Teoría de campo relativista

$$
\begin{aligned}
&RR_{(ik)} - \frac{1}{4} g_{ik} R^2 - g_{ik} \overset{*}{D}_l R^{,l} + \overset{*}{D}_i R_{,k} + \\
&+ 3 g_{ik} \phi^l R_{,l} + 2 g_{ik} R \overset{*}{D}_l \phi^l - 3\phi_i R_{,k} - \\
&- 3\phi_k R_{,i} - R \overset{*}{D}_i \phi_k - R \overset{*}{D}_k \phi_i + 8 R \phi_i \phi_k - \\
&- 2 g_{ik} R \phi^l \phi_l = -\chi T_{ik}
\end{aligned}
$$

Fundamentos físico-matemáticos de los campos clásicos

Wenceslao Segura González

εWT Ediciones

Teoría de campo relativista

Wenceslao Segura González

εWT
Ediciones

TEORÍA DE CAMPO RELATIVISTA

e-mail: wenceslaoseguragonzalez@yahoo.es

Primera edición:
20 de septiembre de 2014

Edita:
ε*WT* Ediciones

ISBN:
978-84-617-1463-6

Depósito Legal:
CA 299-2014

Descargas:
www.wenceslao-segura.es

Contenido

ISBN: 978-84-617-1463-6

Introducción

Pretendemos con este libro exponer, en la forma más clara que hemos podido, las técnicas físico-matemáticas usadas en el estudio de los campos clásicos relativistas. En este sentido, el libro quiere cumplir una función pedagógica y está dirigido a aquellos, que ya teniendo un conocimiento básico de electromagnetismo y de Relatividad, quieran profundizar en los aspectos formales de la teoría de campo.

Hemos huido del rigorismo matemático, porque entendemos que el físico no gana nada con ello; al contrario, los enfoques excesivamente «matematicistas» ocultan la esencia física de la materia que se estudia.

Hemos dividido esta obra en cinco capítulos y dos apéndices, los suficientes para entender las técnicas usadas en el estudio de los campos clásicos relativistas.

El primer capítulo lo dedicamos a la geometría diferencial, base matemática utilizada en la formulación de los campos relativistas no cuánticos. Lo hemos desarrollado, al igual que los restantes capítulos, de forma cerrada, de manera que no se exigen lecturas complementarias, ni tampoco conocimientos específicos previos.

El segundo capítulo trata de las técnicas lagrangianas aplicadas a los campos. Entendemos que es el capítulo más novedoso del libro, en cuanto hemos desarrollado con planteamientos originales muchos de los asuntos allí tratados, en especial el teorema de Noether y las técnicas para calcular el tensor de energía-momento.

El tercer capítulo se dedica al campo electromagnético, entendido como un campo relativista y obteniendo sus ecuaciones a partir de un principio variacional.

Al campo gravitatorio se le dedica el cuarto capítulo. Obtenemos sus ecuaciones utilizando tres procedimientos, según cuáles sean los potenciales de campo considerados: el tensor métrico y/o la conexión afín, a los que añadimos la formulación *tetrad* de la relatividad general.

Durante la primera mitad del siglo XX se desarrollaron numerosas teorías de campo unificado en un intento de geometrizar las fuerzas electromagnéticas y gravitatorias. Como ejemplo de estas teorías de campo hemos desarrollado en el quinto capítulo la teoría de Weyl, lo que nos sirve para profundizar aún más en las técnicas expuestas en otros lugares de esta obra.

Finalmente encontrará el lector dos apéndices. En el primero de ellos aclaramos algunos conceptos de la teoría relativista que aún siguen originando confusión, incluso entre autores destacados. En fín, el segundo apéndice hay que considerarlo especulativo y plantea desde un punto de vista novedoso el significado que tiene la transformación conforme en las teorías de la gravitación.

Este libro se edita en acceso abierto pues entendemos que la publicación científica ha registrado un cambio profundísimo con la extensión de internet. Es imposible que una obra impresa pueda llegar a tantos lectores como un libro, que tal como éste, se encuentra a disposición de cualquier lector con sólo unos cuantos clics de ordenador.

Wenceslao Segura González
Tarifa (España), septiembre de 2014

Teoría de campo relativista
Wenceslao Segura González
ISBN: 978-84-617-1463-6

1

Geometría diferencial

1.1 Álgebra tensorial

Un espacio es un conjunto de infinitos elementos a los que llamamos puntos, cada uno de ellos definidos por N números reales independientes entre sí, a los que llamamos coordenadas del punto. Impondremos la condición de que el espacio sea contínuo, es decir que si un punto tiene coordenadas x^k existen otros puntos con coordenadas $x^k + dx^k$, donde dx^k son valores infinitesimales, es decir que «infinitamente cerca» de un punto existen infinitos puntos. Al número N de coordenadas necesarias para identificar a cada punto se le llama dimensión del espacio.

La representación de los puntos del espacio por sus coordenadas no es única. En efecto, es posible definir nuevas coordenadas relacionadas con las antiguas por N funciones

$$x'^r = x'^r\left(x^k\right) \tag{1.1}$$

o bien *

$$d\,x'^r = \frac{\partial x'^r}{\partial x^k} dx^k = A^r_k\, d\,x^k,$$

donde suponemos que la transformación es invertible, o sea que el jacobiano o determinante de la matriz A^r_k es distinto de cero, debiendo existir por tanto la relación inversa

$$d\,x^r = \frac{\partial x^r}{\partial x'^k} d\,x'^k = B^r_k\, d\,x'^k.$$

Vamos también a exigir que las funciones (1.1) sean derivables y con suficientes propiedades de regularidad.

* En lo que sigue utilizaremos el criterio de sumación de Einstein.

Esta operación de cambio de coordenadas nos permite definir los elementos básicos que operan en un espacio, como son, entre otros: vectores, tensores, escalares y espinores. Un vector es un ente geométrico que puede venir definido por N números v^k, llamados sus componentes contravariantes, y que están relacionados con el espacio de tal forma que al hacer un cambio de coordenadas (1.1) estas componentes se transforman según la ley

$$v'^k = A_r^k v^r ,$$

es decir se transforman con la misma ley que las diferenciales de las coordenadas. Otra posibilidad es que el vector venga definido por un conjunto de N números v_k, llamados sus componentes covariantes, que ante el cambio (1.1) se transforman como

$$v'_k = B_k^r v_r .$$

Hay que advertir que un vector viene expresado por las componentes contravariantes o por las covariantes. No obstante, y como veremos más adelante, es posible definir un vector de orden dos, como es el caso del tensor métrico, que nos sirva para «subir o bajar los índices», es decir establecer una correspondencia entre las componentes contravariantes de un vector y sus componentes covariantes. En este caso el vector viene definido tanto por unas como por las otras componentes, pues ambas se encuentran relacionados entre sí.

Debemos distinguir entre el vector simple y el campo vectorial. En el primer caso se trata de un vector definido en un único punto del espacio. En un campo vectorial nos encontramos con un vector definido en cada punto del espacio, lo que significa que las componentes del campo vectorial son funciones de las coordenadas.

El concepto de vector es fácilmente generalizable para alcanzar el concepto de tensor. Por ejemplo, un tensor de segundo orden contravariante es un ente matemático definido por N^2 componentes t^{pq} que se transforman en un cambio de coordenadas (1.1) por la ley

$$t'^{rk} = A_p^r A_q^k t^{pq} .$$

El concepto de tensor se puede generalizar tanto en su orden como en su carácter, sea éste covariante, contravariante o mixto. Por ejemplo, las componentes de un tensor de segundo orden mixto se transforman según

$$t'_q{}^p = A_r^p B_q^s t_s{}^r .$$

Al igual que lo señalado para los vectores, cabe hablar de un tensor definido solamente en un punto del espacio o de un campo tensorial, en este caso sus componentes son funciones de las coordenadas.

Se definen los escalares como entes matemáticos ligados con el espacio y definidos por un solo número que no varía cuando se hace un cambio de coordenadas, o sea, es invariante. Puede existir un campo escalar, entonces el número que lo define depende del punto del espacio que se considere, pero estos números seguirán siendo los mismos al realizar un cambio de coordenadas.

Fácilmente se pueden definir operaciones tensoriales como la suma, resta, multiplicación y contracción. Esta última consiste en igualar dos índices, uno superior y otro inferior y luego sumar respecto a ellos. La contracción, por ejemplo, de un tensor de cuarto orden tres veces contravariante y uno covariante $t_q{}^{rkp}$ es un nuevo tensor de segundo orden t^{kp}

$$t_r{}^{rkp} = \sum_r t_r{}^{rkp} = t^{kp}.$$

Nótese que es importante el orden en que están colocados todos los índices de las componentes de un tensor, no solamente los índices que están en la misma línea, sino los índices contravariantes respecto a los covariantes. En realidad lo que hay que distinguir es el orden entre los índices contravariantes (o entre los covariantes), pero en el caso en que se defina un tensor de segundo orden para bajar y subir índices, entonces los índices contravariantes se pueden convertir en covariantes y viceversa, por ello es también necesario conocer el orden de un tipo de índice respecto a los del otro tipo. Debemos también notar que de un tensor dado se pueden obtener varios tensores contraídos que, en general, serán diferentes entre sí. De nuestro ejemplo anterior también se pueden obtener los tensores contractos $t_k{}^{rkp}$ y $t_p{}^{rkp}$.

Es posible combinar el producto con la contracción, operación especialmente útil para los vectores, denominándose en este caso producto interno o escalar. Para los vectores de componentes v^r y w_k su producto escalar será $v^k w_k$, donde como es habitual se sobreentiende la suma respecto a los índices repetidos, a los que se les llama índices mudos.

Una ecuación cuyos dos miembros sean tensores de igual orden y carácter es una ecuación invariante, es decir, que la relación entre sus miembros se mantiene cualesquiera que sea el sistema de coordenadas elegido. Y viceversa, si encontramos una ecuación invariante tal que uno de sus miembros tenga carácter tensorial, podemos concluir que el otro miembro también será un tensor y de iguales características.

2.1 Conexiones y derivadas

Cuando un espacio euclídeo (o sea, el espacio ordinario, ver epígrafe 14.1) está expresado en coordenadas curvilíneas, las derivadas parciales de las componentes de un vector $\partial_r v^k$ no tienen propiedades definidas de transformación, por ello es necesario introducir el concepto de derivada covariante del vector. Sea el vector $\mathbf{v} = v^k \mathbf{e}_k$, siendo $\mathbf{e}_k$ los vectores bási-

ISBN: 978-84-617-1463-6

cos, al hallar la derivada de $\mathbf{v}$ se obtiene

$$d\mathbf{v} = dv^k \mathbf{e}_k + v^k d\mathbf{e}_k = \frac{\partial v^k}{\partial x^r} dx^r \mathbf{e}_k + v^k \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial x^r} dx^r ,$$

como cualquier vector se puede poner como una combinación lineal de los vectores básicos, entonces

$$\frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial x^r} = \Gamma_{kr}{}^s \mathbf{e}_s$$

siendo los $\Gamma_{kr}{}^s$ unos coeficientes a determinar. Por lo anterior queda que la derivada de un vector en un espacio euclídeo es

$$d\mathbf{v} = \left(\partial_r v^s + v^k \Gamma_{kr}{}^s \right) dx^r \mathbf{e}_s = D_r v^s dx^r \mathbf{e}_s , \tag{2.1}$$

llamando a $D_r v^s$ las componentes de la derivada covariante del vector $\mathbf{v}$.

Para obtener una definición adecuada de diferenciación en un espacio genérico no euclídeo, nos guiaremos por (2.1). Con esto queremos indicar que la definición que daremos de derivación se reduce a la obtenida en la geometría euclídea. Teniendo esto presente, definimos la derivada covariante de un vector por los siguientes requisitos:

a) La derivada covariante de un vector es un tensor de segundo orden.

b) Si el campo vectorial tiene de componentes contravairantes v^k las componentes de la derivada covariante es la expresión

$$D_r v^k = \frac{\partial v^k}{\partial x^r} + v^s \Gamma_{sr}{}^k = \partial_r v^k + v^s \Gamma_{sr}{}^k \tag{3.1}$$

donde los símbolos $\Gamma_{sr}{}^k$ son las componentes de un campo –normalmente sin carácter tensorial– al que llamamos conexión afín o simplemente conexión.

c) La derivada covariante cumple la regla de Leibnitz de derivación de un producto.

d) En el caso de un campo escalar ϕ la derivada covariante es idéntica a su derivada parcial

$$D_r \phi = \partial_r \phi .$$

Una serie de aclaraciones exige la anterior definición. Como $\Gamma_{sr}{}^k$ no es en general simétrica respecto a los índices inferiores, se podría haber definido la derivada covariante por

$$\tilde{D}_r v^k = \partial_r v^k + v^s \Gamma_{rs}{}^k \tag{4.1}$$

donde se ha invertido el orden de los subíndices de la conexión con respecto a la usada en (3.1). Como demostraremos más adelante, si (3.1) es un tensor también lo es (4.1), o dicho de otra forma si $\Gamma_{sr}{}^k$ es una conexión, también lo es su traspuesta $\tilde{\Gamma}_{rs}{}^k = \Gamma_{sr}{}^k$. (4.1) representa una derivada covariante diferente de (3.1). El uso de una u otra definición es indiferente, pero debe indicarse cuál de las dos se está usando. Es posible construir una geometría diferencial donde se usen simultáneamente ambas derivadas covariantes, incluso se puede hacer una definición mixta de ambas derivadas.

Es importante saber el orden de los índices de la conexión. En nuestra definición el índice contravariante o superior se encuentra en tercer lugar. También es arbitrario el orden que se elija, pero dado un orden debe mantenerse en los cálculos sucesivos. Se podría también representar la conexión por las siguientes expresiones: $\Gamma_r{}^k{}_s$ y $\Gamma^k{}_{sr}$. La diferencia entre una u otra surge cuando se baja el índice superior, ya que en este caso sí es significativo el orden del índice contravariante

Es posible definir una derivada covariante sin exigir el cumplimiento de los apartados c) y/o d). Entonces sería necesario utilizar dos conexiones: una para la derivada de las componentes contravariantes y otra para la derivada de las componentes covariantes. En esta situación también sería posible la definición de la derivada de un tensor, siguiendo para ello la similitud con lo deducido en la correspondiente derivada de un tensor en un espacio euclídeo.

Nótese que de nuestra definición de derivada covariante no se puede obtener la expresión de la conexión, por esta razón estos símbolos se convierten en un elemeto básico que debe ser indicado para definir el espacio. El establecimiento del campo de la conexión nos permite efectuar la diferenciación de un campo vectorial o tensorial y a partir de estas operaciones obtenemos un conjunto de tensores que describen las características y propiedades del espacio.

Es fácil deducir la derivada covariante de un vector definido por sus componentes covariantes, para ello partimos de

$$\phi = u^k v_k$$

donde ϕ es un escalar como se deriva de la leyes de transformación y u^k es un campo vectorial arbitrario. Teniendo en cuenta el apartado d) de la definición de derivada covariante

$$D_r\left(u^k v_k\right) = v_k D_r u^k + u^k D_r v_k = \partial_r\left(u^k v_k\right) = v_k \partial_r u^k + u^k \partial_r v_k$$

utilizando el valor ya encontrado de $D_r u^k$ entonces

$$u^k\left(D_r v_k - \partial_r v_k + v_s \Gamma_{kr}{}^s\right) = 0$$

dado el carácter arbitrario de u^k se encuentra

$$D_r v_k = \partial_r v_k - v_s \Gamma_{kr}{}^s \tag{5.1}$$

que es la expresión buscada.

ISBN: 978-84-617-1463-6

Démonos cuenta que si la derivada covariante se hubiera definido por (3.1) entonces en vez (4.1) hubiéramos encontrado

$$\tilde{D}_r v_k = \partial_r v_k - v_s \Gamma_{rk}^{\ \ s}.$$

El proceso lo podemos continuar para hallar la derivada de un tensor de segundo orden con componentes en forma covariante. Partimos para ello del escalar

$$\phi = u^r v^k t_{rk}$$

donde u^r y v^k son dos campos vectoriales arbitrarios. Haciendo uso de un procedimiento igual que el anterior se encuentra

$$D_p t_{rk} = \partial_p t_{rk} - t_{rs} \Gamma_{kp}^{\ \ s} - t_{sk} \Gamma_{rp}^{\ \ s}.$$

Para terminar pongamos la expresión para el caso de la derivada covariante de un tensor de segundo orden con componentes mixtas

$$D_p t_r^{\ k} = \partial_p t_r^{\ k} - t_s^{\ k} \Gamma_{rp}^{\ \ s} + t_r^{\ s} \Gamma_{sp}^{\ \ k}.$$

Como ya indicamos es posible definir una derivada mixta, es decir la que utiliza tanto la definición (3.1) como la (4.1)

$$\hat{D}_p t_{rk} = \partial_p t_{rk} - t_{rs} \Gamma_{pk}^{\ \ s} - t_{sk} \Gamma_{rp}^{\ \ s}.$$

expresión que recibe el nombre de derivación covariante de Thomas.

Posteriores generalizaciones son fáciles de hacer. Téngase presente en todos los casos el orden de los subíndices de la conexión, que sólo pueden alterarse en el caso de ser simétrica.

3.1 Ley de transformación de las conexiones

Si bien la definición de derivada covariante no permite definir la conexión, si le impone severas limitaciones y esto es así por la condición de tensor que debe poseer la derivada covariante, lo que establece la relación de transformación que debe cumplir la conexión de un espacio.

Ante el cambio de coordenadas (1.1) la derivada covariante de un tensor toma la forma

$$D'_r v'^k = \partial'_r v'^k + v'^s \Gamma'_{sr}{}^{k} \tag{6.1}$$

que al ser un tensor deberá cumplir la siguiente ley de transformación

$$D'_r v'^k = B_r^p A_s^k D_p v^s. \tag{7.1}$$

Como

$$\partial'_r v'^k = \frac{\partial x^j}{\partial x'^r} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(A_s^k v^s \right) = B_r^j A_{sj}^k v^s + B_r^j A_s^k \partial_j v^s$$

desarrollando (6.1) y aplicando (7.1)

$$D'_r v'^k = B_r^j A_{sj}^k v^s + B_r^j A_s^k \partial_j v^s + A_t^s v^t \Gamma'_{si}{}^k =$$
$$= B_r^p A_s^k D_p v^s = B_r^p A_s^k \partial_p v^s + B_r^p A_t^k v^s \Gamma_{sp}{}^t$$

y dado que el vector de componentes v^k es arbitrario, resulta tras la simplifiación

$$\Gamma'_{ri}{}^k = B_i^p B_r^s A_t^k \Gamma_{sp}{}^t - B_i^j B_r^s A_{sj}^k$$

que es la ley de transformación de la conexión.

Es posible una ligera simplificación de la anterior expresión. El segundo sumando del segundo miembro se puede poner como

$$-B_i^j B_r^s A_{sj}^k = -\frac{\partial x^j}{\partial x'^i}\frac{\partial x^s}{\partial x'^r}\frac{\partial^2 x'^k}{\partial x^s \partial x^j} + \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial x^s}{\partial x'^r}\frac{\partial x'^k}{\partial x^s}\right)\frac{\partial x^j}{\partial x'^i}$$

donde hemos sumado una expresión que es idénticamente nula por serlo la derivada del paréntesis que es el símbolo de Kronecker, δ_r^k. Desarrollando se llega a

$$-B_i^j B_r^s A_{sj}^k = \frac{\partial^2 x^s}{\partial x'^r \partial x'^i}\frac{\partial x'^k}{\partial x^s} = B_{ri}^s A_s^k$$

con este resultado la ley de transformación de una conexión frente a un cambio del sistema de coordenadas queda

$$\Gamma'_{ri}{}^k = B_i^q B_r^s A_p^k \Gamma_{sq}{}^p + B_{ri}^s A_s^k . \tag{8.1}$$

Cualquier campo que ante una transformación de coordenadas cambie como (8.1) es una conexión. La anterior expresión se puede tomar como la forma más general de definición de una conexión.

4.1 Propiedades de las conexiones

Aunque sin carácter tensorial en general, cualquier conexión puede descomponerse en parte simétrica y antisimétrica

$$\Gamma_{is}{}^k = \Gamma_{(is)}{}^k + \Gamma_{[is]}{}^k ,$$

donde hemos utilizado el criterio de que los paréntesis redondeados representan simetrización y los cuadrados antisimetrización, y que son definidos por

$$\Gamma_{(is)}{}^k = \frac{1}{2}\left(\Gamma_{is}{}^k + \Gamma_{si}{}^k\right)$$
$$\Gamma_{[is]}{}^k = \frac{1}{2}\left(\Gamma_{is}{}^k - \Gamma_{si}{}^k\right).$$

Sus leyes de transformación son diferentes, de tal forma que la parte

ISBN: 978-84-617-1463-6

antisimétrica se transforma como un tensor de tercer orden, algo que no ocurre con la parte simétrica.

Si una conexión es simétrica en un sistema de coordenadas, será simétrica con cualquieras otras coordenadas, pues en este caso la parte antisimétrica es nula y al ser un tensor, seguirá siendo nula en cualquier otro sistema de coordenadas. No obstante, la conexión antisimétrica no tiene carácter invariante, es decir la conexión puede ser antisimétrica en un sistema de coordenadas y no serlo en otro.

Es fácil comprobar que la diferencia entre dos conexiones distintas $\Gamma_{is}{}^{k}$ y $\tilde{\Gamma}_{is}{}^{k}$ es un tensor. En efecto, por la ley de transformación (8.1) se encuentra

$$\Gamma_{is}{}^{k} - \tilde{\Gamma}_{is}{}^{k} = A_r^k B_i^p B_s^q \left(\Gamma_{pq}{}^{r} - \tilde{\Gamma}_{qp}{}^{r} \right),$$

lo que nos viene a decir que dada una conexión podemos obtener otra sumándole un tensor cualquiera $T_{is}{}^{k}$

$$\hat{\Gamma}_{is}{}^{k} = \Gamma_{is}{}^{k} + T_{is}{}^{k}$$

Si bien la suma de dos conexiones no forma en general una nueva conexión, la expresión

$$\alpha \Gamma_{is}{}^{k} + \beta \tilde{\Gamma}_{is}{}^{k}$$

sí será una conexión siempre y cuando $\alpha + \beta = 1$.

La conexión admite dos contracciones

$$\Gamma_s = \Gamma_{ks}{}^{k} \quad ; \qquad \tilde{\Gamma}_s = \Gamma_{sk}{}^{k}$$

que son diferentes salvo que la conexión sea simétrica. Los símbolos Γ_s y $\tilde{\Gamma}_s$ son las componentes covariantes de un vector como se puede comprobar por aplicación de (8.1).

Si $\Gamma_{is}{}^{k}$ son las componentes de una conexión y λ es una función invariante

$$\overset{*}{\Gamma}_{is}{}^{k} = \Gamma_{is}{}^{k} + \delta_i^k \partial_s \lambda$$

es una nueva conexión puesto que se transforma según (8.1).

Si $\Gamma_{is}{}^{k}$ es una conexión, entonces su transpuesta $\tilde{\Gamma}_{is}{}^{k} = \Gamma_{si}{}^{k}$ también es una conexión, como fácilmente se deriva al aplicar (8.1).

Si $\Gamma_{is}{}^{k}$ es una conexión, entonces

$$U_{is}{}^{k} = \Gamma_{is}{}^{k} - \Gamma_i \delta_s^k$$

también es una conexión, ya que el segundo sumando del segundo miembro es un tensor. Igualmente ocurriría si usamos $\tilde{\Gamma}_i$ en vez de Γ_i.

5.1 Tensores especiales

La delta de Kronecker δ_i^k ($=1$ si $i = k$; $=0$ si $i \neq k$) puede ser entendida como las componentes de un tensor mixto que tiene en todos los sistemas de coordenadas las mismas componentes, como la demuestra la identidad

$$\delta_i^k = A_p^k B_i^q \delta_q^p .$$

El símbolo de Levi-Civita completamente antisimétrico ε^{pqrs} tiene el valor 1 si hay una permutación par de los índices, el valor –1 si la permutación es impar y 0 si hay al menos dos índices iguales. Este símbolo no tienen carácter tensorial pero a partir de él podemos definir en un espacio tetradimensional un tensor Δ^{pqrs}, también de carácter antisimétrico, por la relación

$$\Delta^{pqrs} = J\varepsilon^{pqrs} \tag{9.1}$$

donde J es un parámetro que ante un cambio de coordenadas se transforma según la ley

$$J' = |A| J$$

siendo $|A|$ el determinante de la matriz de transformación A_i^k. En efecto

$$A_p^i A_q^j A_r^k A_s^l \Delta^{pqrs} = A_p^1 A_q^2 A_r^3 A_s^4 \varepsilon^{ijkl} J\varepsilon^{pqrs} =$$
$$= |A| J\varepsilon^{ijkl} = J'\varepsilon^{ijkl} = \Delta'^{pqrs}$$

lo que nos muestra el carácter de tensor de cuarto orden contravariante del símbolo Δ^{pqrs}. Se puede hacer la generalización a un espacio de cualquier dimensión.

6.1 Sistema de coordenadas localmente geodésico

Vamos a demostrar que para el caso de un espacio con una conexión simétrica es siempre posible encontrar en cada punto P un sistema de coordenadas respecto al cual la nueva conexión sea idénticamente nula en ese punto.

Consideremos la transformación de coordenadas

$$x'^k = x^k - x_0^k + \frac{1}{2}\left(\Gamma_{is}{}^k\right)_0 \left(x^i - x_0^i\right)\left(x^s - x_0^s\right) \tag{10.1}$$

donde el subíndice 0 se refiere al punto P en donde pretendemos obtener las componentes de la conexión respecto al nuevo sistema de coordenadas. Hallando la derivación parcial de la ecuación de transformación (10.1)

$$\frac{\partial x'^k}{\partial x'^r} = \delta_r^k = \frac{\partial x^k}{\partial x'^r} + \left(\Gamma_{is}{}^k\right)_0 \frac{\partial x^i}{\partial x'^r}\left(x^s - x_0^s\right) \tag{11.1}$$

y particularizando para el punto P

$$\delta_r^k = \left(\frac{\partial x^k}{\partial x'_r}\right)_0 = \left(B_r^k\right)_0 \quad \Rightarrow \quad \left(A_r^k\right)_0 = \delta_r^k ,$$

ISBN: 978-84-617-1463-6

lo que nos indica que los tensores no sufren ningún cambio en la transformación de coordenadas (10.1), ya que la matriz de la transformación es idéntica a la unidad.

Derivando (11.1)

$$0 = \frac{\partial^2 x^k}{\partial x'^r \partial x'^m} + \left(\Gamma_{is}{}^k\right)_0 \frac{\partial^2 x^i}{\partial x'^r \partial x'^m}\left(x^s - x_0^s\right) + \left(\Gamma_{is}{}^k\right)_0 \frac{\partial x^i}{\partial x'^r}\frac{\partial x^s}{\partial x'^m}$$

en el punto P nos quedará

$$\left(\frac{\partial^2 x^k}{\partial x'^r \partial x'^m}\right)_0 = \left(B_{rm}^k\right)_0 = -\left(\Gamma_{rm}{}^k\right)_0,$$

teniendo presenta la ley de transformación de la conexión (8.1) se encuentra

$$\left(\Gamma'_{is}{}^k\right)_0 = \delta_i^p \delta_s^q \delta_r^k \left(\Gamma_{pq}{}^r\right)_0 - \left(\Gamma_{is}{}^r\right)_0 \delta_r^k = 0$$

tal como queríamos demostrar; es decir, que para un espacio que tenga una conexión simétrica existe, para cada punto, un sistema de coordenadas respecto al cual la conexión transformada es nula en ese punto; lo que no implica que tengan que ser nulas sus derivadas. Al sistema de coordenadas donde se cumple esta propiedad se la llama localmente geodésico, porque, como veremos más adelante, los ejes coordenados en ese sistema son líneas geodésicas si el espacio es métrico (ver epígrafe 12.1).

El teorema inverso también es cierto, si para cualquier punto de un espacio existe un sistema de coordenadas para el cual la conexión es idénticamente nula en ese punto, entonces la conexión es simétrica respecto a cualquier sistema de coordenadas.

En efecto, consideremos un sistema localmente geodésico definido en un punto P, en ese punto la conexión referida a ese sistema es nula; al hacer un cambio a otro sistema de coordenadas, la nueva conexión vendrá dada por (8.1) y en el punto P será

$$\left(\Gamma'_{is}{}^k\right)_0 = 0 + B_{is}^r A_r^k$$

que es simétrica por serlo B_{is}^r. El mismo procedimiento se puede hacer para todos los demás puntos del espacio, encontrándose que en todos ellos la conexión es simétrica.

Si la conexión no es simétrica no podemos obtener un sistema localmente geodésico en todo punto, pues no es posible anular la parte antisimétrica de la conexión por ser un tensor. No obstante, siempre podremos hacer una transformación de coordenadas que consiga en cada punto de la variedad anular la parte simétrica de la conexión. Si la transformación de coordenadas es

$$x'^{k} = x^{k} - x_0^{k} + \frac{1}{2}\left[\Gamma_{(is)}^{\ \ k}\right]_0 \left(x^{i} - x_0^{i}\right)\left(x^{s} - x_0^{s}\right)$$

entonces se encuentra

$$\left(B_{is}^{r}\right)_0 = -\left[\Gamma_{(is)}^{\ \ r}\right]_0; \qquad \left(A_r^{k}\right)_0 = \delta_r^{k}$$

que al aplicarlo a (8.1) se deduce

$$\left[\Gamma'^{\ \ r}_{(is)}\right]_0 = 0; \qquad \left(\Gamma'^{\ \ r}_{[is]}\right)_0 = \left(\Gamma'^{\ \ r}_{[is]}\right)_0$$

tal como habíamos indicado antes.

7.1 Tensor y vector de torsión

Definimos el tensor de torsión por

$$\tau_{is}^{\ \ k} = \Gamma_{is}^{\ \ k} - \Gamma_{si}^{\ \ k} = 2\Gamma_{[is]}^{\ \ k} \tag{12.1}$$

que tiene carácter tensorial ya que es la diferencia entre dos conexiones. En el caso de que la conexión sea simétrica el tensor de torsión es nulo.

Se llama vector de torsión a la contracción del tensor anterior

$$\tau_i = \tau_{ik}^{\ \ k} = \Gamma_{ik}^{\ \ k} - \Gamma_{ki}^{\ \ k} = \tilde{\Gamma}_i - \Gamma_i$$

que como ya se ha visto es un vector covariante.

A partir de una conexión $\Gamma_{is}^{\ \ k}$ se puede obtener otra conexión para un espacio de N dimensiones

$$\Gamma^{*\ k}_{is} = \Gamma_{is}^{\ \ k} + \frac{1}{N-1}\delta_i^k \tau_s$$

que tiene asociado un vector de torsión nulo. La conexión

$$\Gamma^{*\ k}_{is} = \Gamma_{is}^{\ \ k} + \frac{1}{2N-2}\left(\delta_i^k \tau_s - \delta_s^k \tau_i\right)$$

también tiene un vector de torsión nulo.

8.1 El tensor de Riemann-Christoffel

La conexión asociada a un espacio es el principal elemento para definir las propiedades no métricas. Pero ella sola no permite informar de algunos rasgos característicos del espacio, como es el caso de la curvatura, que nos dice cómo se aparta el espacio de una espacio plano o euclídeo

El grado de curvatura de un espacio es dado por el tensor de Riemann-Christoffel de cuarto orden. Para obtener su valor vamos a hallar la diferencia entre las derivadas segundas de un campo vectorial cualquiera

$$D_i\left(D_r v^k\right) - D_r\left(D_i v^k\right)$$

ISBN: 978-84-617-1463-6

que en el caso de un espacio euclídeo se anula; aunque su anulación no significa que el espacio sea euclídeo. Haciendo los correspondientes cálculos y teniendo presente que la derivada covariante de un vector es un tensor y que es de aplicación la definición (3.1), se llega a la expresión

$$D_i\left(D_r v^k\right)-D_r\left(D_i v^k\right)=$$
$$=v^s\left(\Gamma_{sr,i}{}^{k}-\Gamma_{si,r}{}^{k}+\Gamma_{sr}{}^{n}\Gamma_{ni}{}^{k}-\Gamma_{si}{}^{n}\Gamma_{nr}{}^{k}\right)+D_s v^k\left(\Gamma_{ir}{}^{s}-\Gamma_{ri}{}^{s}\right)$$

donde la coma representa derivación parcial respecto a las coordenadas. La expresión anterior queda

$$D_i\left(D_r v^k\right)-D_r\left(D_i v^k\right)=v^s R^k{}_{sir}+D_s v^k \tau_{ir}{}^{s} \tag{13.1}$$

donde se ha utilizando la definición de tensor de torsión (12.1) y se ha definido el tensor de curvatura de Riemann-Christoffel por

$$R^k{}_{sir}=\Gamma_{sr,i}{}^{k}-\Gamma_{si,r}{}^{k}+\Gamma_{sr}{}^{n}\Gamma_{ni}{}^{k}-\Gamma_{si}{}^{n}\Gamma_{nr}{}^{k} \tag{14.1}$$

que en efecto es un tensor ya que los restantes términos de (13.1) son todos tensoriales.

Si en vez de la definición de derivada covariante (3.1) utilizamos la (4.1) obtendremos otro tensor de curvatura

$$\tilde{R}^k{}_{sir}=\Gamma_{rs,i}{}^{k}-\Gamma_{is,r}{}^{k}+\Gamma_{rs}{}^{n}\Gamma_{in}{}^{k}-\Gamma_{is}{}^{n}\Gamma_{rn}{}^{k} \tag{15.1}$$

diferente al anterior. En el caso de estar en la geometría de Riemann (ver epígrafe 13.1) coinciden ambos tensores de curvatura ya que la conexión es simétrica.

