Una Simple Mecánica Clásica Rotacional

Antonio A. Blatter

(2015) Buenos Aires
Argentina

En mecánica clásica, este trabajo presenta una simple mecánica clásica rotacional que puede ser aplicada en cualquier sistema de referencia inercial o no inercial.

Introducción

i) Poder hallar de la manera más sencilla posible la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ de cualquier sistema de N partículas (sea un cuerpo rígido o no) respecto a cualquier sistema de referencia inercial o no inercial de manera tal que no sea necesario utilizar una componente radial y otra componente angular en cada una de las partículas del sistema.

ii) Posteriormente, poder desarrollar una dinámica rotacional lo más sencilla posible que se pueda aplicar en cualquier sistema de referencia inercial o no inercial.

Opción A

Cinemática

En mecánica clásica, para cualquier sistema de referencia S (inercial o no inercial) la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ de cualquier sistema de N partículas (que gira sobre su centro de masa) respecto al sistema de referencia S es igual a la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_{S'}$ de un sistema de referencia S' (que gira sobre su origen O') respecto al sistema de referencia S de manera tal que el origen O' del sistema de referencia S' coincida siempre con el centro de masa del sistema de partículas y que el momento angular $\mathbf{L}'$ del sistema de partículas respecto al sistema de referencia S' siempre sea igual a cero.

Por lo tanto, el momento angular $\mathbf{L}'$ del sistema de partículas respecto al sistema de referencia S' siempre es igual a cero.

$\mathbf{L}' = \sum_i m_i \, (\mathbf{r}'_i \times \mathbf{v}'_i) = 0$

Ahora, la posición $\mathbf{r}'_i$ y la velocidad $\mathbf{v}'_i$ de la i-ésima partícula respecto al sistema de referencia S, están dadas por:

$$\mathbf{r}'_i \;=\; \mathbf{r}_i - \mathbf{R} \;=\; (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) \;=\; \bar{\mathbf{r}}_i$$

$$\mathbf{v}'_i \;=\; \mathbf{v}_i - \boldsymbol{\omega}_{S'} \times \mathbf{r}'_i - \mathbf{V} \;=\; (\mathbf{v}_i - \mathbf{V}) - \boldsymbol{\omega}_{S'} \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) \;=\; \bar{\mathbf{v}}_i - \boldsymbol{\omega}_{S'} \times \bar{\mathbf{r}}_i$$

donde $\mathbf{R}$ y $\mathbf{V}$ son la posición y la velocidad respectivamente del centro de masa del sistema de partículas respecto al sistema de referencia S.

Sustituyendo $\mathbf{r}'_i$ y $\mathbf{v}'_i$ en la primera ecuación, se obtiene:

$$\textstyle\sum_i m_i\,[\,\bar{\mathbf{r}}_i \times (\bar{\mathbf{v}}_i - \boldsymbol{\omega}_{S'} \times \bar{\mathbf{r}}_i)] = 0$$

$$\textstyle\sum_i m_i\,(\bar{\mathbf{r}}_i \times \bar{\mathbf{v}}_i) - \sum_i m_i\,[\,\bar{\mathbf{r}}_i \times (\boldsymbol{\omega}_{S'} \times \bar{\mathbf{r}}_i)] = 0$$

Puesto que $\bar{\mathbf{r}}_i \times (\boldsymbol{\omega}_{S'} \times \bar{\mathbf{r}}_i) = |\bar{\mathbf{r}}_i|^2\,\boldsymbol{\omega}_{S'} - (\boldsymbol{\omega}_{S'} \cdot \bar{\mathbf{r}}_i)\,\bar{\mathbf{r}}_i$, resulta:

$$\textstyle\sum_i m_i\,(\bar{\mathbf{r}}_i \times \bar{\mathbf{v}}_i) - \sum_i m_i\,[\,|\bar{\mathbf{r}}_i|^2\,\boldsymbol{\omega}_{S'} - (\boldsymbol{\omega}_{S'} \cdot \bar{\mathbf{r}}_i)\,\bar{\mathbf{r}}_i\,] = 0$$

Como $\boldsymbol{\omega}_{S'} = \mathbf{1} \cdot \boldsymbol{\omega}_{S'}$ (tensor unitario) y $(\boldsymbol{\omega}_{S'} \cdot \bar{\mathbf{r}}_i)\,\bar{\mathbf{r}}_i = (\bar{\mathbf{r}}_i \otimes \bar{\mathbf{r}}_i) \cdot \boldsymbol{\omega}_{S'}$ (producto tensorial o diádico) entonces:

$$\textstyle\sum_i m_i\,(\bar{\mathbf{r}}_i \times \bar{\mathbf{v}}_i) - \sum_i m_i\,[\,|\bar{\mathbf{r}}_i|^2\,\mathbf{1} \cdot \boldsymbol{\omega}_{S'} - (\bar{\mathbf{r}}_i \otimes \bar{\mathbf{r}}_i) \cdot \boldsymbol{\omega}_{S'}\,] = 0$$

$$\textstyle\sum_i m_i\,(\bar{\mathbf{r}}_i \times \bar{\mathbf{v}}_i) - \sum_i m_i\,[\,|\bar{\mathbf{r}}_i|^2\,\mathbf{1} - (\bar{\mathbf{r}}_i \otimes \bar{\mathbf{r}}_i)\,] \cdot \boldsymbol{\omega}_{S'} = 0$$

