Momento Lineal, Momento Angular & Momento Radial

Antonio A. Blatter

(2015) Buenos Aires
Argentina

Este trabajo presenta el momento lineal, el momento angular y el momento radial de un sistema de N partículas, que dan origen a las leyes de conservación del momento lineal, del momento angular y de la energía.

Momento Lineal

El momento lineal $\mathbf{P}$ de un sistema de N partículas con respecto a un punto O (con posición $\mathbf{R}_o$, velocidad $\mathbf{V}_o$ y aceleración $\mathbf{A}_o$) está dado por:

$$\mathbf{P} = \textstyle\sum_i m_i \, (\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_o)$$

$$d(\mathbf{P})/dt = \textstyle\sum_i m_i \, (\mathbf{a}_i - \mathbf{A}_o)$$

$$\mathbf{F} = \textstyle\sum_i (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{A}_o)$$

La ecuación ($\mathbf{F}$) sólo puede ser válida si el punto O logra que $\mathbf{A}_o$ sea igual a cero. Por lo general, en el momento lineal el punto O es el origen O del sistema de referencia, logrando que $\mathbf{R}_o$, $\mathbf{V}_o$ y $\mathbf{A}_o$ sean siempre iguales a cero. Sin embargo, el punto O no necesariamente tiene que ser el origen O del sistema de referencia. La única condición aquí es que la aceleración $\mathbf{A}_o$ del punto O debe ser igual a cero.

Ahora, relacionando $\mathbf{P}$ y $\mathbf{F}$ con las magnitudes lineales $\mathbf{v}$ y $\mathbf{a}$, se obtiene:

$$\mathbf{P} = \mathrm{M}\,\mathbf{v}$$

$$d(\mathbf{P})/dt = \mathbf{F} = \mathrm{M}\,\mathbf{a}$$

donde M ($= \sum_i m_i$) es la masa del sistema de partículas, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{a}$ son la velocidad y la aceleración (lineales) del sistema de partículas (con respecto al punto O)

Por lo tanto, se deduce que el momento lineal $\mathbf{P}$ de un sistema aislado de N partículas permanece constante si las fuerzas internas $\mathbf{F}_{(int)}$ logran anularse.

Momento Angular

El momento angular $\mathbf{L}$ de un sistema de N partículas con respecto a un punto O (con posición $\mathbf{R}_o$, velocidad $\mathbf{V}_o$ y aceleración $\mathbf{A}_o$) está dado por:

$$\mathbf{L} \,=\, \textstyle\sum_i\, m_i\, [\, (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_o) \times (\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_o)\,]$$

$$d(\mathbf{L})/dt \,=\, \textstyle\sum_i\, m_i\, [\, (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_o) \times (\mathbf{a}_i - \mathbf{A}_o)\,]$$

$$\mathbf{M} \,=\, \textstyle\sum_i\, [\, (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_o) \times (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{A}_o)\,]$$

La ecuación ($\mathbf{M}$) sólo puede ser válida si el punto O logra que $\mathbf{A}_o$ sea igual a cero o si el punto O es el centro de masa del sistema de partículas, puesto que:

$$\textstyle\sum_i\, [\, (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) \times (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{A}_{cm})\,] \,=\, \textstyle\sum_i\, [\, (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) \times \mathbf{F}_i\,]$$

Ahora, relacionando $\mathbf{L}$ y $\mathbf{M}$ con las magnitudes angulares $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{\alpha}$, se obtiene:

$$\mathbf{L} \,=\, \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}$$

$$d(\mathbf{L})/dt \,=\, \mathbf{M} \,=\, \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\alpha} + \dot{\mathbf{I}} \cdot \boldsymbol{\omega}$$

donde $\mathbf{I}$ es el tensor de inercia del sistema de partículas, $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{\alpha}$ son la velocidad y la aceleración (angulares) del sistema de partículas (con respecto al punto O)

$$\mathbf{I} \,=\, \textstyle\sum_i\, m_i\, [\, |(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_o)|^2\, \mathbf{1} - (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_o) \otimes (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_o)\,]$$

$$\dot{\mathbf{I}} \cdot \boldsymbol{\omega} = -\, (\, \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2\,)$$

$$\mathbf{M}_1 \,=\, -\textstyle\sum_i\, m_i\, (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_o) \times \{\, 2\, \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_o)\, \}$$

$$\mathbf{M}_2 \,=\, +\textstyle\sum_i\, m_i\, (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_o) \times \{\, \boldsymbol{\omega} \times [\, \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_o)\,]\, \}$$

