

# Teoría general de la conexión afín

## General theory of the affine connection

Wenceslao Segura González  
*Investigador independiente*  
*e-mail: wenceslaoseguragonzalez@yahoo.es*  
*web: wenceslao-segura.es*

### Contenido

1.- Álgebra tensorial . . . . .	1
2.- Conexiones y derivadas . . . . .	3
3.- Ley de transformación de las conexiones . . . . .	5
4.- Propiedades de las conexiones . . . . .	6
5.- Tensores especiales . . . . .	7
6.- Sistema de coordenadas localmente geodésico . . . . .	7
7.- Tensor y vector de torsión . . . . .	9
8.- El tensor de curvatura . . . . .	9
9.- Desplazamiento paralelo de un vector . . . . .	10
10.- Regla del paralelogramo . . . . .	11
11.- Tensor de Ricci . . . . .	12
12.- Identidades de Bianchi . . . . .	13
13.- Tensor métrico . . . . .	13
14.- Espacio euclidiano tangente . . . . .	16
15.- Espacio de Riemann . . . . .	17
16.- Teorema de unicidad . . . . .	18
17.- Condición necesaria y suficiente para que un espacio riemaniano sea euclídeo . . . . .	18

18.- Tensor de no-metricidad . . . . .	20
19.- Variación el módulo de un vector en un desplazamiento paralelo . .	22
20.- Cambio de escala . . . . .	23
21.- Transformación proyectiva . . . . .	24
22.- Tensor de Ricci en función de los símbolos de Christoffel . . . . .	25
23.- Simetrías del tensor de curvatura . . . . .	25
24.- Tensor de Einstein . . . . .	26
25.- Volúmenes y áreas . . . . .	27
26.- Geodésicas . . . . .	29
27.- Desviación geodésica . . . . .	32
28.- Divergencia de un vector . . . . .	32
29.- Rotacional de un vector . . . . .	33
30.- Gradiente . . . . .	34
31.- Operador laplaciano . . . . .	34
32.- Ángulos . . . . .	34
33.- Teoremas integrales . . . . .	34
34.- Densidades tensoriales . . . . .	35
35.- Relaciones útiles de las densidades tensoriales . . . . .	37
36.- Tensores y densidades duales . . . . .	38
37.- Tensor de Weyl . . . . .	38
38.- Unidades . . . . .	39
Bibliografía . . . . .	41

La versión v1 del artículo «Teoría general de la conexión afin» fue publicada el día 26 de octubre de 2014



Este trabajo está bajo una licencia de *Creative Commons Atribución 4.0 Internacional*: Se permite cualquier explotación de la obra, incluyendo una finalidad comercial, así como la creación de obras derivadas, la distribución de las cuales también está permitida sin ninguna restricción.

# Teoría general de la conexión afín

## General theory of the affine connection

Wenceslao Segura González

*Investigador independiente*

*e-mail: wenceslaoseguragonzalez@yahoo.es*

*web: wenceslao-segura.es*

**Sinopsis.** La conexión afín representa el elemento geométrico más primario, del que derivan todas las otras magnitudes que caracterizan a una determinada geometría. En este artículo se estudia el concepto de conexión afín, sus propiedades y las magnitudes que de ella se derivan, así como algunas de las conexiones que se han utilizado en teorías físicas. Se investiga la relación entre la conexión afín y el tensor métrico. Todo este estudio se encuentra dirigido a su aplicación en teorías de la gravedad alternativas a la Teoría General de la Relatividad y en las teorías de campo unificado.

**Abstract.** The affine connection is the primary geometric element from which derive all other quantities that characterize a given geometry. In this article the concept of affine connection, its properties and the quantities derived from it are studied, we also present some of the connections that have been used in physical theories. We introduce the metric tensor and we study its relation with the affine connection. This study is intended for application in alternative theories of gravity to the General Theory of Relativity and to the unified field theories.

### 1.- Álgebra tensorial

Un espacio es un conjunto de infinitos elementos a los que llamamos puntos, cada uno de ellos definidos por  $N$  números reales independientes entre sí, a los que llamamos coordenadas del punto. Impondremos la condición de que el espacio sea contínuo, es decir que si un punto tiene coordenadas  $x^k$  existen otros puntos con coordenadas  $x^k + dx^k$ , donde  $dx^k$  son valores infinitesimales, es decir que «infinitamente cerca» de un punto existen infinitos puntos. Al número  $N$  de coordenadas necesarias para identificar a cada punto se le llama dimensión del espacio.

La representación de los puntos del espacio por sus coordenadas no es única. En efecto, es posible definir nuevas coordenadas relacionadas con las antiguas por  $N$  funciones

$$x'^r = x'^r(x^k) \quad (1)$$

o bien \*

$$dx'^r = \frac{\partial x'^r}{\partial x^k} dx^k = A_k^r dx^k,$$

donde suponemos que la transformación es invertible, o sea que el jacobiano o determinante de la matriz  $A_k^r$  es distinto de cero, debiendo existir por tanto la relación inversa

$$dx^r = \frac{\partial x^r}{\partial x'^k} dx'^k = B_k^r dx'^k.$$

Vamos también a exigir que las funciones (1) sean derivables y con suficientes propiedades de regularidad.

Esta operación de cambio de coordenadas nos permite definir los elementos básicos que operan en un espacio, como son, entre otros: vectores, tensores, escalares y espinores. Un vector es un ente geométrico que puede venir definido por  $N$  números  $v^k$ , llamados sus componentes contravariantes, y que están relacionados con el espacio de tal forma que al hacer un cambio de coordenadas (1) estas componentes se transforman según

---

\* En lo que sigue utilizaremos el criterio de sumación de Einstein.

la ley

$$v'^k = A_r^k v^r,$$

es decir se transforman con la misma ley que las diferenciales de las coordenadas. Otra posibilidad es que el vector venga definido por un conjunto de  $N$  números  $v_k$ , llamados sus componentes covariantes, que ante el cambio (1) se transforman como

$$v'_k = B_k^r v_r.$$

Hay que advertir que un vector viene expresado por las componentes contravariantes o por las covariantes. No obstante, y como veremos más adelante, es posible definir un vector de orden dos, como es el caso del tensor métrico, que nos sirva para «subir o bajar los índices», es decir establecer una correspondencia entre las componentes contravariantes de un vector y sus componentes covariantes. En este caso el vector viene definido tanto por unas como por las otras componentes, pues ambas se encuentran relacionados entre sí.

Debemos distinguir entre el vector simple y el campo vectorial. En el primer caso se trata de un vector definido en un único punto del espacio. En un campo vectorial nos encontramos con un vector definido en cada punto del espacio, lo que significa que las componentes del campo vectorial son funciones de las coordenadas.

El concepto de vector es fácilmente generalizable para alcanzar el concepto de tensor. Por ejemplo, un tensor de segundo orden contravariante es un ente matemático definido por  $N^2$  componentes  $t^{pq}$  que se transforman en un cambio de coordenadas (1) por la ley

$$t'^{rk} = A_p^r A_q^k t^{pq}.$$

El concepto de tensor se puede generalizar tanto en su orden como en su carácter, sea éste covariante, contravariante o mixto. Por ejemplo, las componentes de un tensor de segundo orden mixto se transforman según

$$t'_q{}^p = A_r^p B_q^s t_s{}^r.$$

Al igual que lo señalado para los vectores, cabe hablar de un tensor definido solamente en un punto del espacio o de un campo tensorial, en este caso sus componentes son funciones de las coordenadas.

Se definen los escalares como entes matemáticos ligados con el espacio y definidos por un solo número que no varía cuando se hace un cambio de coordenadas, o sea, es invariante. Puede existir un campo escalar, entonces el número que lo define depende del punto del espacio que se considere, pero estos números seguirán siendo los mismos al realizar un cambio de coordenadas.

Fácilmente se pueden definir operaciones tensoriales como la suma, resta, multiplicación y contracción. Esta última consiste en igualar dos índices, uno superior y otro inferior y luego sumar respecto a ellos. La contracción, por ejemplo, de un tensor de cuarto orden tres veces contravariante y uno covariante  $t_q{}^{rkp}$  es un nuevo tensor de segundo orden  $t^{kp}$

$$t_r{}^{rkp} = \sum_r t_r{}^{rkp} = t^{kp}.$$

Nótese que es importante el orden en que están colocados todos los índices de las componentes de un tensor, no solamente los índices que están en la misma línea, sino los índices contravariantes respecto a los covariantes. En realidad lo que hay que distinguir es el orden entre los índices contravariantes (o entre los covariantes), pero en el caso en que se defina un tensor de segundo orden para bajar y subir índices, entonces los índices contravariantes se pueden convertir en covariantes y viceversa, por ello es también necesario conocer el orden de un tipo de índice respecto a los del otro tipo. Debemos también notar que de un tensor dado se pueden obtener varios tensores contraídos que, en general, serán diferentes entre sí. De nuestro ejemplo anterior también se pueden obtener los tensores contractos  $t_k{}^{rkp}$  y  $t_p{}^{rkp}$ .

Es posible combinar el producto con la contracción, operación especialmente útil para los vectores, denominándose en este caso producto interno o escalar. Para los vectores de componentes  $v^r$  y  $w_k$  su producto escalar será  $v^k w_k$ , donde como es habitual se sobreentiende la suma respecto a los índices repetidos, a los que se les llama índices mudos.

Una ecuación cuyos dos miembros sean tensores de igual orden y carácter es una ecuación invariante, es decir, que la relación entre sus miembros se mantiene cualesquiera que sea el sistema de coordenadas elegido. Y viceversa, si encontramos una ecuación invariante tal que uno de sus miembros tenga carácter tensorial, podemos concluir que el otro miembro también será un tensor y de iguales características.

Un tensor asimétrico, por ejemplo de segundo orden ( $t_{ik} \neq t_{ki}$ ), siempre se puede descomponer en parte simétrica  $t_{(ik)}$  y antisimétrica  $t_{[ik]}$

$$t_{(ik)} = t_{(ki)}; \quad t_{[ik]} = -t_{[ki]}$$

definidas por

$$t_{(ik)} = 1/2(t_{ik} + t_{ki}) \quad t_{[ik]} = 1/2(t_{ik} - t_{ki})$$

de tal forma que

$$t_{ik} = t_{(ik)} + t_{[ik]}.$$

Las partes simétricas y antisimétricas de un tensor son a su vez tensores y se transforman de forma independientes entre ellas. Si la ley de transformación del tensor considerado es

$$t'_{ik} = B_i^p B_k^q t_{pq},$$

se comprueba que también se cumple

$$t'_{(ik)} = \frac{1}{2}(B_i^p B_k^q t_{pq} + B_k^p B_i^q t_{pq}) = B_i^p B_k^q t_{(pq)}$$

donde se han intercambiado los índices mudos  $p$  y  $q$ ; e igualmente obtenemos

$$t'_{[ik]} = B_i^p B_k^q t_{[pq]},$$

lo que nos muestra la independencia en la transformación de las partes simétricas y antisimétricas de un tensor. Estos resultados se pueden extender a un tensor de cualquier orden y carácter.

Se puede generalizar la simetrización y antisimetrización a tensores de un orden mayor que el segundo, así para un tensor covariante de orden  $n$  tendremos

$$T_{(ij\dots k)} = \frac{1}{n!} T_{\{ij\dots k\}}; \quad T_{[ij\dots k]} = \frac{1}{n!} (-1)^m T_{\{ij\dots k\}}$$

donde  $\{ij\dots k\}$  representa la suma de todas las permutaciones posibles y  $m$  es el número de permutaciones a los que hay que someter a los índices del tensor  $T$  para llevarlos al orden inicial  $ij\dots k$ .

Se le llama traza de un tensor de segundo orden mixto a

$$Tr(a_k^i) = a_i^i$$

es decir, la suma de los elementos diagonales. La traza tiene la propiedad de ser invariante frente a cambios de coordenadas, en efecto

$$Tr(t_k^i) = t_i^i = A_i^p B_i^q t_q^p = t_p^p = Tr(t_q^p).$$

## 2.- Conexiones y derivadas

Cuando un espacio euclídeo (o sea, el espacio ordinario, ver epígrafe 15) está expresado en coordenadas curvilíneas, las derivadas parciales de las componentes de un vector  $\partial_r v^k$  no tienen propiedades definidas de transformación, por ello es necesario introducir el concepto de derivada covariante del vector. Sea el vector  $\mathbf{v} = v^k \mathbf{e}_k$ , siendo  $\mathbf{e}_k$  los vectores básicos, al hallar la derivada de  $\mathbf{v}$  se obtiene

$$d\mathbf{v} = dv^k \mathbf{e}_k + v^k d\mathbf{e}_k = \frac{\partial v^k}{\partial x^r} dx^r \mathbf{e}_k + v^k \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial x^r} dx^r,$$

como cualquier vector se puede poner como una combinación lineal de los vectores básicos, entonces

$$\frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial x^r} = \Gamma_{kr}^s \mathbf{e}_s$$

siendo los  $\Gamma_{kr}^s$  unos coeficientes a determinar. Por lo anterior queda que la derivada de un vector en un espacio euclídeo es

$$d\mathbf{v} = (\partial_r v^s + v^k \Gamma_{kr}^s) dx^r \mathbf{e}_s = D_r v^s dx^r \mathbf{e}_s, \quad (2)$$

llamando a  $D_r v^s$  las componentes de la derivada covariante del vector  $\mathbf{v}$ .

Para obtener una definición adecuada de diferenciación en un espacio genérico no euclídeo, nos guiaremos por (2). Con esto queremos indicar que la definición que daremos de derivación se reduce a la obtenida en la geometría euclídea. Teniendo esto presente, definimos la derivada covariante de un vector por los siguientes requisitos:

- La derivada covariante de un vector es un tensor de segundo orden.
- Si el campo vectorial tiene de componentes contravariantes  $v^k$  las componentes de la derivada covariante es

la expresión

$$D_r v^k = \frac{\partial v^k}{\partial x^r} + v^s \Gamma_{sr}^k = \partial_r v^k + v^s \Gamma_{sr}^k \quad (3)$$

donde los símbolos  $\Gamma_{sr}^k$  son las componentes de un campo –normalmente sin carácter tensorial– al que llamamos conexión afín o simplemente conexión.

c) La derivada covariante cumple la regla de Leibnitz de derivación de un producto.

d) En el caso de un campo escalar  $f$  la derivada covariante es idéntica a su derivada parcial

$$D_r \phi = \partial_r \phi.$$

Una serie de aclaraciones exige la anterior definición. Como  $\Gamma_{sr}^k$  no es en general simétrica respecto a los índices inferiores, se podría haber definido la derivada covariante por

$$\bar{D}_r v^k = \partial_r v^k + v^s \Gamma_{rs}^k \quad (4)$$

donde se ha invertido el orden de los subíndices de la conexión con respecto a la usada en (3). Como demostraremos más adelante, si (3) es un tensor también lo es (4), o dicho de otra forma si  $\Gamma_{sr}^k$  es una conexión, también lo es su traspuesta  $\tilde{\Gamma}_{rs}^k = \Gamma_{sr}^k$ . (4) representa una derivada covariante diferente de (3). El uso de una u otra definición es indiferente, pero debe indicarse cuál de las dos se está usando. Es posible construir una geometría diferencial donde se usen simultáneamente ambas derivadas covariantes, incluso se puede hacer una definición mixta de ambas derivadas.

Es importante saber el orden de los índices de la conexión. En nuestra definición el índice contravariante o superior se encuentra en tercer lugar. También es arbitrario el orden que se elija, pero dado un orden debe mantenerse en los cálculos sucesivos. Se podría también representar la conexión por las siguientes expresiones:  $\Gamma_{rs}^k$  y  $\Gamma_{sr}^k$ . La diferencia entre una u otra surge cuando se baja el índice superior, ya que en este caso sí es significativo el orden del índice contravariante

Es posible definir una derivada covariante sin exigir el cumplimiento de los apartados c) y/o d). Entonces sería necesario utilizar dos conexiones: una para la derivada de las componentes contravariantes y otra para la derivada de las componentes covariantes.

En esta situación también sería posible la definición de la derivada de un tensor, siguiendo para ello la similitud con lo deducido en la correspondiente derivada de un tensor en un espacio euclídeo.

Nótese que de nuestra definición de derivada covariante no se puede obtener la expresión de la conexión, por esta razón estos símbolos se convierten en un elemento básico que debe ser indicado para definir el espacio. El establecimiento del campo de la conexión nos permite efectuar la diferenciación de un campo vectorial o tensorial y a partir de estas operaciones obtenemos un conjunto de tensores que describen las características y propiedades del espacio.

Es fácil deducir la derivada covariante de un vector definido por sus componentes covariantes, para ello partimos de

$$\phi = u^k v_k$$

donde  $\phi$  es un escalar como se deriva de la leyes de transformación y  $u^k$  es un campo vectorial arbitrario. Teniendo en cuenta el apartado d) de la definición de derivada covariante

$$D_r (u^k v_k) = v_k D_r u^k + u^k D_r v_k = \partial_r (u^k v_k) = v_k \partial_r u^k + u^k \partial_r v_k$$

utilizando el valor ya encontrado de  $D_r u^k$  entonces

$$u^k (D_r v_k - \partial_r v_k + v_s \Gamma_{kr}^s) = 0$$

dado el carácter arbitrario de  $u^k$  se encuentra

$$D_r v_k = \partial_r v_k - v_s \Gamma_{kr}^s \quad (5)$$

que es la expresión buscada.

Si la derivada covariante se hubiera definido por (4) entonces en vez (5) hubiéramos encontrado

$$\bar{D}_r v_k = \partial_r v_k - v_s \Gamma_{rk}^s.$$

El proceso lo podemos continuar para hallar la derivada de un tensor de segundo orden con componentes en forma covariante. Partimos para ello del escalar

$$\phi = u^r v^k t_{rk}$$

donde  $u^r$  y  $v^k$  son dos campos vectoriales arbitrarios. Haciendo uso de un procedimiento igual que el anterior se encuentra

$$D_p t_{rk} = \partial_p t_{rk} - t_{rs} \Gamma_{kp}^s - t_{sk} \Gamma_{rp}^s.$$

Para terminar pongamos la expresión para el caso de la derivada covariante de un tensor de segundo orden con componentes mixtas

$$D_p t_r^k = \partial_p t_r^k - t_s^k \Gamma_{rp}^s + t_r^s \Gamma_{sp}^k.$$

Como ya indicamos es posible definir una derivada mixta, es decir la que utiliza tanto la definición (3) como la (4)

$$\hat{D}_p t_{rk} = \partial_p t_{rk} - t_{rs} \Gamma_{pk}^s - t_{sk} \Gamma_{rp}^s.$$

expresión que recibe el nombre de derivación covariante de Thomas.

Como antes dijimos es posible definir dos conexiones, una de ellas a utilizar en la derivada de un vector contravariante como en (3) y la otra para definir la derivada de un vector covariante

$$D_r v_k = \frac{\partial v_k}{\partial x^r} - v_s \hat{\Gamma}_{kr}^s$$

ambas conexiones deberán ser usadas cuando se calcula la derivada de un tensor que tenga índices covariantes y contravariantes. Definimos unos símbolos de tercer orden

$$C_{kr}^s = \Gamma_{kr}^s - \hat{\Gamma}_{kr}^s \quad (6)$$

que al ser la diferencia de dos conexiones es un tensor, como veremos en el epígrafe 3. Con este sistema de dos conexiones podemos calcular la derivada covariante de la delta de Kronecker

$$D_r \delta_p^q = \partial_r \delta_p^q + \delta_p^s \Gamma_{sr}^q - \delta_s^q \hat{\Gamma}_{pr}^s = \Gamma_{pr}^q - \hat{\Gamma}_{pr}^q$$

es decir

$$C_{pr}^q = D_r \delta_p^q.$$

Si  $C_{kr}^s$  es distinto de cero no queda definida la derivada de un escalar. Así, por ejemplo, para  $\phi = v_i u^i$

$$D_k \phi = \partial_k \phi + C_{ik}^s v_s u^i,$$

la situación se resuelve si

$$C_{ik}^s = C_i \delta_k^s \quad (7)$$

o bien

$$C_{ik}^s = C_k \delta_i^s$$

donde  $C_k$  es un vector covariante, al que daremos el nombre de vector de Schouten, entonces

$$D_k \phi = \partial_k \phi + C_k \phi$$

expresión que conserva el carácter lineal de la derivación covariante de un escalar, pero no cumple la regla de Leibnitz.

(7) significa una condición que deben cumplir las dos conexiones  $\Gamma$  y  $\hat{\Gamma}$ . En efecto, si contraemos (7) respecto a  $s$  y  $k$  y luego respecto a  $s$  e  $i$  obtendremos

$$C_k = \frac{1}{4} (\Gamma_{sk}^s - \hat{\Gamma}_{sk}^s); \quad C_k = \Gamma_{ks}^s - \hat{\Gamma}_{ks}^s$$

lo que nos establece la relación entre las dos conexiones

$$\Gamma_{sk}^s - 4\Gamma_{ks}^s = \hat{\Gamma}_{sk}^s - 4\hat{\Gamma}_{ks}^s.$$

Por lo visto en este epígrafe podemos definir en un mismo espacio cuatro conexiones diferentes

$$\Gamma_{rk}^s; \quad \Gamma_{kr}^s; \quad \hat{\Gamma}_{rk}^s; \quad \hat{\Gamma}_{kr}^s$$

que generarán derivadas covariantes distintas.