Como ya indicamos, si a una conexión le sumamos un tensor volvemos a encontrar una nueva conexión

$$\hat{\Gamma}_{is}{}^{k}=\Gamma_{is}{}^{k}+T_{is}{}^{k}$$

que tendrá asociada un nuevo tensor de curvatura $\hat{R}^k{}_{sir}$ relacionado con (14.1) por la expresión

$$\hat{R}^k{}_{sir}=R^k{}_{sir}+D_i T_{sr}{}^{k}-D_r T_{si}{}^{k}+T_{sn}{}^{k}\left(\Gamma_{ri}{}^{n}-\Gamma_{ir}{}^{n}\right)+$$
$$+T_{sr}{}^{n}T_{ni}{}^{k}-T_{si}{}^{n}T_{nr}{}^{k}$$

o bien de forma más compacta

$$\hat{R}^k{}_{sir}=R^k{}_{sir}+2D_{[i}T_{|s|r]}{}^{k}+T_{sn}{}^{k}\tau_{ri}{}^{n}+2T_{s[r}{}^{n}T_{|n|i]}{}^{k} \tag{16.1}$$

donde los corchetes significan simetrización y los índices encerrados entre líneas paralelas vienen a significar que no entran en la simetrización y permanecen inalterables.

9.1 Desplazamiento paralelo de un vector

Sea el vector $\mathbf{v} = v^k \mathbf{e}_k$ definido en el punto P de un espacio euclídeo. Si trasladamos paralelamente ese vector al punto P′ infinitamente cercano a P, no tendrá las mismas componentes, puesto que los vectores básicos, al venir el espacio en coordenadas curvilíneas, serán diferentes en P que en P′ y a consecuencia de esta variación de los vectores básicos se producirá una variación en las componentes del vector $\mathbf{v}$ aún cuando se traslade paralelamente al punto P′.

La variación del vector $\mathbf{v}$ a consecuencia del cambio de vectores básicos de P a P′ viene dado por

$$v^k d\mathbf{e}_k = v^k \Gamma_{ki}{}^r dx^i \mathbf{e}_r$$

donde dx^i es la diferencia de coordenadas entre los puntos P y P′. Entonces podemos decir que un vector se ha trasladado paralelamente del punto P al P′ si sus componentes cambian según

$$dv^r = -v^k \Gamma_{ki}{}^r dx^i$$

lo que neutraliza la variación ocasionada por el cambio de vectores básicos, consiguiendo, por tanto, que la diferencia entre el vector en P y en P′ sea nula $d\mathbf{v} = 0$. O dicho de otra forma, un vector es trasladado paralelamente de un punto a otro punto infinitamente cercano si la derivada absoluta del vector calculada entre los dos puntos es nula

$$Dv^k = dv^k + v^s \Gamma^r_{si}\, dx^i = 0.$$

Podemos generalizar esta definición a un espacio genérico y decir que cuando un vector se traslada paralelamente desde el punto P de coordenadas x^i a otro punto infinitamente cercano P′ de coordenadas $x^i + dx^i$ la diferencia de sus componentes en ambos puntos es

$$dv^k = -v^s \Gamma^r_{si}\, dx^i\,. \tag{17.1}$$

Cuando en un espacio euclídeo se traslada paralelamente un vector a partir de punto para seguir un trayecto cerrado y volver al mismo punto de partida, el vector original coincide con el que resulta de la traslación paralela. Pero esto no se cumple en un espacio «curvo». Vamos a demostrar a continuación que la variación de las componentes de un vector cuando se traslada paralelamente a través de un circuito cerrado elemental está relacionado con el tensor de curvatura y en general es distinto de cero.

Consideremos el paralelogramo infinitesimal de la figura 1.1. Al transportar paralelamente un vector de componentes v^s desde el punto A al B sus componentes varían según (17.1)

$$-v^s\left(x^k\right)\Gamma_{si}{}^r\left(x^k\right)da^i\,.$$

ISBN: 978-84-617-1463-6

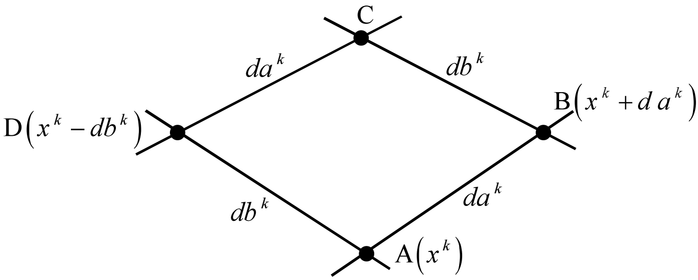

Figura 1.1

Al hacer el transporte de B a C las componenes del vector se modifican según

$$-v^s\left(x^k + da^k\right)\Gamma_{si}{}^r\left(x^k + da^k\right)db^i .$$

La variación de las componentes del vector cuando se traslada paralelamente desde C a D serán las mismas que cuando se traslada de D a C pero cambiado de signo

$$v^s\left(x^k + db^k\right)\Gamma_{si}{}^r\left(x^k + db^k\right)da^i .$$

Por último la traslación de D a A será la misma que de A a D cambiando el signo

$$v^s\left(x^k\right)\Gamma_{si}{}^r\left(x^k\right)db^i .$$

Ahora determinemos la variación total experimentada por las componentes del vector cuando se hace la traslación paralela a lo largo del paralelogramo infinitesimal considerado

$$dv^r = -v^s\left(x^k\right)\Gamma_{si}{}^r\left(x^k\right)da^i - v^s\left(x^k + da^k\right)\Gamma_{si}{}^r\left(x^k + da^k\right)db^i +$$
$$+ v^s\left(x^k + db^k\right)\Gamma_{si}{}^r\left(x^k + db^k\right)da^i + v^s\left(x^k\right)\Gamma_{si}{}^r\left(x^k\right)db^i ,$$

o en primer orden de aproximación

$$dv^r = -v^s\Gamma_{si,k}^{\ \ r}\, da^k db^i - \partial_k v^s\Gamma_{si}{}^r da^k db^i +$$
$$+ v^s\Gamma_{si,k}^{\ \ r}\, da^i db^k + \partial_k v^s\Gamma_{si}{}^r da^i db^k$$

y teniendo presente que la variación de las componentes del vector es

$$\partial_k v^s = -v^n\Gamma_{nk}^{\ \ s}$$

nos queda finalmente

$$dv^r = R^r{}_{nik} v^n da^k db^i ,$$

con lo que queda demostrado que al trasladar un vector paralelamente a sí mismo a través de un recinto infinitesimal cerrado, el vector resultante no coincide con el de partida, salvo en el caso especial en que el tensor de Riemann sea cero. En general, por tanto, la traslación paralela de un vector por un circuito cerrado no reproduce al mismo vector.

10.1 Tensor de Ricci

A partir del tensor de curvatura se pueden definir dos nuevos tensores mediante la contracción de índices. Se le llama tensor de Ricci a la contracción

$$R_{si} = R^k{}_{sik} = \Gamma_{sk,i}{}^k - \Gamma_{si,k}{}^k + \Gamma_{sk}{}^t \Gamma_{ti}{}^k - \Gamma_{si}{}^t \Gamma_{tk}{}^k \qquad (18.1)$$

compuesto tanto de parte simétrica como antisimétrica.

La otra posible contracción del tensor de curvatura recibe el nombre de curvatura homotética y es definida por

$$V_{ir} = R^k{}_{kir} = \Gamma_{kr,i}{}^k - \Gamma_{ki,r}{}^k + \Gamma_{kr}{}^n \Gamma_{ni}{}^k - \Gamma_{ki}{}^n \Gamma_{nr}{}^k = \Gamma_{kr,i}{}^k - \Gamma_{ki,r}{}^k,$$

que es un tensor antisimétrico. Las otras contracciones posibles del tensor de curvatura no dan lugar a nuevos tensores.

Debemos tener presente que si aceptamos como definición de derivada covariante la (4.1) entonces obtenemos un tensor de Ricci y una curvatura homotética diferentes en general de las anteriores.

Si derivamos otra conexión añadiéndole a $\Gamma_{rk}{}^s$ un tensor $T_{rk}{}^s$ entonces el tensor de Ricci se obtendrá de (16.1)

$$\hat{R}_{si} = R_{si} + 2D_{[i}T_{|s|k]}{}^k + T_{sn}{}^k \tau_{ki}{}^n + 2T_{s[k}{}^n T_{|n|i]}{}^k .$$

11.1 Identidades de Bianchi

La derivada covariante del tensor de curvatura es

$$D_m R^k{}_{sir} = \partial_m R^k{}_{sir} + R^t{}_{sir} \Gamma_{tm}{}^k - R^k{}_{tir} \Gamma_{sm}{}^t - R^k{}_{str} \Gamma_{im}{}^t - R^k{}_{sit} \Gamma_{rm}{}^t,$$

si consideramos que la conexión es simétrica, existirá en cada punto un sistema de coordenadas localmente geodésico, donde las conexiones son nulas. Si elegimos este sistema entonces

$$D_m R^k{}_{sir} = \partial_m \Gamma_{sr,i}{}^k - \partial_m \Gamma_{si,r}{}^k = \Gamma_{sr,im}{}^k - \Gamma_{si,rm}{}^k .$$

Permutando los índices *m*, *i*, *r* se obtiene

$$D_i R^k{}_{srm} = \Gamma_{sm,r,i}{}^k - \Gamma_{sr,mi}{}^k$$

$$D_r R^k{}_{smi} = \Gamma_{si,m,r}{}^k - \Gamma_{sm,ir}{}^k .$$

Al sumar las tres expresiones encontradas se llega a

ISBN: 978-84-617-1463-6

$$D_m R^k{}_{sir} + D_i R^k{}_{srm} + D_r R^k{}_{smi} = 0 \qquad (19.1)$$

que al ser una identidad tensorial y válida en un sistema de coordenadas determinado (sistema localmente geodésico), se mantendrá en cualquier otro sistema de referencia. A (19.1) se le llama identidad de Bianchi y es válida en el caso de conexión simétrica.

Es posible generalizar las identidades de Bianchi para el caso en que la conexión no sea simétrica, en este caso se encuentra

$$D_m R^k{}_{sir} + D_i R^k{}_{srm} + D_r R^k{}_{smi} = R^k{}_{pmi} \tau_{rs}{}^p + R^k{}_{pir} \tau_{ms}{}^p + R^k{}_{prm} \tau_{is}{}^p$$

o en notación más compacta

$$R^k{}_{s\{ir;m\}} = R^k{}_{p\{mi} \tau_{r\}s}{}^p \qquad (20.1)$$

donde el punto y coma representa la derivación covariante y $\{...\}$ es la suma de las permutaciones.

12.1 Tensor métrico

Consideremos un espacio euclídeo expresado en coordenadas curvilíneas. En cada punto existe un conjunto de vectores básicos $(\mathbf{e}_k)$ que dependen del punto en que están definidos. Sus productos escalares nos dan un conjunto de números que dependen del punto del espacio, que tiene carácter de tensor de segundo orden covariante y al que llamamos tensor métrico

$$g_{ik} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k .$$

El módulo de un vector $d\mathbf{x} = dx^k \mathbf{e}_k$, que corresponde al cuadrado de la distancia infinitesimal entre sus extremos $ds^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}$, vendrá dado por

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$$

que le llamamos elemento de línea del espacio euclídeo.

Este resultado lo extendemos a un espacio genérico y decimos que el tensor métrico es un tensor covariante de segundo orden asociado al espacio, es decir, que se trata de un campo tensorial $g_{ik}(x^r)$ que no es singular, lo que significa que su determinante es distinto de cero.

Consideremos dos puntos A y B definidos por las coordenadas x^r y $x^r + dx^r$ respectivamente; se llama distancia entre los dos puntos a la cantidad infinitesimal dada por

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k . \qquad (21.1)$$

El tensor métrico no es en general simétrico. Sin embargo, solo la parte simétrica interviene en el cálculo de la distancia, en efecto

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k = g_{(ik)} dx^i dx^k + g_{[ik]} dx^i dx^k = g_{(ik)} dx^i dx^k ,$$

donde el sumando que contiene la parte antisimétrica del tensor métrico se anula al tener en cuenta que se pueden intercambiar entre sí los índices mudos *i* y *k*.

Con el tensor métrico se puede realizar la elevación o descenso de índices. Dado un vector cuyas componentes se encuentren en forma contravariante v^k, podemos obtener las componentes covariantes por la operación

$$v_s = g_{ks} v^k , \tag{22.1}$$

entendemos que ambos conjuntos de componentes representan al mismo vector, que de esta forma viene dado por dos conjuntos diferentes de componentes pero relacionadas entre sí.

De igual forma se pueden descender los índices de un tensor, en operaciones tales como las siguientes

$$t_{rs} = g_{ir} g_{ks} t^{ik}$$

o bien como

$$t_{rs} = g_{kr} t^k{}_s ,$$

nótese el orden en que aparezcen los índices del tensor métrico.

Como el tensor métrico es invertible (por ser singular), debe tener un inverso g'^{ks}, tal que cumpla

$$g_{rk} g'^{ks} = \delta^s_r$$

Si *g* es el determinante del tensor métrico g_{rk} ; α^{is} el menor adjunto asociado al elemento *i*, *s* y $\tilde{\alpha}^{is} = \alpha^{si}$ su traspuesta, entonces el inverso del tensor métrico es

$$g'^{ks} = \frac{1}{g} \tilde{\alpha}^{ks} = \frac{1}{g} \alpha^{sk} .$$

Pero se prefiere en vez de utilizar g'^{ks}, interpretar el tensor métrico en componentes contravariantes como el traspuesto del tensor inverso, es decir

$$g^{ks} = \frac{1}{g} \alpha^{ks} , \tag{23.1}$$

entonces la relación entre las componentes del tensor métrico en función de sus componentes contravariante y covariante es

$$g_{kr} g^{ks} = \delta^s_r . \tag{24.1}$$

Como se ve por el orden de los índices, (24.1) no es la operación tensorial $G \cdot G^{-1} = I$, donde G es la matriz de elementos g_{kr}, sino la ecuación $G \cdot \tilde{G}^{-1} = I$, donde G^{-1} tiene de elementos los g'^{rk} anteriormente definidos.

De (24.1) se obtiene

ISBN: 978-84-617-1463-6

$$g_{rk}g^{sk} = \delta_r^s .$$

De (24.1) también se deduce que g^{ks} son las componentes de un tensor de segundo orden contravariante.

El tensor métrico también nos permite elevar los índices tensoriales. En fecto, multiplicando (22.1) por g^{rs}

$$g^{rs}v_s = g^{rs}g_{ks}v^k = \delta_k^r v^k = v^r$$

con lo que se logra subir los índices. Este método es extensible para subir o bajar los índices de las componentes de los tensores, por ejemplo $t^{pq} = g^{pr}g^{qk}t_{rk}$.

El determinante del tensor métrico en un espacio tetradimensional, tal como el espacio-tiempo ordinario, es

$$g = \varepsilon^{pqrs}g_{1p}\,g_{2q}\,g_{3r}\,g_{4s},$$

que también se puede desarrollar haciendo uso de los menores adjuntos, por ejemplo

$$g = g_{1p}\left(\varepsilon^{pqrs}g_{2q}\,g_{3r}\,g_{4s}\right) = g_{1p}\,\alpha^{1p} .$$

La derivada del determinante del tensor métrico se puede desarrollar por sus menores adjuntos

$$\begin{gathered} dg = dg_{1p}\left(\varepsilon^{pqrs}g_{2q}\,g_{3r}\,g_{4s}\right) + dg_{2q}\left(\varepsilon^{pqrs}g_{1p}\,g_{3r}\,g_{4s}\right) + \\ + dg_{3r}\left(\varepsilon^{pqrs}g_{1p}\,g_{2q}\,g_{4s}\right) + dg_{4s}\left(\varepsilon^{pqrs}g_{1p}\,g_{2q}\,g_{3r}\right) \end{gathered}$$

o bien

$$dg = dg_{pq}\,\alpha^{pq}$$

donde α^{pq} es el menor adjunto asociado al elemento p, q del tensor métrico. Haciendo uso de (23.1) queda

$$dg = g\,dg_{pq}\,g^{pq}$$

y la derivación parcial es

$$\partial_k g = g\,g^{pq}\,\partial_k g_{pq} .$$

La derivada covariante de la delta de Kronecker es nula, en efecto

$$D_p\delta_s^r = \partial_p\delta_s^r + \delta_s^m\Gamma_{mp}{}^r - \delta_m^r\Gamma_{sp}{}^m = 0 + \Gamma_{sp}{}^r - \Gamma_{sp}{}^r = 0,$$

al aplicar la regla de Leibnitz de la derivación a (24.1) se halla la derivada covariante de g^{ik}. En particular, si es nula la derivada covariante de g_{ik} también lo será la de g^{ik}, estas circunstancias se darán tanto en los espacios de Riemman como en los euclidianos .

13.1 Espacio euclidiano tangente

Consideremos un espacio V donde se ha definido un tensor métrico. Es siempre posible asociar en cada punto P de ese espacio un espacio euclídeo E, de la misma dimensión que V, que contenga al punto P y que en un entorno de este punto coincidan las propiedades métricas de E y V. Al espacio E se le llama euclidiano tangente.

Si $\overset{0}{g}_{ik}$ es el tensor métrico de V en el punto P que tiene de coordenadas x_0^k, el espacio euclídeo tangente E tiene en el punto P el tensor métrico $\overset{0}{g}_{(ik)}$. Los puntos *M* del espacio E en un entorno del punto P tiene las coordenadas curvilíneas X^k, los puntos $m(x^k)$ de V en un entorno de P están relacionados con los puntos $M(X^k)$ de E mediante una relación de la forma

$$X^k = x^k - x_0^k + \Psi_{(2)}^k\left(x^r - x_0^r\right) + X_0^k \tag{25.1}$$

donde X_0^k son las coordenadas del punto P en el sistema de coordenadas del espacio euclídeo E y $\Psi_{(2)}^k$ representa una función de segundo orden respecto a $x^r - x_0^r$.

Consideremos el punto $m(x_0^k + dx^k)$ situado en un entorno infinitesimal del punto P. La distancia entre ese punto y el punto $m(x_0^k)$ viene dada, tal como sabemos, por

$$ds^2 = \overset{0}{g}_{(ik)} dx^i dx^k$$

Sea el punto del espacio E $M(X_0^k + dX^k)$ que corresponde por (25.1) al punto $m(x_0^k + dx^k)$, la distancia entre los puntos M y P pertenecientes al espacio euclídeo será

$$dS^2 = \overset{0}{g}_{(ik)} dX^i dX^k$$

ahora bien como por (25.1)

$$dX^k \approx dx^k$$

entonces la distancia infinitesimal entre puntos del entorno infinitesimal de P es igual tanto en el espacio euclídeo tangente E como en el espacio V

$$dS^2 = ds^2.$$

O sea, las propiedades métricas de ambos espacios son localmente idénticas. Esto significa que podemos, sin más, extender los resultados métricos conocidos del espacio euclídeo al espacio V, al menos en un entorno infinitesimal de cada punto.

Hay que darse cuenta que esta identidad encontrada solo se refiere a las propiedades métricas. No se garantiza la coincidencia entre las conexiones asociadas a los espacios E y V, lo que significa que las propiedades diferenciales serán diferentes en uno y en otro espacio.

ISBN: 978-84-617-1463-6

14.1 Espacio de Riemann

Hasta ahora hemos estado considerando espacios genéricos. Ahora vamos a considerar los dos que tienen más importancia en Física, los espacios de Riemann y los euclidianos.

Un espacio de Riemann viene caracterizado por las siguientes propiedades:

a) Tiene un tensor métrico simétrico.

b) Tiene asociada una conexión afín también simétrica.

c) La derivada covariante del tensor métrico es nula (teorema de Ricci).

De la última condición y permutando los subíndices k, p, q

$$D_k g_{pq} = \partial_k g_{pq} - g_{sq}\Gamma_{pk}{}^{s} - g_{ps}\Gamma_{qk}{}^{s} = 0$$
$$D_q g_{kp} = \partial_q g_{kp} - g_{sp}\Gamma_{kq}{}^{s} - g_{ks}\Gamma_{pq}{}^{s} = 0$$
$$D_p g_{qk} = \partial_p g_{qk} - g_{sk}\Gamma_{qp}{}^{s} - g_{qs}\Gamma_{kp}{}^{s} = 0$$

restando la primera de la segunda, sumándole la tercera y teniendo presenta las propiedades de simetría se encuentra

$$\Gamma_{kp}{}^{s} = L_{kp}{}^{s} = \frac{1}{2} g^{sq}\left(\partial_k g_{pq} + \partial_p g_{kq} - \partial_q g_{kp}\right), \qquad (26.1)$$

a esta conexión, característica de los espacios riemannianos, se le llama símbolos de Christoffel. De ellos se pueden obtener otros símbolos totalmente covariantes

$$L_{kpr} = g_{rs} L_{kp}{}^{s}.$$

Téngase presente que esta coincidencia entre la conexión y los símbolos de Christoffel es una característica de los espacios de Riemann y no es extensible, en general, a otros tipos de espacios.

Se distinguen los espacios propiamente riemannianos como aquellos que quedan definidos porque el cuadrado de la distancia entre dos puntos (ds^2) siempre es mayor que cero. Reservándose el nombre de espacios impropiamente riemannianos para aquellos en los que no se cumple el anterior requisito, pudiendo ser en este caso el cuadrado de la distancia mayor, menor o igual a cero.

Una clase especial de espacios de Riemann lo representan los espacios euclídeos, que vienen caracterizados porque es siempre posible encontrar un sistema de coordenadas respecto al cual el tensor métrico sea el mismo en todos los puntos del espacio. De aquí resulta que la conexión, obtenida a partir de (26.1) es nula en todos los puntos de este espacio y respecto al sistema de coordenadas anteriormente elegido.

Como el tensor métrico en el caso de un espacio euclídeo es simétrico y real existirá siempre una transformación de coordenadas que ponga al tensor métrico en forma diagonal y posteriormente mediante un cambio de escala llevar estos elementos diagonales a los valores +1 ó –1.

15.1 El tensor de no-metricidad

Se define el tensor de no-metricidad de un espacio como la derivada covariante del tensor métrico

$$Q_{pqr} = D_r g_{pq},$$

que resulta ser un tensor y en general no nulo.

Se define el tensor contorsión por la expresión

$$K_{rpq} = \tau_{rpq} + \tau_{pqr} - \tau_{qrp}$$

donde

$$\tau_{pqr} = g_{kr} \tau_{pq}{}^{k} = 2 g_{kr} \Gamma_{[pq]}{}^{k}$$

es el tensor de torsión (12.1) en forma covariante.

Si partimos de un espacio de tensor métrico simétrico, es posible establecer una relación entre el tensor de no-metricidad, el tensor de contorsión y la conexión afín, de la que no se exige que sea simétrica; por tanto estaríamos tratando con un espacio no riemanniano. La relación a la que nos referimos es

$$\Gamma_{rpq} = L_{rpq} + \frac{1}{2} K_{rpq} + \frac{1}{2}\left(Q_{rpq} - Q_{pqr} - Q_{qrp}\right) \qquad (27.1)$$

donde hemos definido

$$\Gamma_{rpq} = g_{kq} \Gamma_{rp}{}^{k}; \qquad L_{rpq} = g_{kq} L_{rp}{}^{k}.$$

(27.1) se descompone en parte simétrica y antisimétrica

$$\begin{gathered} \Gamma_{(rp)\,q} = L_{rpq} + \frac{1}{2}\left(\tau_{pqr} - \tau_{qrp}\right) + \frac{1}{2}\left(Q_{rpq} - Q_{pqr} - Q_{qrp}\right) \\ \Gamma_{[pq]\,r} = \tau_{pqr} \end{gathered} \qquad (28.1)$$

por tanto, conocidos el tensor métrico, el de no metricidad y la parte antisimétrica de la conexión, se obtiene su parte simétrica.

En el caso particular de un espacio de Riemann, donde son simétricos tanto el tensor métrico como la conexión y es nulo el tensor de no-metricidad, entonces la conexión es idéntica a los símbolos de Christoffel.

Si la conexión es idéntica a los símbolos de Christoffel entonces es nulo el tensor de no-metricidad y también el tensor de contorsión. Finalmente advertimos que aunque el tensor de no-metricidad sea nulo, ello no implica que la conexión sea simétrica. Dicho de otra forma, los carácteres simétricos de la métrica y de la conexión y la nulidad del tensor de no-metricidad son condi-

ISBN: 978-84-617-1463-6

ciones independientes entre sí. Estas tres condiciones definen, como hemos visto, al espacio de Riemann.

16.1 El tensor de Ricci en función de los símbolos de Christoffel

Como se mostró en 15.1 es posible relacionar la conexión de un espacio con los símbolos de Christoffel. En el caso de un espacio métrico simétrico la relación es dada por (27.1), que se puede poner de la forma

$$\Gamma_{rp}{}^{k} = L_{rp}{}^{k} + \frac{1}{2} g^{qk} X_{rpq} = L_{rp}{}^{q} + \frac{1}{2} X_{rp}{}^{q},$$

en X_{rpq} se encuentra agrupadas las componentes antisimétricas de la conexión y el tensor de no-metricidad según aparecen en (27.1).

Utilizando (16.1) se puede poner el tensor de curvatura del espacio en función del tensor de curvatura $R^{*k}{}_{sir}$ formado a partir de los símbolos de Christoffel en vez de con la conexión $\Gamma_{pq}{}^{s}$. Igualmente es posible poner el tensor de Ricci en función de $R^{*}{}_{si}$ que es el tensor de Ricci construido a partir de los símbolos de Christoffel.

En el caso de que tanto el tensor métrico como la conexión sean simétricos, el tensor de Ricci del espacio queda

$$R_{si} = R^{*}{}_{si} + D_{[i} X_{|s|k]}{}^{k} + \frac{1}{2} X_{s[k}{}^{m} X_{|m|i]}{}^{k}. \qquad (29.1)$$

donde se ha hecho uso de los resultados del epígrafe 1.10.

17.1 Simetrías del tensor de curvatura

El tensor de curvatura en un espacio de N dimensiones tiene N^4 componentes. Sin embargo, no todas son independientes. Vamos a comprobar que existe un conjunto de relaciones que hacen descender considerablamente el número de componentes independientes del tensor de curvatura.

El tensor de curvatura completamente covariante tiene las componentes

$$R_{psri} = g_{pk} R^{k}{}_{sir} = g_{pk}\left(\Gamma_{sr,i}^{\ \ k} - \Gamma_{si,r}^{\ \ k} + \Gamma_{sr}{}^{t}\Gamma_{ti}{}^{k} - \Gamma_{si}{}^{t}\Gamma_{tr}{}^{k}\right),$$

limitándonos al caso de un espacio de Riemann obtenemos que la anterior expresión se reduce en un sistema localmente geodésico a

$$R_{psri} = g_{pk}\left(\Gamma_{sr,i}^{\ \ k} - \Gamma_{si,r}^{\ \ k}\right),$$

teniendo presente que las derivadas primeras del tensor métrico son nulas por así serlo la conexión se encuentra

$$R_{psri} = \frac{1}{2}\left(g_{rp,s,i} - g_{sr,p,i} - g_{ip,s,r} + g_{si,p,r}\right).$$

A partir de la anterior ecuación es fácil comprobar que se cumplen la siguientes relaciones de simetría

$$R_{psri} = R_{rips}; \quad R_{psri} = -R_{psir};$$
$$R_{psrr} = R_{ppri} = 0; \quad R_{prsi} + R_{psri} + R_{pirs} = 0.$$

En el caso de un espacio tetradimensional el tensor de curvatura tiene 256 componentes, que quedan reducidas a 20 al tener en cuenta las anteriores relaciones de simetría.

18.1 Tensor de Einstein

Las simetrías del tensor de curvatura pueden utilizarse para obtener un nuevo tensor que tiene importante aplicación en la relatividad general donde se toma el continuo espacio-tiempo como siendo un espacio de Riemann. Partimos de la identidad de Bianchi (19.1) y la multiplicamos por g_{pk}, teniendo en cuenta la nulidad de la derivada covariante del tensor métrico queda

$$D_m R_{psir} + D_i R_{psrm} + D_r R_{psmi} = 0,$$

multiplicando ahora por g^{pr} y teniendo presente la definición (18.1) del tensor de Ricci

$$D_m R_{si} - D_i R_{sm} + D_r \left(g^{pr} R_{psmi} \right) = 0,$$

multiplicando una vez más por g^{si}

$$D_m R - D_i R^i{}_m - D_r R^r{}_m = 0,$$

que se puede poner de la forma

$$D_r \left(R^r{}_m - \frac{1}{2} \delta^r_m R \right) = 0,$$

a la expresión entre paréntesis se le llama tensor de Einstein, un tensor de segundo orden construido exclusivamente a partir de los tensores geométricos que definen el espacio de Riemann y que tiene la notable propiedad de tener nula su derivada covariante. Cabe poner el tensor de Einstein en forma covariante

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R.$$

19.1 Teorema de unicidad

Vamos a demostrar que en un espacio de Riemann el tensor de curvatura es el único tensor que puede ser construido a partir del tensor métrico, de su primera derivada, siendo lineal respecto a las segundas derivadas. Para la

ISBN: 978-84-617-1463-6

demostración nos vamos a referir a un sistema localmente geodésico, en el que tanto los símbolos de Christoffel como las primeras derivadas del tensor métrico son nulas en un punto dado.

Nos proponemos buscar un tensor que dependa del tensor métrico y de sus derivadas segundas. Consideremos una transformación de un sistema de coordenadas localmente geodésicas a otro sistema de igual característica. La ley de transformación de la conexión será (8.1) que al derivarla se obtiene

$$\partial'_m \Gamma'_{ri}{}^{k} = B_r^s B_i^q A_p^k \partial'_m \Gamma_{sq}{}^{p} + \partial'_m \left(B_{ri}^s A_s^k \right), \qquad (30.1)$$

donde hemos tenido en cuenta que las conexiones, tanto en el sistema de coordenadas original como en el transformado, son nulas

Estamos buscando un tensor que dependa linealmente de las segundas derivadas del tensor métrico, o lo que es lo mismo, que dependa de la primera derivada de los símbolos de Christoffel. El único tensor de estas características es el obtenido de la diferencia de las primeras derivadas de los símbolos de Christoffel

$$T^k{}_{rit} = \partial_t \Gamma_{ri}{}^{k} - \partial_i \Gamma_{rt}{}^{k}$$

que al cambiar de uno a otro sistema localmente geodésico se transforma como un tensor, en efecto de (30.1) se sigue

$$T'^p{}_{sqm} = B_s^r B_q^i B_m^t A_k^p \left(\partial_t \Gamma_{ri}{}^{k} - \partial_i \Gamma_{rt}{}^{k} \right).$$

Se observa que en un sistema localmente geodésico se cumple

$$T^k{}_{rit} = R^k{}_{rit},$$

entonces respecto al sistema de coordenadas considerado el tensor de curvatura es el único que depende linealmente de las derivadas segundas del tensor métrico. Ahora tenemos que demostrar que esta propiedad del tensor de curvatura se cumple en cualquier otro sistema de coordenadas.

Si hubiese otro tensor $N^k{}_{rim}$ con iguales características, al representarlo en un sistema localmente geodésico se encontraría

$$N^k{}_{rit} = T^k{}_{rit},$$

y por el resultado obtenido

$$N^k{}_{rit} = R^k{}_{rit},$$

como los dos miembros son tensores, la igualdad se mantendrá en cualquier otro sistema de coordenadas, lo que demuestra la unicidad indicada del tensor de curvatura.

Es evidente que tensores derivados mediante contracción a partir del tensor de curvatura también tendrán la propiedad exigida de depender del tensor métrico y de sus derivadas primeras y que sea lineal respecto a las segundas derivadas; tal será el caso el tensor de Ricci y de su contracción, la curvatura escalar.

20.1 Volúmenes y áreas

Consideremos en un espacio genérico (que tomaremos tridimensional para concretar) un paralepípedo infinitesimal cuyos tres lados diferentes están formados por tres vectores infinitesimales de componentes da^i, db^k y dc^r. A partir de ellos se puede obtener el tensor antisimétrico formado por el siguiente determinante

$$d\Omega^{ikr} = \begin{vmatrix} da^i & db^i & dc^i \\ da^k & db^k & dc^k \\ da^r & db^r & dc^r \end{vmatrix}, \tag{31.1}$$

que evidentemente es un tensor por ser la suma de productos de tres vectores. Este tensor se puede poner en función de los símbolos completamente antisimétricos de Levi-Civita

$$d\Omega^{ikr} = d\Omega\, \varepsilon^{ikr}$$

donde $d\Omega$ es la única componente distinta de cero del tensor $d\Omega^{ikr}$ y definido por

$$d\Omega = d\Omega^{123} = da^1 db^2 dc^3,$$

Téngase presente que ni $d\Omega$ ni ε^{ikr} son tensores, pero su producto sí lo es.

Se define el volumen del paralepípedo formado por los tres vectores infinitesimales por la expresión

$$dV = \sqrt{g}\, d\Omega \tag{32.1}$$

donde g representa el valor absoluto del determinante del tensor métrico puesto en forma covariante.

Debemos comprobar que el volumen como es definido por (32.1) es un invariante, ya que su valor no debe depender del sistema de coordenadas. Ante una transformación de coordenadas tendremos

$$d\Omega' = d\Omega'^{123} = A_i^1 A_k^2 A_r^3\, d\Omega^{ikr} = A_i^1 A_k^2 A_r^3\, d\Omega\, \varepsilon^{ikr} = |A|\, d\Omega$$

donde $|A|$ es el determinante de la matriz de la transformación de coordenadas.

