Una Ecuación Escalar de Movimiento

Antonio A. Blatter

(2015) Buenos Aires
Argentina

Este trabajo presenta una ecuación escalar de movimiento que es invariante bajo transformaciones entre sistemas de referencia y que puede ser aplicada en cualquier sistema de referencia sin necesidad de introducir las fuerzas ficticias.

Introducción

Un sistema de partículas forma un sistema de bipartículas. Por ejemplo, el sistema de partículas { *a, b, c* y *d* } forma el sistema de bipartículas { *ab, ac, ad, bc, bd* y *cd* }

La masa m_{ij} de una bipartícula ij, está dada por: $m_{ij} \doteq m_i \, m_j / M$, donde m_i es la masa de las partícula i, m_j es la masa de la partícula j y M ($\doteq \sum_k m_k$) es la masa del sistema de partículas en observación, en este caso ($M = m_i + m_j$)

La posición escalar r_{ij}, la velocidad escalar v_{ij} y la aceleración escalar a_{ij} de una bipartícula ij, están dadas por:

$$r_{ij} \doteq {}^1\!/_2 \, [\, (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \,]$$

$$v_{ij} \doteq {}^1\!/_1 \, [\, (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \,]$$

$$a_{ij} \doteq {}^1\!/_1 \, [\, (\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) + (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \cdot (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \,]$$

donde $\mathbf{r}_i$ es el vector de posición de la partícula i y $\mathbf{r}_j$ es el vector de posición de la partícula j ($v_{ij} \doteq d(r_{ij})/dt$) y ($a_{ij} \doteq d^2(r_{ij})/dt^2$)

La fuerza escalar F_{ij} que actúa sobre una bipartícula ij (m_{ij}) está dada por:

$$F_{ij} \doteq m_{ij} \, [\, (\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_j/m_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) + 2 \int (\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_j/m_j) \cdot d(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \,]$$

donde $\mathbf{F}_i$ es la fuerza neta que actúa sobre la partícula i, $\mathbf{F}_j$ es la fuerza neta que actúa sobre la partícula j, m_i es la masa de las partícula i, m_j es la masa de la partícula j, $\mathbf{r}_i$ es el vector de posición de la partícula i y $\mathbf{r}_j$ es el vector de posición de la partícula j.

Dinámica Escalar

La ecuación escalar de movimiento para una bipartícula ij, está dada por:

$$F_{ij} \;=\; m_{ij}\, a_{ij}$$

donde F_{ij} es la fuerza escalar que actúa sobre la bipartícula ij, m_{ij} es la masa de la bipartícula ij y a_{ij} es la aceleración escalar de la bipartícula ij.

W, K, U, E y L

El trabajo W_{ij} realizado por las fuerzas (vectoriales) que actúan sobre una bipartícula ij, está dado por:

$$W_{ij} \;\doteq\; \int_1^2 F_{ij}\; d(r_{ij}) \;=\; \Delta\, {}^1\!/_2\, m_{ij}\, (v_{ij})^2 \;\doteq\; \Delta\, K_{ij}$$

donde F_{ij} es la fuerza escalar que actúa sobre la bipartícula ij, r_{ij} es la posición escalar de la bipartícula ij, m_{ij} es la masa de la bipartícula ij, v_{ij} es la velocidad escalar de la bipartícula ij y K_{ij} es la energía cinética de la bipartícula ij.

El trabajo W_{ij} realizado por las fuerzas (vectoriales) conservativas que actúan sobre una bipartícula ij es igual y de signo opuesto a la variación en la energía potencial U_{ij} de la bipartícula ij.

$$\Delta\, U_{ij} \;\doteq\; -\; \int_1^2 F_{ij}\; d(r_{ij})$$

Por lo tanto, la energía mecánica E_{ij} de una bipartícula ij permanece constante si la bipartícula ij está sujeta sólo a fuerzas (vectoriales) conservativas.

$$\Delta\, E_{ij} \;\doteq\; \Delta\, K_{ij} + \Delta\, U_{ij} \;=\; 0$$

$$E_{ij} \;\doteq\; K_{ij} + U_{ij} \;=\; constante$$

donde K_{ij} es la energía cinética de la bipartícula ij y U_{ij} es la energía potencial de la bipartícula ij.

Finalmente, el Lagrangiano L_{ij} de una bipartícula ij, está dado por:

$$L_{ij} \;\doteq\; K_{ij} - U_{ij}$$

donde K_{ij} es la energía cinética de la bipartícula ij y U_{ij} es la energía potencial de la bipartícula ij.

Observaciones

Todas las ecuaciones de este trabajo pueden ser aplicadas en cualquier sistema de referencia inercial o no inercial.