### 3.- Ley de transformación de las conexiones

Si bien la definición de derivada covariante no permite definir la conexión, si le impone severas limitaciones y esto es así por la condición de tensor que debe poseer la derivada covariante, lo que establece la relación de transformación que debe cumplir la conexión asociada al espacio.

Ante el cambio de coordenadas (1) la derivada covariante de un tensor toma la forma

$$D'_r v'^k = \partial'_r v'^k + v'^s \Gamma'_{sr}{}^k \quad (8)$$

que al ser un tensor deberá cumplir la siguiente ley de transformación

$$D'_r v'^k = B_r^p A_s^k D_p v^s. \quad (9)$$

Como

$$\partial'_r v'^k = \frac{\partial x^j}{\partial x'^r} \frac{\partial}{\partial x^j} (A_s^k v^s) = B_r^j A_{sj}^k v^s + B_r^j A_s^k \partial_j v^s$$

desarrollando (8) y aplicando (9)

$$D'_r v'^k = B_r^j A_{sj}^k v^s + B_r^j A_s^k \partial_j v^s + A_t^s v^t \Gamma'_{sr}{}^k = B_r^p A_s^k D_p v^s = B_r^p A_s^k \partial_p v^s + B_r^p A_t^k v^s \Gamma'_{sp}{}^t$$

y dado que el vector de componentes  $v^k$  es arbitrario, resulta tras la simplificación

$$\Gamma'_{ri}{}^k = B_i^p B_r^s A_t^k \Gamma'_{sp}{}^t - B_i^j B_r^s A_{sj}^k$$

que es la ley de transformación de la conexión.

Es posible una ligera simplificación de la anterior expresión. El segundo sumando del segundo miembro se puede poner como

$$-B_i^j B_r^s A_{sj}^k = -\frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \frac{\partial x^s}{\partial x'^r} \frac{\partial^2 x'^k}{\partial x^s \partial x^j} + \frac{\partial}{\partial x^j} \left( \frac{\partial x^s}{\partial x'^r} \frac{\partial x'^k}{\partial x^s} \right) \frac{\partial x^j}{\partial x'^i}$$

donde hemos sumado una expresión que es idénticamente nula por serlo la derivada del paréntesis que es el símbolo de Kronecker,  $\delta_r^k$ . Desarrollando se llega a

$$-B_i^j B_r^s A_{sj}^k = \frac{\partial^2 x^s}{\partial x'^r \partial x'^i} \frac{\partial x'^k}{\partial x^s} = B_{ri}^s A_s^k$$

con este resultado la ley de transformación de una conexión frente a un cambio del sistema de coordenadas queda

$$\Gamma'_{ri}{}^k = B_i^q B_r^s A_p^k \Gamma'_{sq}{}^p + B_{ri}^s A_s^k. \quad (10)$$

Cualquier campo que ante una transformación de coordenadas cambie como (10) es una conexión. La anterior expresión se puede tomar como la forma más general de definición de una conexión. Nótese que si la transformación de coordenadas es lineal  $B_{ri}^s = 0$  y entonces la conexión se comporta como un tensor.

#### 4.- Propiedades de las conexiones

Aunque sin carácter tensorial en general, cualquier conexión puede descomponerse en parte simétrica y antisimétrica

$$\Gamma_{is}{}^k = \Gamma_{(is)}{}^k + \Gamma_{[is]}{}^k,$$

donde volvemos a utilizar el criterio de que los paréntesis redondeados representan simetrización y los cuadrados antisimetrización, y que son definidos por

$$\Gamma_{(is)}{}^k = \frac{1}{2} (\Gamma_{is}{}^k + \Gamma_{si}{}^k)$$

$$\Gamma_{[is]}{}^k = \frac{1}{2} (\Gamma_{is}{}^k - \Gamma_{si}{}^k).$$

Sus leyes de transformación son diferentes, de tal forma que la parte antisimétrica se transforma como un tensor de tercer orden, algo que no ocurre con la parte simétrica. Esto viene a significar que las partes simétricas y antisimétricas no se mezclan y ante a ley de transformación actúan como magnitudes independientes. La parte antisimétrica de la conexión tiene 24 componentes independientes y la parte simétrica tiene 40 componentes distintas, las que hacen el total de 64 componentes de la conexión.

Si una conexión es simétrica en un sistema de coordenadas, será simétrica con cualesquiera otras coordenadas, pues en este caso la parte antisimétrica es nula y al ser un tensor, seguirá siendo nula en cualquier otro sistema de coordenadas. No obstante, la conexión antisimétrica no tiene carácter invariante, es decir la conexión puede ser antisimétrica en un sistema de coordenadas y no serlo en otro.

La parte antisimétrica de una conexión no es una conexión, ya que se transforma como un tensor y no con la ley (10). No obstante, la parte simétrica de una conexión es a su vez una conexión pues cumple la condición de transformación (10), en efecto

$$\Gamma_{(ri)}^k = \frac{1}{2}(\Gamma_{ri}^k + \Gamma_{ir}^k) = B_i^q B_r^s A_p^k \frac{1}{2}(\Gamma_{pq}^k + \Gamma_{qp}^k) + B_{ri}^s A_s^k = B_i^q B_r^s A_p^k \Gamma_{(pq)}^k + B_{ri}^s A_s^k.$$

Por tanto podemos afirmar que una conexión puede ser asimétrica (o sea, que contiene tanto parte simétrica como antisimétrica) y simétrica, pero no pueden existir conexiones antisimétricas para transformaciones generales de coordenadas.

Es fácil comprobar que la diferencia entre dos conexiones distintas  $\Gamma_{is}^k$  y  $\bar{\Gamma}_{is}^k$  es un tensor. En efecto, por la ley de transformación (10) se encuentra

$$\Gamma_{is}^k - \bar{\Gamma}_{is}^k = A_r^k B_i^p B_s^q (\Gamma_{pq}^r - \bar{\Gamma}_{qp}^r),$$

lo que nos viene a decir que dada una conexión podemos obtener otra sumándole un tensor cualquiera  $T_{is}^k$

$$\bar{\Gamma}_{is}^k = \Gamma_{is}^k + T_{is}^k$$

Si bien la suma de dos conexiones no forma en general una nueva conexión, la expresión

$$\alpha \Gamma_{is}^k + \beta \bar{\Gamma}_{is}^k$$

sí será una conexión siempre y cuando  $\alpha + \beta = 1$ .

La conexión admite dos contracciones

$$\Gamma_s = \Gamma_{ks}^k; \quad \tilde{\Gamma}_s = \Gamma_{sk}^k$$

que son diferentes salvo que la conexión sea simétrica. Los símbolos  $\Gamma_s$  y  $\tilde{\Gamma}_s$  son las componentes covariantes de un vector como se puede comprobar por aplicación de (10).

Si  $\Gamma_{is}^k$  son las componentes de una conexión y  $\lambda$  es una función invariante

$$\Gamma_{is}^{*k} = \Gamma_{is}^k + \delta_i^k \partial_s \lambda$$

es una nueva conexión puesto que se transforma según (10).

Si  $\Gamma_{is}^k$  es una conexión, entonces su transpuesta  $\tilde{\Gamma}_{is}^k = \Gamma_{si}^k$  también es una conexión, como fácilmente se deriva al aplicar (10).

Si  $\Gamma_{is}^k$  es una conexión, entonces

$$U_{is}^k = \Gamma_{is}^k - \Gamma_i \delta_s^k$$

también es una conexión, ya que el segundo sumando del segundo miembro es un tensor. Igualmente ocurriría si usamos  $\tilde{\Gamma}_i$  en vez de  $\Gamma_i$  en la anterior expresión o si cambiamos en el segundo sumando del segundo miembro los índice  $i$  por  $s$ .

### 5.- Tensores especiales

La delta de Kronecker  $\delta_i^k$  ( $=1$  si  $i=k$  ;  $=0$  si  $i \neq k$ ) puede ser entendida como las componentes de un tensor mixto que tiene en todos los sistemas de coordenadas las mismas componentes, como la demuestra la identidad

$$\delta_i^k = A_p^k B_i^q \delta_q^p.$$

El símbolo de Levi-Civita completamente antisimétrico  $\varepsilon^{pqrs}$  tiene el valor 1 si hay una permutación par de los índices, el valor  $-1$  si la permutación es impar y 0 si hay al menos dos índices iguales. Este símbolo no tienen carácter tensorial pero a partir de él podemos definir en un espacio tetradimensional un tensor  $\Delta^{pqrs}$ , también de carácter antisimétrico, por la relación

$$\Delta^{pqrs} = J \varepsilon^{pqrs} \tag{11}$$

donde  $J$  es un parámetro que ante un cambio de coordenadas se transforma según la ley

$$J' = |A| J$$

siendo  $|A|$  el determinante de la matriz de transformación  $A_i^k$ . En efecto

$$A_p^i A_q^j A_r^k A_s^l \Delta^{pqrs} = A_p^1 A_q^2 A_r^3 A_s^4 \varepsilon^{ijkl} J \varepsilon^{pqrs} = |A| J \varepsilon^{ijkl} = J' \varepsilon^{ijkl} = \Delta'^{pqrs}$$

lo que nos muestra el carácter de tensor de cuarto orden contravariante del símbolo  $\Delta^{pqrs}$ . Se puede hacer la generalización a un espacio de cualquier dimensión.

### 6.- Sistema de coordenadas localmente geodésico

Vamos a demostrar que para el caso de un espacio con una conexión simétrica es siempre posible encontrar en cada punto P un sistema de coordenadas respecto al cual la nueva conexión sea idénticamente nula en ese

punto.

Consideremos la transformación de coordenadas

$$x'^k = x^k - x_0^k + \frac{1}{2}(\Gamma_{is}^k)_0 (x^i - x_0^i)(x^s - x_0^s) \quad (12)$$

donde el subíndice 0 se refiere al punto P en donde pretendemos obtener las componentes de la conexión respecto al nuevo sistema de coordenadas. Hallando la derivación parcial de la ecuación de transformación (12)

$$\frac{\partial x'^k}{\partial x'^r} = \delta_r^k = \frac{\partial x^k}{\partial x'^r} + (\Gamma_{is}^k)_0 \frac{\partial x^i}{\partial x'^r} (x^s - x_0^s) \quad (13)$$

y particularizando para el punto P

$$\delta_r^k = \left( \frac{\partial x^k}{\partial x'^r} \right)_0 = (B_r^k)_0 \Rightarrow (A_r^k)_0 = \delta_r^k,$$

lo que nos indica que los tensores no sufren ningún cambio en la transformación de coordenadas (12), ya que la matriz de la transformación es idéntica a la unidad. Derivando (13)

$$0 = \frac{\partial^2 x^k}{\partial x'^r \partial x'^m} + (\Gamma_{is}^k)_0 \frac{\partial^2 x^i}{\partial x'^r \partial x'^m} (x^s - x_0^s) + (\Gamma_{is}^k)_0 \frac{\partial x^i}{\partial x'^r} \frac{\partial x^s}{\partial x'^m}$$

en el punto P nos quedará

$$\left( \frac{\partial^2 x^k}{\partial x'^r \partial x'^m} \right)_0 = (B_{rm}^k)_0 = -(\Gamma_{rm}^k)_0,$$

teniendo presente la ley de transformación de la conexión (10) se encuentra

$$(\Gamma'_{is}{}^k)_0 = \delta_i^p \delta_s^q \delta_r^k (\Gamma_{pq}{}^r)_0 - (\Gamma_{is}{}^r)_0 \delta_r^k = 0$$

tal como queríamos demostrar; es decir, que para un espacio que tenga una conexión simétrica existe, para cada punto, un sistema de coordenadas respecto al cual la conexión transformada es nula en ese punto; lo que no implica que tengan que ser nulas sus derivadas. Al sistema de coordenadas donde se cumple esta propiedad se la llama localmente geodésico, porque, como veremos más adelante, los ejes coordenados en ese sistema son líneas geodésicas.

El teorema inverso también es cierto, si para cualquier punto de un espacio existe un sistema de coordenadas para el cual la conexión es idénticamente nula en ese punto, entonces la conexión es simétrica respecto a cualquier sistema de coordenadas.

En efecto, consideremos un sistema localmente geodésico definido en un punto P, en ese punto la conexión referida a ese sistema es nula; al hacer un cambio a otro sistema de coordenadas, la nueva conexión vendrá dada por (10) y en el punto P será

$$(\Gamma'_{is}{}^k)_0 = 0 + B_{is}^r A_r^k$$

que es simétrica por serlo  $B_{is}^r$ . El mismo procedimiento se puede hacer para todos los demás puntos del espacio, encontrándose que en todos ellos la conexión es simétrica.

Si la conexión no es simétrica no podemos obtener un sistema geodésico en todo punto, pues no es posible anular la parte antisimétrica de la conexión por ser un tensor. No obstante, siempre podremos hacer una transformación de coordenadas que consiga en cada punto del espacio anular la parte simétrica de la conexión. Si la transformación de coordenadas es

$$x'^k = x^k - x_0^k + \frac{1}{2}[\Gamma_{(is)}^k]_0 (x^i - x_0^i)(x^s - x_0^s)$$

entonces se encuentra

$$(B_{is}^r)_0 = -[\Gamma_{(is)}^r]_0; \quad (A_r^k)_0 = \delta_r^k$$

que al aplicarlo a (10) se deduce

$$[\Gamma'_{(is)}{}^r]_0 = 0; \quad (\Gamma'_{[is]}{}^r)_0 = (\Gamma'_{[is]}{}^r)_0$$

tal como habíamos indicado antes.

### 7.- Tensor y vector de torsión

Definimos el tensor de torsión o de Cartan por

$$\tau_{is}{}^k = \Gamma_{is}{}^k - \Gamma_{si}{}^k = 2\Gamma_{[is]}{}^k \quad (14)$$

que tiene carácter tensorial ya que es la diferencia entre dos conexiones. En el caso de que la conexión sea simétrica el tensor de torsión es nulo. En el caso de un espacio de cuatro dimensiones el número de componentes independientes del tensor de torsión es 24 y si el espacio tiene  $N$  dimensiones son  $N!$  las componentes independientes, donde  $N$  es la dimensión del espacio.

Se llama vector de torsión o de Cartan a la contracción del tensor anterior

$$\tau_i = \tau_{ik}{}^k = \Gamma_{ik}{}^k - \Gamma_{ki}{}^k = \tilde{\Gamma}_i - \Gamma_i$$

que como ya se ha visto es un vector covariante.

A partir de una conexión  $\Gamma_{is}{}^k$  se puede obtener otras dos conexiones para un espacio de  $N$  dimensiones

$$\Gamma_{is}^{*k} = \Gamma_{is}{}^k + \frac{1}{N-1} \delta_i^k \tau_s, \quad \Gamma_{is}^{*k} = \Gamma_{is}{}^k - \frac{1}{N-1} \delta_s^k \tau_i$$

que tienen asociados vectores de torsión nulo. La conexión

$$\Gamma_{is}^{*k} = \Gamma_{is}{}^k + \frac{1}{2N-2} (\delta_i^k \tau_s - \delta_s^k \tau_i)$$

también tiene un vector de torsión nulo.

En el caso de existir torsión las derivadas covariantes  $D$  y  $\bar{D}$  están relacionadas por

$$D_k u^i - \bar{D}_k u^i = u^s \tau_{sk}{}^i$$

naturalmente si la conexión es simétrica, ambas derivadas coinciden.

### 8.- Tensor de curvatura

La conexión asociada a un espacio es el principal elemento para definir las propiedades no métricas. Pero ella sola no permite informar de algunos rasgos característicos del espacio, como es el caso de la curvatura, que nos dice cómo se aparta el espacio de un espacio plano o euclídeo

El grado de curvatura de un espacio es dado por el tensor de Riemann-Christoffel de cuarto orden. Para obtener su valor vamos a hallar la diferencia entre las derivadas segundas de un campo vectorial cualquiera

$$D_i (D_r v^k) - D_r (D_i v^k)$$

que en el caso de un espacio euclídeo se anula; aunque su anulación no significa que el espacio sea euclídeo. Haciendo los correspondientes cálculos y teniendo presente que la derivada covariante de un vector es un tensor y que es de aplicación la definición (3), se llega a la expresión

$$D_i (D_r v^k) - D_r (D_i v^k) = v^s (\Gamma_{sr,i}{}^k - \Gamma_{si,r}{}^k + \Gamma_{sr}{}^n \Gamma_{ni}{}^k - \Gamma_{si}{}^n \Gamma_{nr}{}^k) + D_s v^k (\Gamma_{ir}{}^s - \Gamma_{ri}{}^s)$$

donde la coma representa derivación parcial respecto a las coordenadas. La expresión anterior queda

$$D_i (D_r v^k) - D_r (D_i v^k) = v^s R^k{}_{sir} + D_s v^k \tau_{ir}{}^s \quad (15)$$

donde se ha utilizado la definición de tensor de torsión (14) y se ha definido el tensor de curvatura de Riemann-Christoffel por

$$R^k{}_{sir} = \Gamma_{sr,i}{}^k - \Gamma_{si,r}{}^k + \Gamma_{sr}{}^n \Gamma_{ni}{}^k - \Gamma_{si}{}^n \Gamma_{nr}{}^k \quad (16)$$

que en efecto es un tensor ya que los restantes términos de (15) son todos tensoriales.

Si en vez de la definición de derivada covariante (3) utilizamos la (4) obtendremos otro tensor de curvatura

$$\tilde{R}^k{}_{sir} = \Gamma_{rs,i}{}^k - \Gamma_{is,r}{}^k + \Gamma_{rs}{}^n \Gamma_{in}{}^k - \Gamma_{is}{}^n \Gamma_{rn}{}^k \quad (17)$$

diferente al anterior. En el caso de estar en la geometría de Riemann (ver epígrafe 15) coinciden ambos tensores de curvatura ya que la conexión es simétrica. Naturalmente se pueden obtener otros tensores de curvatura con otros tipos de conexiones.

Como ya indicamos, si a una conexión le sumamos un tensor volvemos a encontrar una nueva conexión

$$\bar{\Gamma}_{is}{}^k = \Gamma_{is}{}^k + T_{is}{}^k$$

que tendrá asociada un nuevo tensor de curvatura  $\bar{R}^k{}_{sir}$  relacionado con (16) por la expresión

$$\bar{R}^k_{sir} = R^k_{sir} + D_i T_{sr}^k - D_r T_{si}^k + T_{sn}^k (\Gamma_{ri}^n - \Gamma_{ir}^n) + T_{sr}^n T_{ni}^k - T_{si}^n T_{nr}^k \quad (18)$$

o bien de forma más compacta

$$\bar{R}^k_{sir} = R^k_{sir} + 2D_{[i} T_{s|r]}^k + T_{sn}^k \tau_{ri}^n + 2T_{s[r}^n T_{n|i]}^k$$

donde los corchetes significan antisimetrización y los índices encerrados entre líneas paralelas vienen a significar que no entran en la antisimetrización y permanecen inalterables. Hay que advertir que las derivadas covariantes que aparecen en (18) se calculan respecto a la conexión originaria  $\Gamma_{is}^k$ . Es posible readaptar (18) al objeto que las derivadas covariantes se expresa respecto a la nueva conexión  $\bar{\Gamma}_{is}^k$

$$\bar{R}^k_{sir} = R^k_{sir} + \bar{D}_i T_{sr}^k - \bar{D}_r T_{si}^k + T_{sn}^k (\bar{\Gamma}_{ri}^n - \bar{\Gamma}_{ir}^n) - T_{sr}^n T_{ni}^k + T_{si}^n T_{nr}^k$$

donde  $\bar{D}$  representa la derivada covariante calculada respecto a la nueva conexión.

Cabe relacionar una variación del tensor de curvatura  $\delta R^k_{sir}$  con la correspondiente variación de la conexión  $\delta \Gamma_{si}^k$ . De (16) y de la definición de derivada covariante se obtiene

$$\delta R^k_{sri} = D_i \delta \Gamma_{sr}^k - D_r \delta \Gamma_{si}^k + \tau_{ri}^n \delta \Gamma_{sn}^k \quad (19)$$

donde hemos tenido presente que  $\delta \Gamma_{si}^k$  es un tensor por ser la diferencia entre conexiones y nos está permitido conmutar la variación  $\delta$  y la derivada respecto a las coordenadas espacio-temporales. A (19) la llamaremos identidad de Palatini para el tensor de curvatura.

### 9.- Desplazamiento paralelo de un vector

Sea el vector  $\mathbf{v} = v^k \mathbf{e}_k$  definido en el punto P de un espacio euclídeo. Si trasladamos paralelamente ese vector al punto P' infinitamente cercano a P, no tendrá las mismas componentes, puesto que los vectores básicos, al venir el espacio en coordenadas curvilíneas, serán diferentes en P que en P' y a consecuencia de esta variación de los vectores básicos se producirá una variación en las componentes del vector  $\mathbf{v}$  aún cuando se traslade paralelamente al punto P'.