Si definimos a $\sum_i m_i\,(\bar{\mathbf{r}}_i \times \bar{\mathbf{v}}_i)$ como el momento angular $\mathbf{L}$ del sistema de partículas respecto al sistema de referencia S y a $\sum_i m_i\,[\,|\bar{\mathbf{r}}_i|^2\,\mathbf{1} - (\bar{\mathbf{r}}_i \otimes \bar{\mathbf{r}}_i)\,]$ como el tensor de inercia $\mathbf{I}$ del sistema de partículas con respecto al punto $\mathbf{R}$, entonces queda:

$$\mathbf{L} - \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}_{S'} = 0$$

Despejando $\boldsymbol{\omega}_{S'}$ y como la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_{S'}$ del sistema de referencia S' respecto al sistema de referencia S es igual a la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del sistema de partículas respecto al sistema de referencia S, finalmente se obtiene:

$$\boldsymbol{\omega} \;=\; \mathbf{I}^{-1} \cdot \mathbf{L}$$

$$\boldsymbol{\alpha} \;=\; d(\boldsymbol{\omega})/dt$$

$$\mathbf{L} \;=\; \textstyle\sum_i m_i\,(\bar{\mathbf{r}}_i \times \bar{\mathbf{v}}_i) \;=\; \sum_i m_i\,[(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) \times (\mathbf{v}_i - \mathbf{V})]$$

$$\mathbf{I} \;=\; \textstyle\sum_i m_i\,[\,|\bar{\mathbf{r}}_i|^2\,\mathbf{1} - (\bar{\mathbf{r}}_i \otimes \bar{\mathbf{r}}_i)\,] \;=\; \sum_i m_i\,[\,|(\mathbf{r}_i - \mathbf{R})|^2\,\mathbf{1} - (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) \otimes (\mathbf{r}_i - \mathbf{R})\,]$$

El sistema de partículas puede ser cualquier sistema de partículas (sea un cuerpo rígido o no) y si el sistema es de 1 sola partícula entonces el momento angular y la velocidad angular siempre son iguales a cero.

Dinámica

En mecánica clásica, para cualquier sistema de referencia S (inercial o no inercial) el momento angular $\mathbf{L}$ de un sistema de N partículas, está ahora dado por:

$$\mathbf{L} = \sum_i m_i \,[(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) \times (\mathbf{v}_i - \mathbf{V})] = \sum_i m_i \,[(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) \times \mathbf{v}_i\,] = \sum_i m_i \,[\,\mathbf{r}_i \times (\mathbf{v}_i - \mathbf{V})]$$

Derivando con respecto al tiempo, resulta:

$$d(\mathbf{L})/dt = \sum_i m_i \,[(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) \times (\mathbf{a}_i - \mathbf{A})] = \sum_i m_i \,[(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) \times \mathbf{a}_i\,] = \sum_i m_i \,[\,\mathbf{r}_i \times (\mathbf{a}_i - \mathbf{A})]$$

Utilizando solamente la segunda igualdad, se tiene:

$$d(\mathbf{L})/dt = \sum_i m_i \,[(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) \times \mathbf{a}_i\,]$$

Ahora como en todo sistema de referencia inercial $\mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i/m_i$ (así como en todo sistema de referencia no inercial considerando a las fuerzas ficticias) finalmente se obtiene:

$$d(\mathbf{L})/dt = \sum_i \,[(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) \times \mathbf{F}_i\,] = \mathbf{M}$$

Opción B

En mecánica clásica, para cualquier sistema de referencia S con origen O (inercial o no inercial) la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ de cualquier sistema de N partículas (que gira sobre el origen O) respecto al sistema de referencia S es igual a la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_{S'}$ de un sistema de referencia S' (que gira sobre su origen O') respecto al sistema de referencia S de manera tal que el origen O' del sistema de referencia S' coincida siempre con el origen O del sistema de referencia S y que el momento angular $\mathbf{L}'$ del sistema de partículas respecto al sistema de referencia S' siempre sea igual a cero.

El desarrollo de la opción B es el mismo que el desarrollo de la opción A y las ecuaciones de la opción B son las mismas que las ecuaciones de la opción A con la particularidad que $\mathbf{R}$, $\mathbf{V}$ y $\mathbf{A}$ siempre son iguales a cero, ya que ahora no representan la posición, la velocidad y la aceleración del centro de masa del sistema de partículas respecto al sistema de referencia S sino que representan la posición, la velocidad y la aceleración del origen O del sistema de referencia S respecto al sistema de referencia S.

La ventaja de la opción B es que el momento angular y la velocidad angular de un sistema de 1 sola partícula no siempre son iguales a cero.