Los sistemas de referencia inerciales y no inerciales no deben introducir las fuerzas ficticias sobre $\mathbf{F}_i$ ni sobre $\mathbf{F}_j$.

Todas las magnitudes de este trabajo ($m_{ij}, r_{ij}, v_{ij}, a_{ij}, F_{ij}, W_{ij}, K_{ij}, U_{ij}, E_{ij}$ y L_{ij}) son invariantes bajo transformaciones entre sistemas de referencia.

Las magnitudes ($W_{ij}, K_{ij}, U_{ij}, E_{ij}$ y L_{ij}) son en realidad magnitudes escalares nuevas que por comodidad en este trabajo se les quitó el adjetivo «escalar»

La integral de la definición de F_{ij} es una integral indefinida. Si ninguna fuerza actúa sobre las partículas i y j entonces la integral da como resultado una constante.

La definición de F_{ij} podría modificarse de manera tal que no haya necesidad de trabajar con una integral indefinida. Sin embargo, este cambio podría obligar a tener que modificar también otras ecuaciones del trabajo.

Por otro lado, este trabajo no contradice la dinámica de Newton. De hecho, si un sistema de referencia inercial está fijo sobre la partícula j ($\mathbf{r}_j = \mathbf{v}_j = \mathbf{a}_j = \mathbf{F}_j = 0$) de una bipartícula ij (m_{ij}) entonces de la ecuación escalar de movimiento, se obtiene:

$$m_{ij}\,[\,\mathbf{F}_i/m_i \cdot \mathbf{r}_i + 2\int \mathbf{F}_i/m_i \cdot d\mathbf{r}_i\,] \;=\; m_{ij}\,[\,\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{r}_i + \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i\,]$$

$$m_{ij}\,[\,(\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{a}_i) \cdot \mathbf{r}_i + 2\int \mathbf{F}_i/m_i \cdot d\mathbf{r}_i - \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i\,] \;=\; 0$$

$$\rightarrow\;\; (\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{a}_i) \cdot \mathbf{r}_i \;=\; 0 \;\;\rightarrow\;\; 2\int \mathbf{F}_i/m_i \cdot d\mathbf{r}_i - \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i \;=\; 0$$

puesto que en todo sistema de referencia inercial siempre $\mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i/m_i$ (así como en todo sistema de referencia no inercial introduciendo las fuerzas ficticias sobre $\mathbf{F}_i$)

Finalmente, este trabajo considera que es posible desarrollar una dinámica clásica alternativa basada en el Lagrangiano L_{ij} que puede ser aplicada en cualquier sistema de referencia inercial o no inercial sin necesidad de introducir las fuerzas ficticias.

Bibliografía

A. Einstein, Sobre la Teoría de la Relatividad Especial y General.

E. Mach, La Ciencia de la Mecánica.

H. Goldstein, Mecánica Clásica.

Anexo I

Transformaciones

$$\mathbf{r}'_{ij} \cdot \mathbf{r}'_{ij} \;=\; \mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij}$$

$$\mathbf{v}'_{ij} \cdot \mathbf{r}'_{ij} \;=\; \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij}$$

$$\mathbf{a}'_{ij} \cdot \mathbf{r}'_{ij} + \mathbf{v}'_{ij} \cdot \mathbf{v}'_{ij} \;=\; \mathbf{a}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij} + \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{v}_{ij}$$

$$(\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_j) \cdot (\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_j) \;=\; (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$$

$$(\mathbf{v}'_i - \mathbf{v}'_j) \cdot (\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_j) \;=\; (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$$

$$(\mathbf{a}'_i - \mathbf{a}'_j) \cdot (\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_j) + (\mathbf{v}'_i - \mathbf{v}'_j) \cdot (\mathbf{v}'_i - \mathbf{v}'_j) \;=\; (\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) + (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \cdot (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j)$$

Energía Cinética K_{ij}

En coordenadas cartesianas: $K_{ij} \;=\; {}^1\!/_2\, m_{ij}\, (\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij})^2$

En coordenadas polares: $K_{ij} \;=\; {}^1\!/_2\, m_{ij}\, (\, \dot\rho_{ij}\, \rho_{ij}\,)^2$

En coordenadas cilíndricas: $K_{ij} \;=\; {}^1\!/_2\, m_{ij}\, (\, \dot\rho_{ij}\, \rho_{ij} + \dot z_{ij}\, z_{ij}\,)^2$

En coordenadas esféricas: $K_{ij} \;=\; {}^1\!/_2\, m_{ij}\, (\, \dot r_{ij}\, r_{ij}\,)^2$

Momento Escalar P_{ij}

En coordenadas cartesianas: $P_{ij} \;=\; m_{ij}\, (\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij})$