En la transformación de coordenadas las componentes del tensor métrico cambian según

$$g'_{ik} = B_i^p B_k^q g_{pq}$$

ISBN: 978-84-617-1463-6

que podemos representar como una ecuación matricial

$$G' = B \cdot G \cdot \tilde{B},$$

calculando los correspondientes determinantes se tiene

$$g' = \left|B\right|^2 g \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{g'} = \frac{1}{\left|A\right|}\sqrt{g}, \tag{33.1}$$

donde siempre tomamos el valor absoluto del determinante. (33.1) se aplica en (32.1)

$$dV' = \sqrt{g'}\, d\Omega' = \frac{1}{\left|A\right|}\sqrt{g}\left|A\right| d\Omega = \sqrt{g}\, d\Omega = dV,$$

que demuestra el carácter invariante del volumen.

La fórmula (32.1) es generalizable para un espacio de cualquier número de dimensiones.

En un espacio de tres dimensiones se define el área de una superficie bidimensional a partir de un vector. De forma similar a como hemos hecho anteriormente, definimos el tensor superficie antisimétrico a partir del determinante

$$dS^{qr} = \begin{vmatrix} da^q & db^q \\ da^r & db^r \end{vmatrix}, \tag{34.1}$$

donde da^q y db^r son los vectores que conforman el paralelogramo bidimensional cuya vector área se quiere calcular. El vector asociado al elemento de superfice anterior es

$$dS^p = \frac{1}{2}\Delta^{pqr} dS_{qr}.$$

En el caso de un espacio tetradimensional tenemos dos tipos de «superficies», las bidimensionales y las tridimensionales. Las primeras vienen representadas por el tensor (34.1) y las segundas por un vector. En efecto, el tensor antisimétrico volumen tridimensional del espacio de cuatro dimensiones viene definido por

$$dS^{pqr} = \begin{vmatrix} da^p & db^p & dc^p \\ da^q & db^q & dc^q \\ da^r & db^r & dc^r \end{vmatrix} \tag{35.1}$$

donde, como en los casos anteriores da^p, db^q y dc^r son los vectores que forman el paralepípedo infinitesimal cuyo volumen tridimensional se calcula. A partir del tensor completamente antisimétrico se puede obtener de (35.1) un vector asociado a la superficie tridimensional de un espacio tetradimensional

$$dS^{p}=\frac{1}{3!}\Delta^{pqrs}dS_{qrs}.$$

Esta expresión se puede generalizar a espacios de dimensión N cualquiera

$$dS^{p}=\frac{1}{(N-1)!}\Delta^{pqrs....}dS_{qrs....}.$$

Nos debemos fijar que para un espacio tetradimensional con métrica de Minkowski, que corresponde al espacio-tiempo, el volumen espacial es dado por dS^0.

En (9.1) habíamos definido el tensor de cuarto orden completamente antisimétrico en forma contravariante para espacios tetradimensionales. Ateniéndonos a (33.1), la definición (9.1) de este tensor toma la forma

$$\Delta^{pqrs}=\frac{1}{\sqrt{g}}\varepsilon^{pqrs},$$

de donde se puede deducir el correspondiente tensor en forma covariante

$$\begin{aligned}\Delta_{ikmn}&=g_{pi}g_{qk}g_{rm}g_{sn}\Delta^{pqrs}=g_{pi}g_{qk}g_{rm}g_{sn}\frac{1}{\sqrt{g}}\varepsilon^{pqrs}=\\&=\frac{1}{\sqrt{g}}g_{p1}g_{q2}g_{r3}g_{s4}\varepsilon^{pqrs}\varepsilon^{ikmn}=\sqrt{g}\varepsilon^{ikmn},\end{aligned}\tag{36.1}$$

con este vector se puede hacer otra definición de los tensores «superficies», en el sentido de que aparezcan con sus componentes covariantes.

21.1 Geodésicas

Vamos a considerar un espacio métrico dotado de un tensor métrico no simétrico. El elemento de línea (21.1) nos permite determinar la distancia entre dos puntos. Pretendemos determinar la ecuación paramétrica de la curva $x^k=x^k(t)$ que uniendo dos puntos dados tenga la menor longitud. A esta curva se le llama geodésica.

Tenemos que determinar la función que haga mínima la distancia entre dos puntos dados A y B

$$\begin{aligned}s_{AB}&=\int_A^B\sqrt{g_{ik}\left[x^r(t)\right]dx^i dx^k}=\\&=\int_A^B\sqrt{g_{ik}\left[x^r(t)\right]x'^i(t)x'^k(t)}\,dt=\int_A^B\sqrt{f\left(x^r,x'^r\right)}\,dt\end{aligned}$$

ISBN: 978-84-617-1463-6

donde la prima significa derivación respecto al parámetro *t*. Aplicando las técnicas del método variacional, encontramos la curva extremal, que debe cumplir la ecuación de Euler

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\sqrt{f}}{\partial x'^{r}}\right)-\frac{\partial\sqrt{f}}{\partial x^{r}}=0,$$

y si la desarrollamos tenemos

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x'^{r}}\right)-\frac{\partial f}{\partial x^{r}}-\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial x'^{r}}\frac{df}{dt}=0. \qquad (37.1)$$

En vez de utilizar el parámetro arbitrario *t* para describir la curva, vamos a utilizar como parámetro la propia distancia *s* de cada punto de la curva al punto inicial A. Ahora tendremos

$$f=g_{ik}\dot{x}^{i}\dot{x}^{k}=1$$

donde el punto significa derivación respecto a *s* y la ecuación (37.1) queda

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}^{r}}\right)-\frac{\partial f}{\partial x^{r}}=0,$$

desarrollando y teniendo presente el valor de *f* queda

$$g_{kr}\ddot{x}^{k}+g_{rk}\ddot{x}^{k}+\left(\partial_{m}g_{kr}+\partial_{m}g_{rk}-\partial_{r}g_{mk}\right)\dot{x}^{m}\dot{x}^{k}=0.$$

Introduciendo las partes simétricas y antisimétricas del tensor métrico

$$g_{(rk)}\ddot{x}^{k}+\frac{1}{2}\left[\partial_{m}g_{(rk)}+\partial_{k}g_{(rm)}-\partial_{r}g_{(mk)}\right]\dot{x}^{m}\dot{x}^{k}=0.$$

Definiendo el símbolo

$$L^{*}_{mkr}=\frac{1}{2}\left[\partial_{m}g_{(rk)}+\partial_{k}g_{(rm)}-\partial_{r}g_{(mk)}\right]$$

que es simétrico respecto a los dos primeros índices, entonces la ecuación de la línea geodésica se pone

$$g_{(rk)}\ddot{x}^{k}+L^{*}_{mkr}\dot{x}^{m}\dot{x}^{k}=0. \qquad (38.1)$$

Debemos notar que L^{*}_{mkr} coincide con los símbolos de Christoffel en forma covariante en el caso de que la variedad tuviera una métrica simétrica. Entonces la ecuación geodésica (38.1) tomaría la forma habitual

$$\ddot{x}^{r}+\Gamma_{mk}{}^{r}\dot{x}^{m}\dot{x}^{k}=0. \qquad (39.1)$$

22.1 Divergencia de un vector

La divergencia de un vector viene definida por

$$D_k v^k = \partial_k v^k + v^s \Gamma_{sk}{}^{k},$$

vamos a encontrar una nueva expresión más útil. Partimos para ello de la derivada covariante del tensor métrico

$$D_r g_{ik} = \partial_r g_{ik} - g_{is}\Gamma_{kr}{}^{s} - g_{sk}\Gamma_{ir}{}^{s} = Q_{ikr},$$

al hacer la multiplicación contracta con g^{ik}

$$\Gamma_{sr}{}^{s} = \frac{1}{2} g^{ik}\partial_r g_{ik} - \frac{1}{2} g^{ik} Q_{ikr}. \qquad (40.1)$$

Según habíamos encontrado en el epígrafe 12.1

$$dg = g g^{ik} dg_{ik}. \qquad (41.1)$$

Insertando (41.1) en (40.1) encontramos

$$\Gamma_{sr}{}^{s} = \frac{1}{2g}\partial_r g - \frac{1}{2} g^{ik} Q_{ikr} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^r} - \frac{1}{2} g^{ik} Q_{ikr}, \qquad (42.1)$$

limitándonos al caso de un espacio riemanniano donde tanto el tensor métrico como la conexión son simétricas y nulo el tensor de no-metricidad, la expresión (42.1) se reduce a

$$\Gamma_{sr}{}^{s} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^r}. \qquad (43.1)$$

En el caso de un espacio genérico, no necesariamente riemanniano, tenemos por aplicación de (28.1)

$$\Gamma_{kr}{}^{k} = \partial_r \ln\sqrt{g} - \frac{1}{2} g^{pq} Q_{pqr}.$$

Por (43.1) la definición de divergencia de un vector queda

$$D_k v^k = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\left(\sqrt{g}v^k\right)}{\partial x^k},$$

válida para los espacios de Riemann.

Ahora estamos en condiciones para demostrar que el tensor de Ricci es simétrico en un espacio de Riemann. A partir de la definición de tensor de Ricci (18.1) se encuentra

$$R_{si} - R_{is} = \Gamma_{sk,i}^{\ \ k} - \Gamma_{ik,s}^{\ \ k}$$

utilizando (43.1) se llega a

$$R_{si} - R_{is} = 0$$

que muestra la simetría del tensor de Ricci.

ISBN: 978-84-617-1463-6

23.1 Rotacional de un vector

En un espacio euclídeo tridimensional el rotacional es definido en coordenadas cartesianas por el siguiente vector (no hacemos distinciones entre componentes covariantes y covariantes, es decir hacemos uso de coordenadas cartesianas)

$$\nabla \wedge \mathbf{A} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x_j} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k}\right)\mathbf{e}_i . \qquad (44.1)$$

que es el vector dual asociado al tensor de componentes

$$(\mathrm{rot}\,\mathbf{A})_{jk} = \frac{\partial A_k}{\partial x_j} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k}.$$

Esto nos permite generalizar el concepto de rotacional de un vector a un espacio genérico, con solo sustituir las derivadas parciales por derivadas covariantes

$$(\mathrm{rot}\,\mathbf{A})_{jk} = D_j A_k - D_k A_j \qquad (45.1)$$

que en el caso de un espacio con conexión simétrica se reduce a

$$(\mathrm{rot}\,\mathbf{A})_{jk} = \partial_j A_k - \partial_k A_j$$

De (45.1) se deriva el vector rotacional

$$\frac{1}{2}\Delta^{pjk}(\mathrm{rot}\,\mathbf{A})_{jk} .$$

Si el espacio tiene más de tres dimensiones ya no es posible reducir el tensor rotacional a un vector como ocurre en el espacio tridimensional.

24.1 Gradiente

Sea $\phi(x^k)$ un campo escalar que tiene la propiedad de ser invariante ante un cambio de coordenadas, esto quiere decir que la función $\phi(x^k)$ toma el mismo valor en un punto dado, con independencia del sistema de coordenadas.

El gradiente de una función escalar es definido por

$$(\mathrm{grad}\;\phi)_k = \partial_k \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^k}$$

que se comprueba fácilmente que es un tensor covariante.

25.1 Ángulos

En un espacio euclídeo el ángulo entre dos vectores de componentes dx^i y dy^k se define a partir de su producto escalar

$$\cos\alpha = \frac{g_{ik}dx^i dy^k}{\sqrt{g_{ik}dx^i dx^k}\sqrt{g_{ik}dy^i dy^k}} \qquad (46.1)$$

en esta expresión se anulan los términos que contienen la parte antisimétrica del tensor métrico, es decir que el ángulo solo depende de la parte simétrica de g_{ik}.

Dada la propiedad que tienen los espacios métricos de permitir que en cada punto se defina una espacio euclidiano tangente (ver epígrafe 1.13), es posible extender (46.1) para un espacio genérico.

26.1 Teoremas integrales

El teorema de Stokes en el espacio tridimensional euclídeo es

$$\oint_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} = \iint_\Sigma \nabla\wedge\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S},$$

donde Γ es la curva perimetral de la superficie Σ. En función de las coordenadas queda

$$\oint_\Gamma A_k\, dx_k = \iint_\Sigma \left(\nabla\wedge\mathbf{A}\right)_k dS_k \qquad (47.1)$$

donde usamos coordenadas cartesianas y por tanto no establecemos diferencias entre índices covariantes y contravariantes. Por las definiciones de rotacional de un vector (45.1) y del elemento de superficie (34.1) tenemos para el teorema de Stokes del espacio euclídeo tridimensional

$$\oint_\Gamma A_k\, dx_k = \iint_\Sigma \frac{1}{2}\varepsilon_{kpq}\left(\frac{\partial A_q}{\partial x_p} - \frac{\partial A_p}{\partial x_q}\right) dS_k = \frac{1}{2}\iint_\Sigma \left(\mathrm{rot}\,\mathbf{A}\right)_{pq} dS_{pq},$$

habiendo hecho uso de la relación

$$dS_{pq} = \varepsilon_{kpq}\, dS_k.$$

(47.1) se generaliza a una variedad genérica

$$\oint_\Gamma A_k\, dx^k = \frac{1}{2}\iint_\Sigma \left(\mathrm{rot}\,\mathbf{A}\right)_{pq} dS^{pq}. \qquad (48.1)$$

Nótese que sólo en el caso tridimensional es posible obtener un vector superficie bidimensional, que es el vector dual del tensor superficie de orden dos.

Se puede, igualmente, generalizar el teorema de Gauss, que en el caso del espacio euclídeo tridimensional es

$$\iiint_V \nabla\mathbf{A}\, dV = \oiint_\Sigma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}$$

ISBN: 978-84-617-1463-6

donde Σ es la superfice cerrada que engloba el volumen V. Lo anterior se pone en función de las componentes en coordenadas cartesianas (sin distinguir entre índices y subíndices) y queda

$$\iiint_V \frac{\partial A_k}{\partial x_k} dV = \oiint_\Sigma A_k dS_k ,$$

al generalizar a un espacio genérico se tiene

$$\int_V D_k A^k dV = \int_\Sigma A_k dS^k , \tag{49.1}$$

debemos de notar que Σ es una hipersuperficie de dimensión $N-1$ y dV es dado por (32.1).

27.1 Densidades tensoriales

Se llama densidad tensorial de un vector A^k a

$$\boldsymbol{A}^k = \sqrt{g}\, A^k .$$

Suponiendo que el espacio es de Riemann podemos usar (43.1) y entonces encontrar para la derivada covariante de la densidad tensorial

$$D_k\left(\boldsymbol{A}^k\right) = D_k\left(\sqrt{g}\, A^k\right) = \sqrt{g} D_k A^k = \partial_k\left(\sqrt{g}\, A^k\right), \tag{50.1}$$

para deducirla hemos utilizado la expresión de la divergencia de un vector como deducido en 22.1 y para calcular que la derivada covariante del determinante del tensor métrico tenemos en cuenta que

$$D_r g = g g^{ik} D_r g_{ik} \tag{51.1}$$

que es nula para una variedad de Riemann.

Consideremos ahora un tensor de segundo orden simétrico T^{ik} definido en un espacio de Riemann. Su divergencia será

$$D_k T_i{}^k = \partial_k T_i{}^k + T_i{}^s \Gamma_{sk}{}^k - T_s{}^k \Gamma_{ik}{}^s = \partial_k T_i{}^k - T_i{}^s \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^s} - T_s{}^k \Gamma_{ik}{}^s$$

donde se ha utilizado (43.1). Simplificando

$$\sqrt{g} D_k T_i{}^k = \partial_k\left(\sqrt{g} T_i{}^k\right) - \sqrt{g} T_s{}^k \Gamma_{ik}{}^s .$$

Analizando el segundo sumando de la anterior expresión y teniendo presente la simetría del tensor T^{ik}

$$T_s{}^k \Gamma_{ik}{}^s = T_s{}^k L_{ik}{}^s = \frac{1}{2} T_s{}^k g^{sr}\left(g_{kr,i} + g_{ir,k} - g_{ik,r}\right) = \frac{1}{2} T^{rk} g_{kr,i} ,$$

finalmente nos queda

$$\sqrt{g}D_k T_i^{\ k} = D_k \boldsymbol{T}_i^{\ k} = \partial_k \boldsymbol{T}_i^{\ k} - \frac{1}{2}\boldsymbol{T}^{rk} g_{kr,i}. \tag{52.1}$$

Si ahora suponemos que el tensor T^{ik} es antisimétrico

$$\sqrt{g}D_k T^{ik} = \partial_k\left(\sqrt{g}T^{ik}\right) - \sqrt{g}\,T^{sk}\Gamma_{sk}^{\ \ i},$$

y como la conexión es simétrica

$$D_k \boldsymbol{T}^{ik} = \partial_k \boldsymbol{T}^{ik}, \tag{53.1}$$

donde tenemos en cuenta la nulidad de la derivada covariante del determinante del tensor métrico en un espacio de Riemann.

28.1 Condición necesaria y suficiente para que un espacio riemaniano sea euclídeo

Vamos a demostrar que la condición necesaria y suficiente para que un espacio de Riemann sea euclídeo es que el tensor de curvatura sea idénticamente nulo.

Demostremos que la condición es necesaria. Supongamos un espacio euclídeo referido a un sistema de coordenadas respecto al cual el tensor métrico toma el mismo valor en todos los puntos. Entonces serán nulas las derivadas del tensor métrico y también los símbolos de Christoffel y por lo tanto será nulo el tensor de curvatura de Riemann. Si este tensor es nulo respecto a un sistema de coordenadas, será nulo en cualquier otro sistema de coordenadas, quedando demostrada la condición necesaria.

Vamos ahora a demostrar que la condición de nulidad del tensor de curvatura es suficiente para que el espacio sea euclídeo. Consideremos un vector de componentes A^k definido en un punto cualquiera del espacio. Según sabemos se puede a partir de este vector crear infinitos campos vectoriales, obtenidos trasladando paralelamente el vector desde su posición inicial por caminos diferentes. Consideremos uno de estos infinitos campos $A^k(x^i)$ que debe tener la propiedad de que su derivada covariante es nula

$$dA_k = A_s\Gamma_{kr}^{\ \ s}dx^r \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial A_k}{\partial x^r} = A_s\Gamma_{kr}^{\ \ s}.$$

Vamos a demostrar que cuando el tensor de curvatura es nulo entonces dA_k es una diferencial exacta, es decir que su derivada se puede poner como

$$dA_k = \frac{\partial A_k}{\partial x^r}dx^r,$$

esta circunstancia se dará cuando

$$\frac{\partial}{\partial x^m}\left(A_s\Gamma_{kr}^{\ \ s}\right) - \frac{\partial}{\partial x^r}\left(A_s\Gamma_{km}^{\ \ s}\right) = 0$$

ISBN: 978-84-617-1463-6

que al desarrollar queda

$$\frac{\partial}{\partial x^m}\left(A_s\Gamma_{kr}{}^s\right)-\frac{\partial}{\partial x^r}\left(A_s\Gamma_{km}{}^s\right)=A_sR^s{}_{kmr}$$

que efectivamente es cero ya que hemos puesto de condición que el tensor de curvatura es nulo, con lo que queda demostrado que dA_k es una diferencial exacta. Esto significa que cuando trasladamos paralelamente el vector A_k obtenemos un campo único independientemente del camino que se siga, es decir que la integral de dA^k es la misma con independencia del camino seguido.

Consideremos cuatro campos vectoriales obtenidos a partir de traslaciones paralelas de cuatro vectores $A^i_{(k)}$ que en un punto dado sean linealmente independientes

$$\alpha^k A^i_{(k)}=0 \quad \Rightarrow \quad \alpha^k=0 \tag{54.1}$$

donde *i* representa las componentes y *k* identifica a cada uno de los cuatro vectores.

Comprobemos primeramente que la independencia lineal se seguirá manteniendo después de hacer una traslación paralela

$$\alpha^k\left[A^i_{(k)}+dA^i_{(k)}\right]=\alpha^k A^i_{(k)}+d\left(\alpha^k A^i_{(k)}\right)=0$$

expresión que sólo puede ser nula si $\alpha^k A^i_{(k)}$ es nula, pero en este caso por (54.1) implica que $\alpha^k=0$, lo que nos muestra que los vectores desplazados paralelamente siguen siendo linealmente independientes.

Lo anterior significa que los $A^i_{(k)}$ son funciones únicas de las coordenadas y linealmente independientes entre sí. Si imaginamos las $A^i_{(k)}$ representandas por una matriz de orden *N* si el espacio tiene de dimensión *N*, debemos de concluir que su determinante es distinto de cero.

A continuación vamos a realizar la siguiente transformación de coordenadas

$$dx'^i=A^i_{(k)}dx^k$$

que como ya hemos demostrado, es invertible por ser distinto de cero el determinante formado por $A^i_{(k)}$. Con esta transformación el tensor métrico cambiará según

$$g'_{pq}=A^i_{(p)}A^k_{(q)}g_{ik},$$

derivando

$$\frac{\partial g'_{pq}}{\partial x^r}=A^i_{(p)}A^k_{(q)}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^r}+A^i_{(p)}g_{ik}\frac{\partial A^k_{(q)}}{\partial x^r}+A^k_{(q)}g_{ik}\frac{\partial A^i_{(p)}}{\partial x^r}$$

o bien

$$\frac{\partial g'_{pq}}{\partial x^r} = A^i_{(p)} A^k_{(q)} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^r} - A^i_{(p)} g_{ik} A^s_{(q)} \Gamma^k_{sr} - A^k_{(q)} g_{ik} A^s_{(p)} \Gamma^i_{sr}$$

y sacando factor común

$$\frac{\partial g'_{pq}}{\partial x^r} = A^i_{(p)} A^k_{(q)} \left[\partial_r g_{ik} - g_{mk} \Gamma_{ir}{}^m - g_{im} \Gamma_{kr}{}^m \right] = A^i_{(p)} A^k_{(q)} D_r g_{ik}$$

que es nulo por serlo la derivada covariante del tensor métrico y como el determinante de $A^i_{(k)}$ es distinto de cero, resulta que la derivada del tensor métrico g_{pq} es nula, es decir, el tensor métrico no depende de la coordenada x^k y por tanto tampoco depende de la coordenada x'^k. O sea, el tensor métrico es el mismo en todos los puntos del espacio. Hemos encontrado por lo tanto un sistema que reúne los requisitos exigidos para que un espacio de Riemann sea euclídeo, con lo que queda demostrado el teorema.

29.1 Tensor de Weyl

Buscamos un tensor de cuarto orden definido en un espacio de Riemann que tenga las mismas propiedades de simetría que el tensor de curvatura y además que todas sus trazas sean nula. Este tensor solo se puede construir a partir de $R^i{}_{jkl}$, R_{ik}, R y g_{ik} y es llamado tensor de Weyl

$$C_{ijkl} = AR_{ijkl} + Bg_{ij}R_{kl} + Cg_{ik}R_{jl} + Dg_{il}R_{jk} + Eg_{jk}R_{il} +$$
$$+Fg_{jl}R_{ik} + Gg_{kl}R_{ij} + Hg_{ik}g_{jl}R + Ig_{il}g_{jk}R + Kg_{ij}g_{kl}R.$$

El coeficiente A es una constante numérica que, en realidad, multiplica a todo el resto del segundo miembro, por lo que podemos adoptar el valor arbitrario $A = 1$. Los coeficiente en los que aparece B y G tienen que anularse, puesto que al ser simétrico frente a transformaciones $i \to j$ o $k \to l$ haría que el tensor C_{ijkl} perdiera sus propiedades de antisimetría respecto a los dos primeros y a los dos últimos pares de índices. El coeficiente K también es cero ya que multiplica a una expresión simétrica respecto al cambio $i \to j$ o a $k \to l$, lo que ya hemos dicho que no es permitido.

Para conseguir la deseada antisimetría del tensor de Weyl es necesario que se cumpla

$$I = -H$$

de esta forma la suma de los sumandos que contienen esos coeficientes tienen las adecuadas propiedades de antisimetría. Por tanto el tensor de Weyl queda

$$C_{ijkl} = R_{ijkl} + Cg_{ik}R_{jl} + Dg_{il}R_{jk} + Eg_{jk}R_{il} +$$
$$+Fg_{jl}R_{ik} + Hg_{ik}g_{jl}R - Hg_{il}g_{jk}R.$$

ISBN: 978-84-617-1463-6

Al igual que para el tensor de curvatura, también el tensor de Weyl tiene dos contracciones posibles $C^{i}{}_{ikl}$ y $C^{i}{}_{jki}$ ya que todas las restantes o coinciden con las dos anteriores o son sus opuestos. Vamos a exigir que las dos contracciones anteriores se anulen. Al aplicar este requisito se encuentra

$$C + D + E + F = 0.$$

donde hemos tenido en cuenta que $R^{i}{}_{ikl} = V_{kl} = 0$. De la segunda contracción del tensor de Ricci se deducen las siguientes dos identidades

$$1 + C + 4D + F = 0; \qquad E + H - 4H = 0,$$

donde tenemos en cuenta que el tensor de Ricci no puede ser proporcional al tensor métrico. Al imponer la condición

$$C_{ijkl} = -C_{jikl}$$

se encuentra

$$C = -E; \qquad D = -F,$$

y finalmente por la condición de antisimetría

$$C_{ijkl} = -C_{ijlk}$$

tenemos

$$C = -D; \qquad E = -F.$$

Reuniendo todas las relaciones encontradas hallamos que los coeficientes tienen que ser

$$C = \frac{1}{2}; \quad D = -\frac{1}{2}; \quad E = -\frac{1}{2}; \quad F = \frac{1}{2}; \quad H = -\frac{1}{6}$$

donde suponemos que el espacio es de cuatro dimensiones. Con estos resultados el tensor de Weyl en forma completamente covariante es

$$C_{ijkl} = R_{ijkl} + \frac{1}{2}\left(g_{ik}R_{jl} - g_{il}R_{jk} - g_{jk}R_{il} + g_{jl}R_{ik}\right) + \\ + \frac{1}{6}\left(g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl}\right)R.$$

Si el espacio de Riemann tuviera N dimensiones el tensor de Weyl sería

$$C_{ijkl} = R_{ijkl} + \frac{1}{N-2}\left(g_{ik}R_{jl} - g_{il}R_{jk} - g_{jk}R_{il} + g_{jl}R_{ik}\right) + \\ + \frac{1}{(N-1)(N-2)}\left(g_{il}g_{jk} + g_{ik}g_{jl}\right)R.$$

donde N es la dimensión del espacio que tiene que ser mayor que 3.

Como veremos en el capítulo 5, el tensor de Weyl en forma mixta $C^{i}{}_{jkl}$

tiene la propiedad de ser invariante conforme, es decir que no se altera si se realiza la transformación conforme definida por

$$g'_{ik} = \lambda^2 g_{ik}$$

donde λ es una función escalar de las coordenadas. Por esta invariancia a $C^i{}_{jkl}$ también se le llama tensor conforme de Weyl.

30.1 La laplaciana

El operador laplaciano es definido en coordenadas cartesianas en un espacio euclídeo como

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x_k}$$

en el caso de un espacio genérico, la laplaciana toma la forma $D_k D^k$.

31.1 El vierbein

Consideremos un espacio de Riemann, que por tener una conexión simétrica es siempre posible definir en cada uno de sus puntos un sistema geodésico de coordenadas. Este resultado no es más que la constatación experimental del principio de equivalencia en el espacio-tiempo ordinario, por el que es siempre posible elegir en cada punto un sistema de referencia respecto al cual se anule localmente el campo gravitatorio, es decir respecto a este sistema el espacio-tiempo es el de Minkowski, al menos en un entorno infinitesimal del punto elegido. A este sistema de coordenadas también se le llama libremente cayendo, pues la experiencia nos muestra que para un sistema de referencia que se mueve libremente no se detectan en su entorno infinitesimal efectos gravitatorios.

Representaremos por ξ^m las coordenadas de un punto en el sistema libremente cayendo. Y sean x^μ las coordenadas del mismo punto respecto a un sistema general de coordenadas. La cantidades definidas por

$$e^m_\mu = \frac{\partial \xi^m}{\partial x^\mu} \tag{55.1}$$

se le llaman vierbein (del alemán «cuatro patas») o tetrad. Nótese que utilizamos letras latinas para identificar las coordenadas del sistema libremente cayendo, a las que llamaremos coordenadas Lorentz y las letras griegas las reservamos para las habituales coordenadas del espacio.

Respecto a un cambio de coordenadas, el vierbein se transforma como un vector covariante. En efecto, sea la transformación

$$x'^\mu = x^\mu\left(x^\nu\right),$$

ISBN: 978-84-617-1463-6

frente a este cambio de coordenadas el vierbein se transforma según

$$e'^{\,m}_{\mu} = \frac{\partial \xi^m}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial \xi^m}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} e^m_{\nu}$$

lo que muestra su carácter de vector covariante. Esto significa que podemos entender el vierbein como cuatro vectores covariantes, donde el superíndice (o índice latino o de Lorentz) nos numera a cada uno de los cuatro vectores y el subíndice (o índice griego) nos identifica las cuatro componentes de cada uno de los vectores.

Como la transformación de coordenadas $\xi^m = \xi^m\left(x^{\mu}\right)$ es invertible, existirá el inverso del vierbein, definido como

$$e^{\mu}_m = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \xi^m}$$

tal que

$$e^{\mu}_m e^n_{\mu} = \delta^n_m ; \qquad e^{\mu}_m e^m_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} .$$

Si elegimos para el sistema libremente cayendo la métrica de Minkowski (η_{mn} de elementos diagonales 1, –1, –1, –1), entonces el elemento de línea respecto a las coordenadas de este sistema es

$$ds^2 = \eta_{mn} d\xi^m d\xi^n \qquad (56.1)$$

e introduciendo el vierbein

$$ds^2 = \eta_{mn} e^m_{\mu} e^n_{\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} ,$$

entonces se encuentra la relación entre el vierbein y el tensor métrico

$$g_{\mu\nu} = e^m_{\mu} e^n_{\nu} \eta_{mn} \qquad (57.1)$$

démonos cuenta que existen 10 componentes independientes del tensor métrico (por su simetría), mientras que son 16 las componentes del vierbein. O dicho de otra forma, el vierbein nos determina el tensor métrico pero no ocurre al contrario.

Dado un vector A^{μ} podemos contraerlo con el vierbein

$$A^m = e^m_{\mu} A^{\mu}$$

que tiene como efecto el reemplazar el vector por un conjunto de cuatro escalares coordenados, que representan las componentes de un vector Lorentz. La misma operación se puede hacer con vectores covariantes y con tensores de cualquier orden. Para el caso especial del tensor métrico tendremos

$$g_{mn} = e^{\mu}_m e^{\nu}_n g_{\mu\nu} = e^{\mu}_m e^{\nu}_n e^p_{\mu} e^q_{\nu} \eta_{pq} = \eta_{mn} .$$

El sistema de coordenadas libremente cayendo no es único, siempre es posible hacer una transformación de sus coordenadas tales que el nuevo tensor métrico siga siendo el de Minkowski, es decir

$$\eta_{mn} = \Lambda_m^p \Lambda_n^q \eta_{pq}$$

esta es la transformación de Lorentz de la relatividad especial.

Frente a transformaciones de Lorentz el vierbein cambia como un vector contravariente

$$e'^{m}_{\mu} = \frac{\partial \xi'^{m}}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial \xi^{n}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \xi'^{m}}{\partial \xi^{n}} = \Lambda_n^m e_\mu^n$$

y en general un vector Lorentz contravariante se transformará por la ley

$$A'^{m} = \Lambda_n^m A^n.$$

Nos encontramos, por tanto, con dos tipos de vectores (y en general de tensores), aquellos que se transforman por la ley usual cuando se produce un cambio en las coordenadas del espacio y que llamamos vectores (o tensores) coordenados, cuyas componentes vienen identificadas por índices griegos. Además se encuentran las vectores Lorentz, que son escalares ante transformaciones de coordenadas pero cambian como vectores cuando hay una transformación en las coordenadas del sistema libremente cayendo.

32.1 La conexión spin

La derivada covariante de un vector Lorentz se define de forma similar a como se estableció para la derivada covariante de un vector coordenado (epígrafe 2.1), exigiendo los siguientes requisitos:

a) La derivada covariante de un vector Lorentz $D_\mu V^m$ es un vector Lorentz contravariante y un vector coordenado covariante.

b) La derivada covariante de un vector Lorentz se define por la regla

$$D_\mu V^m = \partial_\mu V^m + V^s \omega_\mu{}^m{}_s. \qquad (58.1)$$

donde $\omega_\mu{}^m{}_s$ es llamada la conexión spin cuya ley de transformación obtendremos más adelante.

c) La derivada covariante de un vector Lorentz cumple la regla de Leibnitz de derivación del producto.

d) En el caso de un campo escalar ϕ se cumple

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi.$$

La condición a) nos permite determinar la regla de transformación de la conexión spin cuando hay una transformación Lorentz. En efecto, el caracter de vector Lorentz de la derivada covariante implica que debe transformarse según la ley

ISBN: 978-84-617-1463-6

$$\left(D_\mu V^m\right)' = D'_\mu V'^m = \Lambda^m_n D_\mu V^n \tag{59.1}$$

desarrollando el primer miembro

$$\partial_\mu\left(\Lambda^m_n V^n\right) + \Lambda^s_p V^p \omega'_\mu{}^m{}_s = V^n \partial_\mu \Lambda^m_n + \Lambda^m_n \partial_\mu V^n + \Lambda^s_p V^p \omega'_\mu{}^m{}_s,$$

mientras que el segundo miembro de (59.1) es

$$\Lambda^m_n\left(\partial_\mu V^n + V^s \omega_\mu{}^n{}_s\right),$$

igualando ambas expresiones se obtiene la ley de transformación de la conexión spin ante transformaciones de Lorentz

$$\omega'_\mu{}^m{}_q = \left(\Lambda^{-1}\right)^p_q \Lambda^m_n \omega_\mu{}^n{}_p - \left(\Lambda^{-1}\right)^p_q \partial_\mu \Lambda^m_p .$$

Nótese que ante transformaciones de coordenadas genéricas la conexión spin debe transformarse como un vector covariante. En efecto, dada la transformación

$$dx'^\mu = A^\mu_\nu \, dx^\nu \quad \Rightarrow \quad dx^\nu = B^\nu_\mu \, dx'^\mu$$

es fácil ver que la conexión spin se transforma como

$$\omega'_\mu{}^m{}_p = B^\nu_\mu \omega_\nu{}^m{}_p .$$

Las condiciones c) y d) nos permiten obtener la derivada covariante de un vector Lorentz puesto en forma covariante y en general, la derivada covariante de un tensor Lorentz. Por ejemplo

$$D_\mu T_n{}^m = \partial_\mu T_n{}^m + T_n{}^s \omega_\mu{}^m{}_s - T_s{}^m \omega_\mu{}^s{}_n$$

Nos encontramos ahora con dos tipos diferentes de derivadas covariantes, la anteriormente definida, que da lugar a la conexión spin y la habitual derivada covariante coordenada $D_\mu V^\nu$ cuya definición exige la conexión afín, que sigue poseyendo sus propiedades habituales. Es posible mezclar ambas derivadas, algo que ocurre cuando se trata de la derivada de un tensor que tiene tanto componentes Lorentz como componentes coordenadas (es decir, índices latinos y griegos). Por ejemplo

$$\bar{D}_\mu T^{\nu m} = \partial_\mu T^{\nu m} + T^{\nu s} \omega_\mu{}^m{}_s + T^{\alpha m} \Gamma^\nu_{\alpha\mu} .$$

En un espacio de Riemann la derivada covariante del tensor métrico es nula. Esta propiedad permite expresar la conexión afín en función del tensor métrico y sus primeras derivadas. Algo similar se puede hacer con la técnica del vierbein. Si se impone la condición de nulidad de la derivada covariante del vierbein

$$D_\mu e^m_\nu = 0 \tag{60.1}$$

entonces es posible relacionar la conexión spin con la afín y como ésta última se puede expresar en función del vierbein, será posible expresar la conexión spin en función del vierbein y sus derivadas primeras. Debemos advertir que la condición (60.1) no la hemos deducido sino la hemos impuesto, o dicho de otra forma, (60.1) debe ser deducida de las ecuaciones de campo. Notemos también que (60.1) implica que la derivada covariante del tensor métrico es nula, pero la afirmación inversa no es válida. La razón se encuentra en que $D_\mu g_{\alpha\beta} = 0$ implica cuarenta ecuaciones, pero (60.1) son 64, dado que el tensor métrico tiene 10 componentes independientes y el vierbein tiene 16.

