

Momento Lineal, Momento Angular & Momento Radial

Antonio A. Blatter

Licencia Creative Commons Atribución 3.0

(2015) Buenos Aires

Argentina

Este trabajo presenta el momento lineal, el momento angular y el momento radial de un sistema de N partículas, que dan origen a las leyes de conservación del momento lineal, del momento angular y de la energía.

Momento Lineal

El momento lineal $\mathbf{P}$ de un sistema de N partículas con respecto a un punto O (con posición $\mathbf{R}_o$, velocidad $\mathbf{V}_o$ y aceleración $\mathbf{A}_o$) está dado por:

$$\mathbf{P} = \sum_i m_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_o)$$

$$d(\mathbf{P})/dt = \sum_i m_i (\mathbf{a}_i - \mathbf{A}_o)$$

$$\mathbf{F} = \sum_i (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{A}_o)$$

La ecuación ($\mathbf{F}$) sólo puede ser válida si el punto O logra que $\mathbf{A}_o$ sea igual a cero. Por lo general, en el momento lineal el punto O es el origen O del sistema de referencia, logrando que $\mathbf{R}_o$, $\mathbf{V}_o$ y $\mathbf{A}_o$ sean siempre iguales a cero. Sin embargo, el punto O no necesariamente tiene que ser el origen O del sistema de referencia. La única condición aquí es que la aceleración $\mathbf{A}_o$ del punto O debe ser igual a cero.

Ahora, relacionando $\mathbf{P}$ y $\mathbf{F}$ con las magnitudes lineales $\mathbf{v}$ y $\mathbf{a}$, se obtiene:

$$\mathbf{P} = M \mathbf{v}$$

$$d(\mathbf{P})/dt = \mathbf{F} = M \mathbf{a}$$

donde $M (= \sum_i m_i)$ es la masa del sistema de partículas, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{a}$ son la velocidad y la aceleración (lineales) del sistema de partículas (con respecto al punto O)

Por lo tanto, se deduce que el momento lineal $\mathbf{P}$ de un sistema aislado de N partículas permanece constante si las fuerzas internas $\mathbf{F}_{(int)}$ logran anularse.

Momento Angular

El momento angular $\mathbf{L}$ de un sistema de N partículas con respecto a un punto O (con posición $\mathbf{R}_o$, velocidad $\mathbf{V}_o$ y aceleración $\mathbf{A}_o$) está dado por:

$$\mathbf{L} = \sum_i m_i [(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_o) \times (\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_o)]$$

$$d(\mathbf{L})/dt = \sum_i m_i [(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_o) \times (\mathbf{a}_i - \mathbf{A}_o)]$$

$$\mathbf{M} = \sum_i [(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_o) \times (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{A}_o)]$$

La ecuación ($\mathbf{M}$) sólo puede ser válida si el punto O logra que $\mathbf{A}_o$ sea igual a cero o si el punto O es el centro de masa del sistema de partículas, puesto que:

$$\sum_i [(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) \times (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{A}_{cm})] = \sum_i [(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) \times \mathbf{F}_i]$$

Ahora, relacionando $\mathbf{L}$ y $\mathbf{M}$ con las magnitudes angulares $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{\alpha}$, se obtiene:

$$\mathbf{L} = \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}$$

$$d(\mathbf{L})/dt = \mathbf{M} = \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\alpha} + \dot{\mathbf{I}} \cdot \boldsymbol{\omega}$$

donde $\mathbf{I}$ es el tensor de inercia del sistema de partículas, $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{\alpha}$ son la velocidad y la aceleración (angulares) del sistema de partículas (con respecto al punto O)

$$\mathbf{I} = \sum_i m_i [|\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_o|^2 \mathbf{1} - (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_o) \otimes (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_o)]$$

$$\dot{\mathbf{I}} \cdot \boldsymbol{\omega} = -(\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2)$$

$$\mathbf{M}_1 = -\sum_i m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_o) \times \{2\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_o)\}$$

$$\mathbf{M}_2 = +\sum_i m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_o) \times \{\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_o)]\}$$

Si $\mathbf{M}_1$ y $\mathbf{M}_2$ son considerados como momentos «ficticios» de manera tal que resulte la igualdad ($\mathbf{M}^* = \mathbf{M} + \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$) entonces se logra:

$$\mathbf{L} = \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}$$

$$\mathbf{M}^* = \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\alpha}$$

Por lo tanto, se deduce que el momento angular $\mathbf{L}$ de un sistema aislado de N partículas permanece constante si los momentos internos $\mathbf{M}_{(int)}$ logran anularse.