Generalizando

En mecánica clásica, para cualquier sistema de referencia S (inercial o no inercial) el momento angular $\mathbf{L}$ de cualquier sistema de N partículas (sea un cuerpo rígido o no) con respecto a un punto O (con posición $\mathbf{R}_o$ y velocidad $\mathbf{V}_o$) está ahora dado por:

$$\mathbf{L} \,=\, \sum_i \, m_i \, [\, (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_o) \times (\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_o) \,]$$

$$d(\mathbf{L})/dt \,=\, \sum_i \, m_i \, [\, (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_o) \times (\mathbf{a}_i - \mathbf{A}_o) \,]$$

$$\mathbf{M}_o \,=\, \sum_i \, [\, (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_o) \times (\mathbf{F}_i - \mathbf{A}_o) \,]$$

$$\mathbf{I} \,=\, \sum_i \, m_i \, [\, |(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_o)|^2 \, \mathbf{1} - (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_o) \otimes (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_o) \,]$$

Por lo tanto, en cualquier sistema de N partículas, se tiene:

$$\mathbf{L} \,=\, \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}$$

$$\mathbf{M} \,=\, \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\alpha}$$

$$\boldsymbol{\omega} \,=\, \mathbf{I}^{-1} \cdot \mathbf{L}$$

$$\boldsymbol{\alpha} \,=\, \mathbf{I}^{-1} \cdot \mathbf{M}$$

$$\mathbf{M} \;=\; \mathbf{M}_o \,+\, \mathbf{M}_1 \,+\, \mathbf{M}_2$$

$$\mathbf{M}_o \,=\, + \sum_i \, [\, (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_o) \times (\mathbf{F}_i - \mathbf{A}_o) \,]$$

$$\mathbf{M}_1 \,=\, - \sum_i \, m_i \, (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_o) \times \{\, 2 \, \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_o) \,\}$$

$$\mathbf{M}_2 \,=\, + \sum_i \, m_i \, (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_o) \times \{\, \boldsymbol{\omega} \times [\, \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_o) \,] \,\}$$

Observaciones

Estas ecuaciones son válidas en cualquier sistema de referencia inercial o no inercial.

Los sistemas de referencia inerciales nunca deben introducir las fuerzas ficticias sobre $\mathbf{F}_i$ y los sistemas de referencia no inerciales siempre deben introducir las fuerzas ficticias sobre $\mathbf{F}_i$.

La magnitud $\mathbf{M}$ contiene un momento real"($\mathbf{M}_o$) y dos momentos "ficticios"($\mathbf{M}_1$ y $\mathbf{M}_2$)

Los sistemas de referencia inerciales y los sistemas de referencia no inerciales siempre deben introducir los momentos "ficticios"sobre $\mathbf{M}$.

La magnitud $\mathbf{M}$ puede hallarse desde $[\, d(\mathbf{L}')/dt = \sum_i m_i\, (\, \mathbf{r}'_i \times \mathbf{a}'_i) = 0\,]$ (Opción A) utilizando el mismo procedimiento que se utilizó para hallar $\boldsymbol{\omega}$ pero esta vez es para hallar $\boldsymbol{\alpha}$ (y sabiendo ya que $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_{S'}$)

Al trabajar con cualquier sistema de N partículas (sea un cuerpo rígido o no) entonces casi nunca el tensor de inercia $\mathbf{I}$ puede permanecer constante.

La ecuación $\mathbf{M}_o = \sum_i [\, (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_o) \times (\mathbf{F}_i - \mathbf{A}_o)\,]$ solamente es válida (o solamente tiene sentido físico) si $\mathbf{A}_o$ es igual a cero o si $\mathbf{A}_o$ puede quitarse de la ecuación.

En cualquier sistema de referencia S (inercial o no inercial) la elección del punto O es libre pero teniendo en cuenta el punto anterior.

Si el punto O es el origen del sistema de referencia S entonces $\mathbf{R}_o$, $\mathbf{V}_o$ y $\mathbf{A}_o$ siempre son iguales a cero.

Si el punto O es un punto fijo o si tiene velocidad vectorial constante respecto al sistema de referencia S entonces $\mathbf{A}_o$ es igual a cero.

Si el punto O es el centro de masa del sistema de partículas entonces $\mathbf{V}_o$ y $\mathbf{A}_o$ se pueden quitar de las ecuaciones ya que las ecuaciones obtenidas son iguales a las ecuaciones originales.

La velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ de cualquier sistema de partículas (con respecto al punto O) siempre es igual a la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_{S'}$ de un sistema de referencia S' (cuyo origen siempre coincide con el punto O) en el cual el momento angular $\mathbf{L}'$ del sistema de partículas siempre es igual a cero.

La velocidad vectorial radial $\dot{\mathbf{r}}$ y la aceleración vectorial radial $\ddot{\mathbf{r}}$ de una partícula (ambas con respecto a un punto O) entonces podrían ahora estar dadas por:

$$\dot{\mathbf{r}} \;=\; \mathbf{v} - (\mathbf{I}^{-1} \cdot \mathbf{L}) \;=\; \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega}$$

$$\ddot{\mathbf{r}} \;=\; \mathbf{a} - (\mathbf{I}^{-1} \cdot \mathbf{M}) \;=\; \mathbf{a} - \boldsymbol{\alpha}$$