Al desarrollar (60.1) se encuentra la relación entre ambas conexiones, la spin y la afín

$$\omega_\mu{}^m{}_p = -e^\nu_p \partial_\mu e^m_\nu + e^\nu_p e^m_\alpha \Gamma_{\nu\mu}{}^\alpha . \tag{61.1}$$

Como tratamos con espacios de Riemann, la conexión afín coincide con los símbolos de Christoffel, de tal forma que esta conexión se puede poner en función del vierbein

$$\begin{gathered}\Gamma_{\nu\mu}{}^\alpha = L_{\nu\mu}{}^\alpha = \frac{1}{2} e^\alpha_s \left(\partial_\mu e^s_\nu + \partial_\nu e^s_\mu\right) + \\ + \frac{1}{2}\eta^{rq}\eta_{sn} e^\alpha_r e^\beta_q \left[e^s_\nu \left(\partial_\mu e^n_\beta - \partial_\beta e^n_\mu\right) + e^s_\mu \left(\partial_\nu e^n_\beta - \partial_\beta e^n_\nu\right)\right],\end{gathered} \tag{62.1}$$

que al sustituir en (61.1) da

$$\omega_\mu{}^m{}_p = \frac{1}{2} e^\nu_p e^{\beta m}\left(C_{\beta\mu\nu} + C_{\nu\beta\mu} - C_{\mu\nu\beta}\right), \tag{63.1}$$

donde se ha definido

$$C_{\beta\mu\nu} = e_{\beta n}\left(\partial_\nu e^n_\mu - \partial_\mu e^n_\nu\right).$$

Como es nula tanto la derivada covariante del tensor métrico como la derivada covariante del vierbein, por (57.1) también debe ser nula la derivada covariante del tensor métrico de Minkowski

$$D_\mu \eta_{mn} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \cancel{\partial_\mu \eta_{mn}} - \eta_{sn}\omega_\mu{}^s{}_m - \eta_{ms}\omega_\mu{}^s{}_n = 0$$

de donde se deduce la antisimetría de los índices latinos de la conexión spin

$$\omega_{\mu nm} = -\omega_{\mu mn} .$$

33.1 Tensor de curvatura en función de la conexión spin

La derivada covariante de un vector Lorentz no es conmutativa y al igual que en la derivada covariante de vectores coordenados, el conmutador de las

ISBN: 978-84-617-1463-6

derivadas covariantes está relacionada con el tensor de curvatura, ahora expresado en función de la conexión spin.

Sea V^m un vector Lorentz, vamos a calcular el conmutador

$$\left[D_\mu, D_\nu\right] V^m = D_\mu\left(D_\nu V^m\right) - D_\nu\left(D_\mu V^m\right),$$

teniendo presente

$$D_\mu\left(D_\nu V^m\right) = \partial_\mu\left(D_\nu V^m\right) + D_\nu V^s \omega_\mu{}^m{}_s - D_\alpha V^m \Gamma_{\nu\mu}{}^\alpha$$

y que

$$D_\nu V^m = \partial_\nu V^m + D_\nu V^s \omega_\nu{}^m{}_s$$

entonces después de algún cálculo se obtiene

$$\left[D_\mu, D_\nu\right] V^m = R^m{}_{s\mu\nu} V^s + D_\alpha V^m \tau_{\mu\nu}{}^\alpha$$

donde $R^m{}_{s\mu\nu}$ es el tensor de curvatura en función de la conexión spin definida por

$$R^m{}_{s\mu\nu} = \partial_\mu \omega_\nu{}^m{}_s - \partial_\nu \omega_\mu{}^m{}_s + \omega_\nu{}^r{}_s \omega_\mu{}^m{}_r - \omega_\mu{}^r{}_s \omega_\nu{}^m{}_r \qquad (64.1)$$

y $\tau_{\mu\nu}{}^\alpha$ es el tensor de torsión definido en función de la conexión afín

$$\tau_{\mu\nu}{}^\alpha = \Gamma_{\mu\nu}{}^\alpha - \Gamma_{\mu\nu}{}^\alpha .$$

Cabe definir otra derivada covariante de vectores Lorentz por

$$D_m = e_m^\mu D_\mu .$$

al desarrollar el conmutador

$$\left[D_m, D_n\right] V^r = D_m\left(D_n V^r\right) - D_n\left(D_m V^r\right)$$

se obtiene un nuevo el tensor de curvatura pero ahora puesto en función del vierbein

$$\left[D_m, D_n\right] V^r = R^r{}_{smn} V^s + S_{mn}{}^p D_p V^r$$

donde el tensor de torsión en función del vierbein es definido por

$$S_{mn}{}^p = e_\nu^p \left[e_m^\mu D_\mu e_n^\nu - e_n^\mu D_\mu e_m^\nu \right] + e_m^\mu e_n^\nu e_\alpha^p \tau_{\mu\nu}{}^\alpha ,$$

mientras que el nuevo de tensor de curvatura con todos sus índices latinos es

$$R^r{}_{smn} = e_m^\mu e_n^\nu R^r{}_{s\mu\nu} , \qquad (65.1)$$

al desarrollar el tensor de torsión comprobamos que viene dado solamente en función del vierbein, de sus primeras derivadas y de la conexión spin, en efecto

$$S_{mn}{}^{p} = e^{p}_{\nu}\left[e^{\mu}_{m}\left(\partial_{\mu}e^{\nu}_{n} - e^{\nu}_{s}\omega_{\mu}{}^{s}{}_{n}\right) - e^{\mu}_{n}\left(\partial_{\mu}e^{\nu}_{m} - e^{\nu}_{s}\omega_{\mu}{}^{s}{}_{m}\right)\right].$$

Nos encontramos con tres tensores de curvatura, dos de ellos dados en función de la conexión spin, $R^{r}{}_{s\nu\mu}$ y $R^{r}{}_{mns}$ relacionados por (65.1) y el tercero $R^{\sigma}{}_{\alpha\mu\nu}$ se obtiene por la conexión afín según se expresa en (14.1). Este último está relacionado con los anteriores, como ahora vamos a demostrar. Para ello sustituimos en (64.1) la expresión (61.1), encontrándose

$$R^{r}{}_{s\mu\nu} = e^{\alpha}_{s} e^{r}_{\sigma} R^{\sigma}{}_{\alpha\mu\nu}$$

de donde se deduce la relación

$$R^{r}{}_{smn} = e^{\mu}_{m} e^{\nu}_{n} e^{\alpha}_{s} e^{r}_{\sigma} R^{\sigma}{}_{\alpha\mu\nu}.$$

Es posible definir el tensor de Ricci en función del vierbein por la relación

$$R_{sm} = R^{r}{}_{smr} = e^{\mu}_{m} e^{\nu}_{r} e^{\alpha}_{s} e^{r}_{\sigma} R^{\sigma}{}_{\alpha\mu\nu} = e^{\mu}_{m} e^{\alpha}_{s} R^{\sigma}{}_{\alpha\mu\sigma} = e^{\mu}_{m} e^{\alpha}_{s} R_{\alpha\mu}.$$

Igualmente se define una curvatura escalar en función del vierbein R', que también se puede relacionar con la curvatura escalar del espacio

$$R' = \eta^{sm} R_{sm} = \eta^{sm} e^{\mu}_{m} e^{\alpha}_{s} R_{\alpha\mu} = g^{\alpha\mu} R_{\alpha\mu} = R$$

donde R es la curvatura escalar del espacio en función del tensor métrico.

En orden a obtener invariantes que puedan servir para formular densidades lagrangianas, vamos a calcular el determinante del vierbein. De (57.1) entendida como una expresión matricial, se calculan los determinantes, encontrándose

$$e = \sqrt{g}$$

donde e y g son los determinantes del vierbein y del tensor métrico y donde se entiende que tomamos siempre sus valores positivos.

34.1 Bibliografía seleccionada

* SCHRÖDINGER, Erwin: *Space-time structure*, Cambridge University Press, 1991, pp. 1-74.

* TONNELAT, Marie-Antoinette: *Les théories unitaires de l'electromagnétism et de la gravitation*, Gauthier-Villars, 1965, pp. 3-43.

* GROENNER, Hubert F. M.: « On the History of Unified Field Theories», *Living Reviews in Relativity* 7 (2004) 1-153.

* YEPEZ, Jeffrey: «Einstein's vierbein field theory of curved space», http://arxiv.org/pdf/1106.2037v1.pdf.

ISBN: 978-84-617-1463-6

ISBN: 978-84-617-1463-6

2

Formulacion lagrangiana de la teoría de campo

1.2 Introducción

El principio de Hamilton o de mínima acción surge en la mecánica de la partícula no relativista como un resultado de las leyes de Newton. Se trata, por tanto, de un verdadero principio físico. La lagrangiana de una partícula debe ser la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial. El método lagrangiano se extiende a un sistema de partículas y al estudio del movimiento de un medio continuo.

La similitud formal entre los campos y los medios continuos sugiere extender el principio de Hamilton a los campos. Pero ahora no tendremos un principio físico, sino más bien una útil herramienta físico-matemática.

No obstante, si se exige a las ecuaciones de campo ciertas condiciones, podemos demostrar que los campos tienen asociados una densidad lagrangiana de donde se derivan sus ecuaciones de campo por aplicación de las ecuaciones de Euler-Lagrange deducidas de un principio de mínima acción. Ciertamente, no siempre es así, por lo que pueden existir campos a los que no se les pueda aplicar el formalismo lagrangiano.

Varias ventajas ofrece el estudio de los campos a partir de la densidad lagrangiana, dado que su carácter invariante limita su elección, lo que es muy importante cuando no nos podemos guiar por principios físicos para obtener las ecuaciones de campo.

Por el teorema de Noether se asocia a las simetrías de la densidad lagrangiana teoremas de conservación; el más importante de ellos es la conservación de la energía y el momento, ligada a la simetría frente a traslaciones espacio-temporales.

La potencia y eficacia del formalismo lagrangiano queda bien patente en la búsqueda de las teorías relativistas de campo unificado.

2.2 Principio de Hamilton para una partícula en mecánica clásica

El principio de Hamilton afirma que el movimiento de una partícula entre los instantes t_1 y t_2 es tal que la integral curvilínea

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt$$

llamada acción, donde $L = E_c - E_p$ (E_c es la energía cinética, E_p la energía potencial y L la lagrangiana de la partícula) tiene un valor estacionario para el camino seguido por la partícula. Es decir, que entre todos los caminos que puede seguir la partícula desde su posición en el instante t_1 a su posición en el instante t_2, recorrerá el camino para el cual el valor de la integral I sea estacionario.

Por valor estacionario de la integral I se quiere decir que a lo largo del camino seguido por la partícula la integral tiene el mismo valor que a lo largo de los caminos infinitamente cercanos. Es decir, un concepto equivalente al valor estacionario de una función.

La lagrangiana de la partícula tiene que ser una función de la posición, de la velocidad y del tiempo

$$L = L(q, \dot{q}, t)$$

resultado que nos viene dado por la definición de lagrangiana; $q(t)$ representa las coordenadas generalizadas de la partícula. Consideremos diversas trayectorias que comienzan y terminan en los mismos puntos, pero transcurren por caminos distintos, esta familia de trayectorias descritas en función del parámetro α es

$$q(t,\alpha) = q(t,0) + \alpha\,\eta(t) \tag{1.2}$$

donde $q(t,0)$ representa la trayectoria que sigue realmente la partícula y $\eta(t)$ es una función arbitraria con el único requisito de que se anule en los puntos extremos

$$\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0.$$

La acción I se puede poner en función del parámetro α

$$I(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} L\left[q(t,\alpha), \dot{q}(t,\alpha), t\right] dt. \tag{2.2}$$

Por el principio de Hamilton $I(\alpha)$ debe ser estacionaria cuando $\alpha = 0$, es decir

$$\left(\frac{dI}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} = 0,$$

usando (2.2)

$$\left(\frac{dI}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\partial \dot{q}}{\partial \alpha}\right]_{\alpha=0} dt,$$

integrando por partes la segunda integral

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\partial \dot{q}}{\partial \alpha} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q}{\partial \alpha}\right) dt = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\partial q}{\partial \alpha}\bigg|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\frac{\partial q}{\partial \alpha} dt$$

y por las condiciones impuestas en los límites de la trayectoria nos quedará

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\right]_{\alpha=0} \frac{\partial q}{\partial \alpha} dt = 0. \tag{3.2}$$

Notemos que por la definición de la familia de posibles trayectorias de la partícula (1.2) se puede intercambiar la diferenciación parcial respecto a α y la derivación respecto a *t*. Como $\partial q / \partial \alpha = \eta(t)$ es una función arbitraria, entonces de (3.2) se deduce

$$\frac{\partial L}{\partial t} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = 0 \tag{4.2}$$

que son las ecuaciones de Euler-Lagrange o ecuaciones de movimiento, tantas como grados de libertad tenga la partícula.

Hay que advertir que los límites de integración, o sea los instantes t_1 y t_2, son arbitrarios y el mismo resultado (las mismas ecuaciones de movimiento) hubieran sido obtenidas con límites distintos.

La lagrangiana de una partícula no se encuentra unívocamente determinada. Si *L* es una lagrangiana que nos da las ecuaciones de movimiento de la partícula, la lagrangiana

$$L' = L + \frac{d}{dt} f(q,t)$$

también da las mismas ecuaciones, como se puede ver por aplicación directa de (4.2).

Sin más dificultad se puede extender el principio de Hamilton al caso de un sistema formado por *N* partículas con *n* grados de libertad.

El método lagrangiano puede aplicarse en la mecánica relativista. Continúa siendo válido el principio de Hamilton pero la lagrangiana ya no es la diferencia entre las energías cinética y potencial. La lagrangiana de una partícula relativista debe ser tal que de ella obtengamos el momento lineal a través de la relación

ISBN: 978-84-617-1463-6

$$\mathbf{p}=\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}\ ,$$

por tanto se encuentra que para una partícula libre

$$L=-mc^2\sqrt{1-v^2/c^2} \qquad \Rightarrow \qquad L=-mc^2\frac{d\tau}{dt}=-mc\frac{ds}{dt},$$

donde ds es el elemento de línea tetradimensional. El principio de Hamilton exige que sea una extremal la acción definida por

$$I=\int_1^2 L\,dt=-mc\int_1^2 ds.$$

3.2 Principio de Hamilton modificado

El principio de Hamilton tal como lo hemos usado se basa en n funciones $q_i(t)$ (tantas como grados de libertad tenga el sistema). No obstante, es posible otra formulación utilizando $2n$ funciones: las n coordenadas generalizadas y los n momentos conjugados $p_i(t)=\partial L/\partial \dot{q}_i$ que le son asociados.

Por definición, el hamiltoniano del sistema de partículas es

$$H(q_i,p_i,t)=\sum \dot{q}_i p_i - L(q_i,p_i,t)$$

entonces la acción se pone como

$$I=\int_{t_1}^{t_2}\left[\sum \dot{q}_i p_i - L(q_i,p_i,t)\right]dt. \tag{5.2}$$

Podemos seguir manteniendo el principio de Hamilton exigiendo que la acción (5.2) sea estacionaria, pero ahora el integrando tiene otra forma funcional, por lo que tendríamos

$$\delta I=\delta\int_{t_1}^{t_2} f(q_i,\dot{q}_i,p_i,t)\,dt=0,$$

donde se toman las coordenadas generalizadas y los momentos conjugados como independientes entre sí. Utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange se encuentra

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial f}{\partial q_i}=0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{p}_i}\right)-\frac{\partial f}{\partial p_i}=0$$

de donde se obtienen la ecuaciones de Hamilton

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}; \qquad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}.$$

4.2 Principio de Hamilton para campos

El principio de Hamilton, tal como lo hemos expuesto para una partícula o un sistema de partículas, es un verdadero principio físico, derivable de las leyes fundamentales de la mecánica clásica.

Este princpio es también extensible para la descripción de los medios continuos. Sin embargo, en este caso no existen partículas discretas, por lo que descomponemos el medio contínuo en porciones de volúmenes infinitesimales. Como la energía cinética, al igual que la potencial, dependen de la masa, debemos considerar sus densidades de volumen, de tal forma que tenemos, como magnitud básica para la descripción del medio continuo, una densidad lagrangiana $\mathfrak{L}$ definida por

$$L = \int \mathfrak{L} dV,$$

entonces el principio de mínima acción o de Hamilton se aplica a los medios continuos afirmando que la acción definida por

$$I = \int_1^2 \mathfrak{L} dV dt$$

debe ser una extremal.

La similitud entre un medio continuo y un campo sugiere que pueda extenderse el principio de mínima acción a los campos. No obstante, ahora no tendremos un verdadero principio físico, ya que no encontramos fundamentos que confirmen que las ecuaciones de campo se puedan deducir a partir de un principio variacional. Pero ocurre que si se imponen ciertas constricciones a las ecuaciones de campo, respondiendo todas ellas a razones físicas, podemos asegurar que las ecuaciones de campo son derivables del principio de Hamilton. Pero hay que tener presente que en general no se puede asegurar que las ecuaciones de un campo puedan formularse a través de una densidad lagrangiana.

El método lagrangiano aplicado a los campos tiene ventajes evidentes. Como más adelante veremos, la densidad lagrangiana debe tener ciertas condiciones de invariancia. Esto significa que se reducirá considerablemente el número de densidades lagrangianas admisibles, facilitando la búsqueda de las ecuaciones de campo cuando no se tengan suficientes criterios físicos.

La densidad lagrangiana nos permite obtener las leyes de conservación

ISBN: 978-84-617-1463-6

del campo gracias a la aplicación del teorema de Noether que, como veremos, hace asociar a las simetrías de la densidad lagrangiana magnitudes conservativas.

La propiedad de invariancia de la densidad lagrangiana nos garantiza que las ecuaciones de campo resultantes tendrán correctas propiedades de transformación.

Finalmente, la técnica lagrangiana aplicada a los campos nos asegura la compatibilidad de las ecuaciones que resultan de la aplicación de las ecuaciones de Euler-Lagrange.

5.2 Densidad lagrangiana para campos

Vamos a limitarnos de momento a formular el principio de mínima accion relativista en ausencia de gravitación. Vamos a exigir a las ecuaciones de campo los siguientes requisitos:

-ser ecuaciones diferenciales de orden dos.

-ser lineales respecto a las segundas derivadas de los potenciales.

-depender de la distribución espacio-temporal de las fuentes pero no de sus variaciones espacio-temporales.

En cuanto a la densidad lagrangiana exigimos:

-ser una función de los potenciales del campo, de sus derivadas y de las fuentes.

-ser un invariante Lorentz.

Los requirimientos anteriormente apuntados se ajustan a los campos conocidos y obedecen a razones físicas. Si para simplificar suponemos un campo escalar de potencial ϕ, la densidad lagrangiana tendrá la siguiente dependencia funcional (mientras no se diga lo contrario consideramos coordenadas cartesianas)

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}\left(\phi, \phi_{,k}, \rho\right)$$

donde ρ representa la densidad de fuentes del campo; debiendo ser $\mathfrak{L}$ una cantidad invariante frente a transformaciones de Lorentz. Nótese que en la densidad lagrangiana sólo aparecen las primeras derivadas del potencial del campo, para que así, tras una primera derivación, se obtengan las derivadas segundas, las máximas que debe tener las ecuaciones de campo. Véase que la densidad lagrangiana no tiene una dependencia explícita de las coordenadas espacio-temporales, pues en caso contrario no habría conservación de la energía y el momento, como más adelante veremos.

Como hemos dicho, la densidad lagrangiana no puede depender de $\partial\rho/\partial x^k$ lo que viene a significar que es posible descomponer la densidad lagrangiana en dos sumandos, uno correspondiente al campo libre de fuentes y otro sumando que representa las fuentes. En efecto, llamaremos densidad lagrangiana del vacío a

$$\mathfrak{L}_v = \mathfrak{L}\left(\phi, \phi_{,k}, 0\right)$$

que tras la aplicación de las ecuaciones de Euler-Lagrange nos dará las ecuaciones de campo en el supuesto de no existir fuentes. La densidad lagrangiana de las fuentes es

$$\mathfrak{L}_f = \mathfrak{L}_f\left(\phi, \rho\right) = \mathfrak{L}\left(\phi, \phi_{,k}, \rho\right) - \mathfrak{L}_v\left(\phi, \phi_{,k}, 0\right)$$

por tanto

$$\mathfrak{L}\left(\phi, \phi_{,k}, \rho\right) = \mathfrak{L}_v\left(\phi, \phi_{,k}, 0\right) + \mathfrak{L}_f\left(\phi, \rho\right),$$

nótese que $\mathfrak{L}_f$ sólo puede depender de la distribución de las fuentes y del potencial del campo pero no de sus derivadas, puesto que si esto ocurriera aparecerían en las ecuaciones de campo términos que contendrían la variación espacio-temporal de las fuentes, lo que suponemos no ocurre.

Bajo las condiciones indicadas tiene validez el principio de Hamilton o de mínima acción que exige que la acción del campo definida por

$$I = \int_1^2 \mathfrak{L}\left(\phi, \phi_{,k}, \rho\right) dV dt,$$

debe ser un extremal para los valores correctos de los potenciales del campo. En el caso de que el potencial sea un vector, la acción es

$$I = \int_1^2 \mathfrak{L}\left(\phi_i, \phi_{i,k}, j_i\right) dV dt, \tag{6.2}$$

indiquemos que la función que describe la distribución espacio-temporal de las fuentes tiene el mismo carácter tensorial que los potenciales, como se comprueba de la ecuación de Euler-Lagrange que veremos en el siguiente epígrafe.

6.2 Ecuaciones de Euler-Lagrange para campos

Supongamos que el campo viene descrito por un potencial representado por un tetravector ϕ_i, aunque nuestro razonamiento se puede generalizar para potenciales de cualquier grado de tensorialidad. Para obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange para los campos procedemos de igual forma que para el caso de una partícula en mecánica clásica (epígrafe 2.2).

Aunque los límites de la integración que define la acción no intervienen en las ecuaciones de campo que se obtengan, los elegimos de manera arbitraria de tal forma que la integración espacial sea realizada para todo el espacio ocupado por el campo y la integración temporal la tomamos entre dos instantes cualquiera.

ISBN: 978-84-617-1463-6

Sea una familia de potenciales de campo en función de un parámetro α

$$\phi_i\left(x^k,\alpha\right)=\phi_i\left(x^k,0\right)+\alpha\xi_i\left(x^k\right). \tag{7.2}$$

$\phi_i(x^k,0)$ es el potencial real del campo y la función $\xi_i(x^k)$ es arbitraria con la única condición de que se anule en los límites de integración. Démonos cuenta que estamos suponiendo que las coordenadas son cartesianas. La variación de la acción (6.2) es nula por el principio de Hamilton

$$\delta I=\left(\frac{dI}{d\alpha}\right)_{\alpha=0}d\alpha=\int_1^2\left[\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\phi_i}\frac{\partial\phi_i}{\partial\alpha}+\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\phi_{i,k}}\frac{\partial\phi_{i,k}}{\partial\alpha}\right]_{\alpha=0}d\Omega d\alpha=0$$

siendo $d\Omega$ el elemento de volumen tetradimensional expresado en coordenadas cartesianas. Integrando por partes se encuentra

$$\begin{aligned}\delta I=\int_1^2\left[\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\phi_i}\frac{\partial\phi_i}{\partial\alpha}-\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\phi_{i,k}}\right)\right]\xi_i\,d\Omega d\alpha+\\ +\int_1^2\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\phi_{i,k}}\xi_i\right)d\Omega d\alpha=0,\end{aligned} \tag{8.2}$$

aplicando el teorema de Gauss (49.1) la segunda integral queda

$$\int_1^2\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\phi_{i,k}}\xi_i\right)d\Omega=\oint_\Sigma\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\phi_{i,k}}\xi_i\,dS_k$$

donde la integral del segundo miembro es calculada sobre la hipersuperficie Σ que limita al sistema y como en ella $\xi_i=0$ entonces la integral es nula.

Como ξ_i es una función arbitraria se obtiene de (8.2)

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\phi_{i,k}}\right)-\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\phi_i}=0 \tag{9.2}$$

que son las ecuaciones de Euler-Lagrange para campos. Nótese que es indistinto poner derivadas parciales o totales respecto a las coordenadas espaciotemporales puesto que las coordenadas son independientes entre sí.

Hemos supuesto que la densidad lagrangiana depende como máximo de las derivadas primeras del potencial del campo. Pero no existe a priori razones para esta limitación. Es por tanto posible extender el principio de Hamiton a campos cuyas densidades lagrangianas dependan de cualquier orden de derivación de los potenciales. Como ejemplo consideremos que la dependencia funcional de la densidad lagrangiana fuese

$$\mathfrak{L}=\mathfrak{L}\left(\phi_i,\phi_{i,k},\phi_{i,kr},j_i\right),$$

de nuevo volvemos a considerar una familia de potenciales de campo como la (7.2), tomando igualmente ξ_i como arbitraria, con la condición de su anulación en los límites de la integración, agregando que también sean nulas en esos puntos sus primeras derivadas.

La variación de la acción será

$$\delta I = \left(\frac{dI}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} d\alpha =$$

$$= \int_1^2 \left[\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \phi_i}\frac{\partial \phi_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \phi_{i,k}}\frac{\partial \phi_{i,k}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \phi_{i,kr}}\frac{\partial \phi_{i,kr}}{\partial \alpha}\right]_{\alpha=0} d\Omega\, d\alpha = 0,$$

el segundo sumando del integrando se trata igual que antes, mientras que el tercer sumando exige una doble simplificación, primeramente intercambiando la derivación respecto a las coordenadas con la derivación respecto al parámetro α

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \phi_{i,kr}}\frac{\partial \phi_{i,kr}}{\partial \alpha} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \phi_{i,kr}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial \phi_{i,r}}{\partial \alpha}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \phi_{i,kr}}\frac{\partial \phi_{i,r}}{\partial \alpha}\right) - \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \phi_{i,kr}}\right)\frac{\partial \phi_{i,r}}{\partial \alpha},$$

la divergencia del primer sumando se anula al aplicar el teorema de Gauss, mientras que el segundo sumando se vuelve a descomponer según

$$-\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \phi_{i,kr}}\right)\frac{\partial \phi_{i,r}}{\partial \alpha} = -\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \phi_{i,kr}}\right)\frac{\partial}{\partial x^r}\left(\frac{\partial \phi_i}{\partial \alpha}\right) =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \phi_{i,kr}}\frac{\partial \phi_{i,r}}{\partial \alpha}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^r}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \phi_{i,kr}}\right)\frac{\partial \phi_i}{\partial \alpha}$$

de nuevo el primer sumando del último miembro se anula por aplicación del teorema de Gauss, por lo que la variación de la acción queda

$$\delta I = \int_1^2 \left[\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \phi_i} - \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \phi_{i,k}}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^r}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \phi_{i,kr}}\right)\right]_{\alpha=0} \xi_i\, d\Omega\, d\alpha = 0,$$

dada la arbitrariedad de las funciones ξ_i se obtienen las ecuaciones de Euler-Lagrange anulando el integrando

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \phi_{i,k}}\right) - \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^r}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \phi_{i,kr}}\right) - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \phi_i} = 0, \qquad (10.2)$$

ISBN: 978-84-617-1463-6

sin dificultad se pueden generalizar estas ecuaciones cuando la densidad lagrangiana dependa de derivadas de los potenciales de un orden mayor que el segundo.

Si la densidad lagrangiana de un campo $\mathfrak{L}$ depende de las derivadas segundas de los potenciales pero de tal forma que

$$\mathfrak{L}\left(\phi_i,\phi_{i,k},\phi_{i,kr},x^i\right)=\mathfrak{L}'\left(\phi_i,\phi_{i,k},x^i\right)+\frac{\partial w^r\left(\phi_i,\phi_{i,k},x^i\right)}{\partial x^r}, \qquad (11.2)$$

entonces se obtienen las mismas ecuaciones de campo con la densidad lagrangiana $\mathfrak{L}$ que con la $\mathfrak{L}'$, la cual no depende de las derivadas segundas de los potenciales; por lo tanto a $\mathfrak{L}'$ se aplica la ecuación de Euler-Lagrange (9.2), mientras que es necesario aplicar (10.2) para $\mathfrak{L}$.

Al aplicar el principio de mínima acción a (11.2) se encuentra

$$\delta\int\mathfrak{L}\,d\Omega=\delta\int\mathfrak{L}'\,d\Omega+\delta\int\frac{\partial w^r}{\partial x^r}d\Omega=0,$$

a la última integral se le aplica el teorema de Gauss

$$\delta\int\frac{\partial w^r}{\partial x^r}d\Omega=\delta\int_\Sigma w^r dS_r=\int_\Sigma\left(\frac{\partial w^r}{\partial\phi_i}\delta\phi_i+\frac{\partial w^r}{\partial\phi_{i,k}}\delta\phi_{i,k}\right)dS_r, \qquad (12.2)$$

los requisitos para esta variación son los mismos que los establecidos para obtener la ecuación (10.2) pues estamos tratando con una densidad lagrangiana $\mathfrak{L}$ que depende de las derivadas segunda de los potenciales. Entonces la integral (12.2) se anula porque así lo hacen tanto las variaciones de los potenciales como las variaciones de sus derivadas primeras en los límites de la integración, por tanto nos queda

$$\delta\int\mathfrak{L}\,d\Omega=\delta\int\mathfrak{L}'\,d\Omega,$$

lo que nos viene a decir que las ecuaciones de campo se obtienen con la densidad lagrangiana $\mathfrak{L}'$ y las ecuaciones de Euler-Lagrange (9.2), o sea

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial\mathfrak{L}'}{\partial\phi_{i,k}}\right)-\frac{\partial\mathfrak{L}'}{\partial\phi_i}=0,$$

igual resultado se hubiera obtenido si hubiésemos aplicado la ecuación (10.2) a la densidad lagrangiana (11.2).

Al igual que ocurre con la formulación lagrangiana para partículas, también para los campos existe una indeterminación. Si $\mathfrak{L}$ es la densidad lagrangiana de un campo, entonces

$$\mathfrak{L}'=\mathfrak{L}+\frac{\partial}{\partial x^k}F^k\left(\phi_i,x^i\right)$$

también es una densidad lagrangiana de la que se obtienen las mismas ecuaciones de campo. En efecto, por aplicación directa de las ecuaciones de Euler-Lagrange se encuentra que $\mathfrak{L}'$ también cumple la ecuación (9.2).

Naturalmente todo lo obtenido se puede extender automáticamente a cualquier campo con independencia del orden tensorial de sus potenciales.

7.2 Tipos de densidades lagrangianas

Ya hemos indicado que el método lagrangiano se aplica a los campos pero no podemos darle al principio de Hamilton una categoría de ley física; como dijimos, solo es aplicable a determinados casos. O dicho de otra manera, la densidad lagrangiana del campo debe tener determinada forma para ser aplicable el principio de Hamilton y poder obtener las ecuaciones de campo con las limitaciones ya señaladas en 5.2.

En el caso de un campo escalar la forma más general de densidad lagrangiana adecuada para ser utilizada en un principio de mínima acción es

$$\mathfrak{L}\left(\phi,\phi_{,k},\rho\right)=\alpha f^{ik}\phi_{,i}\,\phi_{,k}+f\left(\phi\right)+h\left(\rho,\phi\right),$$

α es la constante de acoplamiento y los f^{ik} tienen que ser unas cantidades constantes tales que hagan al primer sumando un invariante. Las funciones f y h son invariantes. Como $\phi_{,i}$ es un vector covariante, entonces

$$f^{ik}=\frac{1}{2}\left(\eta^{ik}+\eta^{ki}\right)=\eta^{ik}$$

η^{ik} son las componentes contraviariantes del tensor métrico de Minkowski, ya que usamos coordenadas cartesianas. En efecto, al aplicar la ecuación de Euler-Lagrange (8.2) se obtiene la ecuación de campo

$$2\alpha\phi_{,k}^{;k}+f'\left(\phi\right)+h'\left(\rho,\phi\right)=0 \tag{13.2}$$

donde los apóstrofes indican derivación respecto a ϕ.