La variación del vector  $\mathbf{v}$  a consecuencia del cambio de vectores básicos de P a P' viene dado por

$$v^k d\mathbf{e}_k = v^k \Gamma_{ki}^r dx^i \mathbf{e}_r$$

donde  $dx^i$  es la diferencia de coordenadas entre los puntos P y P'. Entonces podemos decir que un vector se ha trasladado paralelamente del punto P al P' si sus componentes cambian según

$$dv^r = -v^k \Gamma_{ki}^r dx^i$$

lo que neutraliza la variación ocasionada por el cambio de vectores básicos, consiguiendo, por tanto, que la diferencia entre el vector en P y en P' sea nula:  $d\mathbf{v} = 0$ . O dicho de otra forma, un vector es trasladado paralelamente de un punto a otro punto infinitamente cercano si la derivada absoluta del vector calculada entre los dos puntos es nula

$$Dv^k = dv^k + v^s \Gamma_{si}^r dx^i = 0.$$

Podemos generalizar esta definición a un espacio genérico y decir que cuando un vector se traslada paralelamente desde el punto P de coordenadas  $x^i$  a otro punto infinitamente cercano P' de coordenadas  $x^i + dx^i$  la diferencia de sus componentes en ambos puntos es

$$dv^k = -v^s \Gamma_{si}^r dx^i. \quad (20)$$

Cuando en un espacio euclídeo se traslada paralelamente un vector a partir de punto para seguir un trayecto

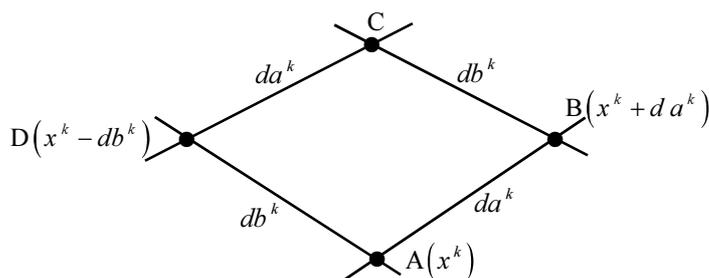


Figura 1

cerrado y volver al mismo punto de partida, el vector original coincide con el que resulta de la traslación paralela. Pero esto no se cumple en general. Vamos a demostrar a continuación que la variación de las componentes de un vector cuando se traslada paralelamente a través de un circuito cerrado elemental está relacionado con el tensor de curvatura y en general es distinto de cero.

Consideremos el paralelogramo infinitesimal de la figura 1. Al transportar paralelamente un vector de componentes  $v^s$  desde el punto A al B sus componentes varían según (20)

$$-v^s(x^k)\Gamma_{si}^r(x^k)da^i.$$

Al hacer el transporte de B a C las componentes del vector se modifican según

$$-v^s(x^k + da^k)\Gamma_{si}^r(x^k + da^k)db^i.$$

La variación de las componentes del vector cuando se traslada paralelamente desde C a D serán las mismas que cuando se traslada de D a C pero cambiado de signo

$$v^s(x^k + db^k)\Gamma_{si}^r(x^k + db^k)da^i.$$

Por último la traslación de D a A será la misma que de A a D cambiando el signo

$$v^s(x^k)\Gamma_{si}^r(x^k)db^i.$$

Ahora determinemos la variación total experimentada por las componentes del vector cuando se hace la traslación paralela a lo largo del paralelogramo infinitesimal considerado

$$dv^r = -v^s(x^k)\Gamma_{si}^r(x^k)da^i - v^s(x^k + da^k)\Gamma_{si}^r(x^k + da^k)db^i + \\ + v^s(x^k + db^k)\Gamma_{si}^r(x^k + db^k)da^i + v^s(x^k)\Gamma_{si}^r(x^k)db^i,$$

o en primer orden de aproximación

$$dv^r = -v^s\Gamma_{si,k}^r da^k db^i - \partial_k v^s \Gamma_{si}^r da^k db^i + v^s \Gamma_{si,k}^r da^i db^k + \partial_k v^s \Gamma_{si}^r da^i db^k$$

y teniendo presente que la variación de las componentes del vector es

$$\partial_k v^s = -v^n \Gamma_{nk}^s$$

nos queda finalmente

$$dv^r = R^r_{nik} v^n da^k db^i,$$

con lo que queda demostrado que al trasladar un vector paralelamente a sí mismo a través de un recinto infinitesimal cerrado, el vector resultante no coincide con el de partida, salvo en el caso especial en que el tensor de curvatura sea cero. En general, por tanto, la traslación paralela de un vector por un circuito cerrado no reproduce al mismo vector.

### 10.- Regla del paralelogramo

Consideremos en un espacio con torsión un vector de componentes  $\delta x^k$  cuyos extremos son los puntos infinitesimalmente cercanos A y B. Si trasladamos este vector paralelamente hasta los puntos infinitesimalmente cercanos C y D, cuyas coordenadas se diferencian en  $dx^k$  de las de A y B, obtendremos un nuevo vector desplazamiento de coordenadas

$$\delta x^k - \Gamma_{ir}^k \delta x^i dx^r.$$

Si ahora repetimos la operación pero con el vector de extremos A y C, que tiene de coordenadas  $dx^k$ , y lo trasladamos paralelamente hasta que el extremo que estaba en A se sitúe en el punto B, obtendremos un vector de componentes

$$dx^k - \Gamma_{ik}^k dx^i \delta x^r.$$

Al sumar los cuatro vectores que forman el paralelogramo

$$\overline{AB} + \overline{BD} - \overline{CD} - \overline{CA} = \tau_{ir}^k \delta x^i dx^r$$

lo que no es nulo en general. Esto significa que el paralelogramo construido no es cerrado, es decir el extremo del vector resultado de la traslación de  $\overline{AC}$  no coincide con el punto D. Por tanto la regla del paralelogramo no se cumple en espacios con torsión.

El resultado inverso también es cierto, es decir que si no se cumple la regla del paralelogramo (o sea, los paralelogramos no se cierran) entonces el espacio tiene torsión.

### 11.- Tensor de Ricci

A partir del tensor de curvatura se pueden definir dos nuevos tensores mediante la contracción de índices. Se le llama tensor de Ricci a la contracción

$$R_{si} = R^k_{sik} = \Gamma_{sk,i}^k - \Gamma_{si,k}^k + \Gamma_{sk}^t \Gamma_{ti}^k - \Gamma_{si}^t \Gamma_{tk}^k \quad (21)$$

compuesta tanto de parte simétrica como antisimétrica.

La otra posible contracción del tensor de curvatura recibe el nombre de curvatura homotética y es definida por

$$V_{ir} = R^k_{kir} = \Gamma_{kr,i}^k - \Gamma_{ki,r}^k + \Gamma_{kr}^n \Gamma_{ni}^k - \Gamma_{ki}^n \Gamma_{nr}^k = \Gamma_{kr,i}^k - \Gamma_{ki,r}^k,$$

que es un tensor antisimétrico. Las otras contracciones posibles del tensor de curvatura no dan lugar a nuevos tensores.

Por cálculo directo es fácil comprobar que la derivada de la curvatura homotética cumple la relación

$$V_{ir,j} + V_{rj,i} + V_{ji,r} = 0. \quad (22)$$

Debemos tener presente que si aceptamos como definición de derivada covariante la (4) entonces obtenemos un tensor de Ricci y una curvatura homotética diferentes en general de las anteriores.

Si derivamos otra conexión añadiéndole a  $\Gamma_{rk}^s$  un tensor  $T_{rk}^s$  entonces el tensor de Ricci se obtendrá de (21)

$$\bar{R}_{si} = R_{si} + 2D_{[i} T_{|s|k]}^k + T_{sn}^k \tau_{ki}^n + 2T_{s[k}^n T_{|n|i]}^k.$$

Si utilizamos las derivadas covariantes calculadas con la conexión

$$\bar{\Gamma}_{rk}^s = \Gamma_{rk}^s + T_{rk}^s$$

entonces el tensor de Ricci quedará

$$\bar{R}_{si} = R_{si} + 2\bar{D}_{[i} T_{|s|k]}^k + T_{sn}^k \bar{\tau}_{ki}^n - 2T_{s[k}^n T_{|n|i]}^k,$$

donde la barra significa que se utiliza la conexión  $\bar{\Gamma}_{is}^k$ .

La variación del tensor de Ricci se relaciona con la variación de la conexión por

$$\delta R_{si} = D_i \delta \Gamma_{sk}^k - D_k \delta \Gamma_{si}^k + \tau_{mi}^k \delta \Gamma_{sk}^m \quad (23)$$

que representa la identidad de Palatini para el tensor de Ricci, y al igual que en (19), hemos conmutado la derivación respecto a las coordenadas espacio-temporales con la variación  $\delta$ . La expresión (23) resultará especialmente útil en el cálculo de variaciones que nos permite obtener las ecuaciones de campo a partir de un principio variacional.

La identidad de Palatini también se puede extender a la variación de la curvatura homotética, obteniéndose

$$\delta V_{ir} = D_i \delta \Gamma_{kr}^k - D_r \delta \Gamma_{ki}^k + \tau_{ri}^s \delta \Gamma_{ks}^k.$$

El tensor de Ricci no es en general simétrico, no obstante siempre se puede descomponer en parte simétrica y antisimétrica

$$R_{si} = R_{(si)} + R_{[si]}.$$

En el caso especialmente importante en que la conexión sea simétrica (o sea, no haya torsión) entonces la parte antisimétrica está relacionada con la curvatura homotética por

$$R_{[si]} = \frac{1}{2} V_{si}, \quad (24)$$

y la parte simétrica toma la forma

$$R_{(si)} = R_{si} - \frac{1}{2} V_{si} = \frac{1}{2} \Gamma_{sk,i}^k + \frac{1}{2} \Gamma_{ik,s}^k - \Gamma_{si,k}^k + \Gamma_{sk}^t \Gamma_{ti}^k - \Gamma_{si}^t \Gamma_{tk}^k.$$

La identidad de Palatini se extiende a las partes simétricas y antisimétricas del tensor de Ricci

$$\delta R_{(si)} = \frac{1}{2} (\delta R_{ik} + \delta R_{ki})$$

entonces utilizando (23) y teniendo en cuenta que

$$\delta \Gamma_{(si)}^k = \delta \Gamma_{si}^k - \frac{1}{2} \delta \tau_{si}^k$$

queda

$$\delta R_{(si)} = D_{(s} \delta \Gamma_{i)k}^k - D_k \delta \Gamma_{si}^k + \frac{1}{2} D_k \delta \tau_{si}^k + \tau_{m(i}^k \delta \Gamma_{s)k}^m$$

y en el caso articular de que la conexión sea simétrica la anterior expresión se reduce a

$$\delta R_{(si)} = D_{(s} \delta \Gamma_{i)k}^k - D_k \delta \Gamma_{si}^k.$$

En cuanto a la variación de la parte antisimétrica del tensor de Ricci

$$\delta R_{[si]} = \frac{1}{2} (\delta R_{si} - \delta R_{is})$$

de donde utilizando (23) se deduce

$$\delta R_{[si]} = D_{[i} \delta \Gamma_{s]k}^k - \frac{1}{2} D_k \delta \tau_{si}^k + \tau_{m[i}^k \delta \Gamma_{s]k}^m$$

y para el caso especial de conexión simétrica

$$\delta R_{[si]} = D_{[i} \delta \Gamma_{s]k}^k.$$

Debemos añadir por último que si existiera un tensor métrico entonces sería posible subir y bajar los índices, de tal forma que podríamos obtener otra contracción del tensor de curvatura

$$R'_{ik} = R_{i^r rk} = g^{rm} g_{in} R^n{}_{mrk}$$

si de nuevo se aplicara una nueva contracción se obtendría una curvatura escalar (ver más adelante) de signo opuesto a la que se obtendría con el tensor de Ricci.

## 12.- Identidades de Bianchi

La derivada covariante del tensor de curvatura es

$$D_m R^k{}_{sir} = \partial_m R^k{}_{sir} + R^t{}_{sir} \Gamma_{tm}^k - R^k{}_{tir} \Gamma_{sm}^t - R^k{}_{str} \Gamma_{im}^t - R^k{}_{sit} \Gamma_{rm}^t,$$

si consideramos que la conexión es simétrica, existirá en cada punto un sistema de coordenadas localmente geodésico, donde las conexiones son nulas. Si elegimos este sistema entonces

$$D_m R^k{}_{sir} = \partial_m \Gamma_{sr,i}^k - \partial_m \Gamma_{si,r}^k = \Gamma_{sr,im}^k - \Gamma_{si,rm}^k.$$

Permutando los índices  $m, i, r$  se obtiene

$$\begin{aligned} D_i R^k{}_{srm} &= \Gamma_{sm,r,i}^k - \Gamma_{sr,mi}^k \\ D_r R^k{}_{smi} &= \Gamma_{si,m,r}^k - \Gamma_{sm,ir}^k. \end{aligned}$$

Al sumar las tres expresiones encontradas se llega a

$$D_m R^k{}_{sir} + D_i R^k{}_{srm} + D_r R^k{}_{smi} = 0 \quad (25)$$

que al ser una identidad tensorial y válida en un sistema de coordenadas determinado (sistema localmente geodésico), se mantendrá en cualquier otro sistema de referencia. A (25) se le llama identidad de Bianchi y es válida en el caso de conexión simétrica.

Es posible generalizar las identidades de Bianchi para el caso en que la conexión no sea simétrica, en este caso se encuentra por cálculo directo

$$D_m R^k{}_{sir} + D_i R^k{}_{srm} + D_r R^k{}_{smi} = R^k{}_{pmi} \tau_{rs}^p + R^k{}_{pir} \tau_{ms}^p + R^k{}_{prm} \tau_{is}^p$$

o en notación más compacta

$$R^k{}_{s\{ir;m\}} = R^k{}_{p\{mi\tau_r\}s}^p$$

donde el punto y coma representa la derivación covariante y  $\{\dots\}$  es la suma de las permutaciones.

## 13.- Tensor métrico

Consideremos un espacio euclídeo expresado en coordenadas curvilíneas. En cada punto existe un conjunto de vectores básicos ( $\mathbf{e}_k$ ) que dependen del punto en que están definidos. Sus productos escalares nos dan un conjunto de números que dependen del punto del espacio, que tiene carácter de tensor de segundo orden covariante y al que llamamos tensor métrico

$$g_{ik} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k.$$

El módulo de un vector  $d\mathbf{x} = dx^k \mathbf{e}_k$ , que corresponde al cuadrado de la distancia infinitesimal entre sus extremos  $ds^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}$ , vendrá dado por

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$$

que le llamamos elemento de línea del espacio euclídeo.

Este resultado lo extendemos a un espacio genérico y decimos que el tensor métrico es un tensor covariante de segundo orden asociado al espacio, es decir, que se trata de un campo tensorial  $g_{ik}(x^r)$  que no es singular, lo que significa que su determinante es distinto de cero.

Consideremos dos puntos A y B definidos por las coordenadas  $x^r$  y  $x^r + dx^r$  respectivamente; se llama distancia entre los dos puntos a la cantidad infinitesimal dada por

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k. \tag{26}$$

El tensor métrico no es en general simétrico. Sin embargo, sólo la parte simétrica interviene en el cálculo de la distancia, en efecto

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k = g_{(ik)} dx^i dx^k + g_{[ik]} dx^i dx^k = g_{(ik)} dx^i dx^k,$$

donde el sumando que contiene la parte antisimétrica del tensor métrico se anula al tener en cuenta que se pueden intercambiar entre sí los índices mudos  $i$  y  $k$ .

Con el tensor métrico se puede realizar la elevación o descenso de índices. Dado un vector cuyas componentes se encuentren en forma contravariante  $v^k$ , podemos obtener las componentes covariantes por la operación

$$v_s = g_{ks} v^k, \tag{27}$$

entendemos que ambos conjuntos de componentes representan al mismo vector, que de esta forma viene dado por dos conjuntos diferentes de componentes pero relacionadas entre sí.

De igual forma se pueden descender los índices de un tensor, en operaciones tales como las siguientes

$$t_{rs} = g_{ir} g_{ks} t^{ik}$$

o bien como

$$t_{rs} = g_{kr} t^k_s,$$

nótese el orden en que aparecen los índices del tensor métrico.

Como el tensor métrico es invertible (por ser singular), debe tener un inverso  $g'^{ks}$ , tal que cumpla

$$g_{rk} g'^{ks} = \delta_r^s$$

Si  $g$  es el determinante del tensor métrico  $g_{rk}$ ;  $\alpha^{is}$  el menor adjunto asociado al elemento  $i, s$  y  $\tilde{\alpha}^{is} = \alpha^{si}$  su traspuesta, entonces el inverso del tensor métrico es

$$g'^{ks} = \frac{1}{g} \tilde{\alpha}^{ks} = \frac{1}{g} \alpha^{sk}.$$

Pero se prefiere en vez de utilizar  $g'^{ks}$ , interpretar el tensor métrico en componentes contravariantes como el traspuesto del tensor inverso, es decir

$$g^{ks} = \frac{1}{g} \alpha^{ks}, \tag{28}$$

entonces la relación entre las componentes del tensor métrico en función de sus componentes contravariante y covariante es

$$g_{kr} g^{ks} = \delta_r^s. \tag{29}$$

Como se ve por el orden de los índices, (29) no es la operación tensorial  $G \cdot G^{-1} = I$ , donde  $G$  es la matriz de elementos  $g_{kr}$ , sino la ecuación  $G \cdot \tilde{G}^{-1} = I$ , donde  $G^{-1}$  tiene de elementos los  $g'^{rk}$  anteriormente definidos.

De (29) se obtiene

$$g_{rk} g^{sk} = \delta_r^s.$$

De (29) también se deduce que  $g^{ks}$  son las componentes de un tensor de segundo orden contravariante.

El tensor métrico también nos permite elevar los índices tensoriales. En efecto, multiplicando (27) por  $g^{rs}$

$$g^{rs} v_s = g^{rs} g_{ks} v^k = \delta_k^r v^k = v^r$$

con lo que se logra subir los índices. Este método es extensible para subir o bajar los índices de las componentes de los tensores, por ejemplo  $t^{pq} = g^{pr} g^{qk} t_{rk}$ .

El determinante del tensor métrico en un espacio tetradimensional, tal como el espacio-tiempo ordinario, es

$$g = \varepsilon^{pqrs} g_{1p} g_{2q} g_{3r} g_{4s},$$

que también se puede desarrollar haciendo uso de los menores adjuntos, por ejemplo

$$g = g_{1p} (\varepsilon^{pqrs} g_{2q} g_{3r} g_{4s}) = g_{1p} \alpha^{1p}.$$

La derivada del determinante del tensor métrico se puede desarrollar por sus menores adjuntos

$$dg = dg_{1p} (\varepsilon^{pqrs} g_{2q} g_{3r} g_{4s}) + dg_{2q} (\varepsilon^{pqrs} g_{1p} g_{3r} g_{4s}) + \\ + dg_{3r} (\varepsilon^{pqrs} g_{1p} g_{2q} g_{4s}) + dg_{4s} (\varepsilon^{pqrs} g_{1p} g_{2q} g_{3r})$$

o bien

$$dg = dg_{pq} \alpha^{pq}$$

donde  $\alpha^{pq}$  es el menor adjunto asociado al elemento  $p, q$  del tensor métrico. Haciendo uso de (28) queda

$$dg = g dg_{pq} g^{pq} \Rightarrow \delta g = g \delta g_{pq} g^{pq} \quad (30)$$

y la derivación parcial y covariante son

$$\partial_k g = g g^{pq} \partial_k g_{pq}; \quad D_k g = g g^{pq} D_k g_{pq}.$$

la expresión (30) es válida para una variación general:  $\delta g = g g^{pq} \delta g_{pq}$ . Además como  $g_{qp} g^{qp} = 4$  entonces  $g_{qp} \delta g^{qp} = -g^{pq} \delta g_{pq}$  y por tanto

$$\delta g = -g g^{pq} \delta g_{pq}. \quad (31)$$

Consideremos un tensor cualquiera  $a_{ik}$ , al determinante de la matriz cuyos elementos son los  $a_{ik}$  lo representamos por  $a$ , mientras que  $\alpha^{ik}$  es el menor adjunto asociado al elemento  $(i,k)$  de la matriz  $a_{ik}$ . El inverso de la matriz  $(a_{ik})$  (si existe, es decir si  $a \neq 0$ ) es la matriz cuyos elementos son  $a^{*ik}$  tal que

$$a_{ik} a^{*kr} = \delta_i^r.$$

Por definición de determinante, los elementos de la matriz inversa se relacionan con los menores adjuntos por

$$a^{*kr} = \frac{1}{a} \alpha^{rk}$$

Al igual que antes con el tensor métrico, se calcula la variación del determinante de  $a_{ik}$  que en nuestro caso es

$$\delta a = \delta a_{pq} \alpha^{pq} = a a^{*qp} \delta a_{pq}. \quad (32)$$

Un tensor métrico asimétrico se descompone en parte simétrica y antisimétrica

$$g_{ik} = g_{(ik)} + g_{[ik]} = \gamma_{ik} + \varphi_{ik}$$

donde  $\gamma_{ik}$  representa la parte simétrica y  $\varphi_{ik}$  la antisimétrica. El tensor métrico en forma contravariante también se descompone en parte simétrica  $h^{ik}$  y en parte antisimétrica  $f^{ik}$

$$g^{ik} = h^{ik} + f^{ik}$$

Definimos las componentes contravariantes de las partes simétricas y antisimétricas del tensor métrico por

$$\gamma_{ij} \gamma^{ik} = \delta_j^k; \quad \varphi_{ij} \varphi^{ik} = \delta_j^k; \quad h_{ij} h^{ik} = \delta_j^k; \quad f_{ij} f^{ik} = \delta_j^k.$$

En un espacio de cuatro dimensiones, al que suponemos con signatura -2, el determinante de un tensor antisimétrico como  $\varphi_{ij}$  es

$$\varphi = (\varphi_{12} \varphi_{34} + \varphi_{31} \varphi_{24} + \varphi_{23} \varphi_{14})^2.$$

Por cómputo directo se comprueba que

$$\varepsilon^{ikpq} \varphi_{ik} \varphi_{pq} = 8\sqrt{\varphi}$$

e igualmente

$$\varepsilon^{ikpq} \varphi_{im} \varphi_{pq} = 0$$

si  $k \neq m$ . Entonces

$$\varepsilon^{ikpq} \varphi_{im} \varphi_{pq} = 2\sqrt{\varphi} \delta_m^k,$$

multiplicando ambos términos por  $\varphi^{rm}$  se llega a

$$\varphi^{rk} = \frac{1}{2\sqrt{\varphi}} \varepsilon^{rkpq} \varphi_{pq} \quad (33)$$

que nos relaciona las componentes contravariantes de la parte antisimétrica del tensor métrico con sus componentes covariantes. Una fórmula igual que (33) se aplica a  $f^{ik}$ .