Si $\mathbf{M}_1$ y $\mathbf{M}_2$ son considerados como momentos «ficticios» de manera tal que resulte la igualdad ($\mathbf{M}^* = \mathbf{M} + \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$) entonces se logra:

$$\mathbf{L} \,=\, \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}$$

$$\mathbf{M}^* \,=\, \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\alpha}$$

Por lo tanto, se deduce que el momento angular $\mathbf{L}$ de un sistema aislado de N partículas permanece constante si los momentos internos $\mathbf{M}_{\,(int)}$ logran anularse.

Momento Radial

El momento radial G de un sistema de N partículas con respecto a un punto O (con posición $\mathbf{R}_o$, velocidad $\mathbf{V}_o$ y aceleración $\mathbf{A}_o$) está dado por:

$$G \;=\; \textstyle\sum_i \, {}^1\!/\!_2 \, m_i \,[\,(\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_o)\cdot(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_o)\,]$$

$$\Delta G \;=\; \textstyle\sum_i \, \Delta \, {}^1\!/\!_2 \, m_i \,[\,(\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_o)\cdot(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_o)\,]$$

$$d(\Delta G)/dt \;=\; \textstyle\sum_i \, \Delta \, {}^1\!/\!_2 \, m_i \,[\,(\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_o)\cdot(\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_o) + (\mathbf{a}_i - \mathbf{A}_o)\cdot(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_o)\,]$$

$$d(\Delta G)/dt \;=\; \textstyle\sum_i \, m_i \,[\,\Delta \, {}^1\!/\!_2 \,(\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_o)\cdot(\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_o) + \Delta \, {}^1\!/\!_2 \,(\mathbf{a}_i - \mathbf{A}_o)\cdot(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_o)\,]$$

$$d(\Delta G)/dt \;=\; \textstyle\sum_i \, m_i \,[\,\int_1^2 (\mathbf{a}_i - \mathbf{A}_o)\cdot d(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_o) + \Delta \, {}^1\!/\!_2 \,(\mathbf{a}_i - \mathbf{A}_o)\cdot(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_o)\,]$$

$$\Delta T \;=\; \textstyle\sum_i \,[\,\int_1^2 (\mathbf{F}_i - m_i\mathbf{A}_o)\cdot d(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_o) + \Delta \, {}^1\!/\!_2 \,(\mathbf{F}_i - m_i\mathbf{A}_o)\cdot(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_o)\,]$$

La ecuación (ΔT) sólo puede ser válida si el punto O logra que $\mathbf{A}_o$ sea igual a cero o si el punto O es el centro de masa del sistema de partículas, puesto que:

$$\textstyle\sum_i \,[\,\int_1^2 (\mathbf{F}_i - m_i\mathbf{A}_{cm})\cdot d(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm})\,] \;=\; \textstyle\sum_i \,[\,\int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm})\,]$$

$$\textstyle\sum_i \,[\,\Delta \, {}^1\!/\!_2 \,(\mathbf{F}_i - m_i\mathbf{A}_{cm})\cdot(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm})\,] \;=\; \textstyle\sum_i \,[\,\Delta \, {}^1\!/\!_2 \,\mathbf{F}_i \cdot(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm})\,]$$

Ahora, relacionando G y T con las magnitudes radiales r, $\dot{r}$ y $\ddot{r}$, se obtiene:

$$\Delta G \;=\; \Delta \, {}^1\!/\!_2 \, M \,(\dot{r}\, r)$$

$$d(\Delta G)/dt \;=\; \Delta T \;=\; \Delta \, {}^1\!/\!_2 \, M \,(\dot{r}\,\dot{r} + \ddot{r}\, r)$$

donde M es la masa del sistema de partículas, $(\dot{r}\, r)$ y $(\dot{r}\,\dot{r} + \ddot{r}\, r)$ son la velocidad y la aceleración (escalares) del sistema de partículas (con respecto al punto O)