Debemos de notar que existen dos tipos de fuentes: las internas y las externas. Existen fuentes internas del campo cuando el propio potencial de campo es fuente del campo, en nuestro caso las fuentes internas son dadas por $f'\left(\phi\right)$. Las fuentes externas, que representamos por ρ, no pertenecen al campo pero contribuyen a él. Démonos cuenta que no está garantizada que la ecuación (13.2) sea lineal ya que no existen limitaciones de las funciones $f\left(\phi\right)$ y $h\left(\rho,\phi\right)$.

En cuanto a α representa la constante de acoplamiento entre el campo y las fuentes. Hay que observar que al existir dos tipos de fuentes deberán de existir dos constantes de acoplamiento, o sea que la ecuación (12.2) tendrá como forma más general

$$2\alpha\phi_{,k}^{;k}+\beta f'\left(\phi\right)+h'\left(\rho,\phi\right)=0,$$

ISBN: 978-84-617-1463-6

y lo mismo cabe decir para las densidades lagrangianas que veremos a continuación.

Si los potenciales de campo son tetravectores la densidad lagrangiana debe ser

$$\mathfrak{L} = \alpha f^{ikmn}\phi_{i,k}\phi_{m,n} + f\left(\phi_r\right) + h\left(j^r, \phi^r\right) \tag{14.2}$$

donde α es la constante de acoplamiento y f^{ikmn} es una combinación del tensor métrico de Minkowski si usamos coordenadas cartesianas, con lo que se consigue que el primer término, al igual que los restantes, sea un invariante. Ahora las fuentes externas vienen representadas por el tetravector j^r. De (14.2) se obtienen las ecuaciones de campo por aplicación de las ecuaciones de Euler-Lagrange (9.2)

$$\alpha\left(f^{ikmn} + f^{mnik}\right)\phi_{m,nk} - f^{,i} - h^{,i} = 0,$$

que tiene la propiedad exigida de ser lineal respecto a las derivadas segundas del potencial. En la anterior expresión hemos usado la notación $f^{,i} = \partial f / \partial \phi_i$.

Por último, para el caso de que el potencial sea un tensor de segundo orden tendremos que la densidad lagrangiana es

$$\mathfrak{L} = \alpha f^{ikmnpq}\phi_{ik,m}\phi_{np,q} + f\left(\phi_{rs}\right) + h\left(T^{rs}, \phi_{rs}\right),$$

f^{ikmnpq} vuelve a ser una combinación del tensor métrico de Minkowski, siempre y cuando se usen coordenadas cartersianas; si se usan coordenadas curvilíneas, entonces en vez del tensor de Minkowski η^{ik} hay que poner el tensor métrico correspondiente. De la anterior densidad lagrangiana se obtiene la ecuación de campo

$$\alpha\left(f^{ikmnpq} + f^{npqikm}\right)\phi_{np,q,m} + f^{,ik} + h^{,ik} = 0.$$

siendo $f^{,ik} = \partial f / \partial \phi_{ik}$. Expresiones similares se obtienen para campos cuyos potenciales tengan un orden tensorial superior.

8.2 Densidad lagrangiana cuando existe campo gravitatorio

Vamos a continuación a ver las transformaciones que hay que realizar cuando los campos están en el seno de un campo gravitatorio. Indicar que formalmente los resultados que ahora vamos a obtener serán los mismos que si las densidades lagrangianas anteriores fueran definidas en el espacio-tiempo de la relatividad especial pero con coodenadas curvilíneas en vez de coordenadas cartesianas.

Cuando hay gravedad o se utilizan las coordenadas curvilíneas, el elemento de volumen invariante tetradimensional toma la forma

$$dV = \sqrt{g}\, d\Omega,$$

donde $d\Omega$ representa el producto de las diferenciales de cada una de las coordenadas y g es el valor positivo del determinante del tensor métrico en forma covariante. Entonces la acción de un campo en presencia de gravedad deberá ponerse como

$$I = \int_1^2 \sqrt{g}\, \mathfrak{L}\, d\Omega,$$

si bien $\mathfrak{L}$ es un invariante frente a transformaciones genéricas de coordenadas, no ocurre lo mismo con $\sqrt{g}\,\mathfrak{L}$, que ahora juega el papel de la densidad lagrangiana y a la que se le debe de aplicar las ecuaciones de Euler-Lagrange (9.2).

En presencia de gravedad hay que sustituir en los coeficientes del tipo f^{ikpq} el tensor de Minkowski η^{ik} por el tensor métrico g^{ik} y las derivadas parciales por derivadas covariantes. Como ya dijimos los símbolos f^{ikpq} deben ser tales que las formas del tipo

$$f^{ikmn} D_k \phi_i D_n \phi_m$$

sean invariantes frente a transformaciones generales de coordenadas.

Con lo dicho ya estamos en condiciones de generalizar las anteriores densidades lagrangianas en presencia de gravedad.

9.2 Ejemplos

En el epígrafe 7.2 ya hemos puesto un ejemplo de una densidad lagrangiana de un campo escalar, que por lo dicho en 8.2 debe tener como generalización en presencia de gravitación la densidad lagrangiana

$$\sqrt{g}\left[\alpha g^{ik} \phi_{,i}\, \phi_{,k} + g(\phi) + h(\rho,\phi)\right],$$

nótese que el primer sumando $\alpha g^{ik} \phi_{,i}\, \phi_{,k}$ es un invariante frente a transformaciones generales de coordenadas.

El ejemplo más destacado de campo vectorial es el electromagnético, cuya densidad lagrangiana en ausencia de gravedad es

$$\mathfrak{L} = -\frac{\varepsilon_0}{4} F_{ik} F^{ik} - j^k \phi_k$$

donde ϕ_k es el potencial electromagnético y F_{ik} es el tensor de campo definido por

$$F_{ik} = \frac{\partial \phi_k}{\partial x^i} - \frac{\partial \phi_i}{\partial x^k}.$$

usando coordenadas cartesianas se encuentra al desarrollar $\mathfrak{L}$

ISBN: 978-84-617-1463-6

$$\mathfrak{L} = -\frac{\varepsilon_0}{2}\left(\eta^{im}\eta^{kn} - \eta^{in}\eta^{km}\right)\phi_{i,k}\phi_{m,n} - j^k\phi_k$$

por tanto

$$f^{ikmn} = 2\left(\eta^{im}\eta^{kn} - \eta^{in}\eta^{km}\right),$$

en presencia de gravitación la densidad lagrangiana del campo electromagnético toma la forma

$$\mathfrak{L}' = -\frac{\varepsilon_0}{2}\sqrt{g}\left(g^{im}g^{kn} - g^{in}g^{km}\right)D_k\phi_i D_n\phi_m - \sqrt{g}\,j^k\phi_k$$

se puede comprobar que

$$\left(g^{im}g^{kn} - g^{in}g^{km}\right)D_k\,\phi_i D_n\,\phi_m = \left(g^{im}g^{kn} - g^{in}g^{km}\right)\phi_{i,k}\phi_{m,n}.$$

Como ejemplo de campo tensorial pongamos el campo gravitatorio que tiene la forma

$$\mathfrak{L} = \kappa\sqrt{g}\,f^{ikpqmn}g_{ik,p}\,g_{qm,n}$$

se puede comprobar (ver capítulo 4) que

$$f^{ikpqmn} = \frac{1}{2}g^{im}g^{kp}g^{qn} + \frac{1}{4}g^{im}g^{kq}g^{pn} + \frac{3}{4}g^{in}g^{kp}g^{qm} - \frac{1}{4}g^{in}g^{km}g^{pq} -$$
$$-\frac{1}{4}g^{ik}g^{pm}g^{qn} - \frac{1}{4}g^{ik}g^{pn}g^{qm} - \frac{1}{2}g^{iq}g^{kp}g^{mn} - \frac{1}{4}g^{iq}g^{kn}g^{pm}.$$

La teoría de campos que hemos desarrollado se extiende a los campos cuánticos. Así por ejemplo para un campo bosónico cargado tendremos unos potenciales escalares complejos que obedecen a la ecuación de Klein-Gordon

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^k\partial x_k} + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\phi = 0$$

por tanto la densidad lagrangiana asociada a este campo es

$$\mathfrak{L} = g^{ik}\phi_{,i}\,\phi^*_{,k} - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\phi\phi^*$$

donde ϕ^* es el complejo conjugado de ϕ.

El campo electromagnético es un campo vectorial pero asociado a una partícula de masa cero, el fotón. Si por el contrario tenemos un campo vectorial masivo su densidad lagrangiana será

$$\mathfrak{L} = -\frac{\alpha}{4}F_{ik}F^{ik} + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\phi_k\phi^k\ .$$

Imponiendo la condición de que (14.2) sea un invariante general, se deduce la expresión de la «parte cinética» (o sea, el primer sumando) de la densidad lagrangiana de un campo vectorial. En efecto, en ausencia de gravedad y respecto a un sistema cartesiano de coordenadas tenemos como expresión más general de la densidad lagrangiana

$$\mathfrak{L}=\left(\alpha\eta^{im}\eta^{kn}+\beta\eta^{in}\eta^{km}+\gamma\eta^{ik}\eta^{mn}\right)\phi_{i,k}\phi_{m,n},$$

si ahora consideramos la presencia de gravedad, o bien nos referimos a un sistema de coordenadas curvilíneas, tendremos

$$\mathfrak{L}=\left(\alpha g^{im}g^{kn}+\beta g^{in}g^{km}+\gamma g^{ik}g^{mn}\right)D_k\phi_i D_n\phi_m$$

que es un invariante. Exigimos que la densidad lagrangiana del campo no dependa de las derivadas del tensor métrico, es decir no dependa de la conexión. Entonces los términos de la densidad lagrangiana que dependan de la conexión deben anularse entre sí. Como

$$D_k\phi_i=\phi_{i,k}-\phi_s\Gamma^s_{ik};\qquad D_n\phi_m=\phi_{m,n}-\phi_t\Gamma^t_{mn}$$

entonces la parte de la densidad lagrangiana que depende de la conexión y que debe anularse es

$$\left(\alpha g^{im}g^{kn}+\beta g^{in}g^{km}+\gamma g^{ik}g^{mn}\right)\cdot$$
$$\cdot\left(\phi_t D_k\phi_i\Gamma^t_{mn}+\phi_s D_m\phi_n\Gamma^s_{ik}+\phi_t\phi_s\Gamma^t_{mn}\Gamma^s_{ik}\right),$$

cambiando los índices mudos y usando las simetrías de la conexión y del tensor métrico resulta

$$\left[(\alpha+\beta)g^{im}g^{kn}+\gamma g^{ik}g^{mn}\right]\left(\phi_t D_k\phi_i\Gamma^t_{mn}+\phi_s D_m\phi_n\Gamma^s_{ik}+\phi_t\phi_s\Gamma^t_{mn}\Gamma^s_{ik}\right),$$

que tiene que ser nulo en todos los sistemas de coordenadas, o sea se tiene que cumplir que

$$(\alpha+\beta)g^{im}g^{kn}+\gamma g^{ik}g^{mn}=0\quad\Rightarrow\quad\alpha+\beta=0;\quad\gamma=0$$

por tanto la expresión más general para la parte cinética de la densidad lagrangiana de un campo vectorial es

$$\mathfrak{L}=\alpha\left(g^{im}g^{kn}-g^{in}g^{km}\right)\phi_{i,k}\phi_{m,n}$$

o bien, lo que es lo mismo

$$\mathfrak{L}=\frac{\alpha}{2}F^{ik}F_{ik}.$$

Como último ejemplo tomemos la ecuación espinorial de Dirac

$$i\hbar\gamma^k\frac{\partial\psi}{\partial x^k}-mc\psi=0$$

ISBN: 978-84-617-1463-6

donde γ^k son matrices de coeficientes constantes. La anterior ecuación deriva de la densidad lagrangiana

$$\mathfrak{L} = \bar{\psi}\left(i\hbar\gamma^k\partial_k - mc\right)\psi$$

donde $\bar{\psi} = \psi^+\gamma^0$ y ψ^+ es la adjunta (compleja conjugada) de ψ .

10.2 Formulación de Hamilton

Ya hemos mostrado en 3.2 que el principio de Hamilton admite una representación en función de los potenciales y de sus momentos asociados, entendidos estos como

$$\eta^i = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{\phi}_i}$$

donde el punto significa derivación respecto a x^0. Se define la densidad hamiltoniana del campo por

$$\mathfrak{H} = \eta^i\dot{\phi}_i - \mathfrak{L}\,. \tag{15.2}$$

Aún cuando se puede desarrollar una formulación hamiltoniana para campos el procedimiento singulariza la variable temporal, por lo que el procedimiento no es adecuado en Relatividad donde las coordenadas espaciales y la temporal están en pie de igualdad.

En el caso en que el potencial ϕ_i no aparezca explícitamente en la densidad lagrangiana, será una cantidad cíclica, lo que genera una magnitud que se conserva. En efecto, por (9.2) tendríamos (donde usamos coordenadas cartesianas)

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \phi_{i,k}}\right) = 0,$$

o bien

$$\frac{d\eta^i}{dx^0} + \frac{d}{dx^\alpha}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \phi_{i,\alpha}}\right) = 0,$$

donde los índices griegos representan las coordenadas espaciales. Al hacer la integración sobre un volumen espacial que englobe a todo el campo se tendrá

$$\int \frac{d\eta^i}{dx^0} d\Omega + \int \frac{d}{dx^\alpha}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \phi_{i,\alpha}}\right) d\Omega = 0,$$

siendo $d\Omega$ el elemento de volumen tetradimensional. Al aplicar el teorema de Gauss al segundo miembro queda

$$\int \frac{d}{dx^\alpha}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \phi_{i,\alpha}}\right) d\Omega = \oint \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \phi_{i,\alpha}} dS_\alpha = 0$$

que se anula pues el campo es nulo en todo punto de la superficie.

Si llamamos momento canónico total del campo a

$$\mathfrak{p}^i = \int \eta^i d\Omega$$

concluimos que en el caso de que el potencial ϕ_i sea ignorado el momento canónico total asociado se conserva en el tiempo

$$\frac{d\mathfrak{p}^i}{dt} = 0.$$

A continuación vamos a proceder a obtener las ecuaciones canónicas de Hamilton. Para ello tengamos en cuenta que la densidad hamiltoniana tiene la siguiente dependencia funcional

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}\left(\phi_i, \phi_{i,\alpha}, \eta_i, x^i\right),$$

entonces

$$d\mathfrak{H} = \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \phi_i} d\phi_i + \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \phi_{i,\alpha}} d\phi_{i,\alpha} + \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \eta_i} d\eta_i + \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x^\alpha} dx^\alpha + \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x^0} dx^0. \qquad (16.2)$$

A partir de la definición de la densidad de Hamilton (15.2) se obtiene

$$\begin{aligned} d\mathfrak{H} = \eta^i d\dot{\phi}_i + \dot{\phi}_i\, d\eta^i - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \phi_i} d\phi_i - \\ - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \phi_{i,\alpha}} d\phi_{i,\alpha} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{\phi}_i} d\dot{\phi}_i - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x^\alpha} dx^\alpha - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x^0} dx^0, \end{aligned} \qquad (17.2)$$

como todas las variables son independientes podemos igualar los términos de (16.2) y (17.2) encontrándose

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \phi_i} = -\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \phi_i}; \quad \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \phi_{i,\alpha}} = -\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \phi_{i,\alpha}}; \quad \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x^i} = -\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x^i}; \quad \dot{\phi}_i = \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \eta^i}. \qquad (18.2)$$

Para hallar la otra ecuación de Hamilton hacemos la derivada temporal de la densidad de momento

$$\frac{d\eta^i}{dx^0} = \frac{d}{dx^0}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{\phi}_i}\right)$$

y aplicamos las ecuaciones de campo, quedando la segunda ecuación de Hamilton

ISBN: 978-84-617-1463-6

$$\dot{\eta}^i = -\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \phi_i} + \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \phi_{i,\alpha}}\right), \qquad (19.2)$$

11.2 Conservación de la densidad hamiltoniana

A partir de la definición de densidad lagrangiana se obtiene

$$\frac{d\mathfrak{H}}{dx^0} = \dot{\eta}^i \dot{\phi}_i + \eta^i \ddot{\phi}_i - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \phi_i}\dot{\phi}_i - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \phi_{i,\alpha}}\dot{\phi}_{i,\alpha} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{\phi}_i}\ddot{\phi}_i - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x^0},$$

simplificando y haciendo uso de la definición de densidad de momento canónico nos queda

$$\frac{d\mathfrak{H}}{dx^0} = \dot{\phi}_i\left[\frac{d}{dx^0}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{\phi}_i}\right) - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \phi_i}\right] - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \phi_{i,\alpha}}\dot{\phi}_{i,\alpha} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x^0},$$

utilizando las ecuaciones de campo (9.2)

$$\frac{d\mathfrak{H}}{dx^0} = -\dot{\phi}_i \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \phi_{i,\alpha}}\right) - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \phi_{i,\alpha}}\dot{\phi}_{i,\alpha} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x^0} = -\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \phi_{i,\alpha}}\dot{\phi}_i\right) - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x^0} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \phi_{i,\alpha}}\dot{\phi}_i\right) + \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x^0},$$

si nos limitamos al caso en que la densidad lagrangiana no depende explícitamene del tiempo, la anterior ecuación queda

$$\frac{d\mathfrak{H}}{dx^0} + \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \phi_{i,\alpha}}\dot{\phi}_i\right) = 0$$

que tiene la forma de una ecuación de continuidad lo que implica que debe de existir una magnitud que se conserve. Integrando para todo el volumen del campo y aplicando el teorema de Gauss, se encuentra que la función hamiltoniana del campo definida por

$$H = \int \mathfrak{H}\, dV$$

se conserva en el tiempo.

12.2 Tensor energía-momento

Consideremos un campo que viene determinado, en coordenadas cartesianas, por la densidad lagrangiana

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}\left(\phi_i, \phi_{i,r}, x^i\right).$$

Vamos a suponer que el sistema está aislado, es decir que la densidad lagrangiana no depende explícitamente de las coordenadas espacio-temporales, entonces

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x^k}\right)_{\phi_i,\phi_{i,k}} = 0. \tag{20.2}$$

O dicho de otra forma, que cuando tiene lugar una traslación

$$x'^k = x^k + \delta x^k$$

la densidad lagrangiana queda inalterada. Bajo esta condición tendremos

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x^k} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \phi_i}\phi_{i,k} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \phi_{i,r}}\phi_{i,rk} = \frac{\partial}{\partial x^r}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \phi_{i,r}}\phi_{i,k}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^r}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \phi_{i,r}}\phi_{i,k} - \delta^r_k \mathfrak{L}\right) = 0,$$

debemos advertir que la anterior derivada parcial $\partial \mathfrak{L}/\partial x^k$ es diferente de la (20.2), pues ahora no se exige la constancia de los potenciales y sus derivadas sino solo la constancia de las restantes coordenadas espacio-temporales. A la expresión

$$T_k{}^r = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \phi_{i,r}}\phi_{i,k} - \delta^r_k \mathfrak{L} \tag{21.2}$$

se le llama tensor energía-momento, que cumple la ley de conservación

$$\frac{\partial T_k{}^r}{\partial x^r} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial T^{kr}}{\partial x^r} = 0. \tag{22.2}$$

Nótese que nuestro razonamiento está limitado al caso de que la densidad lagrangiana dependa como máximo de las primeras derivadas de los potenciales.

Se puede generalizar (22.2) para el caso de que el potencial del campo sea un tensor, por ejemplo, si fuera uno de segundo orden tendríamos

$$T_k{}^r = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \phi_{ij,r}}\phi_{ij,k} - \delta^r_k \mathfrak{L}.$$

El tensor de energía-momento se puede poner de forma covariante

$$T_{qp} = \eta_{rq} T^{\ r}_{\ p}.$$

Mientras que las componentes contravariantes del tensor de energía-momento serán

$$T^{pq} = \eta^{pk} T_k{}^q = \eta^{pk}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \phi_{i,q}}\phi_{i,k} - \eta^{pq}\mathfrak{L}.$$

ISBN: 978-84-617-1463-6

La ecuación (22.2) corresponde a una ecuación de continuidad, que es la forma local de representar las leyes de conservación; en efecto (22.2) se pone como

$$\frac{\partial T^{kr}}{\partial x^r}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial T^{k\alpha}}{\partial x^\alpha}+\frac{\partial T^{k0}}{\partial x^0}=0,$$

si $k=0$ encontramos la ley de conservación de la energía

$$\frac{\partial T^{0\alpha}}{\partial x^\alpha}+\frac{\partial T^{00}}{\partial x^0}=0,$$

al integrar por todo el volumen del campo y usar el teorema de Gauss se encuentra que la cantidad

$$\int T^{00}dV$$

es una constante de movimiento, que corresponde a la energía total del campo, por lo que T^{00} es la densidad de volumen de energía y $T^{0\alpha}$ son las componentes de la densidad de corriente de energía.

Si elegimos $k=\beta$ entonces encontramos la ley de conservación del momento lineal, con $T^{\beta 0}$ siendo la densidad de momento y $T^{\beta\alpha}$ la densidad de corriente de momento. La ley de conservación global del momento se obtiene integrando para todo el volumen y aplicando el teorema de Gauss.

Las expresiones (21.2) y (22.2) son válidas en el caso especial de utilizar coordenadas cartesianas, para las cuales el tensor métrico coincide con el tensor de Minkowski η_{ik}. Pero si usamos coordenadas curvilíneas o bien referimos las expresiones a un sistema de referencia no inercial, las ecuaciones deben modificarse.

Vamos a someter a (22.2) a un cambio genérico de coordenadas, las cuales pueden representar a un sistema de referencia no inercial, tal que

$$T^{kr}=B_p^k B_q^r\ T'^{\,pq}$$
$$dx'^{\,m}=A_r^m\,dx^r$$

entonces (22.2) quedará

$$\frac{\partial T^{kr}}{\partial x^r}=\frac{\partial}{\partial x'^{\,m}}\left(B_p^k B_q^r T'^{\,pq}\right)\frac{\partial x'^{\,m}}{\partial x^r}=0,$$

simplificando se llega a

$$B_{pq}^k\,T'^{\,pq}+A_r^m\,B_p^k\,B_{qm}^r T'^{\,pq}+B_p^k\,\partial'_q T'^{\,pq}=0 \qquad (23.2)$$

donde

$$B_{pq}^k=\frac{\partial^2 x^k}{\partial x'^{\,p}\partial x'^{\,q}},$$

si ahora multiplicamos (23.2) por A_k^s queda

$$A_k^s B_{pq}^k T'^{pq} + A_r^m B_{qm}^r T'^{sq} + \partial'_q T'^{sq} = 0. \tag{24.2}$$

Como estamos haciendo una transformación de coordenadas desde un espacio euclídeo en coordenadas cartesianas son nulas las componentes de su conexión, por tanto la transformación de la conexión en nuestro caso según (8.1) es

$$\Gamma'_{ri}{}^{k} = B_{ri}^s A_s^k ,$$

entonces (24.2) queda

$$\partial'_q T'^{sq} + T'^{ps} \Gamma'^{q}_{sq} + T'^{sq} \Gamma'^{p}_{sq} = 0$$

o bien

$$D_q T^{sq} = 0 \tag{25.2}$$

donde hemos eliminado las primas. Entonces (25.2) es la expresión de la ley de conservación de energía-momento válida en general, que se puede poner en forma mixta ya que la derivada covariente del tensor métrico es nula, siempre y cuando supongamos un espacio de Riemann. (25.2) es una expresión tensorial, lo que viene a decir que su forma permanecerá invariante frente a cualquier transfomación de coordenadas, representen o no un cambio de sistema de referencia. La expresión (25.2) permanecerá válida en la presencia de gravitación, con la única diferencia que ahora el tensor métrico no puede ser reducido a la forma de Minkowski ya que el espacio-tiempo deja de ser euclídeo.

La deducción para obtener (21.2) es de única aplicación cuando el tensor métrico se reduce al de Minkowski, es decir cuando se usan coordenadas cartesianas y el sistema de referencia es inercial. En cualquier otra situación, incluida cuando hay gravitación, el tensor métrico es una función de las coordenadas, por lo que el razonamiento que lleva a (21.1) debe se modificado.

Partimos de una densidad lagrangiana que tiene la dependencia funcional

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}\left(\phi_i, \phi_{i,r}, g^{ir}\right)$$

donde es importante la colocación de los índices. Si suponemos válida la condición (20.2) entonces en nuestra nueva situación tendremos

$$\frac{\partial\left(\sqrt{g}\mathfrak{L}\right)}{\partial x^k} = \frac{\partial\left(\sqrt{g}\mathfrak{L}\right)}{\partial \phi_i}\phi_{i,k} + \frac{\partial\left(\sqrt{g}\mathfrak{L}\right)}{\partial \phi_{i,r}}\phi_{i,rk} + \frac{\partial\left(\sqrt{g}\mathfrak{L}\right)}{\partial g^{ir}} g^{ir}{}_{,k} ,$$

de donde se deriva

ISBN: 978-84-617-1463-6

$$\frac{\partial}{\partial x^r}\left[\frac{\partial\left(\sqrt{g}\mathfrak{L}\right)}{\partial\phi_{i,r}}\phi_{i,k}-\delta_k^r\sqrt{g}\mathfrak{L}\right]+\frac{\partial\left(\sqrt{g}\mathfrak{L}\right)}{\partial g_{ir}}g^{ir}{}_{,k}=0. \tag{26.2}$$

Ahora bien, para el caso que estamos considerando, la ley de conservación de la energía y el momento es la (25.2). Si ahora imponemos la condición de que el tensor de energía-momento T^{ik} sea simétrico, entonces por (52.1) tenemos

$$\sqrt{g}D_rT_k{}^r=\partial_r\left(\sqrt{g}T_k{}^r\right)-\frac{1}{2}\sqrt{g}T^{ir}g_{ir,k}=0. \tag{27.2}$$

De la igualdad válida si el tensor métrico es simétrico

$$g^{ik}g_{kr}=\delta_r^i$$

se deduce al diferenciar

$$dg_{ir}=-g_{ip}g_{rq}dg^{pq}\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial g_{ir}}{\partial x^k}=-g_{ip}g_{rq}\frac{\partial g^{pq}}{\partial x^k}$$

por tanto (27.2) se pone también como

$$\sqrt{g}D_rT_k{}^r=\partial_r\left(\sqrt{g}T_k{}^r\right)+\frac{1}{2}\sqrt{g}T_{ir}g^{ir}{}_{,k}=0$$

y comparando con (26.2) se obtiene

$$\frac{1}{2}\sqrt{g}T_{ir}=\frac{\partial\left(\sqrt{g}\mathfrak{L}\right)}{\partial g^{ir}} \tag{28.2}$$

$$\sqrt{g}T_k{}^r=\frac{\partial\left(\sqrt{g}\mathfrak{L}\right)}{\partial\phi_{i,r}}\phi_{i,k}-\delta_k^r\sqrt{g}\mathfrak{L}. \tag{29.2}$$

con lo que encontramos dos procedimientos como sustitución de (21.2) para calcular el tensor de energía-momento de un campo. Especialmente interesante es (28.2) pues nos asegura que encontramos un tensor de energía-momento simétrico, lo que no tenemos asegurado con la segunda de las expresiones. Debemos de insistir que las fórmulas (28.2) y (29.2) son válidas en general, haya o no campo gravitatorio, o sea el tensor métrico que aparece en (28.2) y (29.2) puede corresponder a un espacio euclídeo o a un espacio de Riemann.

No obstante lo dicho con anterioridad, (22.2) es aplicable al propio campo gravitatorio ya que en este caso la densidad lagrangiana es función exclusivamente del tensor métrico y de sus primeras derivadas. Entonces si $\mathfrak{L}$ es la densidad lagrangiana del campo gravitatorio encontramos para el correspondiente tensor energía-momento

$$t_k{}^r = \frac{\partial\left(\sqrt{g}\mathfrak{L}\right)}{\partial g_{pq,r}} g_{pq,k} - \delta_k^r \sqrt{g}\mathfrak{L}$$

que no es un tensor frente a transformaciones generales de coordenadas.

La ecuación (28.2) por la que se puede obtener el tensor energía-momento del campo se puede generalizar al caso en que la densidad lagrangiana dependa también de las primeras derivadas del tensor métrico, entonces siguiendo un procedimiento similar al anterior se llega a

$$\frac{1}{2}\sqrt{g}T_{ir} = \frac{\partial\left(\sqrt{g}\mathfrak{L}\right)}{\partial g^{ir}} - \frac{\partial}{\partial x^q}\left[\frac{\partial\left(\sqrt{g}\,\mathfrak{L}\right)}{\partial g^{ir}_{,q}}\right].$$

13.2 Representación de grupo

Sea un conjunto $G = \{a, b, c, \ldots\}$ donde se ha definido una ley de composición interna que posee las propiedades de grupo, es decir tiene las propiedades: asociativa, elemento neutro e inverso.

Decimos que se ha definido una representación del grupo G si a cada uno de sus elementos le asociamos unas cantidades A^{ik}_{pq} (que para concretar suponemos de cuarto orden)

$$\forall\, a \in G \to A^{ik}_{pq}(a) \in T,$$

de tal forma que si

$$c = a \cdot b \Rightarrow A^{ik}_{pq}(c) = A^{ik}_{mn}(b) \cdot A^{mn}_{pq}(c),$$

donde se aplica el criterio de sumación de Einstein. Los índices varían de 1 a 4 (si el espacio-tiempo es tetradimensional), es decir que la representación que hemos elegido, o sea la de cuarto orden, tiene 256 $(= 4\times4\times4\times4)$ valores asociados a cada elemento del grupo. Al elemento neutro e en esta representación le corresponde

$$A^{ik}_{pq}(e) = \delta^i_p\,\delta^k_q,$$

entonces el conjunto T formado por las cantidades A^{ik}_{pq} tiene estructura de grupo.

Supongamos que cada elemento del conjunto G viene definido por n parámetros ε^r y lo mismo ocurrirá con los elementos de su representación. Llamamos generadores de grupo a las cantidades

$$\left(X_r\right)^{ik}_{pq} = \left[\frac{\partial A^{ik}_{pq}\left(\varepsilon^r\right)}{\partial \varepsilon^r}\right]_{\varepsilon^r=0} \tag{30.2}$$

ISBN: 978-84-617-1463-6

entonces la representación que corresponde a un variación infinitesimal de los parámetros $\delta\varepsilon^r$ es tal que

$$A^{ik}_{pq}\left(\delta\varepsilon^r\right) = \delta^i_p\delta^k_q + \left(X^r\right)^{ik}_{pq}\delta\varepsilon^r. \tag{31.2}$$

El producto de dos elementos de grupo en la representación que tengan parámetros $\delta\varepsilon^r$ y $\delta\varepsilon'^r$ es

$$A^{ik}_{pq}\left(\delta\varepsilon^r\right)\cdot A^{pq}_{mn}\left(\delta\varepsilon'^r\right) = \delta^i_m\,\delta^k_n + \left(X_r\right)^{ik}_{mn}\left(\delta\varepsilon^r + \delta\varepsilon'^r\right) =$$
$$= A^{ik}_{mn}\left(\delta\varepsilon^r + \delta\varepsilon'^r\right).$$

Tomemos como ejemplo las traslaciones espacio-temporales de las coordenadas, las cuales tienen estructura de grupo y se caracterizan por cuatro parámetros

$$x'^i = x^i + \delta\varepsilon^i$$

estas transformaciones admiten una representación de orden dos (o bien una representación matricial) tal que

$$x'^i = A^i_k\left(\delta\varepsilon^i\right)x^k = \delta^i_k x^k + \left(X_r\right)^i_k x^k\delta\varepsilon^r$$

lo que significa que los generadores del grupo de las traslaciones espacio-temporales vienen dados por

$$\left(X_r\right)^i_k x^k = \delta^i_r. \tag{32.2}$$

Veamos a continuación el grupo contínuo de las rotaciones tridimensionales. Una rotación cualquiera se puede descomponer en tres rotaciones respecto a cada uno de los ejes coordenados. Por tanto una representación R^k_i del grupo de las rotaciones depende de tres parámetros γ^r que son los ángulos de cada una de las rotaciones

$$R^k_i = R^k_i\left(\gamma^r\right).$$

El grupo de las rotaciones tridimensionales forman un grupo del tipo SO(3), indicando con ello que su representación está formada por matrices ortogonales de orden 3

$$R^k_i\tilde{R}^i_p = \sum_i R^k_i R^p_i = \delta^k_p$$

donde $\tilde{R}^i_p$ es la matriz traspuesta; por la relación anterior el determinante de R^k_i es la unidad.

Calculemos los generadores del grupo; para ello tengamos en cuenta que una rotación se descompone en tres rotaciones, tal que

$$R_i^k\left(\gamma^r\right)=R_p^k\left(\gamma^1\right)R_q^p\left(\gamma^2\right)R_i^q\left(\gamma^3\right)$$

el primer factor se refiere a la rotación alrededor del eje x y es dado por la relación

$$\begin{aligned}t'&=t\\x'&=x\\y'&=y\cos\gamma^1-z\sin\gamma^1\\z'&=y\sin\gamma^1+z\cos\gamma^1\end{aligned}$$

de donde se obtiene por derivación respecto a γ^1 el generador del subgrupo de las rotaciones alrededor del eje x, que en forma matricial es

$$X_1=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

Y de igual manera se obtienen los otros dos generadores de grupo

$$X_2=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}\qquad X_3=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

14.2 Teorema de Noether

Hemos comprobado en 12.2 que si la densidad lagrangiana es invariante frente a traslaciones espacio-temporales debe conservarse el tensor energía-momento, es decir se conserva la energía y el momento lineal del campo. La invariancia frente a las traslaciones es una simetría, entendida como una transformación que deja inalterable las ecuaciones de campo. Cabe suponer una relación entre las simetrías del campo (en el sentido dado anteriormente) y las magnitudes conservadas. Este teorema, que desarrollamos más adelante, recibe el nombre de teorema de Noether.