En coordenadas polares: $P_{ij} \;=\; m_{ij}\, (\, \dot\rho_{ij}\, \rho_{ij}\,)$

En coordenadas cilíndricas: $P_{ij} \;=\; m_{ij}\, (\, \dot\rho_{ij}\, \rho_{ij} + \dot z_{ij}\, z_{ij}\,)$

En coordenadas esféricas: $P_{ij} \;=\; m_{ij}\, (\, \dot r_{ij}\, r_{ij}\,)$

Fuerza Escalar F_{ij}

En coordenadas cartesianas: $F_{ij} \;=\; m_{ij}\, (\mathbf{a}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij} + \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{v}_{ij})$

En coordenadas polares: $F_{ij} \;=\; m_{ij}\, (\, \ddot\rho_{ij}\, \rho_{ij} + \dot\rho_{ij}\, \dot\rho_{ij}\,)$

En coordenadas cilíndricas: $F_{ij} \;=\; m_{ij}\, (\, \ddot\rho_{ij}\, \rho_{ij} + \dot\rho_{ij}\, \dot\rho_{ij} + \ddot z_{ij}\, z_{ij} + \dot z_{ij}\, \dot z_{ij}\,)$

En coordenadas esféricas: $F_{ij} \;=\; m_{ij}\, (\, \ddot r_{ij}\, r_{ij} + \dot r_{ij}\, \dot r_{ij}\,)$

Anexo II

Sistema de N Partículas

$$\sum I_{ij} = \textstyle\sum_{j>i}^{N} \, 1/2 \, m_i \, m_j \, \mathrm{M}^{-1} \, [\, (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \,]$$

$$= \textstyle\sum_{i=1}^{N} \, 1/2 \, m_i \, [\, (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) \,]$$

$$\sum P_{ij} = \textstyle\sum_{j>i}^{N} \, m_i \, m_j \, \mathrm{M}^{-1} \, [\, (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \,]$$

$$= \textstyle\sum_{i=1}^{N} \, m_i \, [\, (\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_{cm}) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) \,]$$

$$\sum K_{ij} = \textstyle\sum_{j>i}^{N} \, 1/2 \, m_i \, m_j \, \mathrm{M}^{-1} \, [\, (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \,]^2$$

$$= \textstyle\sum_{i=1}^{N} \, 1/2 \, m_i \, [\, (\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_{cm}) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) \,]^2$$

$$\sum F_{ij} = \textstyle\sum_{j>i}^{N} \, m_i \, m_j \, \mathrm{M}^{-1} \, [\, (\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_j/m_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \,] \; +$$

$$\textstyle\sum_{j>i}^{N} \, m_i \, m_j \, \mathrm{M}^{-1} \, [\, 2 \int (\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_j/m_j) \cdot d(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \,]$$

$$= \textstyle\sum_{i=1}^{N} \, m_i \, [\, (\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_{cm}/M) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) \,] \; +$$

$$\textstyle\sum_{i=1}^{N} \, m_i \, [\, 2 \int (\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_{cm}/M) \cdot d(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) \,]$$

$$\sum m_{ij} \, a_{ij} = \textstyle\sum_{j>i}^{N} \, m_i \, m_j \, \mathrm{M}^{-1} \, [\, (\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \,] \; +$$

$$\textstyle\sum_{j>i}^{N} \, m_i \, m_j \, \mathrm{M}^{-1} \, [\, (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \cdot (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \,]$$

$$= \textstyle\sum_{i=1}^{N} \, m_i \, [\, (\mathbf{a}_i - \mathbf{A}_{cm}) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) \,] \; +$$

$$\textstyle\sum_{i=1}^{N} \, m_i \, [\, (\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_{cm}) \cdot (\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_{cm}) \,]$$

$$\sum W_{ij} = \textstyle\sum_{j>i}^{N} \, 1/2 \, m_i \, m_j \, \mathrm{M}^{-1} \int_1^2 [\, (\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_j/m_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \,] \, d(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2 \; +$$

$$\textstyle\sum_{j>i}^{N} \, 1/2 \, m_i \, m_j \, \mathrm{M}^{-1} \int_1^2 [\, 2 \int (\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_j/m_j) \cdot d(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \,] \, d(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2$$

$$= \textstyle\sum_{i=1}^{N} \, 1/2 \, m_i \int_1^2 [\, (\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_{cm}/M) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) \,] \, d(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm})^2 \; +$$

$$\textstyle\sum_{i=1}^{N} \, 1/2 \, m_i \int_1^2 [\, 2 \int (\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_{cm}/M) \cdot d(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) \,] \, d(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm})^2$$