{\text{L3}} \doteq \text{K}_{\text{L3}} - \text{U}_{\text{L3}}$

Si sobre m sólo actúan fuerzas conservativas entonces E_{L1}, E_{L2} y E_{L3} se conservan.

Del momento lineal $\mathbf{P}_{\text{L1}}$ se obtiene la fuerza lineal ($\mathbf{F}_{\text{L1}}$) más sencilla para utilizar,

$$\mathbf{F}_{\text{L1}} \doteq d(\mathbf{P}_{\text{L1}})/dt = m\,d(\mathbf{v})/dt = m\,\mathbf{a} = \mathbf{F}$$

El momento lineal $\mathbf{P}_{\text{L1}}$ de un sistema aislado de partículas se conserva si las fuerzas internas del sistema obedecen la tercera ley de Newton en su forma débil ($\sum_i \mathbf{F}_i = 0$)

Dinámica Radial

La dinámica radial para una simple partícula m, está dada por:

Momento R1	$\mathrm{P}_{\mathrm{R1}} \doteq m\,[\,(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})/|\,\mathbf{r}\,|\,]$
Momento R2	$\mathrm{P}_{\mathrm{R2}} \doteq m\,[\,(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})\,]$
Momento R3	$\mathrm{P}_{\mathrm{R3}} \doteq m\,[\,(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})/(\,\mathbf{r}\,)^2\,]$
Energía Cinética R1	$\mathrm{K}_{\mathrm{R1}} \doteq {}^1\!/_2\,m\,[\,(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})^2/(\,\mathbf{r}\,)^2\,]$
Energía Cinética R2	$\mathrm{K}_{\mathrm{R2}} \doteq {}^1\!/_2\,m\,[\,(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})^2\,]$
Energía Cinética R3	$\mathrm{K}_{\mathrm{R3}} \doteq {}^1\!/_2\,m\,[\,(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})^2/(\,\mathbf{r}\,)^4\,]$
Energía Potencial R1	$\mathrm{U}_{\mathrm{R1}} \doteq -\,[\,(\,\int[\,2\int\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}+\mathbf{F}\cdot\mathbf{r}\,]\;d\,{}^1\!/_2(\,\mathbf{r}\,)^2\,)/(\,\mathbf{r}\,)^2\,]$
Energía Potencial R2	$\mathrm{U}_{\mathrm{R2}} \doteq -\,[\,(\,\int[\,2\int\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}+\mathbf{F}\cdot\mathbf{r}\,]\;d\,{}^1\!/_2(\,\mathbf{r}\,)^2\,)\,]$
Energía Potencial R3	$\mathrm{U}_{\mathrm{R3}} \doteq -\,[\,(\,\int[\,2\int\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}+\mathbf{F}\cdot\mathbf{r}\,]\;d\,{}^1\!/_2(\,\mathbf{r}\,)^2\,)/(\,\mathbf{r}\,)^4\,]$
Energía Mecánica R1	$\mathrm{E}_{\mathrm{R1}} \doteq \mathrm{K}_{\mathrm{R1}}+\mathrm{U}_{\mathrm{R1}}$
Energía Mecánica R2	$\mathrm{E}_{\mathrm{R2}} \doteq \mathrm{K}_{\mathrm{R2}}+\mathrm{U}_{\mathrm{R2}}$
Energía Mecánica R3	$\mathrm{E}_{\mathrm{R3}} \doteq \mathrm{K}_{\mathrm{R3}}+\mathrm{U}_{\mathrm{R3}}$
Lagrangiano R1	$\mathrm{L}_{\mathrm{R1}} \doteq \mathrm{K}_{\mathrm{R1}}-\mathrm{U}_{\mathrm{R1}}$
Lagrangiano R2	$\mathrm{L}_{\mathrm{R2}} \doteq \mathrm{K}_{\mathrm{R2}}-\mathrm{U}_{\mathrm{R2}}$
Lagrangiano R3	$\mathrm{L}_{\mathrm{R3}} \doteq \mathrm{K}_{\mathrm{R3}}-\mathrm{U}_{\mathrm{R3}}$

Si sobre m sólo actúan fuerzas conservativas entonces E_{R1}, E_{R2} y E_{R3} se conservan.

Del momento radial P_{R2} se obtiene la fuerza radial (F_{R2}) más sencilla para utilizar,

$$\mathrm{F}_{\mathrm{R2}} \doteq d(\mathrm{P}_{\mathrm{A2}})/dt = m\,d(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})/dt = m\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}) = 2\int\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}+\mathbf{F}\cdot\mathbf{r} \doteq \mathrm{T}$$

La energía mecánica E_{R2} de un sistema de partículas se conserva si el sistema está sujeto sólo a fuerzas conservativas (esta energía mecánica es la más conveniente para utilizar)

Dinámica Angular

La dinámica angular para una simple partícula m, está dada por:

Momento A1	$\mathbf{P}_{A1} \doteq m\,[\,(\mathbf{r}\times\mathbf{v})/|\,\mathbf{r}\,|\,]$
Momento A2	$\mathbf{P}_{A2} \doteq m\,[\,(\mathbf{r}\times\mathbf{v})\,]$
Momento A3	$\mathbf{P}_{A3} \doteq m\,[\,(\mathbf{r}\times\mathbf{v})/(\mathbf{r})^2\,]$
Energía Cinética A1	$\mathrm{K}_{A1} \doteq {}^1\!/_2\, m\,[\,(\mathbf{r}\times\mathbf{v})^2/(\mathbf{r})^2\,]$
Energía Cinética A2	$\mathrm{K}_{A2} \doteq {}^1\!/_2\, m\,[\,(\mathbf{r}\times\mathbf{v})^2\,]$
Energía Cinética A3	$\mathrm{K}_{A3} \doteq {}^1\!/_2\, m\,[\,(\mathbf{r}\times\mathbf{v})^2/(\mathbf{r})^4\,]$
Energía Potencial A1	$\mathrm{U}_{A1} \doteq -\,[\,(\,(\int\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r})\,(\mathbf{r})^2 - \int[\,2\int\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}+\mathbf{F}\cdot\mathbf{r}\,]\,d{}^1\!/_2(\mathbf{r})^2\,)/(\mathbf{r})^2\,]$
Energía Potencial A2	$\mathrm{U}_{A2} \doteq -\,[\,(\,(\int\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r})\,(\mathbf{r})^2 - \int[\,2\int\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}+\mathbf{F}\cdot\mathbf{r}\,]\,d{}^1\!/_2(\mathbf{r})^2\,)\,]$
Energía Potencial A3	$\mathrm{U}_{A3} \doteq -\,[\,(\,(\int\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r})\,(\mathbf{r})^2 - \int[\,2\int\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}+\mathbf{F}\cdot\mathbf{r}\,]\,d{}^1\!/_2(\mathbf{r})^2\,)/(\mathbf{r})^4\,]$
Energía Mecánica A1	$\mathrm{E}_{A1} \doteq \mathrm{K}_{A1}+\mathrm{U}_{A1}$
Energía Mecánica A2	$\mathrm{E}_{A2} \doteq \mathrm{K}_{A2}+\mathrm{U}_{A2}$
Energía Mecánica A3	$\mathrm{E}_{A3} \doteq \mathrm{K}_{A3}+\mathrm{U}_{A3}$
Lagrangiano A1	$\mathrm{L}_{A1} \doteq \mathrm{K}_{A1}-\mathrm{U}_{A1}$
Lagrangiano A2	$\mathrm{L}_{A2} \doteq \mathrm{K}_{A2}-\mathrm{U}_{A2}$
Lagrangiano A3	$\mathrm{L}_{A3} \doteq \mathrm{K}_{A3}-\mathrm{U}_{A3}$

Si sobre m sólo actúan fuerzas conservativas entonces E_{A1}, E_{A2} y E_{A3} se conservan.

Del momento angular $\mathbf{P}_{A2}$ se obtiene la fuerza angular ($\mathbf{F}_{A2}$) más sencilla para utilizar,

$$\mathbf{F}_{A2} \doteq d(\mathbf{P}_{A2})/dt = m\,d(\mathbf{r}\times\mathbf{v})/dt = m\,(\mathbf{r}\times\mathbf{a}) = \mathbf{r}\times\mathbf{F} \doteq \mathbf{M}$$

El momento angular $\mathbf{P}_{A2}$ de un sistema aislado de partículas se conserva si las fuerzas internas del sistema obedecen la tercera ley de Newton en su forma fuerte ($\sum_i \mathbf{r}_i\times\mathbf{F}_i = 0$)

Relaciones

Energía Cinética 1	$\mathrm{K}_{\mathrm{L1}} = \mathrm{K}_{\mathrm{R1}} + \mathrm{K}_{\mathrm{A1}}$
Energía Cinética 2	$\mathrm{K}_{\mathrm{L2}} = \mathrm{K}_{\mathrm{R2}} + \mathrm{K}_{\mathrm{A2}}$
Energía Cinética 3	$\mathrm{K}_{\mathrm{L3}} = \mathrm{K}_{\mathrm{R3}} + \mathrm{K}_{\mathrm{A3}}$
Energía Potencial 1	$\mathrm{U}_{\mathrm{L1}} = \mathrm{U}_{\mathrm{R1}} + \mathrm{U}_{\mathrm{A1}}$
Energía Potencial 2	$\mathrm{U}_{\mathrm{L2}} = \mathrm{U}_{\mathrm{R2}} + \mathrm{U}_{\mathrm{A2}}$
Energía Potencial 3	$\mathrm{U}_{\mathrm{L3}} = \mathrm{U}_{\mathrm{R3}} + \mathrm{U}_{\mathrm{A3}}$
Energía Mecánica 1	$\mathrm{E}_{\mathrm{L1}} = \mathrm{E}_{\mathrm{R1}} + \mathrm{E}_{\mathrm{A1}}$
Energía Mecánica 2	$\mathrm{E}_{\mathrm{L2}} = \mathrm{E}_{\mathrm{R2}} + \mathrm{E}_{\mathrm{A2}}$
Energía Mecánica 3	$\mathrm{E}_{\mathrm{L3}} = \mathrm{E}_{\mathrm{R3}} + \mathrm{E}_{\mathrm{A3}}$
Lagrangiano 1	$\mathrm{L}_{\mathrm{L1}} = \mathrm{L}_{\mathrm{R1}} + \mathrm{L}_{\mathrm{A1}}$
Lagrangiano 2	$\mathrm{L}_{\mathrm{L2}} = \mathrm{L}_{\mathrm{R2}} + \mathrm{L}_{\mathrm{A2}}$
Lagrangiano 3	$\mathrm{L}_{\mathrm{L3}} = \mathrm{L}_{\mathrm{R3}} + \mathrm{L}_{\mathrm{A3}}$