Momento Radial

El momento radial G de un sistema de N partículas con respecto a un punto O (con posición $\mathbf{R}_o$, velocidad $\mathbf{V}_o$ y aceleración $\mathbf{A}_o$) está dado por:

$$G = \sum_i \frac{1}{2} m_i [(\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_o) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_o)]$$

$$\Delta G = \sum_i \Delta \frac{1}{2} m_i [(\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_o) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_o)]$$

$$d(\Delta G)/dt = \sum_i \Delta \frac{1}{2} m_i [(\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_o) \cdot (\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_o) + (\mathbf{a}_i - \mathbf{A}_o) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_o)]$$

$$d(\Delta G)/dt = \sum_i m_i [\Delta \frac{1}{2} (\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_o) \cdot (\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_o) + \Delta \frac{1}{2} (\mathbf{a}_i - \mathbf{A}_o) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_o)]$$

$$d(\Delta G)/dt = \sum_i m_i [\int_1^2 (\mathbf{a}_i - \mathbf{A}_o) \cdot d(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_o) + \Delta \frac{1}{2} (\mathbf{a}_i - \mathbf{A}_o) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_o)]$$

$$\Delta T = \sum_i [\int_1^2 (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{A}_o) \cdot d(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_o) + \Delta \frac{1}{2} (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{A}_o) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_o)]$$

La ecuación (ΔT) sólo puede ser válida si el punto O logra que $\mathbf{A}_o$ sea igual a cero o si el punto O es el centro de masa del sistema de partículas, puesto que:

$$\sum_i [\int_1^2 (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{A}_{cm}) \cdot d(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm})] = \sum_i [\int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm})]$$

$$\sum_i [\Delta \frac{1}{2} (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{A}_{cm}) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm})] = \sum_i [\Delta \frac{1}{2} \mathbf{F}_i \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm})]$$

Ahora, relacionando G y T con las magnitudes radiales r , $\dot{r}$ y $\ddot{r}$, se obtiene:

$$\Delta G = \Delta \frac{1}{2} M (\dot{r} r)$$

$$d(\Delta G)/dt = \Delta T = \Delta \frac{1}{2} M (\dot{r} \dot{r} + \ddot{r} r)$$

donde M es la masa del sistema de partículas, $\frac{1}{2} (\dot{r} r)$ y $\frac{1}{2} (\dot{r} \dot{r} + \ddot{r} r)$ son la velocidad y la aceleración (escalares) del sistema de partículas (con respecto al punto O)

La posición escalar, la velocidad escalar y la aceleración escalar de un sistema de partículas formado por una sola partícula, están dadas por:

$$\text{Posición escalar:} \quad \frac{1}{4} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) \quad = \quad \frac{1}{4} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) \quad = \quad \frac{1}{4} (r r)$$

$$\text{Velocidad escalar:} \quad \frac{1}{4} d(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})/dt \quad = \quad \frac{1}{2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}) \quad = \quad \frac{1}{2} (\dot{r} r)$$

$$\text{Aceleración escalar:} \quad \frac{1}{4} d^2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})/dt^2 \quad = \quad \frac{1}{2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) \quad = \quad \frac{1}{2} (\dot{r} \dot{r} + \ddot{r} r)$$

donde $\mathbf{r}_i$ es el vector de posición de la partícula, $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_o)$ y $r = |(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_o)|$

Ahora, si ΔT es considerado como el trabajo W realizado por las fuerzas que actúan sobre un sistema de partículas, entonces:

$$W = \sum_i \left[\int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_o) + \Delta^{1/2} \mathbf{F}_i \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_o) \right]$$

Por lo tanto, siempre resulta la siguiente igualdad:

$$W = \sum_i \Delta^{1/2} m_i [(\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_o) \cdot (\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_o) + (\mathbf{a}_i - \mathbf{A}_o) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_o)]$$

Si la expresión del lado derecho de la igualdad anterior es considerada como la variación en la energía cinética K de un sistema de partículas, entonces:

$$\Delta K = \sum_i \Delta^{1/2} m_i [(\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_o) \cdot (\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_o) + (\mathbf{a}_i - \mathbf{A}_o) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_o)]$$

Por lo tanto, siempre resulta también la siguiente igualdad: $W = \Delta K$

Ahora, dado que el trabajo W realizado por las fuerzas conservativas que actúan sobre un sistema de partículas es igual y de signo opuesto a la variación en la energía potencial U del sistema de partículas, entonces:

$$\Delta U = - \sum_i \left[\int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_o) + \Delta^{1/2} \mathbf{F}_i \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_o) \right]$$

Por lo tanto, se deduce que la energía mecánica E de un sistema de N partículas permanece constante si el sistema está sujeto sólo a fuerzas conservativas.

$$\Delta E = \Delta K + \Delta U = 0 \rightarrow E = K + U = \text{constante}$$

Las magnitudes E , K y U están relacionadas con las magnitudes convencionales E' , K' y U' . De hecho, la energía mecánica E de un sistema de partículas es igual a la energía mecánica convencional E' del sistema de partículas ($E = E'$) puesto que:

$$\sum_i^{1/2} m_i (\mathbf{a}_i - \mathbf{A}_o) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_o) - \sum_i^{1/2} \mathbf{F}_i \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_o) = 0$$

Sin embargo, si todos los sistemas de referencia inerciales y no inerciales eligen el mismo punto O (el centro de masa del sistema de partículas) entonces las magnitudes E , K y U son invariantes bajo transformaciones entre sistemas de referencia y los sistemas de referencia no inerciales no deben introducir las fuerzas ficticias sobre $\mathbf{F}_i$.