Como  $\gamma_{ij}$  es simétrico y real es siempre posible elegir en cada punto del espacio un sistema de coordenadas respecto al cual  $\gamma_{ij}$  tenga la siguiente forma diagonal

$$(\gamma_{ik}) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

donde  $\lambda$  es un número positivo cualquiera. En el sistema de coordenadas elegido el determinante de  $\gamma_{ik}$  es  $\gamma = -\lambda^4$ . Démonos cuenta que en otro punto del espacio el tensor  $\gamma_{ik}$  tendrá, en general, una forma distinta de la diagonal, pero nosotros los cálculos lo estamos haciendo con referencia a un sólo punto.

La parte antisimétrica del tensor métrico es

$$(\varphi_{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & -\delta & \beta & -X \\ \delta & 0 & -\alpha & -Y \\ -\beta & \alpha & 0 & -Z \\ X & Y & Z & 0 \end{pmatrix},$$

al hallar directamente el determinante de  $g_{ik}$  se encuentra

$$g = -\lambda^4 - \lambda^2 (\alpha^2 + \beta^2 + \delta^2 - X^2 - Y^2 - Z^2) + (\alpha X + \beta Y + \delta Z)^2,$$

un cálculo directo nos da

$$\varphi = (\alpha X + \beta Y + \delta Z)^2$$

entonces

$$g = \gamma + \varphi - \lambda^2 (\alpha^2 + \beta^2 + \delta^2 - X^2 - Y^2 - Z^2).$$

Teniendo presente que

$$(\gamma^{ik}) = \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

entonces se calcula directamente que

$$\frac{\lambda^2}{2} \gamma^{im} \gamma^{kr} \varphi_{mr} \varphi_{ik} = \alpha^2 + \beta^2 + \delta^2 - X^2 - Y^2 - Z^2$$

por tanto nos queda

$$g = \gamma + \varphi + \frac{\gamma}{2} \gamma^{im} \gamma^{kr} \varphi_{mr} \varphi_{ik},$$

o bien

$$g = -|g| = -|\gamma| + \varphi - \frac{|\gamma|}{2} \gamma^{im} \gamma^{kr} \varphi_{mr} \varphi_{ik} \Rightarrow |g| = |\gamma| - \varphi + \frac{|\gamma|}{2} \gamma^{im} \gamma^{kr} \varphi_{mr} \varphi_{ik}. \quad (34)$$

Esta expresión la hemos calculado para un determinado sistema de coordenadas, aquel en que la parte simétrica del tensor métrico tiene forma diagonal. Los tres sumandos del segundo miembro de (34) dependen del determinante de un tensor de segundo orden y los últimos cuatro factores forman un invariante. Ante una transformación de coordenadas los tres determinantes que aparecen en (34) se transforman con la misma ley, es decir, (34) es una expresión invariante aunque no tensorial. Entonces si es válida para un determinado sistema de coordenadas, seguirá siendo válida en cualquier otro sistema, por tanto (34) tiene carácter general.

Indiquemos por último que la derivada covariante de la delta de Kronecker es nula, en efecto

$$D_p \delta_s^r = \partial_p \delta_s^r + \delta_s^m \Gamma_{mp}^r - \delta_m^r \Gamma_{sp}^m = 0 + \Gamma_{sp}^r - \Gamma_{sp}^r = 0,$$

al aplicar la regla de Leibnitz de la derivación a (29) se halla la derivada covariante de  $g^{ik}$ . En particular, si es nula la derivada covariante de  $g_{ik}$  también lo será la de  $g^{ik}$ .

#### 14.- Espacio euclidiano tangente

Consideremos un espacio V donde se ha definido un tensor métrico. Es siempre posible asociar en cada punto P de ese espacio un espacio euclídeo E, de la misma dimensión que V, que contenga al punto P y que en un entorno de este punto coincidan las propiedades métricas de E y V. Al espacio E se le llama euclidiano tangente.

Si  $g_{ik}^0$  es el tensor métrico de V en el punto P que tiene de coordenadas  $x_0^k$ , el espacio euclídeo tangente E tiene en el punto P el tensor métrico  $g_{(ik)}^0$ . Los puntos M del espacio E en un entorno del punto P tienen las coordenadas curvilíneas  $X^k$ , los puntos  $m(x^k)$  de V en un entorno de P están relacionados con los puntos  $M(X^k)$  de E mediante una relación de la forma

$$X^k = x^k - x_0^k + \Psi_{(2)}^k(x^r - x_0^r) + X_0^k \quad (35)$$

donde  $X_0^k$  son las coordenadas del punto P en el sistema de coordenadas del espacio euclídeo E y  $\Psi_{(2)}^k$  representa una función de segundo orden respecto a  $x^r - x_0^r$ .

Consideremos el punto  $m(x_0^k + dx^k)$  situado en un entorno infinitesimal del punto P. La distancia entre ese punto y el punto  $m(x_0^k)$  viene dada, tal como sabemos, por

$$ds^2 = g_{(ik)}^0 dx^i dx^k$$

Sea  $M(X_0^k + dX^k)$  el punto del espacio E que corresponde por (33) al punto  $m(x_0^k + dx^k)$ , la distancia entre los puntos M y P pertenecientes al espacio euclídeo será

$$dS^2 = g_{(ik)}^0 dX^i dX^k$$

ahora bien como por (35)

$$dX^k \approx dx^k$$

entonces la distancia infinitesimal entre puntos del entorno infinitesimal de P es igual tanto en el espacio euclídeo tangente E como en el espacio V

$$dS^2 = ds^2.$$

O sea, las propiedades métricas de ambos espacios son localmente idénticas. Esto significa que podemos, sin más, extender los resultados métricos conocidos del espacio euclídeo al espacio V, al menos en un entorno infinitesimal de cada punto.

Hay que darse cuenta que esta identidad encontrada solo se refiere a las propiedades métricas. No se garantiza la coincidencia entre las conexiones asociadas a los espacios E y V, lo que significa que las propiedades diferenciales serán diferentes en uno y en otro espacio.

#### 15.- Espacio de Riemann

Hasta ahora hemos estado considerando espacios genéricos. Ahora vamos a considerar los dos que tienen más importancia en Física, los espacios de Riemann y los euclidianos.

Un espacio de Riemann viene caracterizado por las siguientes propiedades:

- Tiene un tensor métrico simétrico.
- Tiene asociada una conexión afín también simétrica.
- La derivada covariante del tensor métrico es nula.

De la última condición y permutando los subíndices  $k, p, q$

$$D_k g_{pq} = \partial_k g_{pq} - g_{sq} \Gamma_{pk}^s - g_{ps} \Gamma_{qk}^s = 0$$

$$D_q g_{kp} = \partial_q g_{kp} - g_{sp} \Gamma_{kq}^s - g_{ks} \Gamma_{pq}^s = 0$$

$$D_p g_{qk} = \partial_p g_{qk} - g_{sk} \Gamma_{qp}^s - g_{qs} \Gamma_{kp}^s = 0$$

restando la segunda de la primera, sumándole la tercera y teniendo presente las propiedades de simetría se

encuentra

$$\Gamma_{kp}^s = L_{kp}^s = \frac{1}{2} g^{sq} (\partial_k g_{pq} + \partial_p g_{kq} - \partial_q g_{kp}), \quad (36)$$

a esta conexión, característica de los espacios riemannianos, se le llama símbolos de Christoffel. De ellos se pueden obtener otros símbolos totalmente covariantes

$$L_{kpr} = g_{rs} L_{kp}^s.$$

Téngase presente que esta coincidencia entre la conexión y los símbolos de Christoffel es una característica de los espacios de Riemann y no es extensible, en general, a otros tipos de espacios.

Se distinguen los espacios propiamente riemannianos como aquellos que quedan definidos porque el cuadrado de la distancia entre dos puntos ( $ds^2$ ) siempre es mayor que cero. Reservándose el nombre de espacios impropriamente riemannianos para aquellos en los que no se cumple el anterior requisito, pudiendo ser en este caso el cuadrado de la distancia mayor, menor o igual a cero.

Una clase especial de espacios de Riemann lo representan los espacios euclídeos, que vienen caracterizados porque es siempre posible encontrar un sistema de coordenadas respecto al cual el tensor métrico sea el mismo en todos los puntos del espacio. De aquí resulta que la conexión, obtenida a partir de (36) es nula en todos los puntos de este espacio y respecto al sistema de coordenadas anteriormente elegido.

Como el tensor métrico en el caso de un espacio euclídeo es simétrico y real existirá siempre una transformación de coordenadas que ponga al tensor métrico en forma diagonal y posteriormente mediante un cambio de escala llevar estos elementos diagonales a los valores +1 ó -1.

### 16- Teorema de unicidad

Vamos a demostrar que en un espacio de Riemann el tensor de curvatura es el único tensor que puede ser construido a partir del tensor métrico, de su primera derivada, siendo lineal respecto a las segundas derivadas. Para la demostración nos vamos a referir a un sistema localmente geodésico, en el que tanto los símbolos de Christoffel como las primeras derivadas del tensor métrico son nulas en un punto dado.

Nos proponemos buscar un tensor que dependa del tensor métrico y de sus derivadas segundas. Consideremos una transformación de un sistema de coordenadas localmente geodésicas a otro sistema de igual característica. La ley de transformación de la conexión será (10) que al derivarla se obtiene

$$\partial'_m L'_{ri}{}^k = B_r^s B_i^q A_p^k \partial'_m L_{sq}{}^p + \partial'_m (B_{ri}^s A_s^k), \quad (37)$$

donde hemos tenido en cuenta que las conexiones, tanto en el sistema de coordenadas original como en el transformado, son nulas

Estamos buscando un tensor que dependa linealmente de las segundas derivadas del tensor métrico, o lo que es lo mismo, que dependa de la primera derivada de los símbolos de Christoffel. El único tensor de estas características es el obtenido de la diferencia de las primeras derivadas de los símbolos de Christoffel

$$T^k{}_{rit} = \partial_t L_{ri}{}^k - \partial_i L_{rt}{}^k$$

que al cambiar de uno a otro sistema localmente geodésico se transforma como un tensor, en efecto de (37) se sigue

$$T'^p{}_{sqm} = B_s^r B_q^i B_m^t A_k^p (\partial_t L_{ri}{}^k - \partial_i L_{rt}{}^k).$$

Se observa que en un sistema localmente geodésico se cumple

$$T^k{}_{rit} = R^k{}_{rit},$$

entonces respecto al sistema de coordenadas considerado el tensor de curvatura es el único que depende linealmente de las derivadas segundas del tensor métrico. Ahora tenemos que demostrar que esta propiedad del tensor de curvatura se cumple en cualquier otro sistema de coordenadas.

Si hubiese otro tensor  $N^k{}_{rim}$  con iguales características, al representarlo en un sistema localmente geodésico se encontraría

$$N^k{}_{rit} = T^k{}_{rit},$$

y por el resultado obtenido

$$N^k{}_{rit} = R^k{}_{rit},$$

como los dos miembros son tensores, la igualdad se mantendrá en cualquier otro sistema de coordenadas, lo que demuestra la unicidad indicada del tensor de curvatura.

Es evidente que tensores derivados mediante contracción a partir del tensor de curvatura también tendrán la propiedad exigida de depender del tensor métrico y de sus derivadas primeras y que sea lineal respecto a las segundas derivadas; tal será el caso el tensor de Ricci y de su contracción, la curvatura escalar.

### 17.- Condición necesaria y suficiente para que un espacio riemano sea euclídeo

Vamos a demostrar que la condición necesaria y suficiente para que un espacio de Riemann sea euclídeo es que el tensor de curvatura sea idénticamente nulo.

Demostremos que la condición es necesaria. Supongamos un espacio euclídeo referido a un sistema de coordenadas respecto al cual el tensor métrico toma el mismo valor en todos los puntos. Entonces serán nulas las derivadas del tensor métrico y también los símbolos de Christoffel y por lo tanto será nulo el tensor de curvatura de Riemann. Si este tensor es nulo respecto a un sistema de coordenadas, será nulo en cualquier otro sistema de coordenadas, quedando demostrada la condición necesaria.

Vamos ahora a demostrar que la condición de nulidad del tensor de curvatura es suficiente para que el espacio sea euclídeo. Consideremos un vector de componentes  $A^k$  definido en un punto cualquiera del espacio. Según sabemos se puede a partir de este vector crear infinitos campos vectoriales, obtenidos trasladando paralelamente el vector desde su posición inicial por caminos diferentes. Consideremos uno de estos infinitos campos  $A^k(x^i)$  que debe tener la propiedad de que su derivada covariante es nula

$$dA_k = A_s \Gamma_{kr}^s dx^r \Rightarrow \frac{\partial A_k}{\partial x^r} = A_s \Gamma_{kr}^s.$$

Vamos a demostrar que cuando el tensor de curvatura es nulo entonces  $dA_k$  es una diferencial exacta, es decir que su derivada se puede poner como

$$dA_k = \frac{\partial A_k}{\partial x^r} dx^r,$$

esta circunstancia se dará cuando

$$\frac{\partial}{\partial x^m} (A_s \Gamma_{kr}^s) - \frac{\partial}{\partial x^r} (A_s \Gamma_{km}^s) = 0$$

que al desarrollar queda

$$\frac{\partial}{\partial x^m} (A_s \Gamma_{kr}^s) - \frac{\partial}{\partial x^r} (A_s \Gamma_{km}^s) = A_s R_{kmr}^s$$

que efectivamente es cero ya que hemos puesto de condición que el tensor de curvatura es nulo, con lo que queda demostrado que  $dA_k$  es una diferencial exacta. Esto significa que cuando trasladamos paralelamente el vector  $A_k$  obtenemos un campo único independientemente del camino que se siga, es decir que la integral de  $dA_k$  es la misma con independencia del camino seguido.

Consideremos cuatro campos vectoriales obtenidos a partir de traslaciones paralelas de cuatro vectores  $A_{(k)}^i$  que en un punto dado sean linealmente independientes

$$\alpha^k A_{(k)}^i = 0 \Rightarrow \alpha^k = 0 \tag{38}$$

donde  $i$  representa las componentes y  $k$  identifica a cada uno de los cuatro vectores.

Comprobemos primeramente que la independencia lineal se seguirá manteniendo después de hacer una traslación paralela

$$\alpha^k [A_{(k)}^i + dA_{(k)}^i] = \alpha^k A_{(k)}^i + d(\alpha^k A_{(k)}^i) = 0$$

expresión que sólo puede ser nula si  $\alpha^k A_{(k)}^i$  es nula, pero en este caso por (36) implica que  $\alpha^k = 0$ , lo que nos muestra que los vectores desplazados paralelamente siguen siendo linealmente independientes.

Lo anterior significa que los  $A_{(k)}^i$  son funciones únicas de las coordenadas y linealmente independientes entre sí. Si imaginamos las  $A_{(k)}^i$  representadas por una matriz de orden  $N$  si el espacio tiene de dimensión  $N$ , debemos de concluir que su determinante es distinto de cero.

A continuación vamos a realizar la siguiente transformación de coordenadas

$$dx'^i = A_{(k)}^i dx^k$$

que como ya hemos demostrado, es invertible por ser distinto de cero el determinante formado por  $A_{(k)}^i$ . Con

esta transformación el tensor métrico cambiará según

$$g'_{pq} = A^i_{(p)} A^k_{(q)} g_{ik},$$

derivando

$$\frac{\partial g'_{pq}}{\partial x^r} = A^i_{(p)} A^k_{(q)} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^r} + A^i_{(p)} g_{ik} \frac{\partial A^k_{(q)}}{\partial x^r} + A^k_{(q)} g_{ik} \frac{\partial A^i_{(p)}}{\partial x^r}$$

o bien

$$\frac{\partial g'_{pq}}{\partial x^r} = A^i_{(p)} A^k_{(q)} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^r} - A^i_{(p)} g_{ik} A^s_{(q)} \Gamma^k_{sr} - A^k_{(q)} g_{ik} A^s_{(p)} \Gamma^i_{sr}$$

y sacando factor común

$$\frac{\partial g'_{pq}}{\partial x^r} = A^i_{(p)} A^k_{(q)} \left[ \partial_r g_{ik} - g_{mk} \Gamma^m_{ir} - g_{im} \Gamma^m_{kr} \right] = A^i_{(p)} A^k_{(q)} D_r g_{ik}$$

que es nulo por serlo la derivada covariante del tensor métrico y como el determinante de  $A^i_{(k)}$  es distinto de cero, resulta que la derivada del tensor métrico  $g_{pq}$  es nula, es decir, el tensor métrico no depende de la coordenada  $x^k$  y por tanto tampoco depende de la coordenada  $x'^k$ . O sea, el tensor métrico es el mismo en todos los puntos del espacio. Hemos encontrado por lo tanto un sistema que reúne los requisitos exigidos para que un espacio de Riemann sea euclídeo, con lo que queda demostrado el teorema.

### 18.- Tensor de no-metricidad

Se define el tensor de no-metricidad de un espacio como la derivada covariante del tensor métrico

$$Q_{pqr} = D_r g_{pq},$$

que resulta ser un tensor y en general no nulo. La anulación del tensor de no-metricidad impone 40 condiciones en el caso de tensor métrico simétrico y 64 en el caso de no simetría del tensor métrico.

Se define el tensor contorsión por la expresión

$$K_{rpq} = \tau_{rpq} + \tau_{pqr} - \tau_{qrp}$$

donde

$$\tau_{pqr} = g_{kr} \tau_{pq}{}^k = 2g_{kr} \Gamma^k_{[pq]}$$

es el tensor de torsión (14) en forma covariante.

Si partimos de un espacio de tensor métrico simétrico, es posible establecer una relación entre el tensor de no-metricidad, el tensor de contorsión y la conexión afín, de la que no se exige que sea simétrica; por tanto estaríamos tratando con un espacio no riemanniano. La relación a la que nos referimos es

$$\Gamma_{rpq} = L_{rpq} + \frac{1}{2} K_{rpq} + \frac{1}{2} (Q_{rpq} - Q_{pqr} - Q_{qrp}) \quad (39)$$

donde hemos definido

$$\Gamma_{rpq} = g_{kq} \Gamma_{rp}{}^k; \quad L_{rpq} = g_{kq} L_{rp}{}^k.$$

(35) se descompone en parte simétrica y antisimétrica

$$\begin{aligned} \Gamma_{(rp)q} &= L_{rpq} + \frac{1}{2} (\tau_{pqr} - \tau_{qrp}) + \frac{1}{2} (Q_{rpq} - Q_{pqr} - Q_{qrp}) \\ \Gamma_{[pq]r} &= \frac{1}{2} \tau_{rpq} \end{aligned} \quad (40)$$

por tanto, conocidos el tensor métrico, el de no metricidad y la parte antisimétrica de la conexión (o sea, la torsión), se obtiene su parte simétrica.

De (39) podemos comprobar que incluso en el caso de que sean distintos de cero el tensor de no-metricidad y el tensor de torsión, los símbolos de Christoffel, tal como son definidos en (36), representan una conexión. En efecto de (39) vemos que la diferencia entre la conexión  $\Gamma_{kp}{}^s$  y los símbolos de Christoffel es un tensor, lo que garantiza que  $L_{kp}{}^s$  se transforma como (10), es decir es una conexión.

En el caso de que no se considere nulo el tensor de Schouten (37) se generaliza a la siguiente expresión

$$\Gamma_{rpq} = L_{rpq} + \frac{1}{2} K_{rpq} + \frac{1}{2} (Q_{rpq} - Q_{pqr} - Q_{qrp}) + \frac{1}{2} \left[ C_{(p|r|q)} + C_{(r|p|q)} - C_{(r|q|p)} \right]$$

En el caso particular de un espacio de Riemann, donde son simétricos tanto el tensor métrico como la

conexión y es nulo el tensor de no-metricidad, entonces la conexión es idéntica a los símbolos de Christoffel.