Vamos a considerar un conjunto de transformaciones de coordenadas que forman un grupo contínuo y tiene una representación formada por las cantidades A_k^i de las que se derivan los generadores infinitesimales de grupo $\left(X_r\right)_k^i$, de tal forma que la representación de un elemento del grupo correspondiente a un valor infinitesimal $\delta\varepsilon^r$ de los parámetros del grupo es

$$A_k^i\left(\delta\varepsilon^r\right)=\delta_k^i+\left(X_r\right)_k^i\delta\varepsilon^r.$$

ISBN: 978-84-617-1463-6

Las coordenadas espacio-temporales se transforman por la aplicación de esta transformación de grupo según la ley

$$x'^{i} = A^{i}_{k} x^{k} = x^{i} + \left(X_{r}\right)^{i}_{k} \delta\varepsilon^{r} x^{k} \quad \Rightarrow \quad \delta x^{i} = \left(X_{r}\right)^{i}_{k} \delta\varepsilon^{r} x^{k} . \tag{33.2}$$

Los potenciales de campo se transforma por la ley habitual frente a cambios de coordenadas. Si el potencial es un tetravector contravariante tendremos

$$\phi'^{i} = \frac{\partial x'^{i}}{\partial x^{p}} \phi^{p} = \left[\delta^{i}_{p} + \left(X_{r}\right)^{i}_{p} \delta\varepsilon^{r} \right] \phi^{p} = \phi^{i} + \left(X_{r}\right)^{i}_{p} \delta\varepsilon^{r} \phi^{p}$$

$$\delta\phi^{i} = \left(X_{r}\right)^{i}_{p} \delta\varepsilon^{r} \phi^{p} ,$$

si se trata de un tetravector covariante

$$\delta\phi_{i} = -\left(X_{r}\right)^{p}_{i} \delta\varepsilon^{r} \phi_{p} , \tag{34.2}$$

y si el potencial fuese un tensor (por ejemplo, de segundo orden) tenemos

$$\phi'^{ik} = \frac{\partial x'^{i}}{\partial x^{p}} \frac{\partial x'^{k}}{\partial x^{q}} \phi^{pq} = \left\{ \delta^{i}_{p} \delta^{k}_{q} + \left[\left(X_{r}\right)^{i}_{p} \delta^{k}_{q} + \left(X_{r}\right)^{k}_{q} \delta^{i}_{p} \right] \delta\varepsilon^{r} \right\} \phi^{pq}$$

$$\delta\phi^{ik} = \left[\left(X_{r}\right)^{i}_{p} \delta^{k}_{q} + \left(X_{r}\right)^{k}_{q} \delta^{i}_{p} \right] \delta\varepsilon^{r} \phi^{pq} .$$

Vamos a concretar nuestro razonamiento para un campo cuyo potencial sea un tetravector y por tanto su densidad lagrangiana sea $\mathfrak{L}\left(\phi_{i}, \phi_{i,k}, x^{i}\right)$. Exigimos que la transformación de grupo deje invariante a la densidad lagrangiana del campo. A esta propiedad se le llama invariancia de forma y puede ser expresada por

$$\mathfrak{L}'\left(\phi'_{i}, \phi'_{i,k}, x'^{i}\right) = \mathfrak{L}\left[\phi'_{i}, \phi'_{i,k}, x'^{i}\right]$$

donde el corchete [...] significa que en la expresión de $\mathfrak{L}$ se reemplaza $\phi_{i}, \phi_{i,k}, x^{i}$ por $\phi'_{i}, \phi'_{i,k}, x'^{i}$ respectivamente.

Por último exigimos que frente a las transformaciones de grupo consideradas la acción del campo permanezca también invariable, es decir

$$\int_{\Omega'} \mathfrak{L}' d\Omega' = \int_{\Omega} \mathfrak{L} d\Omega ,$$

a lo que llamamos invariancia de escala. En general esta propiedad no se cumple para cualquier transformación de coordenadas.

Bajo las condiciones establecidas anteriormente ya se puede demostrar el teorema de Noether. Por la invariancia de forma, la invariancia de escala se pone

$$\int_{\Omega'} \mathfrak{L}\left[\phi'_{i}, \phi'_{i,k}, x'^{i}\right] d\Omega' = \int_{\Omega} \mathfrak{L}\left(\phi_{i}, \phi_{i,k}, x^{i}\right) d\Omega ,$$

en la primera integral las coordenadas x'^i son variables mudas de integración y por ello la podemos sustituir por x^i. Sin embargo, el dominio de integración Ω' sigue teniendo un valor diferente a Ω.

$$\int_{\Omega'} \mathfrak{L}\left[\phi'_i, \phi'_{i,k}, x^i\right] d\Omega = \int_{\Omega} \mathfrak{L}\left(\phi_i, \phi_{i,k}, x^i\right) d\Omega. \tag{35.2}$$

Desarrollando la densidad lagrangiana se encuenta

$$\mathfrak{L}\left[\phi'_i\left(x^k\right), \phi'_{i,k}\left(x^k\right), x^i\right] = \mathfrak{L}\left[\phi_i + \bar{\delta}\phi_i, \phi_{i,k} + \bar{\delta}\phi_{i,k}, x^i\right] =$$
$$= \mathfrak{L}\left[\phi_i, \phi_{i,k}, x^i\right] + \bar{\delta}\mathfrak{L},$$

donde la raya sobre el símbolo de la variación significa el cambio experimentado por la variación del potencial y no por la variación de las coordenadas, es decir

$$\bar{\delta}\phi_i = \phi'_i\left(x^k\right) - \phi_i\left(x^k\right),$$

donde

$$\phi'_i\left(x^k\right) = \phi'_i\left(x'^k\left(x^k\right)\right) \neq \phi'_i\left[x^k\right].$$

(35.2) queda

$$\int_{\Omega+\delta\Omega} \mathfrak{L}\, d\Omega + \int_{\Omega+\delta\Omega} \bar{\delta}\mathfrak{L}\, d\Omega = \int_{\Omega} \mathfrak{L}\, d\Omega. \tag{36.2}$$

Si observamos la figura 1.2 encontramos que

$$\int_{\delta\Omega} \mathfrak{L}\, d\Omega = \int_{\Sigma} \mathfrak{L}\, \delta x^k dS_k,$$

donde Σ es la hispersuperficie que engloba al tetravolumen Ω, δx^k es el desplazamiento que ha experimentado cada punto de la hipersuperficie a

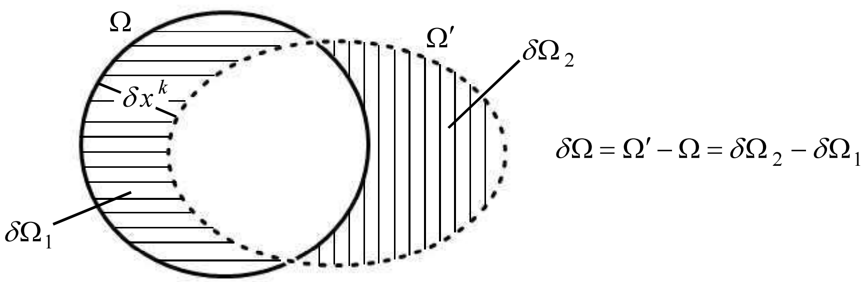

Figura 1.2

ISBN: 978-84-617-1463-6

consecuencia de la transformación y dS_k es el elemento de hipersuperficie. Ahora utilizando el teorema de Gauss se encuentra

$$\int_{\Sigma} \mathfrak{L}\,\delta x^k dS_k = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\mathfrak{L}\,\delta x^k\right) d\Omega.$$

Despreciando términos de segundo orden se tiene

$$\int_{\Omega+\delta\Omega} \bar{\delta}\,\mathfrak{L}\,d\Omega = \int_{\Omega} \bar{\delta}\,\mathfrak{L}\,d\Omega\,.$$

Aplicando los dos últimos resultados en (36.2) se llega a

$$\int_{\Omega}\left[\bar{\delta}\,\mathfrak{L} + \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\mathfrak{L}\,\delta x^k\right)\right] d\Omega = 0. \qquad (37.2)$$

Desarrollando la densidad lagrangiana

$$\mathfrak{L}\left[\phi_i + \bar{\delta}\phi_i, \phi_{i,k} + \bar{\delta}\phi_{i,k}, x^i\right] = \mathfrak{L} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \phi_i}\bar{\delta}\phi_i + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \phi_{i,k}}\bar{\delta}\phi_{i,k}\,,$$

entonces

$$\bar{\delta}\,\mathfrak{L} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \phi_i}\bar{\delta}\phi_i + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \phi_{i,k}}\bar{\delta}\phi_{i,k} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \phi_i}\bar{\delta}\phi_i + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \phi_{i,k}}\frac{\partial}{\partial x^k}\bar{\delta}\phi_i\,,$$

como la variación $\bar{\delta}$ está definida en un punto fijo, conmuta con la derivación de las coordenadas. Ahora utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange se encuentra que

$$\bar{\delta}\,\mathfrak{L} = \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \phi_{i,k}}\bar{\delta}\phi_i\right)$$

que sustituyendo en (37.2) da

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x^k}\left[\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \phi_{i,k}}\bar{\delta}\phi_i + \mathfrak{L}\,\delta x^k\right] d\Omega = 0. \qquad (38.2)$$

Como hemos mostrado antes, existen dos tipos de variaciones

$$\delta\phi_i = \phi_i'\left(x'^r\right) - \phi_i\left(x^r\right)$$
$$\bar{\delta}\phi_i = \phi_i'\left[x^r\right] - \phi_i\left(x^r\right),$$

hay que observar que en la primera definición los potenciales en uno y otro sistema de coordenadas están calculados para el mismo punto (y por tanto tendrán coordenadas diferentes), lo que no ocurre en la segunda definicion, donde la diferencia es calculada para las mismas coordenadas que no representan al mismo punto. Ambas variaciones están relacionadas entre sí

$$\delta\phi_i=\phi'_i\left(x^k+\delta x^k\right)-\phi_i\left(x^k\right)=\phi'_i\left[x^k\right]+\frac{\partial\phi'_i}{\partial x^m}\delta x^m-\phi_i\left(x^k\right)=$$
$$=\bar{\delta}\phi_i+\frac{\partial\phi'_i}{\partial x^m}\delta x^m\approx\bar{\delta}\phi_i+\frac{\partial\phi_i}{\partial x^m}\delta x^m,$$

en el último paso hemos tenido en cuenta que las diferencias entre los potenciales en uno y otro sistema es infinitesimal. De lo anterior resulta

$$\bar{\delta}\phi_i=\delta\phi_i-\frac{\partial\phi_i}{\partial x^m}\delta x^m.$$

Teniendo en cuenta (33.2) y (32.2) nos queda

$$\bar{\delta}\phi_i=-\left(X_r\right)_i^p\delta\varepsilon^r\phi_p-\phi_{i,m}\left(X_r\right)_q^m\delta\varepsilon^r x^q,$$

insertando esta expresión en (37.2) y teniendo en cuenta que $\delta\varepsilon^r$ es una cantidad arbitraria queda

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left[-\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\phi_{i,k}}\left(X_r\right)_i^p\phi_p-\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\phi_{i,k}}\phi_{i,m}\left(X_r\right)_q^m x^q+\mathfrak{L}\left(X_r\right)_p^k x^p\right]=0,$$

que corresponde a una ecuación de continuidad de una magnitud $L^k{}_r$ que recibe el nombre de corriente conservativa y que se define por

$$L^k{}_r=\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\phi_{i,k}}\left(X_r\right)_i^p\phi_p+\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\phi_{i,k}}\phi_{i,m}\left(X_r\right)_q^m x^q-\mathfrak{L}\left(X_r\right)_p^k x^p, \qquad (39.2)$$

que lleva asociada la conservación de las magnitudes $L^0{}_i$ que tienen el nombre de cargas de Noether.

Si a la corriente conservativa (39.2) le añadimos un término de divergencia nula, volvemos a encontrar otra corriente $L'^k{}_r$ que sigue cumpliendo la ley de conservación. En efecto, si definimos

$$L'^k{}_r=L^k{}_r+\frac{\partial f^{p}{}_r{}^k}{\partial x^p}$$

con la condición de que $f^{p}{}_r{}^{k}=-f^{k}{}_r{}^{p}$. Entonces se encuentra que

$$\frac{\partial^2 f^{p}{}_r{}^k}{\partial x^p\partial x^k}=0\quad\rightarrow\quad\frac{\partial L^k{}_r}{\partial x^k}=0\Rightarrow\frac{\partial L'^k{}_r}{\partial x^k}=0$$

como queríamos demostrar. Pero hay más, las cargas de Noether derivadas de la anterior ley de conservación no se ven alteradas por el anterior cambio de la corriente conservativa, en efecto las nuevas cargas

$$Q'_\alpha=\int L'^0{}_\alpha dV=Q_\alpha+\int\frac{\partial f^{p}{}_\alpha{}^0}{\partial x^p}dV=Q_\alpha+\int\frac{\partial f^{\beta}{}_\alpha{}^0}{\partial x^\beta}dV$$

ISBN: 978-84-617-1463-6

ya que por la propiedad de antisimetría $f^{0}{}_{\alpha}{}^{0} = 0$. Finalmente aplicando el teorema de Gauss se encuentra que las cargas conservadas son iguales con independencia de cual corriente conservativa se deriven.

Vamos a considerar ahora una nueva transformación continua de grupo pero que sólo afecta a los potenciales, dejando inalterable a las coordenadas. Consideramos que esta transformación viene caracterizada por los parámetros γ^r y que los generadores de grupo son $\left(Y_r\right)_i^k$ (donde de nuevo nos limitamos a campos con potenciales vectoriales), tal que la representación del grupo correspondiente a unos valores infinitesimales de los parámetros es

$$B_i^p = \delta_i^p + \left(Y_r\right)_i^p \delta\gamma^r$$

por tanto los potenciales se transforman según la ley

$$\phi_i' = B\left(\delta\gamma^r\right)_i^p \phi_p = \phi_i + \left(Y_r\right)_i^p \delta\gamma^r \phi_p \quad \Rightarrow \quad \delta\phi_i = \left(Y_r\right)_i^p \delta\gamma^r \phi_p .$$

Volvemos a suponer que se cumplen todas las condiciones ya expuestas del teorema de Noether, entonces seguirá siendo válida la ecuación (38.2) de donde se deriva la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left[\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \phi_{i,k}}\left(Y_r\right)_i^p \phi_p\right] = 0$$

donde ahora las variaciones δ y $\overline{\delta}$ son iguales ya que no varían las coordenadas. Ahora obtenemos una nueva corriente conservativa

$$J^k{}_r = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \phi_{i,k}}\left(Y_r\right)_i^p \phi_p$$

que origina la conservación de las cargas de Noether J_r^0.

15.2 Conservación del tensor energía-momento

Cuando tiene lugar una traslación de las coordenadas espacio-temporales los potenciales no varían, ya sean escalares, vectores o tensores de cualquier orden, puesto que en este caso la matriz de la transformación de las coordenadas es la unidad. Para estas traslaciones la densidad lagrangiana permanece invariable siempre y cuando no dependen explícitamente de las coordenadas como de hecho suponemos. Además, la acción tampoco varía con esta transformación puesto que no varía el volumen tetradimensional de integración, lo que nos viene a decir que se cumplen las condiciones exigidas por el teorema de Noether, por tanto debe de existir una corriente conservativa.

En una traslación espacio-temporal se cumple (32.2), la correspondiente corriente conservativa se deriva de (39.2)

$$T^{k}_{\ r}=\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\phi_{i,k}}\phi_{i,\mathrm{r}}-\delta^{k}_{r}\mathfrak{L},$$

que corresponde al tensor energía-momento ya definido en (21.2); el teorema de Noether afirma, entonces, que este tensor se conserva cuando el campo es simétrico frente a traslaciones de las coordenadas espaciales y del tiempo.

16.2 Conservación del momento angular del campo

Supongamos que se cumplen las condiciones del teorema de Noether para el caso de una rotación tridimensional, lo que siempre ocurre si la densidad lagrangiana no depende explícitamente de las coordenadas espaciales. Démonos cuenta que en una rotación queda inalterado el volumen tetradimensional de integración, lo que unido a la invariancia de forma hacen que la acción sea un invariante. Entonces existirá una corriente conservativa que viene dada por la expresión (39.2) y los generadores del grupo de las rotaciones serán los obtenidos en el epígrafe 13.2.

Observemos que en el caso de rotaciones espaciales, los potenciales cambiarán a no ser que sean escalares, por tanto existirá en general el primer término de (39.2). Esto viene a significar que la corriente conservativa está compuesta de dos partes a las que llamaremos

$$J^{k}_{\ r}=\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\phi_{i,k}}\phi_{i,m}\left(X_{r}\right)^{m}_{q}x^{q}-\mathfrak{L}\left(X_{r}\right)^{k}_{p}x^{p}$$

$$S^{k}_{\ r}=\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\phi_{i,k}}\left(X_{r}\right)^{p}_{i}\phi_{p}.$$

Vamos a considerar la componente J^{0}_{r}

$$J^{0}_{\ r}=\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\phi_{i,0}}\phi_{i,m}\left(X_{r}\right)^{m}_{q}x^{q}$$

donde hemos tenido en cuenta que para rotaciones espaciales

$$\left(X_{r}\right)^{0}_{p}x^{p}=0,$$

entonces

$$J^{0}_{\ r}=\eta^{i}\phi_{i,m}\left(X_{r}\right)^{m}_{q}x^{q}$$

donde hemos usado la densidad de momento conjugado del campo η^{i}. Para el caso en que $r=1$ tenemos

$$J^{0}_{\ 1}=\eta^{i}\phi_{i,2}\left(X_{1}\right)^{2}_{3}x^{3}+\eta^{i}\phi_{i,3}\left(X_{1}\right)^{3}_{2}x^{2}=\eta^{i}\left(\phi_{i,3}x^{2}-\phi_{i,2}x^{3}\right),$$

en notación vectorial tridimensional las componentes covariantes del vector

ISBN: 978-84-617-1463-6

$J^{0}{}_{\alpha}$ quedan

$$\overrightarrow{J^{0\alpha}} = -\sum_i \eta_i \, \mathbf{r} \wedge \nabla \phi_i = -\mathbf{r} \wedge \sum_i \eta^i \, \nabla \phi_i \,, \qquad (39.2)$$

donde suponemos formalmente que las ϕ_i son 4 escalares a los que se le aplica el operador ∇ como si fuera un gradiente.

Definimos la densidad de momento lineal del campo como

$$g^{\alpha} = \frac{1}{c} T^{0\alpha} = -\frac{1}{c} T^{0}{}_{\alpha} = \frac{1}{c} \eta^{i} \phi_{i,\alpha} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{g} = \frac{1}{c} \sum_i \eta^{i} \, \nabla \phi_i \,,$$

la densidad de momento angular del campo es

$$\mathbf{m} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{g} = -\frac{1}{c} \mathbf{r} \wedge \sum_i \eta^{i} \, \nabla \phi_i$$

es decir igual que (39.2), lo que nos dice que $J^{0\alpha}$ son las componentes espaciales del vector densidad de momento angular del campo.

Analicemos ahora la otra parte de la corriente conservativa, calculando la componente

$$S^{0}{}_{1} = -\eta^{2} \phi_3 + \eta^{3} \phi_2 = \eta^{2} \phi^{3} - \eta^{3} \phi^{2}$$

deducimos que

$$\overrightarrow{S^{0\alpha}} = \mathbf{s} = \boldsymbol{\phi} \wedge \boldsymbol{\eta}$$

donde hemos definido el vector $\boldsymbol{\phi} = \left(\phi^{1}, \phi^{2}, \phi^{3} \right)$. A $\mathbf{s}$ le llamamos densidad de momento angular intrínseco o de spin.

Entonces del teorema de Noether se deduce que si el campo es simétrico respecto a rotaciones, la suma de las densidades de momento angular y de spin se conserva.

17.2 Simetrías gauge globales

Consideremos la densidad lagrangiana de un campo nucleónico

$$\mathfrak{L} = \bar{\Psi} \left(i\hbar \gamma^{k} \partial_{k} - mc \right) \Psi \qquad (40.2)$$

donde Ψ es un biespinor

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix}$$

siendo ψ_p y ψ_n los campos espinoriales del protón y del neutrón.

(40.2) es invariante frente a un cambio global de fase del tipo

$$\Psi' = e^{i\theta/\hbar} \, \Psi$$

donde θ es constante. El generador infinitesimal de la anterior simetría es

$$Y = \frac{i}{\hbar},$$

como para esta simetría continua se cumple los requisitos del teorema de Noether, debe de existir una corriente conservativa dada por

$$S^k = -\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \Psi_{,k}} Y\Psi - -\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \bar{\Psi}_{,k}} Y\bar{\Psi} = \bar{\Psi}\gamma^k \Psi$$

como se deduce de los resultados del epígrafe 14.2. S^k cumple la ley de conservación diferencial

$$\frac{\partial S^k}{\partial x^k} = 0$$

y a su vez una ley de conservación global

$$\frac{d}{dt}\int S^0 dV = 0 \;\Rightarrow\; \frac{d}{dt}\int \Psi^+ \Psi\, dV = 0 \;\Rightarrow\; \frac{d}{dt}\int\left(\psi_p^+\psi_p + \psi_n^+\psi_n\right) dV = 0$$

que no es otra que la conservación del número N de nucleones.

(40.2) también es invariante frente aun cambio global de fase del espinor del protón

$$\Psi' = \exp\left(i\frac{\theta}{\hbar}\frac{1+\tau_3}{2}\right)\Psi \qquad (41.2)$$

donde τ_3 es la matriz de Pauli

$$\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Como el generador infinitesimal de la simetría es

$$Y = \frac{i}{\hbar}\frac{1+\tau_3}{2}$$

debe de existir la corriente conservativa

$$S^k = -\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \Psi_{,k}} Y\Psi - -\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \bar{\Psi}_{,k}} Y\bar{\Psi} = \bar{\Psi}\gamma^k\left(\frac{1+\tau_3}{2}\right)\Psi = \bar{\psi}_p \gamma^k \psi_p$$

de donde se deriva una ley de conservación diferencial y una global que corresponde a la conservación de la carga eléctrica Q que coincide con el operador número de protones.

Finalmente consideremos otra transformación global de fase definida por

$$\Psi' = \exp\left(i\frac{\boldsymbol{\theta}}{\hbar}\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\right)\Psi$$

siendo $\boldsymbol{\tau}$ las tres matrices de Pauli

ISBN: 978-84-617-1463-6

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \ \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \ \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

El generador infinitesimal del grupo es

$$\mathbf{Y} = \frac{i}{\hbar}\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}$$

por tanto la corriente conservativa es

$$\mathbf{S}^k = \frac{1}{2}\bar{\Psi}\gamma^k \boldsymbol{\tau}\Psi$$

de donde se deriva la constancia del spin isotópico de tercera componente

$$I_3 = \int \frac{1}{2}\Psi^+ \tau_3 \Psi \, dV = \int \left(\frac{1}{2}\psi_p^+ \psi_p - \frac{1}{2}\psi_n^+ \psi_n \right) dV.$$

Por tanto los tres operadores que tienen leyes de conservación derivadas de simetrías gauge globales están relacionadas por

$$Q = \frac{N}{2} + I_3 .$$

18.2 Bibliografía seleccionada

* GOLDSTEIN, H.: *Mecánica clásica*, Reverté, 1988, pp. 659-727.
* PANOFSKY, W. K. H.; Phillips, M.: *Classical Electricity and Magnetism*, Addison-wesley, 1972, pp. 446-456.
* LEECH, J. W.: *Mecánica clásica*, Unión Tipográfica Editorial Hispano Americana, 1968, pp. 132-194.

ISBN: 978-84-617-1463-6

3

Campo electromagnético

1.3 Introducción

El campo electromagnético es un campo vectorial, es decir su potencial de campo viene dado por un tetravector ϕ^i. Por lo deducido en el epígrafe 9.2 la densidad lagrangiana de estos campos deriva de un tensor antisimétrico definido por

$$F_{ik} = \frac{\partial \phi_k}{\partial x^i} - \frac{\partial \phi_i}{\partial x^k},$$

mientras que no se indique lo contrario será de aplicación la relatividad especial con coordenadas cartesianas. Entonces la parte cinética de la lagrangiana (o sea la correspondiente al campo vacío) es dada por

$$\mathfrak{L}_V = -\frac{\varepsilon_0}{4} F_{ip} F^{ip}$$

donde usamos la constante eléctrica con el coeficiente númerico y el signo adecuado para obtener las ecuaciones de campo en la forma habitual.* A la anterior expresión hay que sumarle la densidad lagrangiana de las fuentes. En la formulación ordinaria del campo electromagnético solo existen fuentes externas del campo, es decir cargas eléctricas que aparecen en la teoría como elementos ajenos al campo. Es decir, no existen fuentes internas, o sea, el campo electromagnético no es a su vez fuente del campo.

Por ser el campo electromagnético un campo vectorial, las fuentes de campo tienen que venir dadas por un tetravector j^k, llamado densidad de corriente de carga eléctrica. Entonces la parte de la densidad lagrangiana co-

* ε_0 cabe entenderla como una constante de acomplamiento entre el campo electromagnético y sus fuentes. Démonos cuenta que si no hubiera fuentes ε_0 sería supérflua.

rrespondiente a las fuentes debe ser

$$\mathfrak{L}_f = j^k \phi_k$$

que además de ser un invariante no originará, tras la aplicación de la ecuación de Euler-Lagrange, ni términos dependientes de la variación espacio-temporal de las fuentes, ni términos dependientes de los potenciales (ya que en su caso significaría que hay fuentes internas, lo que hemos descartado). Por lo tanto, la densidad lagrangiana del campo electromagnético es

$$\mathfrak{L} = -\frac{\varepsilon_0}{4} F_{ip} F^{ip} - j^k \phi_k \qquad (1.3)$$

debemos de observar que si postulamos la existencia de fuentes internas del campo, tal como ocurre en la teoría de Mie (ver más adelante), habría que agregar a la anterior densidad lagrangiana términos complementarios.

2.3 Ecuaciones de campo electromagnético

El tetravector del campo electromagnético se descompone en el potencial vector y en el potencial escalar

$$\phi^k = (\phi, c\mathbf{A}). \qquad (2.3)$$

Siendo ϕ y $\mathbf{A}$ los potenciales escalar y vector respectivamente. El tetravector fuente de campo se descompone en la fuente de campo eléctrico (densidad de carga propia ρ_0) y en la fuente de campo magnético (densidad de corriente eléctrica $\mathbf{j}$) de componentes

$$j^k = \frac{1}{c} \rho_0 u^k$$

donde u^k es la tetravelocidad del elemento de volumen de densidad de carga propia ρ_0 medida en el sistema de referencia comóvil con el elemento de volumen cargado. La invariancia de la carga eléctrica se deduce de su ley de continuidad. En efecto, que esta ley sea un invariante relativista, implica que la carga eléctrica también lo es y por tanto también lo sea ρ_0 .

Al aplicar las ecuaciones de Euler-Lagrange a (1.3) encontramos

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \phi_k} = -j^k ,$$

y

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \phi_{k,r}} = -\frac{\varepsilon_0}{2} F^{ip} \frac{\partial F_{ip}}{\partial \phi_{k,r}} = -\frac{\varepsilon_0}{2} F^{ip} \left(\delta_p^k \delta_i^r - \delta_i^k \delta_p^r \right) = \varepsilon_0 F^{kr}$$

de donde se sigue

$$\frac{\partial F^{kr}}{\partial x^r} = -\frac{1}{\varepsilon_0} j^k \tag{3.3}$$

que es el primero grupo de las ecuaciones de Maxwell, que en notación tridimensional son

$$\nabla \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho_0; \qquad \nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 j + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

donde μ_0 es la permeabilidad magnética del vacío y los campos eléctricos y magnéticos (**E** y **B**) derivan de los potenciales según las ecuaciones

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \qquad \mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}.$$

El otro grupo de las ecuaciones de campo se deduce a partir de la definición de tensor de campo eletromagnético

$$\frac{\partial F_{ip}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{pk}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{ki}}{\partial x^p} = 0. \tag{4.3}$$

de donde se derivan las otras dos ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \qquad \nabla \mathbf{B} = 0.$$

3.3 Densidad lagrangiana no covariante

El tensor de campo electromagnético lo podemos poner en función de las intensidades de campo

$$\left(F_{ip}\right) = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -cB_z & cB_y \\ -E_y & cB_z & 0 & -cB_x \\ -E_z & -cB_y & cB_x & 0 \end{pmatrix},$$

de donde se obtiene

$$F^{ip}F_{ip} = 2\left(c^2B^2 - E^2\right),$$

como

$$j^k\phi_k = -\mathbf{j}\cdot\mathbf{A} + \rho\phi$$

donde ahora ρ es la densidad de carga eléctrica en el sistema de referencia respecto al cual el elemento de carga se mueve con velocidad $\mathbf{u}$, que por la ley de transformación del volumen tridimensional tiene la forma

ISBN: 978-84-617-1463-6

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}},$$

por tanto la densidad lagrangiana puesta en función de las intensidades de campo y de los potenciales es

$$\mathfrak{L} = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(E^2 - c^2 B^2\right) + \mathbf{A}\cdot\mathbf{j} - \rho\phi. \tag{5.3}$$

de donde se deducen las ecuaciones de Maxwell.

4.3 Método hamiltoniano

Definimos el tetravector densidad de momento del campo por

$$\eta^i = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{\phi}_i}$$

donde el punto significa derivación respecto a la coordenada x^0. La componente temporal de η^i es

$$\eta^0 = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{\phi}} = 0,$$

mientras que las componentes espaciales son

$$\eta^\alpha = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{\phi}_\alpha} = \varepsilon_0 E^\beta \frac{\partial E^\beta}{-c\partial \dot{A}^\alpha} = \varepsilon_0 E^\alpha \tag{6.3}$$

donde hemos utilizado la densidad lagrangiana (2.3). En notación vectorial tridimensional (6.3) queda

$$\boldsymbol{\eta} = \varepsilon_0 \mathbf{E}.$$

Por la definición de densidad hamiltoniana tenemos para el campo electromagnético

$$\mathfrak{H} = \eta^i \dot{\phi}_i - \mathfrak{L} = \varepsilon_0 \mathbf{E}\left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) - \mathfrak{L} = \varepsilon_0 \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)^2 + \varepsilon_0\left(\nabla\phi\cdot\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) - \mathfrak{L},$$

$\mathfrak{L}$ en ausencia de fuentes (5.3) y en función de los potenciales es

$$\mathfrak{L} = \frac{\varepsilon_0}{2}\left[\left(\nabla\phi\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)^2 + 2\nabla\phi\cdot\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - c^2\left(\nabla\wedge\mathbf{A}\right)^2\right],$$

por lo tanto la densidad hamiltoniana queda

$$\mathfrak{H} = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)^2 - \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\nabla\phi\right)^2 + \frac{\varepsilon_0 c^2}{2}\left(\nabla\wedge\mathbf{A}\right)^2.$$

El método de Hamilton exige que la densidad hamiltoniana aparezca en función de las densidades de momento

$$\mathfrak{H} = \frac{|\boldsymbol{\eta}|^2}{2\varepsilon_0} + \boldsymbol{\eta}\cdot\nabla\phi + \frac{\varepsilon_0 c^2}{2}\left(\nabla\wedge\mathbf{A}\right)^2. \tag{7.3}$$

Si queremos obtener la función hamiltoniana del campo electromagnético tendremos que hacer la integral de volumen de la densidad hamiltoniana

$$H = \int \mathfrak{H}\, dV = \int\left[\frac{|\boldsymbol{\eta}|^2}{2\varepsilon_0} + \boldsymbol{\eta}\cdot\nabla\phi + \frac{\varepsilon_0 c^2}{2}\left(\nabla\wedge\mathbf{A}\right)^2\right]dV,$$

el segundo sumando de la integral se transforma según

$$\int \boldsymbol{\eta}\cdot\nabla\phi\, dV = \varepsilon_0\int\nabla\left(\mathbf{E}\,\phi\right)dV - \varepsilon_0\int\phi\nabla\mathbf{E}\, dV$$

la primera integral del segundo miembro se anula por el teorema de Gauss y la segunda es idénticamente nula para el caso considerado de campo libre de fuentes. Entonces la función de Hamilton del campo electromagnético queda

$$H = \int \mathfrak{H}\, dV = \int\left[\frac{|\boldsymbol{\eta}|^2}{2\varepsilon_0} + \frac{\varepsilon_0 c^2}{2}\left(\nabla\wedge\mathbf{A}\right)^2\right]dV, \tag{8.3}$$

que coincide con el resultado que se obtiene de la teoría electromagnética.

