Una Ecuación Radial de Movimiento

Antonio A. Blatter

(2015) Buenos Aires
Argentina

Este trabajo presenta una ecuación radial de movimiento que es invariante bajo transformaciones entre sistemas de referencia y que puede ser aplicada en cualquier sistema de referencia sin necesidad de introducir las fuerzas ficticias.

Introducción

Un par de partículas es una bipartícula. El sistema de partículas $\{ a,\ b,\ c$ y $d \}$ puede formar el sistema de bipartículas $\{ ab,\ ac,\ ad,\ bc,\ bd$ y $cd \}$ o también el sistema de bipartículas $\{ ad,\ bd$ y $cd \}$

La masa m_{ij} de una bipartícula ij, está dada por: $m_{ij} \doteq m_i\, m_j / M$, donde m_i es la masa de las partícula i, m_j es la masa de la partícula j y M ($\doteq \sum_k m_k$) es la masa del sistema de partículas en observación.

La posición radial r_{ij}, la velocidad radial $\dot{r}_{ij}$ y la aceleración radial $\ddot{r}_{ij}$ de una bipartícula ij, están dadas por:

$$r_{ij} \doteq |\, \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j \,|$$

$$\dot{r}_{ij} \doteq [\, (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \,] \,/\, |\, \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j \,|$$

$$\ddot{r}_{ij} \doteq [\, (\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) + (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \cdot (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) - [(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)]^2 / (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2 \,] \,/\, |\, \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j \,|$$

donde $\mathbf{r}_i$ es el vector de posición de la partícula i y $\mathbf{r}_j$ es el vector de posición de la partícula j ($\dot{r}_{ij} \doteq d(r_{ij})/dt$) y ($\ddot{r}_{ij} \doteq d^2(r_{ij})/dt^2$)

El momento radial P_{ij} de una bipartícula ij (m_{ij}) está dado por: $P_{ij} \doteq m_{ij}\, \dot{r}_{ij}$, donde $\dot{r}_{ij}$ es la velocidad radial de la bipartícula ij.

La fuerza radial F_{ij} que actúa sobre una bipartícula ij (m_{ij}) está dada por:

$$F_{ij} \doteq [\, m_{ij} \,/\, |\, \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j \,|\,] \ [\ (\tfrac{\mathbf{F}_i}{m_i} - \tfrac{\mathbf{F}_j}{m_j}) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \ + \ 2 \int (\tfrac{\mathbf{F}_i}{m_i} - \tfrac{\mathbf{F}_j}{m_j}) \cdot d(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \ -$$

$$[\, 2 \int [\, (\tfrac{\mathbf{F}_i}{m_i} - \tfrac{\mathbf{F}_j}{m_j}) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) + 2 \int (\tfrac{\mathbf{F}_i}{m_i} - \tfrac{\mathbf{F}_j}{m_j}) \cdot d(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \,]\, d\, {}^1\!/\!_2\, (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2 \,] \,/\, (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2 \,]$$

donde $\mathbf{F}_i$ es la fuerza neta que actúa sobre la partícula i, $\mathbf{F}_j$ es la fuerza neta que actúa sobre la partícula j, m_i es la masa de las partícula i, m_j es la masa de la partícula j, $\mathbf{r}_i$ es el vector de posición de la partícula i y $\mathbf{r}_j$ es el vector de posición de la partícula j.

Dinámica Radial

La ecuación radial de movimiento para una bipartícula ij (m_{ij}) está dada por:

$$F_{ij} \,=\, d(P_{ij})/dt \,=\, m_{ij}\,\ddot{r}_{ij}$$

donde F_{ij} es la fuerza radial que actúa sobre la bipartícula ij, P_{ij} es el momento radial de la bipartícula ij y $\ddot{r}_{ij}$ es la aceleración radial de la bipartícula ij.

W, K, U, E y L

El trabajo W_{ij} realizado por las fuerzas (vectoriales) que actúan sobre una bipartícula ij, está dado por:

$$W_{ij} \,\doteq\, \int_1^2 F_{ij}\, d(r_{ij}) \,=\, \Delta\, {}^1\!/_2\, m_{ij}\,(\dot{r}_{ij})^2 \,\doteq\, \Delta\, K_{ij}$$

donde F_{ij} es la fuerza radial que actúa sobre la bipartícula ij, r_{ij} es la posición radial de la bipartícula ij, m_{ij} es la masa de la bipartícula ij, $\dot{r}_{ij}$ es la velocidad radial de la bipartícula ij y K_{ij} es la energía cinética de la bipartícula ij.

El trabajo W_{ij} realizado por las fuerzas (vectoriales) conservativas que actúan sobre una bipartícula ij es igual y de signo opuesto a la variación en la energía potencial U_{ij} de la bipartícula ij.

$$\Delta\, U_{ij} \,\doteq\, -\int_1^2 F_{ij}\, d(r_{ij})$$

Por lo tanto, la energía mecánica E_{ij} de una bipartícula ij permanece constante si la bipartícula ij está sujeta sólo a fuerzas (vectoriales) conservativas.

$$\Delta\, E_{ij} \,\doteq\, \Delta\, K_{ij} + \Delta\, U_{ij} \,=\, 0$$

$$E_{ij} \,\doteq\, K_{ij} + U_{ij} \,=\, constante$$

donde K_{ij} es la energía cinética de la bipartícula ij y U_{ij} es la energía potencial de la bipartícula ij.