Y viceversa, si la conexión es idéntica a los símbolos de Christoffel entonces es nulo el tensor de no-metricidad y también el tensor de contorsión. En efecto el carácter simétrico de los símbolos de Christoffel implica la nulidad del tensor de torsión y por tanto será también nulo el tensor de contorsión. Además, y teniendo en cuenta la simetría del tensor métrico, se comprueba de manera directa que la derivada covariante del tensor métrico es nula si la conexión son los símbolos de Christoffel.

Finalmente advertimos que aunque el tensor de no-metricidad sea nulo, ello no implica que la conexión sea simétrica. Dicho de otra forma, los caracteres simétricos de la métrica y de la conexión y la nulidad del tensor de no-metricidad son condiciones independientes entre sí. Estas tres condiciones definen, como hemos visto, al espacio de Riemann.

Se dice que una geometría es semimétrica si cumple

$$Q_{ikr} = Q_r g_{ik},$$

donde  $Q_r$  es un vector covariante que llamaremos vector de Weyl. Si se cumple esta condición y además es nula la torsión, la relación entre la conexión y los símbolos de Christoffel es

$$\Gamma_{kp}{}^r = L_{kp}{}^r + \frac{1}{2}Q^r g_{kp} - \frac{1}{2}Q_k \delta_q^r - \frac{1}{2}Q_p \delta_k^r, \quad (41)$$

que es la conexión utilizada en la teoría de campo unificado de Weyl.

El carácter de conexión que tienen los símbolos de Christoffel nos permite definir una nueva derivada covariante que caracterizaremos por un arrocillo. Para el caso de un vector en forma contravariante definimos

$$D_k^* v^r = \partial_k v^r + v^s L_{sk}{}^r, \quad (42)$$

esta derivación se puede extender a vectores covariantes y a un tensor de orden cualquiera.

Notemos que la derivada covariante con arrocillo del tensor métrico es nula

$$D_k^* g_{ir} = \partial_k g_{ir} - g_{sr} L_{ik}{}^s - g_{is} L_{rk}{}^s = 0$$

como se puede comprobar por sustitución directa, donde tenemos en cuenta que estamos considerando geometrías con tensor métrico simétrico, lo que viene a significar que los símbolos de Christoffel son simétricos respecto a los índices covariantes.

Advertimos que al utilizar como conexión los símbolos de Christoffel y teniendo presente que el tensor métrico es simétrico obtenemos expresiones geométricas en todo idénticas a las de la geometría de Riemann.

Si suponemos que es nulo el tensor de no-metricidad y simétrico el tensor métrico, entonces de (40) tenemos que la parte simétrica de la conexión es

$$\Gamma_{(rp)}{}^s = L_{rp}{}^s + \frac{1}{2}g^{qs}(\tau_{pqr} - \tau_{qrp}) = L_{rp}{}^s + g^{sq}T_{qrp} \quad (43)$$

que es a su vez una conexión. El tensor  $T_{qrp}$  cumple la siguiente propiedad de simetría

$$T_{qpr} = \frac{1}{2}(\tau_{rqp} - \tau_{qpr}) = \frac{1}{2}(-\tau_{qrp} + \tau_{pqr}) = T_{qrp} \quad (44)$$

donde se ha tenido en cuenta la antisimetría del tensor de torsión respecto sus dos primeros índices. Igualmente el tensor  $T_{qrp}$  cumple la relación

$$T_{qrp} + T_{rpq} + T_{pqr} = 0 \quad (45)$$

como se comprueba por cálculo directo.

Por lo expuesto anteriormente podemos considerar una nueva conexión

$$\Gamma_{rp}{}^s = L_{rp}{}^s + g^{sq}T_{qrp} \quad (46)$$

de carácter simétrico, donde ahora el tensor  $T_{qrp}$  es un tensor general con las únicas condiciones de cumplir (44) y (45). A la conexión (46) le llamaremos conexión de Schrödinger. Podemos comprobar que las propiedades de simetría (44) y (45) se pueden deducir de la definición de conexión de Schrödinger, que se convierte así en la expresión más general de una conexión simétrica en el caso considerado de nulidad del tensor de no-metricidad y simetría del tensor métrico.

La propiedad de simetría (44) se deduce de (46) puesto que tanto  $\Gamma_{rp}{}^s$  como  $L_{rp}{}^s$  son simétricos respecto a sus índices covariantes y por tanto su diferencia (que es el tensor  $g^{sq}T_{qrp}$ ) también será simétrica respecto a sus índices covariantes.

Como veremos en el siguiente epígrafe el módulo de un vector de componentes contravariantes  $A^r$  no cambia en un espacio métrico cuando se le traslada paralelamente, ocurriendo en este caso que  $DA^r = 0$ . Es

decir la derivada covariante de

$$A^2 = g_{ik} A^i A^k$$

debe ser nula, entonces utilizando (41), teniendo presente que  $DA^r = 0$  y tomado el vector  $A^i$  como  $dx^i/ds$ , nos queda

$$\frac{DA^2}{ds} = 0 = \frac{Dg_{ik}}{ds} A^i A^k = \frac{D^* g_{ik}}{ds} A^i A^k + (-g_{sk} g^{sp} T_{irp} - g_{is} g^{sp} T_{krp}) A^i A^k A^r$$

y como  $D^* g_{ik} = 0$  entonces

$$-2T_{irk} A^i A^k A^r = 0$$

como  $A^i$  es un vector arbitrario, podemos tomar en primer lugar sólo uno de sus componentes distinta de cero, primero tomamos la componente 1 distinta de 0, luego haremos otro tanto con la 2 y luego con la tercera componente, obteniendo

$$T_{iii} = 0; \quad \forall i \tag{47}$$

a continuación tomamos dos componentes de  $A^i$  distinta de cero, por ejemplo la 1 y la 2 y obtenemos

$$(T_{112} + T_{121} + T_{211}) A^1 A^1 A^2 + (T_{122} + T_{212} + T_{221}) A^1 A^2 A^2 = 0,$$

donde tenemos en cuenta que  $T_{111} = T_{222} = 0$ , como  $A^1$  y  $A^2$  son arbitrarios, la anterior igualdad implica que

$$T_{122} + T_{121} + T_{211} = 0; \quad T_{122} + T_{212} + T_{221} = 0 \tag{48}$$

y expresiones análogas para las distintas combinaciones de las otras componentes. Finalmente tomamos las tres componentes de  $A^i$  distintas de cero

$$(T_{123} + T_{132} + T_{213} + T_{231} + T_{312} + T_{321}) A^1 A^2 A^3 = 0$$

donde hemos aplicado (47) y (48). Ahora considerando (44) llegamos a la conclusión de que

$$T_{123} + T_{231} + T_{321} = 0$$

pues las componentes de  $A^i$  son arbitrarias; por lo tanto queda demostrada la igualdad (45).

Calculemos, por último, el número de funciones de las que depende la conexión (42). Hay 10 diferentes componentes del tensor métrico, el tensor  $T_{irk}$  tiene 64 componentes, pero por (44) se reducen a 40 y por (45) disminuyen en 20, por tanto el número total de funciones de las que depende la conexión (43) es de 30.

La conexión de Schrödinger se puede generalizar al caso en que el espacio sea no-métrico pero conservando la simetría del tensor métrico, entonces serán de aplicación las ecuación (40). De nuevo planteamos que la parte simétrica de la conexión es una conexión, o sea que podemos definir la nueva conexión

$$\Gamma_{rp}^s = L_{rp}^s + g^{sq} T'_{qrp}$$

al igual que en (46) excepto que ahora el tensor  $T'_{qrp}$  sólo conservará la propiedad de simetría (44) pero no la (45).

En el caso que estamos considerando en que el tensor métrico es simétrico se pueden obtener nuevas conexiones a partir de la expresión

$$\Gamma_{rk}^p = L_{rk}^p + Y_{rk}^p,$$

donde  $Y_{rk}^p$  es un tensor cualquiera. Un ejemplo es la conexión de Straneo

$$\Gamma_{rk}^p = L_{rk}^p + \delta_r^p \psi_k - \delta_k^p \psi_r$$

donde  $\psi_k$  es un campo vectorial.

### 19.- Variación del módulo de un vector en un desplazamiento paralelo

Cuando a un vector de componentes contravariantes  $A^r$  se le somete a un desplazamiento paralelo la derivada covariante del campo resultante se anula  $DA^r = 0$ , y por lo tanto sus componentes cambian, según se vio en el epígrafe 9, por la expresión

$$dA^r = -A^s \Gamma_{sk}^r dx^k$$

siendo  $dx^k$  la diferencia entre las coordenadas de los puntos entre los que se desplaza el vector. Si suponemos que no es nulo el tensor de no-metricidad, encontramos para la derivada absoluta de las componentes convariantes del vector

$$DA_i = D(g_{ri} A^r) = Dg_{ri} A^r + g_{ri} DA^r = Dg_{ri} A^r$$

que es, en general, distinto de cero. De la anterior expresión deducimos la variación que experimentan las

componentes covariantes del vector cuando es trasladado paralelamente

$$dA_i = A_s \Gamma_{ik}^s dx^k + Dg_{ri} A^r.$$

Entonces cuando se traslada paralelamente un vector su módulo  $A^2 = A_i A^i$  cambia según

$$dA^2 = A^i A^r Dg_{ri} = Q_{rik} A^i A^r dx^k \quad (49)$$

que es en general distinto de cero. Nótese que si el módulo de cualquier vector no se modifica cuando se realiza un desplazamiento paralelo infinitesimal, no podemos asegurar que el tensor de no-metricidad sea nulo. De (49) también podemos deducir que si el tensor de no-metricidad fuese antisimétrico en sus dos primeros subíndices (una situación no física), entonces el módulo del vector no cambiaría cuando se ejecutase un desplazamiento paralelo infinitesimal.

Tomando en (49)

$$A^i = \frac{dx^i}{ds}$$

y si ocurre que para cualquier variación paralela su módulo es nulo entonces significaría que o bien  $Q_{rik} = 0$  o se cumple la propiedad cíclica

$$Q_{rik} + Q_{ikr} + Q_{kri} = 0.$$

Consideremos el paralelogramo infinitesimal de la figura 1, definido en un espacio sin torsión, pues en caso contrario tendríamos un paralelogramo no cerrado;  $da^k$  y  $db^k$  representan las diferencias de coordenadas entre los vértices de ese paralelogramo infinitesimal. Vamos a averiguar cómo cambiar el módulo de un vector cuando es trasladado paralelamente a través de ese paralelogramo.

Consideremos un vector de módulo  $A$  en el punto  $A(x^k)$  y lo trasladamos paralelamente al punto  $B(x^k + da^k)$ , su longitud cambiará según (49)

$$(dA_1)^2 = Q_{rik}(x^p) A^i(x^p) A^r(x^p) da^k,$$

al hacer ahora la traslación de B al C el cambio de módulo será

$$\begin{aligned} (dA_2)^2 &= Q_{rik}(x^p + da^p) A^i(x^p + da^p) A^r(x^p + da^p) db^k \approx \\ &= Q_{rik}(x^p) A^i(x^p) A^r(x^p) db^k + Q_{rik,p}(x^p) A^i(x^p) A^r(x^p) da^p db^k + \\ &+ Q_{rik}(x^p) A_{,p}^i(x^p) A^r(x^p) da^p db^k + Q_{rik}(x^p) A^i(x^p) A_{,p}^r(x^p) da^p db^k \end{aligned}$$

y teniendo presente que el vector  $A^i$  se desplaza paralelamente tendremos

$$(dA_2)^2 = Q_{rik} A^i A^r db^k + Q_{rik,p} A^i A^r da^p db^k - Q_{rik} A^s A^r \Gamma_{sp}^i da^p db^k + Q_{rik} A^i A^s \Gamma_{sp}^r da^p db^k$$

estando todas las funciones definidas en el punto  $x^p$ .

La variación de módulo del vector cuando se traslada paralelamente del punto C al D será el mismo que de D a C pero cambiado de signo

$$\begin{aligned} (dA_3)^2 &= -Q_{rik}(x^p + db^p) A^i(x^p + db^p) A^r(x^p + db^p) da^k \approx \\ &= -Q_{rik} A^i A^r da^k - Q_{rik,p} A^i A^r da^k db^p + Q_{rik} A^s A^r \Gamma_{sp}^i da^k db^p + Q_{rik} A^i A^s \Gamma_{sp}^r da^k db^p, \end{aligned}$$

mientras que la variación experimentada por el módulo al pasar de D a A es la misma que de A a D pero con el signo cambiado

$$(dA_4)^2 = -Q_{rik}(x^p) A^i(x^p) A^r(x^p) db^k.$$

Por tanto el cambio total experimentado por el módulo del vector cuando ha recorrido el paralelogramo es

$$dA^2 = (dA_1)^2 + (dA_2)^2 + (dA_3)^2 + (dA_4)^2,$$

y al desarrollar hasta el primer orden

$$dA^2 = (D_p Q_{rik} - D_k Q_{rip}) A^i A^r da^p db^k,$$

donde hemos tenido en cuenta el carácter simétrico de la conexión. Si ahora introducimos el elemento de superficie del paralelogramo infinitesimal nos queda

$$dA^2 = \frac{1}{2} (D_p Q_{rik} - D_k Q_{rip}) A^i A^r dS^{pk} \quad (50)$$

que representa la variación que experimenta el cuadrado del módulo de un vector cuando es trasladado paralelamente

lamente por un circuito infinitesimal cerrado. Como en general la expresión entre paréntesis no es nula, el módulo del vector cambiará al hacer la traslación. No obstante, si se cumple la igualdad

$$D_p Q_{rik} = D_k Q_{rip}$$

entonces el vector no sufre ninguna modificación en su módulo al hacer la traslación paralela.

En el caso especial en que la geometría sea semi-métrica y por tanto

$$Q_{rik} = Q_k g_{ri}$$

entonces (50) se reduce a

$$dA = \frac{1}{4} (Q_{k,p} - Q_{p,k}) A dS^{pk}$$

siempre y cuando la conexión sea simétrica.

## 20.- Cambio de escala

El tensor métrico  $g_{ik}$  característico de un espacio lo podemos poner como

$$g_{ik} = \psi(x^r) \hat{g}_{ik}$$

donde  $\hat{g}_{ik}$  representa un campo tensorial de iguales propiedades que  $g_{ik}$  y  $\psi(x^r)$  es una función escalar a la que llamaremos calibración, escala o gauge. Las componentes del tensor métrico pueden cambiar por efecto de un cambio de coordenadas, pero también se ve alterado si hacemos un cambio de calibración tal como

$$\psi(x^k) \rightarrow \psi'(x^k),$$

entonces el módulo de un vector que en la antigua calibración era

$$A^2 = \psi \hat{g}_{ik} A^i A^k$$

pasa a tomar el valor diferente

$$A'^2 = \psi' \hat{g}_{ik} A^i A^k = \frac{\psi'}{\psi} A^2 = \lambda^2 A^2$$

donde  $\lambda$  es una función de las coordenadas y distinta de cero.

Cuando tiene lugar un cambio de calibración el tensor métrico queda alterado. Si la nueva calibración es la función  $\psi'$  entonces el nuevo tensor métrico será

$$g'_{ik} = \psi' \hat{g}_{ik} = \frac{\psi'}{\psi} \psi \hat{g}_{ik} = \lambda^2 g_{ik}$$

y decimos que el tensor métrico es de peso 2, que es la potencia en la que aparece la función  $\lambda$ . Las componentes contravariantes del tensor métrico también quedarán modificadas

$$g'_{ik} g'^{rk} = \delta_i^r \Rightarrow \lambda^2 g_{ik} g'^{rk} = \delta_i^r \Rightarrow g'^{rk} = \lambda^{-2} g^{rk}$$

entonces el peso de  $g'^{rk}$  es -2. Mientras que el determinante de las componentes covariantes del tensor métrico se transforma ante un cambio de calibración por

$$g' = \lambda^8 g$$

siendo, por tanto, de peso 8.

Hay que observar que el cambio de calibración queda definido para el tensor métrico exclusivamente, por tanto no podemos establecer las leyes de transformación de los otros elementos geométricos, a menos que conozcamos su relación con el tensor métrico.

En el caso especial de una geometría semi-simétrica, el vector de Weyl cambia ante una transformación de calibración

$$Dg'_{ik} = D(\lambda^2 g_{ik}) = 2\lambda d\lambda g_{ik} + \lambda^2 g_{ik} Q_r dx^r = \frac{2}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x^r} g'_{ik} dx^r + g'_{ik} Q_r dx^r = Q'_r g_{ik} dx^r$$

entonces

$$Q'_r = Q_r + \frac{2}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x^r}.$$

Notemos que las coordenadas de un punto del espacio no cambian en una transformación de calibración, pues solo son números que identifican al punto. Por tanto, el elemento de línea queda modificado en un cambio

de calibración por la ley

$$ds' = \lambda ds$$

es decir, tiene de peso 1, el mismo peso que tendrá el tiempo propio  $d\tau$  de una partícula. Definida la tetravelocidad por

$$u^k = \frac{dx^k}{d\tau}$$

encontramos que tiene de peso  $-1$ , mientras que la tetraaceleración tendrá de peso  $-2$ .

### 21. Transformación proyectiva

Una transformación proyectiva de la conexión viene definida por

$$\Gamma'_{ik}{}^p = \Gamma_{ik}{}^p + \delta_i^p \phi_k$$

donde  $\phi_k$  es un vector arbitrario. Notemos que si la conexión no es simétrica cabe otra transformación proyectiva dada por

$$\Gamma'_{ik}{}^p = \Gamma_{ik}{}^p + \delta_k^p \phi_i.$$

Frente a una transformación proyectiva el tensor de Ricci se modifica según la ley

$$R'_{ik} = R_{ik} - 2\partial_{[i} \phi_{k]},$$

sin embargo, la curvatura escalar  $R$  permanece invariante. Notemos que ante a una transformación proyectiva la curvatura homotética también queda invariante.

Distinguiamos otra transformación de la conexión, parecida a la anterior, y a la que llamaremos transformación lambda definida por

$$\Gamma'_{ik}{}^p = \Gamma_{ik}{}^p + \delta_i^p \lambda_{,k}$$

donde  $\lambda$  es un escalar arbitrario. Fácilmente se comprueba que tanto el tensor de Ricci, como la curvatura escalar y la curvatura homotética son invariantes frente a esta transformación.

### 22.- El tensor de Ricci en función de los símbolos de Christoffel

Como se mostró en 18 es posible relacionar la conexión de un espacio con los símbolos de Christoffel. En el caso de un espacio métrico simétrico la relación es dada por (37), que se puede poner de la forma

$$\Gamma_{rp}{}^k = L_{rp}{}^k + \frac{1}{2} g^{qk} X_{rpq} = L_{rp}{}^k + \frac{1}{2} X_{rp}{}^k,$$

en  $X_{rpq}$  se encuentran agrupadas las componentes antisimétricas de la conexión y el tensor de no-metricidad según aparecen en (39).

Utilizando (18) se puede poner el tensor de curvatura en función del tensor de curvatura  $R^*{}^k{}_{sir}$  formado a partir de los símbolos de Christoffel en vez de con la conexión  $\Gamma_{pq}{}^s$

$$R^k{}_{sir} = R^*{}^k{}_{sir} + \frac{1}{2} D_i^* X_{sr}{}^k - \frac{1}{2} D_r^* X_{si}{}^k + \frac{1}{2} X_{sn}{}^k \tau_{ri}{}^n + \frac{1}{4} X_{sr}{}^n X_{ni}{}^k - \frac{1}{4} X_{si}{}^n X_{nr}{}^k.$$

Igualmente es posible poner el tensor de Ricci en función de  $R^*{}_{si}$  que es el tensor de Ricci construido a partir de los símbolos de Christoffel, para lo cual se contraen los índice  $k$  y  $r$  de la expresión anterior

$$R_{si} = R^*{}_{si} + \frac{1}{2} D_i^* X_{sk}{}^k - \frac{1}{2} D_k^* X_{si}{}^k + \frac{1}{2} X_{sn}{}^k \tau_{ki}{}^n + \frac{1}{4} X_{sk}{}^n X_{ni}{}^k - \frac{1}{4} X_{si}{}^n X_{nk}{}^k.$$

Por ejemplo, para el caso de una geometría semi-métrica sin torsión el tensor de Ricci queda

$$R_{si} = R^*{}_{si} - D_i^* Q_s + \frac{1}{2} (D_s^* Q_i - D_i^* Q_s) - \frac{1}{2} g_{si} D_k^* Q^k + \frac{1}{2} g_{si} Q_k Q^k - \frac{1}{2} Q_s Q_i.$$

La contracción del tensor de Ricci es la curvatura escalar  $R$  y para el caso considerado de geometría semi-simétrica es

$$R = g^{si} R_{si} = R^* - 3D_k^* Q^k + \frac{3}{2} Q_k Q^k.$$

### 23.- Simetrías del tensor de curvatura

El tensor de curvatura en un espacio de  $N$  dimensiones tiene  $N^4$  componentes. Sin embargo, no todas son

independientes. Vamos a comprobar que existe un conjunto de relaciones que hacen descender considerablemente el número de componentes independientes del tensor de curvatura.