De (7.3), (18.2) y (19.2) obtenemos las ecuaciones canónicas de campo de Hamilton

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_\alpha &= \frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial\eta^\alpha} \\ \dot{\eta}_\alpha &= -\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial\phi^\alpha} + \frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial\phi^\alpha_{,\beta}}\right), \end{aligned} \tag{9.3}$$

donde estamos distinguiendo entre componentes covariantes y contravariantes, aunque solo aparezcan las componentes espaciales de los tetravectores. De la primera de las ecuaciones (9.3) se obtienen dos de las ecuaciones de Maxwell

$$\begin{aligned} &\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \quad\Rightarrow\quad \nabla\wedge\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \\ &\nabla\wedge\mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}. \end{aligned} \tag{10.3}$$

La ecuación $\nabla\mathbf{B} = 0$ se obtiene de la definición de intensidad de campo magnético. Las ecuaciones canónicas de Hamilton no nos permite determinar directamente la primera de las ecuaciones de Maxwell. Para su deduc-

ISBN: 978-84-617-1463-6

ción tenemos que suponer que $\nabla \mathbf{E} = 0$ es una restricción inicial, y para que su validez se mantenga necesitamos demostrar que la anterior ecuación es invariante en el tiempo, en efecto de la segunda de las ecuaciones de (9.3) se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \mathbf{E}) = 0.$$

5.3 Invariancia gauge

Si aplicamos a los potenciales electromagnéticos la siguiente transformación

$$\phi' = \phi + \frac{1}{c}\frac{\partial \psi}{\partial t}$$

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \frac{1}{c}\nabla \psi$$

o bien en notación tetradimensional

$$\phi'_i = \phi_i + \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \qquad (11.3)$$

las ecuaciones de Maxwell permanecen invariantes. A (11.3) se le llama transformación gauge y decimos, por tanto, que las ecuaciones de Maxwell son invariantes frente a transformaciones gauge.

Esto viene a significar que al resolver las ecuaciones de Maxwell encontramos infinitas soluciones para los potenciales, ligadas entre sí por transformaciones gauge. Al objeto de limitar el número posible de soluciones de los potenciales imponemos que los potenciales cumplan la relación

$$\nabla \mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

o en notación tetradimensional

$$\frac{\partial \phi^i}{\partial x^i} = 0 \qquad (12.3)$$

que es llamada condición gauge Lorentz. Su interés reside en que posee las siguientes propiedades: simplifica considerablemente las ecuaciones de Maxwell cuando son expresadas en función de los potenciales; es una condición invariante frente a las transformaciones de Lorentz y siempre existen unos potenciales que cumplan la condición (12.3)

Notemos que al imponer la condición gauge Lorentz a las ecuaciones de Maxwell, éstas seguirán sin tener una solución única, pues si ϕ^i es una solución que cumpla la condición Lorentz, se puede obtener otra solución que también cumpla la misma condición mediante

$$\phi'_i = \phi_i + \frac{\partial \xi}{\partial x^i}$$

siempre y cuando la función ξ cumpla el requisito

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^i \partial x_i} = 0.$$

Por tanto la condición gauge Lorentz no logra que las ecuaciones de Maxwell tengan una solución única, sino que se obtiene una reducida familia de posibles soluciones, tales que todas ellas cumplan la condición gauge Lorentz.

Supongamos un campo libre de fuentes ϕ y $\mathbf{A}$ sean los potenciales soluciones de las ecuaciones de Maxwell que cumplen la condición gauge Lorentz y elegimos la función ξ tal que sea

$$\xi = -\int c\phi dt,$$

entonces por la ecuación (12.3) se obtiene que el potencial escalar transformado es nulo

$$\phi' = \phi - \frac{\partial}{\partial t} = 0.$$

Como la función ξ cumple el requisito

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^i \partial x_i} = 0$$

ya que por la ley de ondas cumple

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^i \partial x_i} = 0$$

entonces los nuevos potenciales que se obtienen de la transformación gauge (12.3) cumplen también la condición gauge Lorentz, pero como ϕ' es nulo entonces

$$\nabla \mathbf{A}' = 0$$

Hallamos que siempre es posible encontrar unas soluciones de las ecuaciones de Maxwell que cumplan las condiciones

$$\nabla \mathbf{A} = 0; \qquad \phi = 0$$

a esta gauge se le llama de Coulomb o de la radiación.

6.3 Tensor energía-momento

Al aplicar la ecuación (21.2) para obtener el tensor energía-momento del campo electromagnético se obtiene

ISBN: 978-84-617-1463-6

$$T_k{}^r = \frac{\partial \mathfrak{L}_V}{\partial \phi_{q,r}} \phi_{q,k} - \delta_k^r \mathfrak{L}_V = -\varepsilon_0 F^{rq} \phi_{q,k} + \delta_k^r \frac{\varepsilon_0}{4} F_{ip} F^{ip}. \qquad (13.3)$$

La anterior expresión no es simétria, no obstante se le puede sumar un término de la forma

$$\frac{\partial \psi^{rp}{}_k}{\partial x^p}$$

que al tener la propiedad

$$\psi^{rp}{}_k = -\psi^{pr}{}_k$$

deja invariante la ley de conservación del tensor energía-momento. Una función tal como la anterior es

$$\psi^{rp}{}_k = \varepsilon_0 F^{rp} \phi_k$$

y al sumar su derivada a (13.3) encontramos un tensor simétrico

$$T_k{}^r = -\varepsilon_0 F^{rq} F_{kq} + \delta_k^r \frac{\varepsilon_0}{4} F_{ip} F^{ip}. \qquad (14.3)$$

Si en vez de (21.2) usamos (28.2) para calcular el tensor energía-momento tendremos que poner la densidad lagrangiana en función del tensor de campo electromagnético puesto exclusivamente en forma covariante, es decir

$$\mathfrak{L}_V = \mathfrak{L}_V\left(\phi_i, \phi_{i,r}, g^{ir}\right) = -\frac{\varepsilon_0}{4} g^{ir} g^{pq} F_{rq} F_{ip}$$

llegándose al mismo resultado (14.3) sin necesidad de añadirle términos para simetrización, como ahora veremos. Nótese que ahora utilizamos un tensor métrico genérico, que puede ser igual o no, al tensor métrico de Minkowski. Al aplicar (28.2) tenemos

$$\frac{1}{2}\sqrt{g}T_{ir} = \frac{\partial\left(\sqrt{g}\mathfrak{L}_V\right)}{\partial g^{ir}} = \frac{\partial\left(\sqrt{g}\right)}{\partial g^{ir}} \mathfrak{L}_V + \sqrt{g} \frac{\partial\left(\mathfrak{L}_V\right)}{\partial g^{ir}}, \qquad (15.3)$$

por lo deducido en el epígrafe (12.1) se tiene

$$\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial g^{ir}} = -\frac{1}{2}\sqrt{g} g_{ir}$$

entonces de (15.3) se deduce directamente (14.3).

Sea una distribución de masas cargadas en el seno de un campo electromagnético, tendremos que el tensor energía-momento total es

$$T_{(total)k}{}^r = T_{(m)k}{}^r + T_{(e)k}{}^r$$

suma del correspondiente tensor de la materia $T_{(m)k}{}^{r}$ y el electromagnético $T_{(e)k}{}^{r}$. Por otra parte, la ecuación de movimiento es dada por

$$f_k = \frac{\partial T_{(m)k}{}^{r}}{\partial x^r}$$

según se desprende de la dinámica relativista de los medios continuos, siendo f_k la fuerza por unidad de volumen en notación covariante. Como es de aplicación el teorema de conservación de la energía y el momento para el conjunto de materia y campo

$$\frac{\partial T_{(total)k}{}^{r}}{\partial x^r} = 0$$

entonces se obtiene

$$f_k = -\frac{\partial T_{(e)k}{}^{r}}{\partial x^r} \tag{16.3}$$

que es la generalización de la fuerza de Lorentz.

Al aplicar (16.3) utilizando (14.3) se encuentra

$$\frac{\partial T_{(e)k}{}^{r}}{\partial x^r} = -\varepsilon_0 \frac{\partial F^{rp}}{\partial x^r} F_{kp}$$

y por (3.3)

$$f_k = j^p F_{kp}$$

que es el resultado que íbamos buscando.

Como la densidad lagrangiana del campo electromagnético libre no depende explícitamente de las coordenadas espacio-temporales, existe una ley de conservación del tensor energía-momento que viene expresada por la ecuación (25.2) o bien si se usan unas coordenadas tal que el tensor métrico venga dado por el tensor de Minkowski, la ecuación de conservación se podrá poner como (22.2).

La densidad de energía del campo electromagnético viene dada por las componentes 0,0 del tensor de energía-momento

$$T_0{}^0 = W = -\varepsilon_0 F^{0q} F_{0q} + \frac{\varepsilon_0}{4} F_{ip} F^{ip} = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 + \frac{c^2 \varepsilon_0}{2} B^2 .$$

En cuanto a la densidad de momento lineal del campo está relacionada con la componente $0,\alpha$ del tensor energía-momento, de tal forma que

$$g^\alpha = \frac{1}{c} T^{0\alpha} = -\frac{1}{c} T^0{}_\alpha = \varepsilon_0 F^{oq} F_{\alpha q} ,$$

ISBN: 978-84-617-1463-6

por ejemplo para la componente x se tendrá

$$g_x = -\frac{1}{c} T_1^{\ 0} = \varepsilon_0 \left(E_y B_z - E_z B_y \right)$$

poniendo la densidad de momento en notación vectorial tridimensional

$$\mathbf{g} = \varepsilon_0 \mathbf{E} \wedge \mathbf{B}.$$

De la ecuación de continuidad se obtiene

$$\frac{\partial T^{0r}}{\partial x^r} = \frac{\partial T^{00}}{\partial x^0} + \frac{\partial T^{0\alpha}}{\partial x^\alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial \left(c T^{0\alpha} \right)}{\partial x^\alpha} = 0$$

que representa la ecuación de continuidad de la energía. Por tanto $cT^{0\alpha}$ es la densidad de corriente de la energía, o sea, la energía que fluye por unidad de tiempo y por unidad de área, lo que en electromagnetismo es llamado el vector de Poynting **N** que por lo visto antes se relaciona con la densidad de momento por

$$\mathbf{N} = c^2 \mathbf{g}.$$

7.3 Indeterminación de la densidad lagrangiana

Ya se dijo en 6.2 que la densidad lagrangiana de un campo se encuentra indeterminada, en el sentido de que si $\mathfrak{L}$ es la lagrangiana del campo

$$\mathfrak{L}' = \mathfrak{L} + \frac{\partial}{\partial x^k} F^k \left(\phi_i, x^i \right),$$

también es una densidad lagrangiana que da las mismas ecuaciones de campo.

La parte cinética de la lagrangiana del campo electromagnético se puede poner en función de las derivadas del tetrapotencial

$$\mathfrak{L}_V = -\frac{\varepsilon_0}{4} F_{ip} F^{ip} = -\frac{\varepsilon_0}{4} \left(\phi_{p,i} - \phi_{i,p} \right) \left(\phi^{p,i} - \phi^{i,p} \right) =$$

$$= -\frac{\varepsilon_0}{4} \left(\phi_{p,i} \phi^{p,i} - \phi_{p,i} \phi^{i,p} - \phi_{i,p} \phi^{p,i} + \phi_{i,p} \phi^{i,p} \right),$$

o simplificando

$$\mathfrak{L}_V = -\frac{\varepsilon_0}{2} \left(\phi_{p,i} \phi^{p,i} - \phi_{p,i} \phi^{i,p} \right),$$

el último sumando se puede poner como

$$\phi_{p,i} \phi^{i,p} = \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\phi_p \frac{\partial \phi^i}{\partial x^p} \right) - \phi_p \frac{\partial}{\partial x^p} \left(\frac{\partial \phi^i}{\partial x^i} \right)$$

si ahora imponemos la condición gauge Lorentz, entonces la expresión anterior queda reducida a una cuadridivergencia, que como ya hemos dicho, no influye en la obtención de las ecuaciones de campo; por tanto la nueva densidad lagrangiana que encontramos es

$$\mathfrak{L}_V = -\frac{\varepsilon_0}{2}\phi_{p,i}\,\phi^{p,i}.$$

8.3 La teoría de Mie

En el marco de la visión electromagnética del Universo, desarrolló Mie a principios del siglo XX una moficiación de la teoría de Maxwell con la cual pretendía explicar la materia (y también la gravedad) como una expresión del campo electromagnético. En esencia la teoría consitía en agregar términos no lineales a la densidad lagrangiana electromagnética, lo que iba a permitir obtener soluciones con simetría esférica y no singulares que debían ser interpretada como partículas.

Al objeto de aclarar la sugerente teoría de Mie vamos a aplicarla a una teoría de campo escalar, que la vamos a construir como una generalización de la teoría clásica de la gravitación de Newton.

La teoría newtoniana no es compatible con la relatividad a consecuencia de que la propagación de las interacciones es instantánea. Pero si modificamos la teoría para establecer que la interacción gravitatoria viaje con la misma velocidad que la luz en el vacío, podemos encontrar una teoría de la gravitación, generalización de la newtoniana, que además es plenamente relativista, esto ocurre si usamos la densidad lagrangiana $\mathfrak{L} = \phi_{,p}\,\phi^{,p}$, con ϕ el escalar potencial gravitatorio.

Partimos de la densidad lagrangiana

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{8\pi G}\phi_{,p}\,\phi^{,p} - g(\phi) \tag{17.3}$$

donde G es la constante de gravitación universal. Al aplicar las ecuaciones de Euler-Lagrange se encuentran las ecuaciones de campo

$$\phi^{,p}_{,p} = -4\pi G g'(\phi),$$

en el caso de campo estático reencontramos la ley de Poisson, donde la densidad de masa es $g'(\phi)$

$$\nabla^2\phi = 4\pi G g'(\phi). \tag{18.3}$$

Notemos que $g'(\phi)$ representa la densidad de masa gravitatoria, es decir la masa que crea el campo, que tenemos que distinguirla de la densidad de masa inercial o masa que nos da la energía global del sistema de partículas.

Se trata de obtener una solución con simetría esférica de la ecuación (18.3) que sea no singular en todo punto y en especial en $r = 0$ y $r = \infty$. La ecua-

ISBN: 978-84-617-1463-6

ción (18.3) en coordenadas esféricas y suponiendo simetría esférica es

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\phi}{dr}\right)=4\pi G g'(\phi), \tag{19.3}$$

una posible solución como la buscada es

$$\phi=-\frac{e_1}{r}-\frac{e_2}{r^2}-\frac{e_3}{r^3}-\ldots.. \tag{20.3}$$

que es claramente no singular en $r=\infty$ y que con una adecuada elección de los coeficientes y de sus signos también será no singular en el origen. La ecuación (20.3) representa partículas de materia dotadas de masas inercial y gravitatoria.

De momento la función $g(\phi)$ ha sido tomada arbitrariamente, pero la solución tipo (20.3) obliga a que $g'(\phi)$ tenga una dependencia de r^{-4} o de mayor orden, basta para comprobarlo aplicar (19.3) en (14.3); o sea, $g(\phi)$ debe ser al menos de quinto orden con respecto al potencial.

La masa gravitatoria de la partícula representada por (19.3) se calcula mediante

$$m_g=\int\rho dV=\int g'(\phi)dV=4\pi\int_0^\infty r^2 g'(\phi)dr, \tag{21.3}$$

y teniendo presente (18.3)

$$m_g=\frac{1}{G}\int_0^\infty\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\phi}{dr}\right)dr=\frac{1}{G}\left(r^2\frac{d\phi}{dr}\right)\Bigg|_0^\infty.$$

La solución (20.3) es regular en $r=0$, es decir tiene un valor finito, por tanto $d\phi/dr$ tendrá también un valor no singular en $r=0$, por tanto

$$m_g=\frac{e_1}{G}, \tag{22.3}$$

donde el coeficiente e_1 es arbitrario, pudiendo existir por tanto partículas de cualquier masa.

De la ecuación (17.3) se obtiene el tensor energía-momento

$$T_k{}^r=\frac{1}{4\pi G}\phi^{,r}\phi_{,k}-\frac{1}{8\pi G}\delta_k^r\,\phi_{,p}\phi^{,p}, \tag{23.3}$$

donde las componentes 0,0 representan la densidad de energía *W*, que para el caso estático es

$$W=\frac{1}{8\pi G}(\nabla\phi)^2.$$

Si lo que calculamos es la energía de una partícula tendremos

$$W = \frac{1}{8\pi G}\left(\nabla\phi\right)^2 + g\left(\phi\right). \tag{24.3}$$

Al calcular (20.3) hemos considerado que no existe otra fuente de campo, lo cual es admisible si se tiene en cuenta que las partículas, debido a su ínfimo tamaño, están suficientemente lejos unas de otras.

Si ahora consideramos un campo y en su seno partículas como las representadas por (20.3) podemos a partir de (23.3) calcular la fuerza que el campo ejerce sobre estas partículas

$$f_k = -\frac{\partial T_k{}^r}{\partial x^r} = -g'\left(\phi\right)\phi_{,k}\,,$$

y en notación vectorial tridimensional

$$\mathbf{f} = g'\left(\phi\right)\mathbf{E},$$

siendo $\mathbf{f}$ la fuerza por unidad de volumen, y $\mathbf{E}$ es la intensidad de campo gravitatorio definido como es habitual por $\mathbf{E} = -\nabla\phi$.

La masa inercial de las partículas (20.3) se calcula a partir de su energía (24.3)

$$m_i = \frac{1}{c^2}\int\left[\frac{1}{8\pi G}\left(\nabla\phi\right)^2 + g\left(\phi\right)\right]dV,$$

como

$$\int\left(\nabla\phi\right)^2 dV = \int\nabla\left(\phi\nabla\phi\right)dV - \int\phi\nabla^2\phi dV = -4\pi G\int\phi g'\left(\phi\right)dV,$$

entonces

$$m_i = \frac{1}{c^2}\int\left[-\frac{1}{2}\phi g'\left(\phi\right) + g\left(\phi\right)\right]dV. \tag{25.3}$$

Con las anteriores consideraciones especulativas poco más se puede avanzar, especialmente por la imposibilidad de explicar la identidad entre la masa gravitatoria y la masa inercial, ya que la igualdad entre (25.3) y (22.3) no es compatible con la ecuación (19.3).

Un razonamiento análogo se puede hacer para el electromagnetismo. Al término cinético de la densidad lagrangiana le añadimos un término no lineal que será el que permita explicar la existencia de partículas cargadas

$$\mathfrak{L} = -\frac{\varepsilon_0}{4}F_{ip}F^{ip} - g\left(\phi^p\phi_p\right)$$

donde g es una función invariante que depende del módulo del tetrapotencial

$$\left|\phi\right| = \sqrt{\phi^p\phi_p}\,.$$

ISBN: 978-84-617-1463-6

La ecuación de campo (3.3) permanece válida, excepto que ahora la tetradensidad de corriente es

$$j^k = -\frac{\phi^k}{|\phi|} g'(|\phi|)$$

donde la prima significa derivación respecto al módulo del tetrapotencial.

La ecuación de campo respecto al tetrapotencial es

$$\frac{\partial^2 \phi^k}{\partial x^r \partial x_r} = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\phi^k}{|\phi|} g'(|\phi|). \tag{26.3}$$

Si nos limitamos al caso estático entonces (26.3) se reduce a

$$\nabla^2 \phi = -\frac{1}{\varepsilon_0} g'(\phi) \tag{27.3}$$

donde ϕ es el potencial eléctrico y hemos usado la condición gauge Lorentz en orden a simplificar la expresión. Como se ve por (27.3) la densidad de carga eléctrica es

$$\rho = g'(\phi).$$

A continuación seguimos el mismo procedimiento que el realizado para el caso del campo escalar. Es decir, buscamos soluciones estáticas con simetría esférica, encontrando como posible solución del potencial (20.3).

La carga eléctrica de las partículas representadas por (15.3) es calculada por

$$q = \int \rho dV = \int g'(\phi) dV = 4\pi \int_0^\infty r^2 g'(\phi) dr,$$

y teniendo en cuenta la ecuación equivalente a la (19.3) queda para la carga eléctrica de la partícula

$$q = -\varepsilon_0 e_1.$$

Para calcular la masa peviamente calculamos la energía total a partir del tensor energía-momento que según (14.3) será

$$T_k{}^r = -\varepsilon_0 F^{rq} F_{kq} + \delta_k^r \left[\frac{\varepsilon_0}{4} F_{ip} F^{ip} + g\left(\phi^p \phi_p\right) \right],$$

y que tomar el caso estático se obtiene que la energía de la partícula cargada es

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2} (\nabla \phi)^2 + g(\phi).$$

Para calcular la masa integramos

$$m = \frac{1}{c^2} \int \left[\frac{\varepsilon_0}{2} (\nabla \phi)^2 + g(\phi) \right] dV$$

teniendo en cuenta que

$$\int (\nabla \phi)^2 \, dV = \int \nabla (\phi \nabla \phi) \, dV - \int \phi \nabla^2 \phi \, dV = \int \frac{1}{\varepsilon_0} \phi g'(\phi) \, dV$$

donde hemos utilizado el teorema de Gauss, entonces

$$m = \frac{1}{c^2} \int \left[\frac{1}{2} \phi g'(\phi) + g(\phi) \right] dV .$$

Si bien la teoría de Mie es capaz de explicar las partículas cargadas como elementos del campo electromagnético e incluso de encontrar una forma para calcular su masa y su carga, tiene algunos inconvenientes, entre ellas que le da realidad física al potencial eléctrico, que en la teoría electromagnético es un simple intermediario de cálculo.

8.3 Bibliografía seleccionada

* PANOFSKY, W. K. H.; Phillips, M.: *Classical Electricity and Magnetism*, Addison-wesley, 1972, pp. 446-456.
* LEECH, J. W.: *Mecánica clásica*, Unión Tipográfica Editorial Hispano American, 1968, pp. 132-194.
* BORN, M.: «The momentum-energy law in the electrodynamics of Gustav Mie», en Jürgen Renn (ed.), *The Genesis of General Relativity*, Springer, vol. 4, 2007, pp. 745-756.
* WEYL, H.: Space-Time-Matter, Dover, 1952, pp. 206-217.

ISBN: 978-84-617-1463-6

ISBN: 978-84-617-1463-6

4

Campo gravitatorio

1.4 Introducción

Existen varias técnicas que nos permiten obtener las ecuaciones de campo gravitatorio. Examinaremos los formalismos métrico, métrico-afín y afín. En el primer procedimiento vamos a considerar de partida que el espacio es de Riemann, es decir que el tensor métrico es simétrico y que la conexión, también simétrica, coincide con los símbolos de Christoffel, por tanto los potenciales son las 10 componentes del tensor métrico. El formalismo métrico-afín considera que tanto el tensor métrico como la conexión son simétricos, sin embargo no establece a priori una relación entre ambos. Por tanto métrica y conexión son los potenciales del campo, lo que representa 60 componentes. En este formalismo se obtienen 40 ecuaciones de campo más que con formalixmo métrico, estas ecuaciones dan la relación entre la métrica y la conexión que resulta ser idéntica a los símbolos de Christoffel. Por último el formalismo afín considera como únicos potenciales del campo las componentes de la conexión de donde se derivan, no sólo las ecuaciones de campo sino el tensor métrico. En los tres casos abordaremos el estudio de las ecuaciones de campo mediante el principio variacional. Los formalismos que vamos a exponer tienen la misma densidad lagrangiana.

2.4 Densidad lagrangiana no covariante

En este y en los siguientes dos epígrafes vamos a limitarnos al formalismo métrico, donde como hemos dicho, los únicos potenciales del campo gravitatorio son las componentes del tensor métrico.

Por similitud con la ecuación de Poisson de la gravedad newtoniana, vamos a buscar una ecuación de campo gravitatorio que sea de segundo grado respecto a los potenciales. Esto significa que la densidad lagrangiana deberá depender como máximo de las primeras derivadas de los potenciales. Pero no es posible encontrar un invariante con esta propiedad. En efecto, por una adecuada elección del sistema de coordenadas es siempre posible (en el caso de conexión simétrica) conseguir que sean nulas las componentes de la conexión (son los llamados sistemas localmente inerciales, ver 6.1), lo que viene también a significar que serían nulas las primeras derivadas del tensor métrico. En este caso solo tendríamos el tensor métrico para construir el invariante de la densidad lagrangiana pero a partir de este tensor sólo podemos obtener una constante.

Como ahora veremos es posible obtener una densidad lagrangiana que pueda descomponerse como (11.2), de tal forma que aunque en principio dependa de las segundas derivadas del tensor métrico, de ella puede deducirse una densidad lagrangiana que sólo dependa de las primeras derivadas, aunque ahora esta densidad lagrangiana no sería un invariante. La propiedad señalada la tiene la curvatura escalar que puede descomponerse según

$$\sqrt{g}R=\sqrt{g}G+\frac{\partial\left(\sqrt{g}w^{l}\right)}{\partial x^{l}}, \tag{1.4}$$

donde $\sqrt{g}G$ es la densidad lagrangiana no covariante que solo depende de las primeras derivadas del tensor métrico; el segundo sumando de (1.4) no interviene en las ecuaciones de campo y en ella se encuentran agrupadas las segundas derivadas del tensor métrico. Desarrollando la curvatura escalar queda

$$\sqrt{g}R=\sqrt{g}g^{ik}R_{ik}=\sqrt{g}g^{ik}\left(\frac{\partial\Gamma_{il}{}^{l}}{\partial x^{k}}-\frac{\partial\Gamma_{ik}{}^{l}}{\partial x^{l}}+\Gamma_{il}{}^{m}\Gamma_{km}{}^{l}-\Gamma_{ik}{}^{l}\Gamma_{lm}{}^{m}\right),$$

los dos primeros sumandos del segundo miembro quedan

$$\begin{aligned}\sqrt{g}g^{ik}\frac{\partial\Gamma_{il}{}^{l}}{\partial x^{k}}&=\frac{\partial}{\partial x^{k}}\left(\sqrt{g}g^{ik}\Gamma_{il}{}^{l}\right)-\Gamma_{il}{}^{l}\frac{\partial}{\partial x^{k}}\left(\sqrt{g}g^{ik}\right)\\ \sqrt{g}g^{ik}\frac{\partial\Gamma_{ik}{}^{l}}{\partial x^{l}}&=\frac{\partial}{\partial x^{l}}\left(\sqrt{g}g^{ik}\Gamma_{ik}{}^{l}\right)-\Gamma_{ik}{}^{l}\frac{\partial}{\partial x^{l}}\left(\sqrt{g}g^{ik}\right),\end{aligned}$$

prescindiendo de las divergencias, obtenemos

$$\begin{aligned}\sqrt{g}G=\Gamma_{ik}{}^{l}\frac{\partial}{\partial x^{l}}\left(\sqrt{g}g^{ik}\right)-\Gamma_{il}{}^{l}\frac{\partial}{\partial x^{k}}\left(\sqrt{g}g^{ik}\right)-\\ -\sqrt{g}g^{ik}\left(\Gamma_{ik}{}^{l}\Gamma_{lm}{}^{m}-\Gamma_{il}{}^{m}\Gamma_{km}{}^{l}\right).\end{aligned} \tag{2.4}$$

Para desarrollar los dos primeros sumandos de la expresión anterior (2.4) debemos tener en cuenta (43.1) y la nulidad de la derivada covariante del tensor métrico, o sea

$$\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^l}=\sqrt{g}\Gamma_{ml}{}^{m}$$

$$\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}=-g^{is}\Gamma_{sl}{}^{k}-g^{sk}\Gamma_{sl}{}^{i},$$

entonces

$$\Gamma_{ik}{}^{l}\frac{\partial}{\partial x^l}\left(\sqrt{g}g^{ik}\right)=\Gamma_{ik}{}^{l}\left(g^{ik}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^l}\right)+\Gamma_{ik}{}^{l}\left(\sqrt{g}\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}\right)=$$

$$=\sqrt{g}\left(g^{ik}\Gamma_{ml}{}^{m}\Gamma_{ik}{}^{l}-g^{is}\Gamma_{sl}{}^{k}\Gamma_{ik}{}^{l}-g^{sk}\Gamma_{sl}{}^{i}\Gamma_{ik}{}^{l}\right)=$$

$$=\sqrt{g}\left(g^{ik}\Gamma_{ml}{}^{m}\Gamma_{ik}{}^{l}-2g^{is}\Gamma_{sl}{}^{k}\Gamma_{ik}{}^{l}\right).$$

Lo mismo podemos hacer con el segundo sumando de (2.4)

$$\Gamma_{il}{}^{l}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{g}g^{ik}\right)=\Gamma_{il}{}^{l}\left(g^{ik}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^k}\right)+\Gamma_{il}{}^{l}\left(\sqrt{g}\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^k}\right)=$$

$$=\sqrt{g}\left(g^{ik}\Gamma_{mk}{}^{m}\Gamma_{il}{}^{l}-g^{is}\Gamma_{sk}{}^{k}\Gamma_{il}{}^{l}-g^{sk}\Gamma_{sk}{}^{i}\Gamma_{il}{}^{l}\right)=-\sqrt{g}g^{sk}\Gamma_{sk}{}^{i}\Gamma_{il}{}^{l}.$$

Entonces los dos primeros sumandos de (2.4) resultan tras sacar factor común

$$\sqrt{g}g^{ik}\left(\Gamma_{ml}{}^{m}\Gamma_{ik}{}^{l}-2\Gamma_{kl}{}^{n}\Gamma_{in}{}^{l}+\Gamma_{ki}{}^{n}\Gamma_{nm}{}^{m}\right)$$

finalmente (2.4) queda

$$\sqrt{g}G=\sqrt{g}g^{ik}\left(\Gamma_{ki}{}^{n}\Gamma_{nm}{}^{m}-\Gamma_{kl}{}^{n}\Gamma_{in}{}^{l}\right),$$

que representa la densidad lagrangiana no covariante del campo gravitatorio puesta en función del tensor métrico y de sus primeras derivadas (o lo que es lo mismo, en función de la conexión). La expresión (1.4) es

$$\sqrt{g}R=\sqrt{g}g^{ik}\left(\Gamma_{ki}{}^{n}\Gamma_{nm}{}^{m}-\Gamma_{kl}{}^{n}\Gamma_{in}{}^{l}\right)+\frac{\partial}{\partial x^l}\left[\sqrt{g}\left(g^{il}\Gamma_{im}{}^{m}-\Gamma_{kl}{}^{n}\Gamma_{in}{}^{l}\right)\right]$$

que tiene la forma (11.2).

3.4 Identidad de Palatini

Cuando se aplica el principio variacional se supone una familia de posibles soluciones de los potenciales dependientes de un parámetro α

$$g^{ik}\left(x^r,\alpha\right)=g^{ik}\left(x^r,0\right)+\alpha\eta^{ik}\left(x^r\right),$$

donde $g^{ik}\left(x^r,0\right)$ representa el potencial real y $\eta^{ik}\left(x^r\right)$ es una función arbitraria con ciertas condiciones (ver epígrafe 6.2). Se llama una variación

ISBN: 978-84-617-1463-6

de g^{ik} a

$$\delta g^{ik} = g^{ik}\left(x^r, \alpha + d\alpha\right) - g^{ik}\left(x^r, \alpha\right) = \frac{\partial g^{ik}}{\partial \alpha} d\alpha = \eta^{ik} d\alpha. \tag{3.4}$$

Si nos encontramos en el formalismo métrico hay que observar que una variación del tensor métrico implica una variación de la conexión, entendida como una operación análoga a (3.4). Por la ecuación de transformación de la conexión (8.1) se encuentra

$$\delta \Gamma'_{ik}{}^{l} = B^l_r A^j_i A^p_k \delta \Gamma_{jp}{}^{r} \tag{4.4}$$

ya que el segundo sumando de (8.1) permanece inalterable durante la variación con respecto al parámetro α. A^p_k es la matriz de la transformación de las coordenadas y B^l_r su inversa. La ecuación (4.4) nos dice que la variación de la conexión es un tensor.

La variación del tensor de Ricci (18.1) es

$$\delta R_{ik} = \frac{\partial}{\partial x^k} \delta \Gamma_{il}{}^{l} - \frac{\partial}{\partial x^l} \delta \Gamma_{ik}{}^{l} + \delta\left(\Gamma_{il}{}^{s} \Gamma_{sk}{}^{l}\right) - \delta\left(\Gamma_{sl}{}^{l} \Gamma_{ki}{}^{s}\right),$$

donde hemos intercambiado la derivación respecto a las coordenadas con la operación de variación. Se puede comprobar por sustitución directa que

$$\delta R_{ik} = D_k\left(\delta \Gamma_{il}{}^{l}\right) - D_l\left(\delta \Gamma_{ik}{}^{l}\right), \tag{5.4}$$

donde hemos tenido en cuenta que la variación de la conexión es un tensor. A la relación (5.4) la llamamos identidad de Palatini, que también puede ser puesta como

$$g^{ik} \delta R_{ik} = D_k\left(g^{ik} \delta \Gamma_{il}{}^{l} - g^{ir} \delta \Gamma_{rk}{}^{k}\right) = D_k w^k, \tag{6.4}$$

donde w^k es un vector.

4.4 Ecuaciones de campo gravitatorio en el formalismo métrico

Vamos a elegir como densidad lagrangiana la curvatura escalar $\sqrt{g}R$. Pero este tensor depende tanto de las derivadas primeras como de las derivadas segundas del tensor métrico. Por esta razón vamos a utilizar el razonamiento descrito en el epígrafe 6.2 para el caso en que la densidad lagrangiana dependa de las derivadas segundas de los potenciales. En vez de aplicar la ecuación de Euler-Lagrange (10.2), vamos a aplicar directamente el principio variacional a la acción

$$\begin{gathered} \delta I = \delta \int \sqrt{g} g^{ik} R_{ik}\, d\Omega = \\ = \int \delta \sqrt{g} g^{ik} R_{ik}\, d\Omega + \int \sqrt{g} \delta g^{ik} R_{ik}\, d\Omega = \int \sqrt{g} g^{ik} \delta R_{ik}\, d\Omega = 0\,. \end{gathered} \tag{7.4}$$

Por lo deducido en el epígrafe 12.1 tenemos

$$\delta\sqrt{g} = -\frac{1}{2}\sqrt{g}g_{ik}\delta g^{ik}$$

y por (6.4) queda

$$\int\sqrt{g}g^{ik}\delta R_{ik}\,d\Omega = \int\sqrt{g}D_k w^k d\Omega = \int D_k w^k dV$$

y aplicando el teorema de Gauss (49.1)

$$\int D_k w^k dV = \int w^k dS_k = \int\left(g^{ik}\delta\Gamma_{il}{}^{l} - g^{ir}\delta\Gamma_{rk}{}^{k}\right)dS_k \tag{8.4}$$

donde hemos utilizado (50.1). Como ya se indicó en el epígrafe 6.2, la variación que estamos aplicando debe ser tal que las variaciones del tensor métrico y también de sus primeras derivadas se anulen en los límites de la integración, lo que implica que también debe ser nula la variación de la conexión (que en el formalismo métrico coincide con los símbolos de Christoffel), lo que significa que (8.4) es nula, por tanto de (7.4) nos queda

$$\int\sqrt{g}\left(R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R\right)\delta g^{ik} = 0$$

como la variación de las componentes del tensor métrico son arbitrarias, entonces obtenemos como ecuaciones del campo gravitatorio en el vacío

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = 0 \tag{9.4}$$

al contraer la anterior ecuación hallamos $R = 0$, entonces finalmente encontramos que las ecuaciones de campo gravitatorio en el vacío son

$$R_{ik} = 0. \tag{10.4}$$

Reuniendo tanto el anterior resultado como las condiciones impuestas inicialmente, concluimos que el campo gravitatorio se caracteriza por las siguientes cuatro conjuntos de ecuaciones

$$g_{[ik]} = 0$$
$$\Gamma_{[ik]}{}^{r} = 0$$
$$D_r g^{ik} = 0$$
$$R_{ik} = 0.$$

que nos identifican la geometría del espacio-tiempo en presencia de gravedad y en ausencia de materia.