La posición escalar, la velocidad escalar y la aceleración escalar de un sistema de partículas formado por una sola partícula, están dadas por:

Posición escalar:	${}^1\!/\!_2 \,(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})$	$=$	${}^1\!/\!_2 \,(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})$	$=$	${}^1\!/\!_2 \,(r\, r)$
Velocidad escalar:	${}^1\!/\!_2 \, d(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})/dt$	$=$	$(\mathbf{v}\cdot\mathbf{r})$	$=$	$(\dot{r}\, r)$
Aceleración escalar:	${}^1\!/\!_2 \, d^2(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})/dt^2$	$=$	$(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{r})$	$=$	$(\dot{r}\,\dot{r} + \ddot{r}\, r)$

donde $\mathbf{r}_i$ es el vector de posición de la partícula, $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_o)$ y $r = |(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_o)|$

Ahora, si ΔT es considerado como el trabajo W realizado por las fuerzas que actúan sobre un sistema de partículas, entonces:

$$W = \sum_i [\int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_o) + \Delta\, 1/2\, \mathbf{F}_i \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_o)]$$

Por lo tanto, siempre resulta la siguiente igualdad:

$$W = \sum_i \Delta\, 1/2\, m_i [(\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_o) \cdot (\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_o) + (\mathbf{a}_i - \mathbf{A}_o) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_o)]$$

Si la expresión del lado derecho de la igualdad anterior es considerada como la variación en la energía cinética K de un sistema de partículas, entonces:

$$\Delta K = \sum_i \Delta\, 1/2\, m_i [(\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_o) \cdot (\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_o) + (\mathbf{a}_i - \mathbf{A}_o) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_o)]$$

Por lo tanto, siempre resulta también la siguiente igualdad: $W = \Delta K$

Ahora, dado que el trabajo W realizado por las fuerzas conservativas que actúan sobre un sistema de partículas es igual y de signo opuesto a la variación en la energía potencial U del sistema de partículas, entonces:

$$\Delta U = -\sum_i [\int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_o) + \Delta\, 1/2\, \mathbf{F}_i \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_o)]$$

Por lo tanto, se deduce que la energía mecánica E de un sistema de N partículas permanece constante si el sistema está sujeto sólo a fuerzas conservativas.

$$\Delta E = \Delta K + \Delta U = 0 \quad \rightarrow \quad E = K + U = \text{constante}$$

Las magnitudes E, K y U están relacionadas con las magnitudes convencionales E', K' y U'. De hecho, la energía mecánica E de un sistema de partículas es igual a la energía mecánica convencional E' del sistema de partículas ($E = E'$) puesto que:

$$\sum_i 1/2\, m_i (\mathbf{a}_i - \mathbf{A}_o) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_o) - \sum_i 1/2\, \mathbf{F}_i \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_o) = 0$$

Sin embargo, si todos los sistemas de referencia inerciales y no inerciales eligen el mismo punto O (el centro de masa del sistema de partículas) entonces las magnitudes E, K y U son invariantes bajo transformaciones entre sistemas de referencia y los sistemas de referencia no inerciales no deben introducir las fuerzas ficticias sobre $\mathbf{F}_i$.

En esta sección, por lo tanto, se obtienen las siguientes relaciones:

$$G = 1/2\, M\, (\dot{r}\, r)$$

$$d(G)/dt = 1/2\, M\, (\dot{r}\, \dot{r} + \ddot{r}\, r) = K$$

$$d(\Delta G)/dt = \Delta T = \Delta\, 1/2\, M\, (\dot{r}\, \dot{r} + \ddot{r}\, r) = W = \Delta K$$

Observaciones

Todas las ecuaciones de este trabajo pueden ser aplicadas en cualquier sistema de referencia inercial o no inercial.

Los sistemas de referencia no inerciales en la sección Momento Lineal y en la sección Momento Angular sí deben introducir las fuerzas ficticias sobre $\mathbf{F}_i$.