El tensor de curvatura completamente covariante tiene las componentes

$$R_{psri} = g_{pk} R^k_{sir} = g_{pk} \left( \Gamma_{sr,i}^k - \Gamma_{si,r}^k + \Gamma_{sr}^t \Gamma_{ti}^k - \Gamma_{si}^t \Gamma_{tr}^k \right),$$

limitándonos al caso de un espacio de conexión afín simétrica, obtenemos que la anterior expresión se reduce en un sistema localmente geodésico a

$$R_{psri} = g_{pk} \left( \Gamma_{sr,i}^k - \Gamma_{si,r}^k \right),$$

teniendo presente que las derivadas primeras del tensor métrico son nulas por así serlo la conexión se encuentra

$$R_{psri} = \frac{1}{2} \left( g_{rp,s,i} - g_{sr,p,i} - g_{ip,s,r} + g_{si,p,r} \right).$$

A partir de la anterior ecuación es fácil comprobar que se cumplen la siguientes relaciones de simetría

$$\begin{aligned} R_{psri} &= R_{rips}; & R_{psri} &= -R_{psir}; \\ R_{psrr} &= R_{ppri} = 0; & R_{prsi} + R_{psri} + R_{pirs} &= 0. \end{aligned}$$

En el caso de un espacio tetradimensional el tensor de curvatura tiene 256 componentes, que quedan reducidas a 20 al tener en cuenta las anteriores relaciones de simetría.

En un espacio genérico el tensor de curvatura es antisimétrico con respecto a la dos últimos índices. Siempre podemos descomponer el tensor de curvatura totalmente covariante en dos partes

$$R_{ikpq} = R_{[ik]pq} + R_{(ik)pq} = P_{ikpq} + F_{ikpq} \quad (51)$$

siendo  $P_{ikpq}$  antisimétrico respecto al primer par de índices y  $F_{ikpq}$  es simétrico respecto al primer par de índices.

Cuando un vector  $A^k$  es trasladado paralelamente a través de un paralelogramo infinitesimal de lados  $da^k$  y  $db^i$ , sus componentes contravariantes cambian según se dedujo en 9 por

$$dA^r = R^r_{nik} A^n da^k db^i. \quad (52)$$

Como la superficie elemental tiene de área (epígrafe 25)

$$dS^{ij} = da^i db^j - da^j da^i$$

y el tensor de curvatura es antisimétrico respecto a sus dos últimos índices, tendremos que (52) queda

$$A_r dA^r = 1/2 R_{pnik} A^p A^n dS^{ik},$$

entonces como

$$A_r dA^r = \frac{1}{2} d(A_r A^r) = \frac{1}{2} dA^2,$$

la variación que experimenta el módulo de un vector cuando es trasladado paralelamente a través de un circuito elemental cerrado es

$$dA^2 = R_{pnik} A^p A^n dS^{ik}.$$

Sustituyendo (51) en la anterior expresión resulta

$$dA^2 = P_{pnik} A^p A^n dS^{ik} + F_{pnik} A^p A^n dS^{ik}$$

el primer sumando es nulo por la propiedad de antisimetría del tensor de curvatura respecto a sus dos primeros índices, entonces queda

$$dA^2 = F_{pnik} A^p A^n dS^{ik},$$

de (50) obtenemos

$$F_{pnik} = \frac{1}{2} \left( D_i Q_{npk} - D_k Q_{npi} \right).$$

Si nos limitamos a una geometría semi-métrica de conexión simétrica obtenemos de la anterior expresión y de (49)

$$F_{pnik} = \frac{1}{2} \left( Q_{k,i} - Q_{i,k} \right) g_{pn} = -\frac{1}{2} F_{ik} g_{pn},$$

donde hemos definido

$$F_{ik} = (Q_{i,k} - Q_{k,i}),$$

lo que significa que en una geometría semi-métrica

$$R^q_{nik} = P^q_{nik} - \delta^q_n F_{ik},$$

donde el primer tensor del segundo miembro es antisimétrico respecto al primer par de índices (cuando están en forma covariante) y también respecto al segundo par. La anulación del tensor  $F_{ik}$  significa que el espacio se puede reducir a un espacio de Riemann por un adecuado cambio de calibración y por tanto en este caso  $P^q_{nik}$  sería su tensor de curvatura.

#### 24.- Tensor de Einstein

Las simetrías del tensor de curvatura pueden utilizarse para obtener un nuevo tensor que tiene importante aplicación en la relatividad general donde se toma el continuo espacio-tiempo como siendo un espacio de Riemann. Partimos de la identidad de Bianchi (25) y la multiplicamos por  $g_{pk}$ , teniendo en cuenta la nulidad de la derivada covariante del tensor métrico queda

$$D_m R_{psir} + D_i R_{psrm} + D_r R_{psmi} = 0,$$

multiplicando ahora por  $g^{pr}$  y teniendo presente la definición (21) del tensor de Ricci

$$D_m R_{si} - D_i R_{sm} + D_r (g^{pr} R_{psmi}) = 0,$$

multiplicando una vez más por  $g^{si}$

$$D_m R - D_i R^i_m - D_r R^r_m = 0,$$

que se puede poner de la forma

$$D_r \left( R^r_m - \frac{1}{2} \delta^r_m R \right) = 0,$$

a la expresión entre paréntesis se le llama tensor de Einstein, un tensor de segundo orden construido exclusivamente a partir de los tensores geométricos que definen el espacio de Riemann y que tiene la notable propiedad de tener nula su derivada covariante. Cabe poner el tensor de Einstein en forma covariante

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R.$$

#### 25.- Volúmenes y áreas

Consideremos en un espacio genérico (que tomaremos tridimensional para concretar) un paralelepípedo infinitesimal cuyos tres lados diferentes están formados por tres vectores infinitesimales de componentes  $da^i$ ,  $db^k$  y  $dc^r$ . A partir de ellos se puede obtener el tensor antisimétrico formado por el siguiente determinante

$$d\Omega^{ikr} = \begin{vmatrix} da^i & db^i & dc^i \\ da^k & db^k & dc^k \\ da^r & db^r & dc^r \end{vmatrix},$$

que evidentemente es un tensor por ser la suma de productos de tres vectores.

Ya hemos indicado que en el caso de un espacio con torsión no es posible obtener un paralelogramo cerrado y por tanto tampoco un paralelepípedo cerrado. No obstante, podemos utilizar para este tipo de geometrías las fórmulas que vamos a deducir a continuación, puesto que la diferencia de área entre el cuadrilátero cerrado que se obtendría en un espacio con torsión y el área de un paralelogramo (como más adelante calcularemos) es de segundo orden y por tanto despreciable. Y lo mismo ocurrirá con el volumen de un paralelepípedo.

$d\Omega^{ikr}$  es un tensor que se puede poner en función de los símbolos completamente antisimétricos de Levi-Civita

$$d\Omega^{ikr} = d\Omega \varepsilon^{ikr}$$

donde  $d\Omega$  es la única componente de  $d\Omega^{ikr}$  distinta de cero

$$d\Omega = d\Omega^{123} = da^1 db^2 dc^3,$$

Téngase presente que ni  $d\Omega$  ni  $\varepsilon^{ikr}$  son tensores, pero su producto sí lo es.

Se define el volumen del paralelepípedo formado por los tres vectores infinitesimales por la expresión

$$dV = \sqrt{g} d\Omega \quad (53)$$

donde  $g$  representa el valor absoluto del determinante del tensor métrico puesto en forma covariante.

Debemos comprobar que el volumen como es definido por (53) es un invariante, ya que su valor no debe depender del sistema de coordenadas. Ante una transformación de coordenadas tendremos

$$d\Omega' = d\Omega'^{123} = A_i^1 A_k^2 A_r^3 d\Omega^{ikr} = A_i^1 A_k^2 A_r^3 d\Omega \varepsilon^{ikr} = |A| d\Omega$$

donde  $|A|$  es el determinante de la matriz de la transformación de coordenadas.

En la transformación de coordenadas las componentes del tensor métrico cambian según

$$g'_{ik} = B_i^p B_k^q g_{pq}$$

que podemos representar como una ecuación matricial

$$G' = B \cdot G \cdot \tilde{B},$$

calculando los correspondientes determinantes se tiene

$$g' = |B|^2 g \quad \Rightarrow \quad \sqrt{g'} = \frac{1}{|A|} \sqrt{g}, \quad (54)$$

donde siempre tomamos el valor absoluto del determinante. (54) se aplica en (53)

$$dV' = \sqrt{g'} d\Omega' = \frac{1}{|A|} \sqrt{g} |A| d\Omega = \sqrt{g} d\Omega = dV,$$

que demuestra el carácter invariante del volumen.

La fórmula (53) es generalizable para un espacio de cualquier número de dimensiones.

Para cualquier vector de segundo orden  $a_{ik}$  se cumplirá la relación

$$\sqrt{a'} = \frac{1}{|A|} \sqrt{a},$$

siendo  $a$  y  $a'$  los valores positivos de los determinantes del tensor  $a_{ik}$  en cada uno de los dos sistemas de coordenadas; por tanto

$$\sqrt{a} d\Omega$$

es un invariante que es llamado volumen generalizado.

En un espacio de tres dimensiones se define el área de una superficie bidimensional a partir de un vector. De forma similar a como hemos hecho anteriormente, definimos el tensor superficie antisimétrico a partir del determinante

$$dS^{qr} = \begin{vmatrix} da^q & db^q \\ da^r & db^r \end{vmatrix}, \quad (55)$$

donde  $da^q$  y  $db^r$  son los vectores que conforman el paralelogramo bidimensional cuya vector área se quiere calcular. El vector asociado al elemento de superficie anterior es

$$dS^p = \frac{1}{2} \Delta^{pqr} dS_{qr}.$$

En el caso de un espacio tetradimensional (como el espacio-tiempo) tenemos dos tipos de «superficies», las bidimensionales y las tridimensionales. Las primeras vienen representadas por el tensor (55) y las segundas por un vector. En efecto, el tensor antisimétrico volumen tridimensional del espacio de cuatro dimensiones viene definido por

$$dS^{pqr} = \begin{vmatrix} da^p & db^p & dc^p \\ da^q & db^q & dc^q \\ da^r & db^r & dc^r \end{vmatrix} \quad (56)$$

donde, como en los casos anteriores  $da^p$ ,  $db^q$  y  $dc^r$  son los vectores que forman el paralelepípedo infinitesimal cuyo volumen tridimensional se calcula. A partir del tensor completamente antisimétrico se puede obtener de (56) un vector asociado a la superficie tridimensional de un espacio tetradimensional

$$dS^p = \frac{1}{3!} \Delta^{pqrs} dS_{qrs}.$$

Esta expresión se puede generalizar a espacios de dimensión  $N$  cualquiera

$$dS^p = \frac{1}{(N-1)!} \Delta^{pqrs\dots} dS_{qrs\dots}$$

Nos debemos fijar que para un espacio tetradimensional con métrica de Minkowski, que corresponde al espacio-tiempo, el volumen espacial es dado por  $dS^0$ .

En (11) habíamos definido el tensor de cuarto orden completamente antisimétrico en forma contravariante para espacios tetradimensionales. Ateniéndonos a (54), la definición (11) de este tensor totalmente antisimétrico toma la forma

$$\Delta^{pqrs} = \frac{1}{\sqrt{g}} \varepsilon^{pqrs},$$

de donde se deduce el correspondiente tensor en forma covariante

$$\begin{aligned} \Delta_{ikmn} &= g_{pi} g_{qk} g_{rm} g_{sn} \Delta^{pqrs} = g_{pi} g_{qk} g_{rm} g_{sn} \frac{1}{\sqrt{g}} \varepsilon^{pqrs} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} g_{p1} g_{q2} g_{r3} g_{s4} \varepsilon^{pqrs} \varepsilon_{ikmn} = \sqrt{g} \varepsilon_{ikmn}, \end{aligned}$$

donde  $\varepsilon_{ikmn}$  son unos símbolos con igual propiedad que los símbolos de Levi-Civita, es decir  $\varepsilon_{ikmn} \equiv \varepsilon^{ikmn}$ . Notemos que  $\varepsilon_{ikmn}$  no son las componentes covariantes de  $\varepsilon^{ikmn}$ . Mientras que  $\varepsilon^{ikmn}$  es una densidad tensorial de peso 1 (ver epígrafe 35),  $\varepsilon_{ikmn}$  es una densidad tensorial de orden -1.

Con el tensor  $\Delta_{ikmn}$  se puede hacer otra definición de los tensores «superficies», en el sentido de que aparezcan con sus componentes covariantes. Por ejemplo, para el caso de un espacio tetradimensional

$$dS_p = \frac{1}{3!} \Delta_{pqrs} dS^{qrs}.$$

## 26.- Geodésicas

Pretendemos generalizar el concepto de línea recta del espacio euclídeo. La vamos a definir de dos formas diferentes, una de ellas es estableciendo que la línea recta entre dos puntos tiene como propiedad que representa la mínima distancia entre esos puntos extremos. La otra definición que consideramos afirma que la línea recta tiene la propiedad de que sus vectores tangentes en cualquier punto son paralelos entre ellos.

Ambas definiciones son equivalentes en un espacio euclídeo, pero en un espacio general representan conceptos diferentes. A la curva tal como es definida por la primera propiedad antes expuesta le llamaremos curva de menor longitud o geodésica métrica, mientras que reservaremos el término de geodésica o geodésica afín para designar las curvas autoparalelas definidas por la segunda de las definiciones.

Vamos a limitarnos de momento al espacio euclídeo y busquemos la condición matemática que debe cumplir la geodésica, curva que vendrá dada por la ecuación  $x^k = x^k(t)$  donde  $t$  es un parámetro arbitrario que caracteriza a cada punto de la curva y las  $x^k$  son las coordenadas cartesianas de los puntos de la curva geodésica. Vamos a considerar dos vectores tangentes

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad v^k = \frac{dx^k}{dt},$$

siendo  $\mathbf{r}$  el vector de posición de un punto de la curva, o sea  $\mathbf{r} = (x^k)$ ;  $\mathbf{v}$  es un vector que no tiene el mismo módulo en cada uno de los puntos de la geodésica a consecuencia de la arbitrariedad del parámetro  $t$ . Además utilizaremos el vector unitario tangente

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \quad \Leftrightarrow \quad u^k = \frac{dx^k}{ds},$$

donde  $s$  es la distancia desde un extremo de la curva al punto considerado. Observemos que el vector  $\mathbf{u}$  tiene la misma dirección y el mismo módulo en cualquier punto de la geodésica.

Sea el punto  $P(t)$  de la curva geodésica al que le corresponde el vector tangente  $\mathbf{v}(t)$ , en otro punto  $P(t+dt)$  el vector tangente será

$$\mathbf{v}(t+dt) = \mathbf{v}(t) + d\mathbf{v},$$

el requisito para que ambos vectores tangentes sean paralelos es que  $d\mathbf{v}$  sea paralelo a  $\mathbf{v}$ . Matemáticamente el anterior requisito se puede establecer de dos formas

$$\mathbf{v} \wedge \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0; \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \varphi(t)\mathbf{v} \quad (57)$$

o sea, que su producto vectorial sera nulo o bien que sean proporcionales. La función  $\varphi$  que aparece en la segunda condición (57) es arbitraria y puede depender del parámetro  $t$ . Las ecuaciones (57) se pueden expresar en función de las coordenadas

$$v^i \frac{dv^k}{dt} - v^k \frac{dv^i}{dt} = 0; \quad \frac{dv^k}{dt} = \varphi(t)v^k. \quad (58)$$

Si en vez de coordenadas cartesianas utilizámos coordenadas curvilíneas, entonces habría que sustituir las derivadas por derivadas absolutas y tendríamos para las condiciones (58)

$$v^i \frac{Dv^k}{dt} - v^k \frac{Dv^i}{dt} = 0; \quad \frac{Dv^k}{dt} = \varphi(t)v^k. \quad (59)$$

Tenemos otra forma de representar la ecuación de una geodésica, utilizando para ello el vector unitario tangente  $\mathbf{u}$ , que como hemos dicho es el mismo en todos los puntos de la geodésica, es decir debe cumplirse

$$\frac{d\mathbf{u}}{ds} = 0$$

o bien en coordenadas curvilíneas

$$\frac{Du^k}{ds} = 0 \Leftrightarrow u^i D_i u^k = 0. \quad (60)$$

Las ecuaciones (57) y (58) son equivalentes y válidas en un espacio euclídeo. Ahora hacemos la generalización y las extendemos a un espacio cualquiera, donde conservarán la misma forma. Notemos que la ecuación (57) se puede definir en un espacio donde no esté dada una métrica, es decir en un espacio afín; no obstante, la ecuación (58) requiere el concurso de un tensor métrico para poder definir la distancia, es por tanto un concepto utilizable solamente en un espacio métrico-afín.

La variable  $t$  utilizada para parametrizar la curva geodésica es arbitraria, es por tanto posible elegir un nuevo parámetro  $\tilde{t}$ , relacionado con el anterior por

$$\tilde{t} = f(t).$$

Al hacer el cambio de variable la derivada absoluta se transformará según

$$\begin{aligned} \frac{Dv^k}{dt} &= \frac{d^2x^k}{dt^2} + \Gamma_{pq}^k \frac{dx^p}{dt} \frac{dx^q}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dx^k}{d\tilde{t}} \frac{d\tilde{t}}{dt} \right) + \Gamma_{pq}^k \frac{dx^p}{d\tilde{t}} \frac{dx^q}{d\tilde{t}} \left( \frac{d\tilde{t}}{dt} \right)^2 = \\ &= \frac{d^2x^k}{d\tilde{t}^2} \left( \frac{d\tilde{t}}{dt} \right)^2 + \frac{dx^k}{d\tilde{t}} \frac{d^2\tilde{t}}{dt^2} + \Gamma_{pq}^k \frac{dx^p}{d\tilde{t}} \frac{dx^q}{d\tilde{t}} \left( \frac{d\tilde{t}}{dt} \right)^2, \end{aligned}$$

y la segunda de las ecuaciones (59) queda

$$\frac{d^2x^k}{d\tilde{t}^2} + \Gamma_{pq}^k \frac{dx^p}{d\tilde{t}} \frac{dx^q}{d\tilde{t}} = \left( \frac{\varphi}{f'} - \frac{f''}{f'^2} \right) \frac{dx^k}{dt} = \tilde{\varphi}(\tilde{t}) \frac{dx^k}{dt} \quad (61)$$

obteniéndose una ecuación idéntica a la segunda ecuación (57), porque si bien las funciones  $\varphi$  y  $\tilde{\varphi}$  son distintas, son completamente arbitrarias (como lo son los parámetros  $t$  y  $\tilde{t}$ ).

La ecuación (59) se reduce a la (58), para ello es necesario que

$$\varphi = \frac{f''}{f'}$$

o lo que es lo mismo

$$f' = \exp \int \varphi dt.$$

Es decir, cuando se cumple la anterior condición el parámetro de la curva geodésica coincide con la distancia.

Sea  $\Gamma_{pq}^k$  la conexión del espacio, entonces la conexión

$$\Gamma'_{pq}{}^k = \Gamma_{pq}^k + \alpha(t)\delta_p^k \psi_q + \beta(t)\delta_q^k \psi_p \quad (62)$$

es geodésicamente equivalente a  $\Gamma_{pq}^k$ , donde  $\alpha(t)$  y  $\beta(t)$  son funciones arbitrarias del parámetro  $t$  y  $\psi_p$  es un vector covariante. En efecto, al sustituir (62) en la primera de las ecuaciones (59) queda inalterable y si la sustituimos en la segunda ecuación (59) obtenemos

$$\frac{d^2 x^k}{dt^2} + \Gamma'_{pq}{}^k \frac{dx^p}{dt} \frac{dx^q}{dt} = \left( \varphi + \alpha \psi_q \frac{dx^q}{dt} + \alpha \psi_q \frac{dx^q}{dt} \right) \frac{dx^k}{dt} = \tilde{\varphi} \frac{dx^k}{dt} \quad (63)$$

y al igual que anotamos antes, debemos de advertir que aunque  $\varphi$  y  $\tilde{\varphi}$  sean funciones diferentes, al ser arbitrarias en nada afectan a la ecuación de la curva geodésica, o sea que (63) representa la misma ecuación que la segunda ecuación (59).

También son conexiones geodésicamente equivalentes las que se encuentran relacionadas mediante la expresión

$$\Gamma'_{pq}{}^k = \Gamma_{pq}{}^k + Y_{pq}{}^k$$

donde  $Y_{pq}{}^k$  es un tensor antisimétrico respecto a los índices inferiores. En efecto

$$\frac{Dv^k}{dt} = \frac{dv^k}{dt} + v^s \Gamma_{sr}{}^k v^r = \frac{dv^k}{dt} + v^s \Gamma'_{sr}{}^k v^r - Y_{sr}{}^k v^s v^r$$

pero como el último sumando es nulo por la antisimetría de  $Y_{sr}{}^k$  entonces la derivada covariante de  $v^k$  no se modifica y las ecuaciones de las geodésicas (59) quedan inalteradas.