En esta sección, por lo tanto, se obtienen las siguientes relaciones:

$$G = \frac{1}{2} M (\dot{r} r)$$

$$d(G)/dt = \frac{1}{2} M (\dot{r} \dot{r} + \ddot{r} r) = K$$

$$d(\Delta G)/dt = \Delta T = \Delta^{1/2} M (\dot{r} \dot{r} + \ddot{r} r) = W = \Delta K$$

Observaciones

Todas las ecuaciones de este trabajo pueden ser aplicadas en cualquier sistema de referencia inercial o no inercial.

Los sistemas de referencia no inerciales en la sección Momento Lineal y en la sección Momento Angular sí deben introducir las fuerzas ficticias sobre $\mathbf{F}_i$.

Los sistemas de referencia no inerciales en la sección Momento Radial no deben introducir las fuerzas ficticias sobre $\mathbf{F}_i$ (en T , en W y en U) si el punto O es el centro de masa del sistema de partículas.

El momento lineal de un sistema de partículas está relacionado con las magnitudes lineales y especialmente con la velocidad lineal (m/s) del sistema de partículas.

El momento angular de un sistema de partículas está relacionado con las magnitudes angulares y especialmente con la velocidad angular (rad/s) del sistema de partículas.

El momento radial de un sistema de partículas está relacionado con las magnitudes radiales y especialmente con la velocidad escalar (m^2/s) del sistema de partículas.

La energía mecánica E , la energía cinética K y la energía potencial U de un sistema de partículas están relacionadas con las magnitudes radiales y especialmente con la aceleración escalar (m^2/s^2) del sistema de partículas.

Si el punto O es el centro de masa de un sistema de partículas entonces la energía mecánica E , la energía cinética K y la energía potencial U del sistema de partículas son invariantes bajo transformaciones entre sistemas de referencia.

La energía mecánica E de un sistema de partículas es igual a la energía mecánica convencional E' del sistema de partículas ($E = E'$)

Bibliografía

A. Einstein, Sobre la Teoría de la Relatividad Especial y General.

G · Gamow, Uno, Dos, Tres, ... Infinito.

E. Mach, La Ciencia de la Mecánica.

H. Goldstein, Mecánica Clásica.

Anexo

Transformaciones

$$r' r' = r r$$

$$\dot{r}' r' = \dot{r} r$$

$$\dot{r}' \dot{r}' + \ddot{r}' r' = \dot{r} \dot{r} + \ddot{r} r$$

$$\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}' = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}$$

$$\mathbf{v}' \cdot \mathbf{r}' = \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}$$

$$\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}' + \mathbf{a}' \cdot \mathbf{r}' = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}$$

$$(\mathbf{r}'_i - \mathbf{R}'_o) \cdot (\mathbf{r}'_i - \mathbf{R}'_o) = (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_o) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_o)$$

$$(\mathbf{v}'_i - \mathbf{V}'_o) \cdot (\mathbf{r}'_i - \mathbf{R}'_o) = (\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_o) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_o)$$

$$(\mathbf{v}'_i - \mathbf{V}'_o) \cdot (\mathbf{v}'_i - \mathbf{V}'_o) + (\mathbf{a}'_i - \mathbf{A}'_o) \cdot (\mathbf{r}'_i - \mathbf{R}'_o) = (\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_o) \cdot (\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_o) + (\mathbf{a}_i - \mathbf{A}_o) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_o)$$

Momento Radial G

En coordenadas cartesianas: $G = 1/2 m_i (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})$

En coordenadas polares: $G = 1/2 m_i (\dot{\rho} \rho)$

En coordenadas cilíndricas: $G = 1/2 m_i (\dot{\rho} \rho + \dot{z} z)$

En coordenadas esféricas: $G = 1/2 m_i (\dot{r} r)$

Energía Cinética K

En coordenadas cartesianas: $K = 1/2 m_i (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{r})$

En coordenadas polares: $K = 1/2 m_i (\dot{\rho} \dot{\rho} + \ddot{\rho} \rho)$

En coordenadas cilíndricas: $K = 1/2 m_i [(\dot{\rho} \dot{\rho} + \ddot{\rho} \rho) + (\dot{z} \dot{z} + \ddot{z} z)]$

En coordenadas esféricas: $K = 1/2 m_i (\dot{r} \dot{r} + \ddot{r} r)$