Observaciones

Todas las ecuaciones de este trabajo pueden ser aplicadas en cualquier sistema de referencia inercial o no inercial sin necesidad de introducir las fuerzas ficticias sobre $\mathbf{F}$.

Todas las magnitudes de este trabajo son invariantes bajo transformaciones entre sistemas de referencia inercial o no inercial.

Este trabajo no contradice la dinámica de Newton. De hecho, la ecuación $\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}$ es un simple reformulación de la segunda ley de Newton.

Las integrales usadas en este trabajo son integrales indefinidas. Si ninguna fuerza actúa sobre la partícula entonces las integrales dan como resultado constantes.

Finalmente, las ecuaciones de este trabajo podrían modificarse de manera tal que no haya necesidad de trabajar con integrales indefinidas.

Anexo

Free-System

El free-system es un sistema de N partículas que está siempre libre de fuerzas externas e internas, que es tridimensional y que las distancias relativas entre las N partículas permanecen siempre constantes.

La posición $\mathbf{R}$, la velocidad $\mathbf{V}$ y la aceleración $\mathbf{A}$ del centro de masa del free-system respecto a un sistema de referencia S, la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ del free-system respecto al sistema de referencia S, están dadas por:

$$\mathrm{M} \doteq \sum_i^N m_i$$

$$\mathbf{R} \doteq \mathrm{M}^{-1} \sum_i^N m_i \, \mathbf{r}_i$$

$$\mathbf{V} \doteq \mathrm{M}^{-1} \sum_i^N m_i \, \mathbf{v}_i$$

$$\mathbf{A} \doteq \mathrm{M}^{-1} \sum_i^N m_i \, \mathbf{a}_i$$

$$\boldsymbol{\omega} \doteq \mathbf{I}^{-1} \cdot \mathbf{L}$$

$$\boldsymbol{\alpha} \doteq d(\boldsymbol{\omega})/dt$$

$$\mathbf{I} \doteq \sum_i^N m_i \, [\, |\mathbf{r}_i - \mathbf{R}|^2 \, \mathbf{1} - (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) \otimes (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) \,]$$

$$\mathbf{L} \doteq \sum_i^N m_i \, (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) \times (\mathbf{v}_i - \mathbf{V})$$

donde M es la masa del free-system, $\mathbf{I}$ es el tensor de inercia del free-system (respecto a $\mathbf{R}$) y $\mathbf{L}$ es el momento angular del free-system respecto al sistema de referencia S.

Transformaciones

$$(\vec{r} - \mathbf{R}) \doteq \mathbf{r} = \mathbf{r}'$$

$$(\vec{r}\,' - \mathbf{R}') \doteq \mathbf{r}' = \mathbf{r}$$

$$(\vec{v} - \mathbf{V}) - \boldsymbol{\omega} \times (\vec{r} - \mathbf{R}) \doteq \mathbf{v} = \mathbf{v}'$$

$$(\vec{v}\,' - \mathbf{V}') - \boldsymbol{\omega}' \times (\vec{r}\,' - \mathbf{R}') \doteq \mathbf{v}' = \mathbf{v}$$

$$(\vec{a} - \mathbf{A}) - 2\,\boldsymbol{\omega} \times (\vec{v} - \mathbf{V}) + \boldsymbol{\omega} \times [\,\boldsymbol{\omega} \times (\vec{r} - \mathbf{R})\,] - \boldsymbol{\alpha} \times (\vec{r} - \mathbf{R}) \doteq \mathbf{a} = \mathbf{a}'$$

$$(\vec{a}\,' - \mathbf{A}') - 2\,\boldsymbol{\omega}' \times (\vec{v}\,' - \mathbf{V}') + \boldsymbol{\omega}' \times [\,\boldsymbol{\omega}' \times (\vec{r}\,' - \mathbf{R}')\,] - \boldsymbol{\alpha}' \times (\vec{r}\,' - \mathbf{R}') \doteq \mathbf{a}' = \mathbf{a}$$