En un sistema localmente geodésico (ver epígrafe 6) las componentes simétricas de la conexión se anulan en un punto dado. Entonces en este sistema de coordenadas la ecuación geodésica queda

$$\frac{d^2 x^k}{ds} = 0$$

que tiene por solución

$$x^k = A^k s + B^k \quad (64)$$

siendo  $A^k$  y  $B^k$  constantes. Para un determinado valor de  $k$  (64) corresponde a la ecuación de uno de los ejes coordenados. O dicho de otra forma, en un sistema localmente geodésico los ejes coordenados son geodésicas.

A continuación vamos a tratar el problema de determinar la curva de menos distancia entre dos puntos dados, lo que llamamos curva de menor longitud o geodésica métrica. Para ello vamos a considerar un espacio métrico dotado de un tensor métrico no simétrico. El elemento de línea (26) nos permite determinar la distancia entre dos puntos. Pretendemos determinar la ecuación paramétrica de la curva  $x^k = x^k(t)$  que uniendo dos puntos dados tenga la menor longitud.

Tenemos que determinar la función que haga mínima la distancia entre dos puntos dados A y B

$$s_{AB} = \int_A^B \sqrt{g_{ik} [x^r(t)] dx^i dx^k} = \int_A^B \sqrt{g_{ik} [x^r(t)] x'^i(t) x'^k(t)} dt = \int_A^B \sqrt{f(x^r, x'^r)} dt$$

donde la prima significa derivación respecto al parámetro  $t$ . Aplicando las técnicas del método variacional, encontramos la curva extremal, que debe cumplir la ecuación de Euler

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \sqrt{f}}{\partial x'^r} \right) - \frac{\partial \sqrt{f}}{\partial x^r} = 0,$$

y si la desarrollamos tenemos

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial x'^r} \right) - \frac{\partial f}{\partial x^r} - \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial x'^r} \frac{df}{dt} = 0. \quad (65)$$

En vez de utilizar el parámetro arbitrario  $t$  para describir la curva, vamos a utilizar como parámetro la propia distancia  $s$  de cada punto de la curva al punto inicial A. Ahora tendremos

$$f = g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k = 1$$

donde el punto significa derivación respecto a  $s$  y la ecuación (65) queda

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{x}^r} \right) - \frac{\partial f}{\partial x^r} = 0,$$

desarrollando y teniendo presente el valor de  $f$  queda

$$g_{kr} \ddot{x}^k + g_{rk} \ddot{x}^k + (\partial_m g_{kr} + \partial_m g_{rk} - \partial_r g_{mk}) \dot{x}^m \dot{x}^k = 0.$$

Introduciendo las partes simétricas y antisimétricas del tensor métrico

$$g_{(rk)} \ddot{x}^k + \frac{1}{2} \left[ \partial_m g_{(rk)} + \partial_k g_{(rm)} - \partial_r g_{(mk)} \right] \dot{x}^m \dot{x}^k = 0.$$

Definiendo el símbolo

$$L_{mkr}^* = \frac{1}{2} \left[ \partial_m g_{(rk)} + \partial_k g_{(rm)} - \partial_r g_{(mk)} \right]$$

que es simétrico respecto a los dos primeros índices, entonces la ecuación de la línea de menor longitud se pone

$$g_{(rk)} \ddot{x}^k + L_{mkr}^* \dot{x}^m \dot{x}^k = 0. \tag{66}$$

Debemos notar que  $L_{mkr}^*$  coincide con los símbolos de Christoffel en forma covariante en el caso de que el espacio tuviera una métrica simétrica. Entonces la ecuación de la geodésica métrica (66) tomaría la forma habitual en un espacio de Riemann

$$\ddot{x}^r + \Gamma_{mk}^r \dot{x}^m \dot{x}^k = 0.$$

Como antes hemos señalado, la geodésica no es lo mismo que la curva de menor longitud. No obstante, cuando la conexión del espacio se puede poner de la forma

$$\Gamma_{pq}^k = L_{pq}^{*k} + \alpha(t) \delta_p^k \psi_q + \beta(t) \delta_q^k \psi_p$$

donde  $L_{pq}^{*k}$  está formada exclusivamente por la parte simétrica del tensor métrico y  $\psi_p$  es un campo vectorial arbitrario, entonces ambas curvas, la geodésica y la de menor longitud coinciden, pues como hemos demostrado las dos ecuaciones (59) quedan inalterables, excepto que ahora la conexión será  $L_{pq}^{*k}$ . Esto es lo que ocurre en el espacio euclídeo y también en el espacio de Riemann, en ambos casos ocurre que  $\alpha = \beta = 0$ , o sea la conexión coincide con los símbolos de Christoffel.

En general si la conexión se puede poner de la forma

$$\Gamma_{pq}^k = L_{pq}^k + Y_{pq}^k$$

donde  $Y_{pq}^k$  es un tensor antisimétrico, entonces las geodésicas afín y métrica coinciden, siempre y cuando el tensor métrico sea simétrico.

### 27.- Desviación geodésica

La desviación geodésica mide la variación de la separación de dos puntos que se mueven a través de líneas geodésicas diferentes.

Consideremos una familia de geodésicas que etiquetamos con un parámetro continuo  $t$ . Los puntos de cada una de las curvas geodésicas están definidos por el parámetro  $s$ .

El vector tangente en un punto  $s$  de la geodésica de coeficiente  $t$  es definido como es habitual por

$$u^k = \left( \frac{dx^k}{ds} \right)_t.$$

El vector desviación entre dos puntos de parametro  $s$  situados en dos geodésicas distintas es

$$v^k = \left( \frac{dx^k}{dt} \right)_s.$$

Con la desviación geodésica significamos la aceleración experimentada por la separación geodésica entre dos puntos que evolucionan por geodésicas diferentes y es definida por

$$a^i = \frac{D^2 v^i}{ds^2} = \frac{D}{ds} \left( \frac{Dv^k}{ds} \right) = \frac{dx^k}{ds} D_k \left( \frac{dx^j}{ds} D_j v^i \right) = u^k D_k (u^j D_j v^i).$$

Como

$$u^k D_k v^i - v^k D_k u^i = u^k \partial_k v^i + u^k v^s \Gamma_{sk}^i - v^k \partial_k u^i - v^k u^s \Gamma_{sk}^i = -\tau_{sk}^i u^s v^k, \tag{67}$$

entonces la aceleración geodésica se pone como

$$\frac{D^2 v^i}{ds^2} = u^k D_k (v^j D_j u^i) - u^j D_j (v^i u^s v^k) = D_k D_j u^i u^k v^j + D_k v^j D_j u^i u^k - u^j D_j (\tau_{sk}^i u^s v^k).$$

De la definición de tensor de curvatura del epígrafe 8 se encuentra que

$$D_k D_j u^i = D_j D_k u^i - u^l R^i{}_{ljk} - D_l u^i \tau_{jk}^l,$$

donde hemos utilizado las propiedades de antisimetría de la torsión, por tanto la aceleración geodésica es

$$\begin{aligned} \frac{D^2 v^i}{ds^2} &= D_j D_k u^i u^k v^j - R^i{}_{ljk} u^l u^k v^j - \tau_{jk}{}^l D_l u^i u^k v^j + D_k v^j D_j u^i u^k - u^j D_j (\tau_{sk}{}^i u^s v^k) = \\ &= D_j D_k u^i u^k v^j - R^i{}_{ljk} u^l u^k v^j - \tau_{jk}{}^l D_l u^i u^k v^j + D_j u^i (v^k D_k u^j - \tau_{kl}{}^j u^k v^l) - u^j D_j (\tau_{sk}{}^i u^s v^k) \end{aligned}$$

en la que de nuevo hemos usado la identidad (65). Una posterior simplificación nos lleva a

$$\frac{D^2 v^i}{ds^2} = D_j (u^k D_k u^i) v^j - R^i{}_{ljk} u^l u^k v^j - u^j D_j (\tau_{sk}{}^i u^s v^k) = -R^i{}_{ljk} u^l u^k v^j - \frac{D}{ds} (\tau_{sk}{}^i u^s v^k)$$

donde hemos aprovechado la propiedad de antisimetría del tensor de torsión y hemos tenido en cuenta que el vector tangente de una curva geodésica cumple

$$u^k D_k u^i = \frac{D u^i}{ds} = 0,$$

finalmente tras un intercambio de índices obtenemos finalmente la ecuación de la desviación geodésica

$$\frac{D}{ds} \left( \frac{D v^i}{ds} + \tau_{sk}{}^i u^s v^k \right) = R^i{}_{jkl} u^j u^k v^l.$$

### 28.- Divergencia de un vector

La divergencia de un vector viene definida por

$$D_k v^k = \partial_k v^k + v^s \Gamma_{sk}{}^k, \quad (68)$$

vamos a encontrar una nueva expresión más útil. Partimos para ello de la derivada covariante del tensor métrico

$$D_r g_{ik} = \partial_r g_{ik} - g_{is} \Gamma_{kr}{}^s - g_{sk} \Gamma_{ir}{}^s = Q_{ikr},$$

al hacer la multiplicación contracta con  $g^{ik}$

$$\Gamma_{sr}{}^s = \frac{1}{2} g^{ik} \partial_r g_{ik} - \frac{1}{2} g^{ik} Q_{ikr}. \quad (69)$$

Insertando (30) en (67) encontramos

$$\Gamma_{sr}{}^s = \frac{1}{2g} \partial_r g - \frac{1}{2} g^{ik} Q_{ikr} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^r} - \frac{1}{2} g^{ik} Q_{ikr},$$

al vector

$$\kappa_r = \frac{1}{4} g^{ik} Q_{ikr} = \frac{1}{4} Q_{i r}{}^i$$

le llamaremos vector de no-metricidad. En el caso particular de que la geometría sea semi-métrica, el vector de no-metricidad coincide con el vector de Weyl. Introduciendo el tensor de no-metricidad en la anterior expresión obtenemos

$$\Gamma_{sr}{}^s = \frac{\partial \ln \sqrt{g}}{\partial x^r} - 2\kappa_r. \quad (70)$$

Limitándonos al caso de un espacio riemanniano donde tanto el tensor métrico como la conexión son simétricas y nulo el tensor de no-metricidad, la expresión (70) se reduce a

$$\Gamma_{sr}{}^s = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^r}. \quad (71)$$

Por (68) y (70) la definición de divergencia de un vector para el espacio considerado queda

$$D_k v^k = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial (\sqrt{g} v^k)}{\partial x^k}, \quad (72)$$

válida, en especial, para los espacios de Riemann. Para el caso general tendremos por las definiciones de los vectores de torsión y no-metricidad

$$\Gamma_{sk}{}^k = \tau_{sk}{}^k + \Gamma_{ks}{}^k = \tau_s + \frac{\partial}{\partial x^r} \ln \sqrt{g} - 2\kappa_r$$

entonces de (68)

$$D_k v^k = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial(\sqrt{g} v^k)}{\partial x^k} + v^k (\tau_k - 2\kappa_k) \quad (73)$$

que es la expresión general de la divergencia de un vector.

Si usamos la derivada covariante con arterisco, tendremos para la divergencia de un vector la expresión

$$D_k^* v^k = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial(\sqrt{g} v^k)}{\partial x^k}.$$

Para el caso particular de una geometría semi-métrica de torsión nula tendremos para la divergencia de un vector la expresión

$$D_k v^k = D_k^* v^k - 2v^k Q_k$$

donde  $Q_k$  es el vector de Weyl.

A partir de (70) podemos obtener una nueva expresión para la curvatura homotética

$$V_{ir} = \Gamma_{kr,i}^k - \Gamma_{ki,r}^k = 2\kappa_{i,r} - 2\kappa_{r,i}.$$

por tanto si se cumple

$$\kappa_{i,r} = \kappa_{r,i}$$

entonces es nula la curvatura homotética. Por otra parte si el tensor de no-metricidad fuera nulo, también lo sería el vector de no-metricidad y por consiguiente sería nula la curvatura homotética.

Como el tensor de no-metricidad es nulo en los espacios de Riemann, también será nula la curvatura homotética y como la conexión es simétrica entonces es válida (24), siendo nula la parte antisimétrica del tensor de Ricci. Por tanto en un espacio de Riemann el tensor de Ricci es simétrico.

### 29.- Rotacional de un vector

En un espacio euclídeo tridimensional el rotacional es definido en coordenadas cartesianas por el siguiente vector (no hacemos distinciones entre componentes covariantes y covariantes, es decir hacemos uso de coordenadas cartesianas)

$$\nabla \wedge \mathbf{A} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \left( \frac{\partial A_k}{\partial x_j} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \right) \mathbf{e}_i, \quad (74)$$

que es el vector dual asociado al tensor de componentes

$$(\text{rot } \mathbf{A})_{jk} = \frac{\partial A_k}{\partial x_j} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k}.$$

Esto nos permite generalizar el concepto de rotacional de un vector a un espacio genérico, con sólo sustituir las derivadas parciales por derivadas covariantes

$$(\text{rot } \mathbf{A})_{jk} = D_j A_k - D_k A_j$$

que en el caso de un espacio con conexión simétrica se reduce a

$$(\text{rot } \mathbf{A})_{jk} = \partial_j A_k - \partial_k A_j.$$

De (74) se deriva el vector rotacional

$$\frac{1}{2} \Delta^{pjk} (\text{rot } \mathbf{A})_{jk}.$$

Si el espacio tiene más de tres dimensiones ya no es posible reducir el tensor rotacional a un vector como ocurre en el espacio tridimensional.

### 30.- Gradiente

Sea  $\phi(x^k)$  un campo escalar y por tanto es invariante ante un cambio de coordenadas, esto quiere decir que la función  $\phi(x^k)$  toma el mismo valor en un punto dado, con independencia del sistema de coordenadas.

El gradiente de una función escalar es definido por

$$(\text{grad } \phi)_k = \partial_k \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^k}$$

que se comprueba fácilmente que es un tensor covariante.

### 31.- La laplaciana

El operador laplaciano es definido en coordenadas cartesianas en un espacio euclídeo como

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x_k}$$

en el caso de un espacio genérico, la laplaciana toma la forma  $D_k D^k$ .

### 32.- Ángulos

En un espacio euclídeo el ángulo entre dos vectores de componentes  $dx^i$  y  $dy^k$  se define a partir de su producto escalar

$$\cos \alpha = \frac{g_{ik} dx^i dy^k}{\sqrt{g_{ik} dx^i dx^k} \sqrt{g_{ik} dy^i dy^k}} \quad (75)$$

en esta expresión se anulan los términos que contienen la parte antisimétrica del tensor métrico, es decir que el ángulo solo depende de la parte simétrica de  $g_{ik}$ .

Dada la propiedad que tienen los espacios métricos de permitir que en cada punto se defina un espacio euclidiano tangente (ver epígrafe 14), es posible extender (75) para un espacio genérico.

### 33.- Teoremas integrales

El teorema de Stokes en el espacio tridimensional euclídeo es

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \iint_{\Sigma} \nabla \wedge \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S},$$

donde  $\Gamma$  es la curva perimetral de la superficie  $\Sigma$ . En función de las coordenadas queda

$$\oint_{\Gamma} A_k dx_k = \iint_{\Sigma} (\nabla \wedge \mathbf{A})_k dS_k$$

donde usamos coordenadas cartesianas y por tanto no establecemos diferencias entre índices covariantes y contravariantes. Por las definiciones de rotacional de un vector (74) y del elemento de superficie tenemos para el teorema de Stokes del espacio euclídeo tridimensional

$$\oint_{\Gamma} A_k dx_k = \iint_{\Sigma} \frac{1}{2} \varepsilon_{kpq} \left( \frac{\partial A_q}{\partial x_p} - \frac{\partial A_p}{\partial x_q} \right) dS_k = \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} (\text{rot } \mathbf{A})_{pq} dS_{pq}, \quad (76)$$

habiendo hecho uso de la relación

$$dS_{pq} = \varepsilon_{kpq} dS_k.$$

(76) se generaliza a una variedad genérica

$$\oint_{\Gamma} A_k dx^k = \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} (\text{rot } \mathbf{A})_{pq} dS^{pq}.$$

Nótese que sólo en el caso tridimensional es posible obtener un vector superficie bidimensional, que es el vector dual del tensor superficie de orden dos.

Se puede, igualmente, generalizar el teorema de Gauss, que en el caso del espacio euclídeo tridimensional es

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \oiint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

donde  $\Sigma$  es la superficie cerrada que engloba el volumen  $V$ . Lo anterior se pone en función de las coordenadas

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial A^k}{\partial x_k} d\Omega = \oiint_{\Sigma} A^k d\tilde{S}_k, \quad (77)$$

donde

$$d\tilde{S}_k = \frac{1}{2} \varepsilon^{ipq} dS^{pq},$$

notemos que (77) es un resultado formal, sin referencia a las características geométricas del espacio en que

están definidas las magnitudes implicadas. Por tanto (77) es válida en cualquier espacio con independencia de su dimensión y propiedades.

Como se comprobó en el epígrafe 25 el vector asociado a una superficie bidimensional es

$$dS_k = \frac{1}{2} \Delta_{k\dots mn} dS^{mn} = \frac{1}{2} \sqrt{g} \varepsilon^{k\dots mn} dS^{mn} = \sqrt{g} d\tilde{S}_k.$$

Como veremos en el siguiente epígrafe el teorema de Gauss puede formularse de varias formas en un espacio genérico.

### 34.- Densidades tensoriales

Se llama densidad tensorial de un vector  $A^k$  a

$$\mathbf{A}^k = \sqrt{g} A^k,$$

en un cambio de coordenadas se transforma según

$$\mathbf{A}'^k = \sqrt{g'} A'^k = \frac{1}{|A|} \sqrt{g} A_r^k A^r = \frac{1}{|A|} A_r^k \mathbf{A}^r,$$

donde hemos usado (53). Para el caso especial de una densidad escalar su ley de transformación es

$$\mathbf{A}' = \frac{1}{|A|} \mathbf{A}.$$

Por ejemplo,  $\varepsilon^{pqrs}$  es una densidad tensorial de peso 1, puesto que por lo deducido en el epígrafe 23  $\varepsilon^{pqrs} = \sqrt{g} \Delta^{pqrs}$  y  $\Delta^{pqrs}$  es un tensor.

El concepto de densidad se puede extender a un tensor de cualquier orden e incluso de un peso distinto del primero, por ejemplo una densidad tensorial de segundo orden y de peso  $n$  tiene de ley de transformación

$$\mathbf{A}'^{ik} = \frac{1}{|A|^n} A_p^i A_q^k \mathbf{A}^{pq},$$

como ejemplo vemos que  $d\Omega$  es una densidad escalar de peso -1 ya que  $d\Omega' = |A| d\Omega$ .

Los índices, ya sea superior o inferior, de una densidad tensorial se pueden bajar o subir mediante la técnica habitual del tensor métrico, por ejemplo

$$\mathbf{A}^i_r = g_{rk} \mathbf{A}^{ik} = \sqrt{g} g_{rk} A^{ik} = \sqrt{g} A^i_r.$$

La derivada covariante de la densidad tensorial de un vector es

$$D_k(\mathbf{A}^i) = D_k(\sqrt{g} A^i) = D_k \sqrt{g} A^i + \sqrt{g} D_k A^i = \frac{1}{2\sqrt{g}} D_k g A^i + \sqrt{g} (\partial_k A^i + \Gamma_{sk}^i A^s),$$

para calcular la derivada covariante del determinante del tensor métrico tenemos en cuenta que

$$D_k g = g g^{pq} D_k g_{pq} = g g^{pq} Q_{pqk}.$$

Por (69) tenemos

$$\Gamma_{sk}^s = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^s} - \frac{1}{2} g^{pq} Q_{pqk}$$

entonces nos queda

$$D_k(\mathbf{A}^i) = \partial_k \mathbf{A}^i + \mathbf{A}^s \Gamma_{sk}^i - \mathbf{A}^i \Gamma_{sk}^s.$$

En cuanto a la divergencia de la densidad de un vector tenemos

$$D_k(\mathbf{A}^k) = D_k(\sqrt{g} A^k) = D_k \sqrt{g} A^k + \sqrt{g} D_k A^k = \frac{1}{2\sqrt{g}} D_k g A^k + \sqrt{g} (\partial_k A^k + \Gamma_{sk}^k A^s),$$

de donde se deriva

$$D_k(\mathbf{A}^k) = D_k(\sqrt{g} A^k) = \partial_k(\sqrt{g} A^k) + \sqrt{g} A^k \tau_k. \quad (78)$$

Siguiendo las mismas técnicas se calcula la derivada covariante de una densidad tensorial. Para el caso concreto de un tensor de segundo orden covariante tendremos

$$D_k(\mathbf{A}_{ir}) = D_k(\sqrt{g} A_{ir}) = \partial_k \mathbf{A}_{ir} - \mathbf{A}_{sr} \Gamma_{ik}^s - \mathbf{A}_{is} \Gamma_{rk}^s - \mathbf{A}_{ir} \Gamma_{lk}^l$$

que fácilmente se puede extender a otros tipos de densidades tensoriales. Si nos limitamos a la divergencia de una densidad tensorial tendríamos para el caso de un tensor de segundo orden

$$D_k(\mathbf{A}^{ik}) = \partial_k \mathbf{A}^{ik} + \mathbf{A}^{sk} \Gamma_{sk}^i + \mathbf{A}^{ik} \tau_k.$$

Finalmente mostramos que la derivada covariante de una densidad escalar es

$$D_k \mathbf{A} = \partial_k \mathbf{A} - \mathbf{A} \Gamma_{sk}^s.$$

Notemos que la derivada covariante de una densidad tensorial es una nueva densidad tensorial. Para ello notemos que  $\partial_k \sqrt{g}$  es una densidad tensorial, en efecto

$$\partial_k \sqrt{g} = \frac{1}{2} \sqrt{g} g^{pq} Q_{pqk}$$

que resulta ser un vector multiplicado por  $\sqrt{g}$ . Añadir que la derivada parcial de una densidad escalar  $\mathbf{A}$  es una densidad vectorial

$$\partial_k \mathbf{A} = \sqrt{g} \left( \frac{1}{2} g^{pq} Q_{pqk} A - \partial_k A \right)$$

y como  $A$  es un escalar lo encerrado dentro del paréntesis es un vector covariante.