Los sistemas de referencia no inerciales en la sección Momento Radial no deben introducir las fuerzas ficticias sobre $\mathbf{F}_i$ (en T, en W y en U) si el punto O es el centro de masa del sistema de partículas.

El momento lineal de un sistema de partículas está relacionado con las magnitudes lineales y especialmente con la velocidad lineal (m/s) del sistema de partículas.

El momento angular de un sistema de partículas está relacionado con las magnitudes angulares y especialmente con la velocidad angular (rad/s) del sistema de partículas.

El momento radial de un sistema de partículas está relacionado con las magnitudes radiales y especialmente con la velocidad escalar (m^2/s) del sistema de partículas.

La energía mecánica E, la energía cinética K y la energía potencial U de un sistema de partículas están relacionadas con las magnitudes radiales y especialmente con la aceleración escalar (m^2/s^2) del sistema de partículas.

Si el punto O es el centro de masa de un sistema de partículas entonces la energía mecánica E, la energía cinética K y la energía potencial U del sistema de partículas son invariantes bajo transformaciones entre sistemas de referencia.

La energía mecánica E de un sistema de partículas es igual a la energía mecánica convencional E' del sistema de partículas ($E = E'$)

Bibliografía

A. Einstein, Sobre la Teoría de la Relatividad Especial y General.

G · Gamow, Uno, Dos, Tres, ... Infinito.

E. Mach, La Ciencia de la Mecánica.

H. Goldstein, Mecánica Clásica.

Anexo

Transformaciones

$$r' r' \;=\; r\, r$$

$$\dot{r}' r' \;=\; \dot{r}\, r$$

$$\dot{r}' \dot{r}' + \ddot{r}' r' \;=\; \dot{r}\, \dot{r} + \ddot{r}\, r$$

$$\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}' \;=\; \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}$$

$$\mathbf{v}' \cdot \mathbf{r}' \;=\; \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}$$

$$\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}' + \mathbf{a}' \cdot \mathbf{r}' \;=\; \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}$$

$$(\mathbf{r}'_i - \mathbf{R}'_o) \cdot (\mathbf{r}'_i - \mathbf{R}'_o) \;=\; (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_o) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_o)$$

$$(\mathbf{v}'_i - \mathbf{V}'_o) \cdot (\mathbf{r}'_i - \mathbf{R}'_o) \;=\; (\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_o) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_o)$$

$$(\mathbf{v}'_i - \mathbf{V}'_o) \cdot (\mathbf{v}'_i - \mathbf{V}'_o) + (\mathbf{a}'_i - \mathbf{A}'_o) \cdot (\mathbf{r}'_i - \mathbf{R}'_o) \;=\; (\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_o) \cdot (\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_o) + (\mathbf{a}_i - \mathbf{A}_o) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_o)$$

Momento Radial G

En coordenadas cartesianas: $G \;=\; {}^1\!/_2\, m_i\, (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})$

En coordenadas polares: $G \;=\; {}^1\!/_2\, m_i\, (\, \dot{\rho}\, \rho\,)$

En coordenadas cilíndricas: $G \;=\; {}^1\!/_2\, m_i\, (\, \dot{\rho}\, \rho + \dot{z}\, z\,)$

En coordenadas esféricas: $G \;=\; {}^1\!/_2\, m_i\, (\, \dot{r}\, r\,)$

Energía Cinética K

En coordenadas cartesianas: $K \;=\; {}^1\!/_2\, m_i\, (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{r})$

En coordenadas polares: $K \;=\; {}^1\!/_2\, m_i\, (\, \dot{\rho}\, \dot{\rho} + \ddot{\rho}\, \rho\,)$

En coordenadas cilíndricas: $K \;=\; {}^1\!/_2\, m_i\, [\, (\, \dot{\rho}\, \dot{\rho} + \ddot{\rho}\, \rho\,) + (\, \dot{z}\, \dot{z} + \ddot{z}\, z\,)\,]$

En coordenadas esféricas: $K \;=\; {}^1\!/_2\, m_i\, (\, \dot{r}\, \dot{r} + \ddot{r}\, r\,)$