Finalmente, el Lagrangiano L_{ij} de una bipartícula ij, está dado por:

$$L_{ij} \,\doteq\, K_{ij} - U_{ij}$$

donde K_{ij} es la energía cinética de la bipartícula ij y U_{ij} es la energía potencial de la bipartícula ij.

Observaciones

Todas las ecuaciones de este trabajo pueden ser aplicadas en cualquier sistema de referencia inercial o no inercial.

Los sistemas de referencia inerciales y no inerciales no deben introducir las fuerzas ficticias sobre $\mathbf{F}_i$ ni sobre $\mathbf{F}_j$.

Todas las magnitudes de este trabajo ($r_{ij}, \dot{r}_{ij}, \ddot{r}_{ij}, P_{ij}, F_{ij}, W_{ij}, K_{ij}, U_{ij}, E_{ij}$ y L_{ij}) son invariantes bajo transformaciones entre sistemas de referencia.

Las magnitudes ($W_{ij}, K_{ij}, U_{ij}, E_{ij}$ y L_{ij}) son en realidad magnitudes escalares nuevas que por comodidad en este trabajo se les quitó el adjetivo «radial»

Las integrales de la definición de F_{ij} son integrales indefinidas. Si ninguna fuerza actúa sobre las partículas i y j entonces las integrales dan como resultado constantes.

La definición de F_{ij} podría modificarse de manera tal que no haya necesidad de trabajar con integrales indefinidas. Sin embargo, este cambio podría obligar a tener que modificar también otras ecuaciones del trabajo.

Por otro lado, este trabajo no contradice la dinámica de Newton. De hecho, si un sistema de referencia inercial está fijo sobre la partícula j ($\mathbf{r}_j = \mathbf{v}_j = \mathbf{a}_j = \mathbf{F}_j = 0$) de una bipartícula ij (m_{ij}) entonces de la ecuación radial de movimiento, se obtiene:

$$\frac{\mathbf{F}_i}{m_i}\cdot\mathbf{r}_i + 2\int \frac{\mathbf{F}_i}{m_i}\cdot d\mathbf{r}_i - [\,2\int [\,\frac{\mathbf{F}_i}{m_i}\cdot\mathbf{r}_i + 2\int \frac{\mathbf{F}_i}{m_i}\cdot d\mathbf{r}_i\,]\, d\,{}^1\!/_2\,(\mathbf{r}_i)^2\,]\,/\,(\mathbf{r}_i)^2 \;=\; \mathbf{a}_i\cdot\mathbf{r}_i + \mathbf{v}_i\cdot\mathbf{v}_i - [\,\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{r}_i\,]^2/(\mathbf{r}_i)^2$$

$$(\frac{\mathbf{F}_i}{m_i} - \mathbf{a}_i)\cdot\mathbf{r}_i + 2\int \frac{\mathbf{F}_i}{m_i}\cdot d\mathbf{r}_i - \mathbf{v}_i\cdot\mathbf{v}_i - [\,2\int [\,\frac{\mathbf{F}_i}{m_i}\cdot\mathbf{r}_i + 2\int \frac{\mathbf{F}_i}{m_i}\cdot d\mathbf{r}_i\,]\, d\,{}^1\!/_2\,(\mathbf{r}_i)^2 + [\,\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{r}_i\,]^2\,]\,/\,(\mathbf{r}_i)^2 \;=\; 0$$

$$(\frac{\mathbf{F}_i}{m_i} - \mathbf{a}_i)\cdot\mathbf{r}_i = 0 \rightarrow 2\int \frac{\mathbf{F}_i}{m_i}\cdot d\mathbf{r}_i - \mathbf{v}_i\cdot\mathbf{v}_i = 0 \rightarrow 2\int [\,\frac{\mathbf{F}_i}{m_i}\cdot\mathbf{r}_i + 2\int \frac{\mathbf{F}_i}{m_i}\cdot d\mathbf{r}_i\,]\, d\,{}^1\!/_2\,(\mathbf{r}_i)^2 - [\,\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{r}_i\,]^2 = 0$$

puesto que en todo sistema de referencia inercial siempre $\mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i/m_i$ (así como en todo sistema de referencia no inercial introduciendo las fuerzas ficticias sobre $\mathbf{F}_i$)

Finalmente, este trabajo considera que es posible desarrollar una dinámica radial alternativa basada en el Lagrangiano L_{ij} que puede ser aplicada en cualquier sistema de referencia inercial o no inercial sin necesidad de introducir las fuerzas ficticias.

Bibliografía

A. Einstein, Sobre la Teoría de la Relatividad Especial y General.

E. Mach, La Ciencia de la Mecánica.

H. Goldstein, Mecánica Clásica.