Podemos generalizar el teorema integral de Gauss (74) para el caso de existir torsión, para lo que se utiliza (78) de donde resulta aplicando (77)

$$\int_V D_k(\sqrt{g} A^k) d\Omega = \int_\Sigma \sqrt{g} A^k d\tilde{S}_k + \int_V \sqrt{g} A^k \tau_k d\Omega = \int_\Sigma A^k dS_k + \int_V \sqrt{g} A^k \tau_k d\Omega$$

para el caso en que el vector  $A^k$  se anule en los límites de la integración nos queda simplemente

$$\int_V D_k(\sqrt{g} A^k) d\Omega = \int_V \sqrt{g} A^k \tau_k d\Omega \quad (79)$$

que es nulo en el caso de un espacio sin torsión como el de Riemann.

Otra forma de poner el teorema de Gauss es

$$\int_V D_k^* A^k dV = \int_\Sigma \sqrt{g} A^k d\tilde{S}_k = \int_\Sigma A^k dS_k.$$

Finalmente otra forma del teorema de Gauss se basa en la aplicación de (73)

$$\int_V D_k A^k dV = \int_\Sigma A^k dS_k + \int_V v^k (\tau_k - 2\kappa_k) d\Omega.$$

Consideremos ahora un tensor de segundo orden simétrico  $T^{ik}$  definido en un espacio de Riemann. Su divergencia será

$$D_k T_i^k = \partial_k T_i^k + T_i^s \Gamma_{sk}^k - T_s^k \Gamma_{ik}^s = \partial_k T_i^k - T_i^s \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^s} - T_s^k \Gamma_{ik}^s$$

donde se ha utilizado (66). Simplificando

$$\sqrt{g} D_k T_i^k = \partial_k (\sqrt{g} T_i^k) - \sqrt{g} T_s^k \Gamma_{ik}^s.$$

Analizando el segundo sumando de la anterior expresión y teniendo presente la simetría del tensor  $T^{ik}$

$$T_s^k \Gamma_{ik}^s = T_s^k L_{ik}^s = \frac{1}{2} T_s^k g^{sr} (g_{kr,i} + g_{ir,k} - g_{ik,r}) = \frac{1}{2} T^{rk} g_{kr,i},$$

finalmente nos queda

$$\sqrt{g} D_k T_i^k = D_k \mathbf{T}_i^k = \partial_k \mathbf{T}_i^k - \frac{1}{2} \mathbf{T}^{rk} g_{kr,i}.$$

Si ahora suponemos que el tensor  $T^{ik}$  es antisimétrico

$$\sqrt{g} D_k T^{ik} = \partial_k (\sqrt{g} T^{ik}) - \sqrt{g} T^{sk} \Gamma_{sk}^i,$$

y como la conexión es simétrica

$$D_k \mathbf{T}^{ik} = \partial_k \mathbf{T}^{ik},$$

donde tenemos en cuenta la nulidad de la derivada covariante del determinante del tensor métrico en un espacio de Riemann.

### 35.- Relaciones útiles de las densidades tensoriales

Es de interés expresar la variación de la raíz cuadrada del determinante del tensor métrico en función de la variación de la densidad tensorial  $\mathbf{g}^{ik} = \sqrt{g} g^{ik}$ ; por (30) tenemos

$$\delta\sqrt{g} = -\frac{1}{2}\sqrt{g} g_{pq} \delta g^{pq} = -\frac{1}{2} g_{qp} \delta \mathbf{g}^{qp} + \frac{1}{2} g_{qp} g^{qp} \delta\sqrt{g}$$

y como  $g_{qp} g^{qp} = 4$  entonces

$$\delta\sqrt{g} = \frac{1}{2} g_{qp} \delta \mathbf{g}^{qp}. \quad (80)$$

Podemos también expresar la variación de  $\sqrt{g}$  en función de las componentes covariantes de la densidad del tensor métrico. Para ello partimos de

$$\delta\sqrt{g} = \frac{1}{2}\sqrt{g} g^{pq} \delta g_{pq} = \frac{1}{2} g^{pq} \delta \mathbf{g}_{pq} - \frac{1}{2} g^{pq} g_{pq} \delta\sqrt{g}$$

entonces

$$\delta\sqrt{g} = \frac{1}{6} g^{pq} \delta \mathbf{g}_{pq}. \quad (81)$$

De (80) se deduce que si  $D_r \mathbf{g}^{ik} = 0$  entonces  $D_r g^{ik} = 0$ . En efecto, por (80)

$$D_r \sqrt{g} = \frac{1}{2} g_{pq} D_r \mathbf{g}^{pq} = 0$$

entonces de

$$D_r (\sqrt{g} g^{ik}) = 0 = D_r \sqrt{g} g^{ik} + \sqrt{g} D_r g^{ik}$$

se deduce  $D_r g^{ik} = 0$ . La inversa también es cierta, es decir que si  $D_r g^{ik}$  es nula entonces  $D_r \mathbf{g}^{ik}$  también lo es. En efecto, por (30) se encuentra que si  $D_r g^{ik} = 0$  entonces  $D_r \sqrt{g} = 0$  y por tanto  $D_r \mathbf{g}^{ik} = 0$ .

Consideremos la transformación infinitesimal de coordenadas

$$x'^k = x^k + \eta^k; \quad A_r^k = \frac{\partial x'^k}{\partial x^r} = \delta_r^k + \frac{\partial \eta^k}{\partial x^r}; \quad B_r^k \approx \delta_r^k - \frac{\partial \eta^k}{\partial x^r},$$

entonces el tensor métrico se transforma según la ley

$$g'_{ik} = g_{ik} - \frac{\partial \eta^q}{\partial x^k} g_{iq} - \frac{\partial \eta^p}{\partial x^i} g_{pk} \Rightarrow \delta g_{ik} = -\frac{\partial \eta^q}{\partial x^k} g_{iq} - \frac{\partial \eta^p}{\partial x^i} g_{pk}$$

y la función escalar  $L = L(g_{ik})$  cambiará según

$$\delta L = 0 = \frac{\partial L}{\partial g_{ik}} \delta g_{ik} = \frac{\partial L}{\partial g_{ik}} \left( -\frac{\partial \eta^q}{\partial x^k} g_{iq} - \frac{\partial \eta^p}{\partial x^i} g_{pk} \right) = -\frac{\partial \eta^q}{\partial x^k} \left( \frac{\partial L}{\partial g_{ik}} g_{iq} + \frac{\partial L}{\partial g_{ki}} g_{qi} \right)$$

donde suponemos que el tensor métrico es asimétrico. Como las funciones  $\eta^k$  son arbitrarias e independientes entre sí entonces se deduce

$$\frac{\partial L}{\partial g_{ik}} g_{iq} + \frac{\partial L}{\partial g_{ki}} g_{qi} = 0. \quad (82)$$

La ecuación (82) se puede extender para el caso de una densidad escalar del tipo

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}(g_{ik}) = \sqrt{g} L(g_{ik}),$$

teniendo en cuenta (30)

$$\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial g_{pq}} = \frac{1}{2} \sqrt{g} g^{pq}$$

y (82) toma la forma

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial g_{ik}} g_{iq} + \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial g_{ki}} g_{qi} = \delta_q^k \mathbf{L} \quad (83)$$

como se puede deducir por cálculo directo. Las fórmulas (82) y (83) siguen siendo válidas si en vez del tensor métrico tenemos cualquier otro tensor de segundo orden.

Sea  $\mathbf{L} = \mathbf{L}(x^{ik}, \dots)$  una densidad escalar que depende entre otros del tensor  $x^{ik}$ , vamos a demostrar que

$$\mathbf{b}_{ik} = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x^{ik}}$$

es una densidad tensorial de segundo orden covariante y de las mismas propiedades de simetría que  $x^{ik}$ . La densidad escalar se puede escribir como  $\mathbf{L} = \sqrt{a}L$  donde  $a$  es el valor absoluto del determinante de un determinado tensor de segundo orden  $a_{ik}$  y  $L$  es un escalar. Consideremos una variación arbitraria del vector  $x_{ik}$

$$x'_{ik} = x_{ik} + \delta x_{ik}$$

donde los tres tensores anteriores están definidos en el mismo punto. A consecuencia de la anterior variación también varía  $\mathbf{L}$  y  $L$ . Ahora bien, como  $L$  es un escalar  $\delta L$ , que es la diferencia de dos escalares, también será un escalar. En cuanto a la variación de  $\mathbf{L}$  tendremos

$$\delta \mathbf{L} = \delta(\sqrt{a}L) = \delta\sqrt{a}L + \sqrt{a}\delta L = \frac{1}{2}\sqrt{a}a^{pq}\delta a_{pq} + \sqrt{a}\delta L \quad (84)$$

donde hemos aplicado (30). Los dos sumandos del segundo miembro de (84) son densidades escalares ya que son escalares multiplicados por  $\sqrt{a}$ , entonces  $\delta \mathbf{L}$  es una densidad escalar. Por otra parte tenemos que

$$\delta \mathbf{L} = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x^{ik}} \delta x^{ik} = \mathbf{b}_{ik} \delta x^{ik}$$

como  $\delta \mathbf{L}$  es una densidad escalar y  $\delta x^{ik}$  es un tensor de segundo orden, forzosamente  $\mathbf{b}_{ik}$  debe ser una densidad tensorial de segundo orden covariante, tal como queríamos demostrar. Notemos que si  $x^{ik}$  es simétrico o antisimétrico entonces  $\mathbf{b}_{ik}$  también tendrá esa misma propiedad. Como corolario es fácil comprobar que  $\partial \mathbf{L} / \partial x^{ik}$  es un tensor de segundo orden covariante. Este teorema que acabamos de demostrar se puede extender para densidades escalares que dependan de tensores de cualquier orden y carácter.

Consideremos otro caso, aquel en que  $\mathbf{L} = \mathbf{L}(\Gamma_{ik}^r)$  entonces

$$\delta \mathbf{L} = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \Gamma_{ik}^r} \delta \Gamma_{ik}^r$$

como  $\delta \Gamma_{ik}^r$  es un tensor, entonces  $\partial \mathbf{L} / \partial \Gamma_{ik}^r$  es una densidad tensorial.

Podemos generalizar estos razonamientos al caso en que la dependencia de  $\mathbf{L}$  sea respecto a  $x_{,r}^{ik}$  y  $\partial \Gamma_{ik,r}^p$  o a otros órdenes de derivación, entonces

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{L} = & \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \Gamma_{ik,p}^r} \delta \Gamma_{ik,p}^r + \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x_{,p}^{ik}} \delta x_{,p}^{ik} = \frac{\partial}{\partial x^p} \left( \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \Gamma_{ik,p}^r} \delta \Gamma_{ik}^r \right) - \frac{\partial}{\partial x^p} \left( \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \Gamma_{ik,p}^r} \right) \delta \Gamma_{ik}^r + \\ & + \frac{\partial}{\partial x^p} \left( \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x_{,p}^{ik}} \delta x^{ik} \right) - \frac{\partial}{\partial x^p} \left( \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x_{,p}^{ik}} \right) \delta x^{ik} \end{aligned}$$

por tanto

$$\frac{\partial}{\partial x^p} \left( \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \Gamma_{ik,p}^r} \right); \quad \frac{\partial}{\partial x^p} \left( \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x_{,p}^{ik}} \right)$$

son densidades tensoriales.

### 36.- Tensores y densidades duales

En un espacio tetradimensional asociamos a un vector de componentes covariante  $A_m$  el tensor dual

$$A^{*ikl} = \Delta^{iklm} A_m,$$

también se le puede asociar a  $A_m$  una densidad tensorial dual mediante

$$\mathbf{A}^{*ikl} = \varepsilon^{iklm} A_m.$$

donde tenemos en cuenta el carácter de densidad tensorial de los símbolos de Levi-Civita.

Para el caso en que tengamos un tensor .... antisimétrico su tensor dual es

$$A^{*ik} = \frac{1}{2} \Delta^{ikpq} A_{pq},$$

de donde también se obtiene una densidad tensorial

$$\mathbf{A}^{*ik} = \frac{1}{2} \varepsilon^{ikpq} A_{pq}.$$

El concepto de tensores y densidades duales se puede extender a tensores de otro orden e igualmente a espacios de dimensiones distintas de cuatro.

### 37.- Tensor de Weyl

Buscamos un tensor de cuarto orden definido en un espacio de Riemann que tenga las mismas propiedades de simetría que el tensor de curvatura y además que todas sus trazas sean nula. Este tensor sólo se puede construir a partir de  $R^i_{jkl}$ ,  $R_{ik}$ ,  $R$  y  $g_{ik}$  y es llamado tensor de Weyl

$$C_{ijkl} = AR_{ijkl} + Bg_{ij}R_{kl} + Cg_{ik}R_{jl} + Dg_{il}R_{jk} + Eg_{jk}R_{il} + Fg_{jl}R_{ik} + Gg_{kl}R_{ij} + Hg_{ik}g_{jl}R + Ig_{il}g_{jk}R + Kg_{ij}g_{kl}R.$$

El coeficiente  $A$  es una constante numérica que, en realidad, multiplica a todo el resto del segundo miembro, por lo que podemos adoptar el valor arbitrario  $A=1$ . Los coeficientes en los que aparece  $B$  y  $G$  tienen que anularse, puesto que al ser simétrico frente a transformaciones  $i \rightarrow j$  o  $k \rightarrow l$  haría que el tensor  $C_{ijkl}$  perdiera sus propiedades de antisimetría respecto a los dos primeros y a los dos últimos pares de índices. El coeficiente  $K$  también es cero ya que multiplica a una expresión simétrica respecto al cambio  $i \rightarrow j$  o a  $k \rightarrow l$ , lo que ya hemos dicho que no es permitido.

Para conseguir la deseada antisimetría del tensor de Weyl es necesario que se cumpla

$$I = -H$$

de esta forma la suma de los sumandos que contienen esos coeficientes tienen las adecuadas propiedades de antisimetría. Por tanto el tensor de Weyl queda

$$C_{ijkl} = R_{ijkl} + Cg_{ik}R_{jl} + Dg_{il}R_{jk} + Eg_{jk}R_{il} + Fg_{jl}R_{ik} + Hg_{ik}g_{jl}R - Hg_{il}g_{jk}R.$$

Al igual que para el tensor de curvatura, también el tensor de Weyl tiene dos contracciones posibles  $C^i_{ikl}$  y  $C^i_{jki}$  ya que todas las restantes o coinciden con las dos anteriores o son sus opuestos. Vamos a exigir que las dos contracciones anteriores se anulen. Al aplicar este requisito se encuentra

$$C + D + E + F = 0.$$

donde hemos tenido en cuenta que  $R^i_{ikl} = V_{kl} = 0$ . De la segunda contracción del tensor de Ricci se deducen las siguientes dos identidades

$$1 + C + 4D + F = 0; \quad E + H - 4H = 0,$$

donde tenemos en cuenta que el tensor de Ricci no puede ser proporcional al tensor métrico. Al imponer la condición

$$C_{ijkl} = -C_{jikl}$$

se encuentra

$$C = -E; \quad D = -F,$$

y finalmente por la condición de antisimetría

$$C_{ijkl} = -C_{ijlk}$$

tenemos

$$C = -D; \quad E = -F.$$

Reuniendo todas las relaciones encontradas hallamos que los coeficientes tienen que ser

$$C = \frac{1}{2}; \quad D = -\frac{1}{2}; \quad E = -\frac{1}{2}; \quad F = \frac{1}{2}; \quad H = -\frac{1}{6}$$

donde suponemos que el espacio es de cuatro dimensiones. Con estos resultados el tensor de Weyl en forma completamente covariante es

$$C_{ijkl} = R_{ijkl} + \frac{1}{2}(g_{ik}R_{jl} - g_{il}R_{jk} - g_{jk}R_{il} + g_{jl}R_{ik}) + \frac{1}{6}(g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl})R.$$

Si el espacio tuviera  $N$  dimensiones el tensor de Weyl sería

$$C_{ijkl} = R_{ijkl} + \frac{1}{N-2}(g_{ik}R_{jl} - g_{il}R_{jk} - g_{jk}R_{il} + g_{jl}R_{ik}) + \frac{1}{(N-1)(N-2)}(g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl})R.$$

donde  $N$  es la dimensión del espacio que tiene que ser mayor que 3.

El tensor de Weyl en forma mixta  $C^i{}_{jkl}$  tiene la propiedad de ser invariante conforme, es decir que no se altera si se realiza la transformación conforme definida por

$$g'_{ik} = \lambda^2 g_{ik}$$

donde  $\lambda$  es una función escalar de las coordenadas. Por esta invariancia a  $C^i{}_{jkl}$  también se le llama tensor conforme de Weyl.

### 38.- Unidades

Las coordenadas contravariantes de un punto del espacio no son más que etiquetas para su identificación. Estas coordenadas representan un concepto previo a la métrica, es decir que no están relacionadas con la distancia, concepto este último que requiere la introducción del tensor métrico. Por tanto, las coordenadas contravariantes de un punto del espacio no tienen unidades físicas.

No obstante, el elemento de línea de un espacio si tiene unidades, pues representa la distancia. Se trata de unidades de longitud, que representamos genéricamente por  $L$ . Entonces el elemento de línea  $ds$  tiene de unidad  $L$ , lo que significa que el tensor métrico en forma covariante debe tener la unidad  $L^2$ ; sus componentes contravariantes tienen la unidad  $L^{-2}$  y el determinante obtenido de las coordenadas covariantes tiene la unidad  $L^{2N}$ , donde  $N$  es la dimensión del espacio.

La conexión afín es adimensional, como fácilmente se puede comprobar a partir de la definición de derivada covariante. Por tanto el tensor de curvatura  $R^k{}_{sir}$ , el tensor de Ricci  $R_{si}$  y la curvatura homotética  $V_{ir}$  son también adimensionales, puesto que dependen de la conexión o de sus derivadas respecto a las componentes contravariantes, que como antes hemos dicho son adimensionales. Pero la curvatura escalar  $R$  por depender de las componentes contravariantes del tensor métrico tiene la unidad  $L^{-2}$ .

Sin embargo, las componentes covariantes de las coordenadas tienen de unidad  $L^2$ , pues se construyen a partir de las componentes covariantes del tensor métrico.

Por lo dicho queda claro que un tensor puede tener una u otras unidades según venga expresado por coordenadas covariantes o contravariantes.

Para completar digamos que el tensor de torsión  $\tau_{is}{}^k$ , el vector de torsión  $\tau_i$  y el vector de Weyl  $Q_i$  son adimensionales. El tensor de no metricidad  $Q_{ikp}$  tiene la unidad  $L^2$  y el volumen  $L^N$ .

Lo expuesto anteriormente está relacionado con el cambio de calibración, que se interpreta como un cambio en la definición de la unidad de longitud. Las magnitudes que son adimensionales, tales como la conexión o el tensor de Ricci en forma covariante, no son alteradas cuando se hace un cambio de calibración. Sin embargo magnitudes como el tensor métrico en forma covariante o la curvatura escalar, que tienen unidades cambiarán cuando se realice un cambio de calibración.

### Bibliografía

Todos los libros de Relatividad General dedican su parte inicial a una descripción de la geometría diferencial, especialmente centrada en los espacios de Riemann. La mejor fuente para el estudio de la geometría no-Riemanniana se encuentra en los artículos en los que se investigan las teorías de campo unificado o las generalizaciones de la teoría de la gravitación. A continuación relacionamos una breve bibliografía escogida por la especial claridad con la que están expuestos sus contenidos.

-POPLASWIKI, Nikodem J.: «Spacetime and fields», arXiv:0911.0334, 2009.

-SCHRÖDINGER, Erwin: *Space-Time Structure*, Cambridge University Press, 1991.

-LICHNEROWITZ, A.: *Elementos de cálculo tensorial*, Aguilar, 1972.

-TONNELAT, Marie-Antoinette: *Les théories unitaires de l'électromagnétisme et de la gravitation*, Gauthier-Villars, 1965.

-EDDINGTON, A. S.: «A Generalisation of Weyl's Theory of the Electromagnetic and Gravitational Fields», *Proceedings of the Royal Society of London; Philosophical Transactions of the Royal Society* 99 (1921) 104-112.