5.4 Ecuaciones de campo gravitatorio en el formalismo métrico-afín

Ahora vamos a desarrollar el formalismo métrico-afín, que como hemos

ISBN: 978-84-617-1463-6

dicho considera que tanto la métrica como la conexión son simétricas pero no se establece previamente ninguna relación entre ellas. Al aplicar el principio variacional tendremos que variar independientemente la métrica y la conexión. La densidad lagrangiana va a ser la misma que la usada en la formulación métrica, ahora entendida como una función de la métrica, de la conexión y de sus primeras derivadas

$$\sqrt{g}R = f\left(g^{ik}, g^{ik}_{,r}, \Gamma_{ik}{}^{l}, \Gamma_{ik,r}{}^{l}\right).$$

Al variar la acción obtenemos lo mismo que en (7.4), excepto que ahora la variación del tensor de Ricci será distinto, aunque seguirá siendo cierta la identidad de Palatini (5.4), que adaptamos a la forma

$$\sqrt{g}g^{ik}\delta R_{ik} = \sqrt{g}g^{ik}D_l\left(\delta\Gamma_{ir}{}^{r}\delta^l_k - \delta\Gamma_{ik}{}^{l}\right) = \sqrt{g}g^{ik}D_l v^l_{ik} \qquad (11.4)$$

donde

$$v^l_{ik} = \delta\Gamma_{ir}{}^{r}\delta^l_k - \delta\Gamma_{ik}{}^{l}$$

es un tensor por serlo la variación de la conexión y la delta de Kronecker. (11.4) se pone como

$$\sqrt{g}g^{ik}D_l v^l_{ik} = \sqrt{g}D_l\left(g^{ik}v^l_{ik}\right) - \sqrt{g}\, v^l_{ik}D_l g^{ik},$$

a la integral del primer sumando será de aplicación el teorema de Gauss (49.1) y dará un valor nulo, puesto que la variación de la conexión se anula en los límites del volumen de integración. La integral del segundo sumando queda

$$-\int\sqrt{g}\, v^l_{ik}D_l g^{ik}d\Omega = \int\sqrt{g}\left(D_l g^{ik} - \delta^k_l D_r g^{ir}\right)\delta\Gamma_{ik}{}^{l},$$

por tanto la variación de la acción es

$$\begin{aligned}\delta I &= \int\sqrt{g}\left(R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R\right)\delta g^{ik}d\Omega + \\ &+\int\sqrt{g}\left(D_l g^{ik} - \delta^k_l D_r g^{ir}\right)\delta\Gamma_{ik}{}^{l} = 0\end{aligned} \qquad (12.4)$$

como las variaciones tanto del tensor métrico como de la conexión son arbitrarias e independientes, obtenemos dos conjuntos de ecuaciones. De la primera integral se obtiene

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{ik} = 0.$$

En cuanto a la segunda integral que surge de (12.4) hay que darse cuenta que la variación de la conexión es simétrica, esto significa que en el integrando tenemos repetidas las variaciones de la conexión, entonces de la arbitrareidad de la variación de la conexión deducimos

$$2D_l g^{ik} - \delta_l^k D_r g^{ir} - \delta_l^i D_r g^{kr} = 0 \tag{13.4}$$

que representa el segundo conjunto de ecuaciones de campo, de donde se deduce la relación entre la métrica y la conexión. En (13.4) tenemos tres índices $l,\ i,\ k$ y vamos a analizar las distintas posibilidades.

a) Los tres índices son diferentes $l \neq k,\ \ i \neq l,\ \ i \neq k$ entonces

$$D_l g^{ik} = 0.$$

b) $i = k \neq l$

$$D_l g^{ii} = 0.$$

c) $i \neq k,\ \ k = l$

$$D_l g^{il} - \frac{1}{2}\sum_r D_r g^{ir} = 0, \tag{14.4}$$

donde no estamos considerando suma respecto al índice l, sino que l es un determinado valor. Sumando todas esas ecuaciones para los cuatro posibles valores de l queda

$$\sum_l D_l g^{il} - \frac{4}{2}\sum_r D_r g^{ir} = 0$$

o bien

$$D_r g^{ir} = 0$$

donde ahora sí es válido el criterio de sumación de Einstein, entonces por (14.4) concluimos que

$$D_l g^{il} = 0$$

donde ahora no hay suma respecto al índice l.

d) $i \neq k,\ i = l$

$$D_l g^{lk} - \frac{1}{2}\sum_r D_r g^{rk} = 0,$$

y procediendo igual que antes se llega al mismo resultado que el apartado c).

e) $i = k = l$

$$2D_l g^{ll} - 2\sum_l D_l g^{ll} = 0,$$

donde en el primer sumando no hay suma sobre l. Sumando las cuatro ecuaciones anteriores se obtiene

$$D_l g^{ll} = 0$$

donde no hay suma respecto a l. Con lo que se concluye que

ISBN: 978-84-617-1463-6

$$D_r g^{ik} = 0$$

con independencia del valor que tomen los índices.

6.4 El formalismo afín

En el formalismo afín de la relatividad general suponemos que los únicos potenciales son las componentes de la conexión que suponemos es simétrica. El tensor métrico aparece en la teoría mediante

$$g^{ik} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial\left(\sqrt{g}\mathfrak{L}\right)}{\partial R_{ik}}, \tag{15.4}$$

de donde se deduce que la variación de la densidad lagrangiana es

$$\delta\left(\sqrt{g}\mathfrak{L}\right) = \sqrt{g}\, g^{ik} \delta R_{ik}.$$

Por el principio de mínima acción se tiene que cumplir

$$\delta I = \delta \int \sqrt{g}\, \mathfrak{L}\, d\Omega = \int \sqrt{g}\, g^{ik} \delta R_{ik} d\Omega = 0$$

o bien

$$\delta I = \int \sqrt{g}\, g^{ik} \left(\frac{\partial R_{ik}}{\partial \Gamma_{qr}^{\;\;p}} \delta \Gamma_{qr}^{\;\;p} + \frac{\partial R_{ik}}{\partial \Gamma_{qr,s}^{\;\;p}} \delta \Gamma_{qr,s}^{\;\;p} \right)$$

o integrando por partes

$$\delta \mathrm{I} = \int \left[\sqrt{g}\, g^{ik} \frac{\partial R_{ik}}{\partial \Gamma_{qr}^{\;\;p}} - \frac{\partial}{\partial x^s} \left(\sqrt{g}\, g^{ik} \frac{\partial R_{ik}}{\partial \Gamma_{qr,s}^{\;\;p}} \right) \right] \delta \Gamma_{qr}^{\;\;p} d\Omega +$$
$$+ \int \frac{\partial}{\partial x^s} \left(\sqrt{g}\, g^{ik} \frac{\partial R_{ik}}{\partial \Gamma_{qr,s}^{\;\;p}} \delta \Gamma_{qr}^{\;\;p} \right) d\Omega,$$

ahora bien, como el principio de mínima acción exige que la variación de los potenciales se anule en los límites del volumen de integración, la segunda integral se anula después de aplicar el teorema de Gauss. Como la variación de la conexión es arbitraria, entonces se obtiene al anular la variación de la acción

$$\sqrt{g} g^{ik} \frac{\partial R_{ik}}{\partial \Gamma_{qr}^{\;\;p}} - \frac{\partial}{\partial x^s} \left(\sqrt{g} g^{ik} \frac{\partial R_{ik}}{\partial \Gamma_{qr,s}^{\;\;p}} \right) = 0. \tag{16.4}$$

Por la definición (18.1) del tensor de Ricci, aplicando (16.4) y (43.1) y suponiendo simetría del tensor métrico se deduce

$$D_p g^{qr} = 0,$$

o lo que es lo mismo que la conexión es idéntica a los símbolos de Christoffel, lo que significa que el espacio es riemanniano.

El siguiente paso en el desarrollo del formalismo afín es obtener las ecuaciones de campo. Vamos a tomar como elemento de «volumen» para su uso en el cálculo de la acción del campo a

$$dV = \sqrt{\det R_{ik}}\, d\Omega = \sqrt{|R|}\, d\Omega$$

donde con $|R|$ representamos el valor positivo del determinante del tensor de Ricci. Entonces (15.4) se adaptará ahora a

$$g^{ik} = \frac{1}{\sqrt{|R|}} \frac{\partial\left(\sqrt{|R|}\mathfrak{L}\right)}{\partial R_{ik}},$$

si elegimos como densidad lagrangiana

$$\mathfrak{L} = -\frac{2}{\Lambda}$$

donde Λ es una constante de valor desconocido y teniendo en cuenta que tal como se demostró en 12.1 para el tensor métrico debe cumplirse

$$\delta|R| = |R| R^{ik} \delta R_{ik}$$

entonces quedará

$$R_{ik} = -\Lambda g_{ik} \tag{17.4}$$

que es la ecuación de campo. De (17.4) se deduce

$$|R| = \Lambda^4 g$$

por tanto la deducción de (16.4) sigue siendo válida. Como veremos en el siguiente epígrafe Λ es la constante cosmológica.

7.4 El término cosmológico

Los requisitos exigidos para la densidad lagrangiana en el formalismo métrico-afín se mantienen si en vez de (1.4) ponemos

$$\sqrt{g}\mathfrak{L} = \sqrt{g}R + 2\Lambda\sqrt{g} \tag{18.4}$$

donde Λ es una constante desconocida que llamamos constante cosmológica. Al hacer la variación del segundo sumando de (18.4) queda

$$\delta\int 2\Lambda\sqrt{g}\, d\Omega = -\Lambda\int \sqrt{g}\, g_{ik}\, \delta g^{ik} d\Omega,$$

entonces en vez de (9.4) se deducirá del principio de mínima acción

ISBN: 978-84-617-1463-6

$$R_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}R-\Lambda g_{ik}=0$$

que al ser contraída resulta

$$R=-4\Lambda$$

y por tanto

$$R_{ik}+\Lambda g_{ik}=0, \tag{19.4}$$

al igual que habíamos obtenido en (17.4).

8.4 El formalismo de Hilbert

La ecuación de campo gravitatorio (10.4) o (19.4) es válida en el caso del vacío. Nos queda averiguar las modificaciones que deben ser realizadas cuando contemplamos la presencia de las fuentes del campo gravitatorio.

Vamos a suponer que además del campo gravitatorio existe simultáneamente otro campo físico, cuya densidad lagrangiana venga dada por la expresión funcional

$$\mathfrak{L}_c=\mathfrak{L}_c\left(\phi_i,\phi_{i,k},g^{ik}\right) \tag{20.4}$$

donde ϕ_i es el potencial del campo, que suponemos vectorial para concretar. Nótese que suponemos que la densidad lagrangiana del campo depende del tensor métrico pero no de su derivadas, también establecemos de partida que no depende explícitamente de las coordenadas espacio-temporales.

Las ecuaciones de campo que se derivan de (20.4) se obtienen variando los potenciales y aplicando el principio de mínima acción a la integral

$$I_c=\int\sqrt{g}\,\mathfrak{L}_c d\Omega \tag{21.4}$$

obteniéndose

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left[\frac{\partial\left(\sqrt{g}\mathfrak{L}_c\right)}{\partial\phi_{i,k}}\right]-\frac{\partial\left(\sqrt{g}\mathfrak{L}_c\right)}{\partial\phi_i}=0.$$

Si variamos (21.4) respecto al tensor métrico tendremos

$$\delta I_c=\delta\int\sqrt{g}\,\mathfrak{L}_c dV=\int\frac{\partial\left(\sqrt{g}\mathfrak{L}_c\right)}{\partial g^{ik}}\delta g^{ik}d\Omega\,,$$

y usando (28.2) llegamos a

$$\delta I_c=\frac{1}{2}\int\sqrt{g}\,T_{ik}^{(c)}\,\delta g^{ik}d\Omega\,, \tag{22.4}$$

donde $T_{ik}^{(c)}$ es el tensor energía-momento del campo físico. Como

$$T_{ik}^{(c)}\delta g^{ik}=g_{ip}g_{kq}T^{(c)pq}\delta g^{ik}$$

y

$$g_{ip}g_{kq}\delta g^{ik}=\delta\left(g_{ip}g_{kq}g^{ik}\right)-\delta g_{ip}g_{kq}g^{ik}-g_{ip}\delta g_{kq}g^{ik}=-\delta g_{pq}$$

entonces tenemos

$$T_{ik}^{(c)}\delta g^{ik}=-T^{(c)pq}\delta g_{pq}$$

por tanto (22.4) también se puede poner como

$$\delta I_c=-\frac{1}{2}\int\sqrt{g}\,T^{(c)ik}\delta g_{pq}\,d\Omega.$$

Si $\mathfrak{L}_g$ y $\mathfrak{L}_c$ son las densidades lagrangianas del campo gravitatorio y del campo físico, entonces la densidad lagrangiana total será

$$\mathfrak{L}=\frac{1}{2\chi}\mathfrak{L}_g+\mathfrak{L}_c.$$

donde χ es una constante de acomplamiento entre el campo magnético y el campo físico. Para obtener las ecuaciones de campo gravitotorio en presencia de un campo físico variamos la acción

$$I=\int\sqrt{g}\;\mathfrak{L}d\Omega=\frac{1}{2\chi}\int\sqrt{g}\,\mathfrak{L}_g d\,\Omega+\int\sqrt{g}\,\mathfrak{L}_c d\,\Omega$$

con respecto al tensor métrico

$$\delta I=\frac{1}{2\chi}\int\sqrt{g}\left(R_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}R\right)\delta g^{ik}d\Omega+\frac{1}{2}\int\sqrt{g}\,T_{ik}^{(c)}\delta g^{ik}d\,\Omega=0,$$

y dada la arbitrareidad de la variación del tensor métrico llegamos a

$$R_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}R=-\chi T_{ik}^{(c)}. \qquad (23.4)$$

Podemos plantear la obtención de (23.4) considerando el método métrico-afín, por el cual se toma como potenciales no sólo al tensor métrico sino también a la conexión. Entonces al variar respecto a ambos y aplicar (12.4) se llega a

$$\delta I=\frac{1}{2\chi}\int\sqrt{g}\left(R_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}R\right)\delta g^{ik}d\Omega+$$

$$+\frac{1}{2\chi}\int\sqrt{g}\left(D_l g^{ik}-\delta_l^k D_r g^{ir}\right)\delta\Gamma_{ik}{}^{l}+\frac{1}{2}\int\sqrt{g}\,T_{ik}^{(c)}\delta g^{ik}d\,\Omega=0$$

y por la arbitrareidad e independencia de δg^{ik} y de $\delta\Gamma_{ik}{}^{l}$ se obtiene la ecuación 23.4 y la nulidad de la derivada covariante del tensor métrico siguiendo el mismo procedimiento del epígrafe 5.4.

ISBN: 978-84-617-1463-6

Las ecuaciones de campo gravitatorio para el campo vacío (o bien en la presencia de otro campo) no es capaz de explicar la existencia de materia. Por ello la materia debe ser introducida como una entidad ajena a los campos, creando una teoría mixta donde existe campos y materia como elementos independientes. Esta es una situación no deseable que se trató de eliminar, sin éxito, con las teorías unificadas, de las que en el siguiente capítulo estudiaremos una de ellas.

Por (23.4) vemos que el tensor energía-momento es la fuente del campo gravitatorio, lo que podemos generalizar y afirmar que el tensor energía-momento de la materia también es fuente de campo gravitatorio, entonces la ecuación (23.4) queda

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = -\chi T_{ik}^{(c)} - \chi T_{ik}^{(m)} \tag{24.4}$$

donde $T_{ik}^{(m)}$ es el tensor emergía-momento de la materia. (24.4) son las ecuaciones definitivas de la teoría general de la relatividad. Si tomamos como no nula la constante cosmológica, las ecuaciones de la gravitación son

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R - \Lambda g_{ik} = -\chi T_{ik}^{(c)} - \chi T_{ik}^{(m)} . \tag{25.4}$$

Añadamos por último, que las ecuaciones (24.4) y (25.4) se mantienen aún en el caso de que la densidad lagrangiana del campo físico dependa de las derivadas primeras del tensor métrico.

Las ecuaciones (23.4) fueron obtenidas por primera vez por Hilbert en el año 1915 pocos días antes que Einstein llegara al mismo resultado siguiendo otro procedimiento. Hilbert creyó, erróneamente, que con su teoría hacía surgir el campo electromagnético de la gravitación. Entendió que la presencia del tensor métrico en la ecuación (28.2) así lo demostraba. El error de Hilbert se encuentra en la interpretación que hizo del tensor métrico. En relatividad general este tensor es tanto el tensor métrico (el cual describe las propiedades métricas del espacio-tiempo) y el potencial de campo gravitatorio. Pero en la ecuación (28.2) g_{ir} es el tensor métrico y no representa el potencial gravitatorio; en efecto, (28.2) seguiría siendo válida aún en el caso de ausencia de gravedad, en cuyo caso seguiría existiendo un tensor métrico que describiría al espacio-tiempo euclídeo.

9.4 Transformaciones infinitesimales de coordenadas y ley de conservación de la energía y el momento

Consideremos una transformación infinitesimal de coordenadas

$$x'^{i} = x^{i} + \xi^{i}\left(x^{k}\right) \tag{26.4}$$

en la que exigimos que las funciones infinitesimales ξ^{i} sean arbitrarias con la condición de que se anulen en los límites del volumen tetradimensional considerado y eventualmente igual propiedad pueden tener sus derivadas primeras. Bajo esta transformación la acción del campo físico (21.4) permanece invariable. En efecto, aunque la acción no es una escalar frente a transformaciones genéricas de coordenadas, sí lo es en este caso puesto que el integrando es un invariante y los límites de integración no cambian en la transformaciones de coordenadas (26.4) dada las condiciones impuestas a ξ^i en los límites de la integral (21.4).

Ante la transformación (26.4) el tensor métrico se transforma como

$$g'_{ik} = \frac{\partial x^p}{\partial x'^i}\frac{\partial x^q}{\partial x'^k} g_{pq},$$

dado el carácter infinitesimal de ξ^i tenemos que

$$\frac{\partial x^p}{\partial x'^i} \approx \delta_i^p - \frac{\partial \xi^p}{\partial x^i}$$

entonces

$$g'_{ik} = g_{ik} - g_{sk}\frac{\partial \xi^s}{\partial x^i} - g_{is}\frac{\partial \xi^s}{\partial x^k}.$$

Dado que no varían los límites de la integración de la acción y que es de aplicación las condiciones exigidas en el teorema de Noether, se obtiene de (35.2) que

$$\int \bar{\delta}\left(\sqrt{g}\,\mathfrak{L}\right) d\Omega = 0 \tag{27.4}$$

donde $\bar{\delta}$ indica variación de la función pero no incluye la variación de las coordenadas. Como habíamos demostrado en el epígrafe (14.2)

$$\bar{\delta} = \delta - \frac{\partial}{\partial x^s}\xi^s,$$

entonces la variación buscada del tensor métrico es

$$\bar{\delta} g_{ik} = -\xi^s \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^s} - g_{sk}\frac{\partial \xi^s}{\partial x^i} - g_{is}\frac{\partial \xi^s}{\partial x^k}. \tag{28.4}$$

Podemos igualmente encontrar la variación de la conexión que surge del cambio de coordenadas infinitesimal (26.4). De la ley de transformación de la conexión (8.1) y de (27.4)

$$\bar{\delta}\,\Gamma^l_{ik} = -\xi^s_{,k}\Gamma^k_{is} + \xi^l_{,s}\Gamma^s_{ik} - \xi^p_{,i}\Gamma^l_{pk} - \xi^s\Gamma^l_{ik,s} - \xi^l_{,k,i}, \tag{29.4}$$

y en el caso de un potencial vector

$$\bar{\delta}\phi^i = -\xi^s\frac{\partial \phi^i}{\partial x^s} + \xi^i_{,s}\phi^s.$$

ISBN: 978-84-617-1463-6

Al desarrollar (27.4) se encuentra

$$\bar{\delta} I_c = \int \bar{\delta}\left(\sqrt{g}\,\mathfrak{L}_c\right) d\Omega = \int \left[\frac{\partial\left(\sqrt{g}\,\mathfrak{L}_c\right)}{\partial \phi^i} - \frac{\partial}{\partial x^s} \frac{\partial\left(\sqrt{g}\,\mathfrak{L}_c\right)}{\partial \phi^i_{,s}} \right] \bar{\delta}\phi^i d\Omega +$$

$$+ \int \left[\frac{\partial\left(\sqrt{g}\,\mathfrak{L}_c\right)}{\partial g^{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^s} \frac{\partial\left(\sqrt{g}\,\mathfrak{L}_c\right)}{\partial g^{ik}_{,s}} \right] \bar{\delta} g^{ik} d\Omega,$$

la primera de las integrales es nula por la ecuación de campo, mientras que la segunda integral está relacionada con el tensor de energía-momento

$$\bar{\delta} I_c = \frac{1}{2} \int \sqrt{g} T_{ik} \bar{\delta} g^{ik} d\Omega = -\frac{1}{2} \int \sqrt{g} T^{ik} \bar{\delta} g_{ik} d\Omega = 0,$$

lo que no significa que el integrando sea nulo, pues no todas las variaciones del tensor métrico son independientes, pues solo hay cuatro funciones independientes en la transformación (26.4).

Al usar (28.4) y (29.4)

$$\bar{\delta} I_c = \frac{1}{2} \int \sqrt{g} T^{ik} g_{ik,s} \xi^s \, d\Omega + \frac{1}{2} \int \sqrt{g} T^{ik} g_{sk} \xi^s_{,i} \, d\Omega + \frac{1}{2} \int \sqrt{g} T^{ik} g_{is} \xi^s_{,k} \, d\Omega =$$

$$= \frac{1}{2} \int \sqrt{g} T^{ik} g_{ik,s} \xi^s \, d\Omega + \int \sqrt{g} T^{ik} g_{sk} \xi^s_{,i} \, d\Omega = 0,$$

o bien

$$\int \left(\sqrt{g} T^{ik} g_{sk} \xi^s \right)_{,i} d\Omega - \int \left(\sqrt{g} T^{ik} g_{sk} \right)_{,i} \xi^s d\Omega +$$

$$+ \frac{1}{2} \int \sqrt{g} T^{ik} g_{ik,s} \xi^s \, d\Omega = 0,$$

la primera de las anteriores integrales se anula al aplicar el teorema de Gauss y como las funciones ξ^s son arbitarias, entonces

$$\left(\sqrt{g} T^{ik} g_{sk} \right)_{,i} - \frac{1}{2} \sqrt{g} T^{ik} g_{ik,s} = 0$$

y por (52.1) queda

$$D_i T^k_s = 0 \tag{30.4}$$

en cuya deducción hemos tenido en cuenta que el tensor energía-momento es simétrico y que el espacio es riemanniano. (30.4) es la ley de conservación del tensor energía-momento del campo físico. Si observamos, la única propiedad que se le ha impuesto a la densidad lagrangiana ha sido que no dependa explícitamente de las coordenadas espacio-temporales y como vimos en 12.2 esta condición es la exigida para el cumplimiento de la conservación de la energía y el momento. Nuevamente debemos decir que en el anterior razonamiento g_{ik} juega el papel de tensor métrico y no de potencial del campo gravitatorio, o sea, la deducción y el resultado anterior es de aplicabilidad en la ausencia de gravedad.

10.4 Identidades de Bianchi

Vamos a repetir el procedimiento anterior pero ahora con la acción gravitatoria (1.4) . De nuevo consideramos una transformación de coordenadas infinitesimal como (26.4) pero ahora con la condición añadida de que las primeras derivadas de g^{ik} se anulen en el volumen de integración. Para la variación de la acción seguimos lo expuesto en el epígrafe 4.4 y (27.4)

$$\begin{aligned}\bar{\delta}\int\sqrt{g}R\,d\Omega &= \bar{\delta}\int\sqrt{g}G\,d\Omega+\bar{\delta}\int\sqrt{g}D_k w^k d\Omega= \\ &= \bar{\delta}\int\sqrt{g}G\,d\Omega+\int\left(g^{ik}\bar{\delta}\,\Gamma_{il}^{\ \ l}-g^{ir}\bar{\delta}\,\Gamma_{rk}^{\ \ k}\right)dS_k,\end{aligned} \tag{31.4}$$

teniendo en cuenta (29.4) y que las primeras derivadas de ξ^s se anulan en la superficie de integración entonces la última integral de (31.4) se anula por lo que la variación de la acción gravitatoria se reduce a

$$\begin{aligned}\bar{\delta}\int\sqrt{g}R\,d\Omega &= \bar{\delta}\int\sqrt{g}G\,d\Omega= \\ &= \int\sqrt{g}\left(R_{pq}-\frac{1}{2}g_{pq}R\right)\bar{\delta}g^{pq}d\Omega=\int\sqrt{g}G_{pq}\bar{\delta}g^{pq}d\Omega.\end{aligned} \tag{32.4}$$

Como

$$\bar{\delta}\left(g_{ik}g^{kq}\right)=0 \quad\Rightarrow\quad \bar{\delta}g^{pq}=-g^{ip}g^{kq}\bar{\delta}g_{ik},$$

entonces por (28.4)

$$\bar{\delta}g^{pq}=g^{pq}_{\ ,s}\xi^s+g^{ip}\xi^q_{\ ,i}+g^{kq}\xi^p_{\ ,k},$$

aplicándolo a (32.4) y aplicando el teorema de Gauss se encuentra

$$\left(\sqrt{g}G^k_s\right)_{,k}+\frac{1}{2}\sqrt{g}G_{pq}g^{pq}_{\ ,s}=0$$

como el tensor de Einstein es simétrico lo anterior es equivalente a

$$D_k G^k_s=0$$

que son llamadas las identidades de Bianchi y son equivalentes a las leyes de conservación del campo físico (30.4).

10.4 Ecuaciones del electromagnetismo en presencia de campo gravitatorio

Las ecuaciones de campo electromagnético (3.3) y (4.3) son válidas en la

ISBN: 978-84-617-1463-6

ausencia de campo gravitatorio y cuando se usan coordenadas cartesianas. En el caso de que exista un campo gravitatorio, estas ecuaciones electromagnéticas deben modificarse. El método para su generalización consiste en sustituir las derivadas parciales por derivadas covariantes y el tensor de Minkowski por el tensor métrico del espacio tetradimensional. Dicho esto las ecuaciones de Maxwell en presencia de gravedad son

$$\begin{aligned} &D_r F^{kr} = -\frac{1}{\varepsilon_0} j^k \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial\left(\sqrt{g} F^{kr}\right)}{\partial x^r} = -\frac{1}{\varepsilon_0} j^k \\ &D_k F_{ip} + D_i F_{pk} + D_p F_{ki} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial F_{ip}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{pk}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{ki}}{\partial x^p} = 0, \end{aligned} \tag{33.4}$$

donde hemos utilizado (53.1) en el primer conjunto de ecuaciones de Maxwell, de la que se deriva la ecuación de continuidad

$$D_k j^k = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial\left(\sqrt{g}\, j^k\right)}{\partial x^k} = 0,$$

como se deduce del carácter antisimétrico del tensor de campo electromagnético. Integrando la anterior expresión respecto a las coordenadas espaciales

$$\int \frac{\partial\left(\sqrt{g}\, j^k\right)}{\partial x^k} d\Omega' = 0 \tag{34.4}$$

donde las primas se refieren a las coordenadas espaciales, así $d\Omega' = dx^1 dx^2 dx^3$; (33.4) se descompone en

$$\frac{\partial}{\partial x^0} \int \sqrt{g}\, j^0 d\Omega' = \int \frac{\partial\left(\sqrt{g}\, j^\alpha\right)}{\partial x^\alpha} d\Omega' = -\int D'_\alpha \left(\sqrt{g}\, j^\alpha\right) dV' = 0$$

donde la última integral se anula al aplicar el teorema de Gauss (49.1) y donde $dV' = \sqrt{\gamma}\, dx^1 dx^2 dx^3$ es el elemento de volumen tridimensional y γ es el valor positivo del determinante del tensor métrico tridimensional. Entonces la ley integral de conservación de la carga eléctrica se pone como

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \sqrt{g}\, j^0 d\Omega' = 0 \quad \Rightarrow \quad q = \int \sqrt{g}\, j^0 d\Omega' = \int \sqrt{\frac{g}{\gamma}}\, j^0 dV' \tag{35.4}$$

donde q es la carga eléctrica, entonces por (34.4) la densidad de carga eléctrica es

$$\rho = \sqrt{\frac{g}{\gamma}}\, j^0 .$$

Para simplificar el problema vamos a suponer en lo que sigue que tenemos una métrica tiempo-ortogonal, caracterizada porque $g_{0\alpha}=0$, en este caso tenemos la relación

$$g=\gamma g_{00}.$$

Bajo esta suposición vamos a expresar las ecuaciones de Maxwell (33.4) en forma tridimensional. Las componentes covariantes del tensor de campo electromagnético son definidos tal que

$$\left(F_{ik}\right)=\begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -cB_{12} & cB_{13} \\ -E_2 & cB_{21} & 0 & -cB_{23} \\ -E_z & -cB_{31} & cB_{32} & 0 \end{pmatrix},$$

mientras que los vectores campo eléctrico y magnético son definidos por

$$E^{\alpha}=\gamma^{\alpha\beta}E_{\beta}; \qquad B^{\alpha}=-\frac{1}{2}\Delta^{\alpha\beta\gamma}B_{\beta\gamma}=-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}B_{\beta\gamma} \qquad (36.4)$$

donde $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}$ son los símbolos completamentes antisimétricos de Levi-Civita.

Por lo obtenido en 22.1 la divergencia del vector tridimensional **B** es

$$\nabla\mathbf{B}=\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial\left(\sqrt{\gamma}B^{\alpha}\right)}{\partial x^{\alpha}},$$

y por (36.4)

$$\nabla\mathbf{B}=-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\frac{\partial B_{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}}$$

pero los dos últimos factores del segundo miembro no es más que la segunda de las ecuaciones (33.4), por tanto encontramos la tercera de las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla\mathbf{B}=0.$$

De 23.1 tenemos que el rotacional de un vector en el espacio tridimensional es

$$\left(\nabla\wedge\mathbf{A}\right)^{\alpha}=\frac{1}{2}\Delta^{\alpha\beta\gamma}\left(\frac{\partial A_{\gamma}}{\partial x^{\beta}}-\frac{\partial A_{\beta}}{\partial x^{\gamma}}\right) \qquad (37.4)$$

ahora bien, de la segunda ecuación (33.4) se obtiene que

$$\frac{\partial E_{\alpha}}{\partial x^{\beta}}-\frac{\partial E_{\beta}}{\partial x^{\alpha}}=-\frac{\partial B_{\alpha\beta}}{\partial t}$$

o bien multiplicando ambos miembros por $1/2\,\Delta^{\gamma\beta\alpha}$

ISBN: 978-84-617-1463-6

$$\frac{1}{2}\Delta^{\gamma\beta\alpha}\left(\frac{\partial E_\alpha}{\partial x^\beta}-\frac{\partial E_\beta}{\partial x^\alpha}\right)=-\frac{1}{2}\Delta^{\gamma\beta\alpha}\frac{\partial B_{\alpha\beta}}{\partial t}$$

por la segunda ecuación (36.4) nos queda

$$-\frac{1}{2}\Delta^{\gamma\beta\alpha}\frac{\partial B_{\alpha\beta}}{\partial t}=-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\gamma}\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\varepsilon^{\gamma\alpha\beta}B_{\alpha\beta}\right)=-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial\left(\sqrt{\gamma}B^\gamma\right)}{\partial t}$$

y finalmente por (37.4) queda

$$\nabla\wedge\mathbf{E}=-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial\left(\sqrt{\gamma}\mathbf{B}\right)}{\partial t}.$$

que representa la segunda de las ecuaciones de Maxwell. Nótese que la deducción de las dos ecuaciones de campo electromagnético anteriores no ha exigido la condición de que la métrica sea tiempo-ortogonal, condición que sí será exigida para la obtención de las dos restantes ecuaciones de Maxwell.

Del primer grupo de ecuaciones (33.4) se deduce

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\left(\sqrt{g}F^{0r}\right)}{\partial x^r}=-\frac{1}{\varepsilon_0}j^0\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\left(\sqrt{g}F^{0\alpha}\right)}{\partial x^\alpha}=-\frac{1}{\varepsilon_0}j^0,$$

si se define el vector desplazamiento eléctrico por

$$D^\alpha=\frac{\varepsilon_0E^\alpha}{\sqrt{g_{00}}}\quad\Rightarrow\quad F^{0\alpha}=-g^{00}g^{\alpha\beta}E_\beta=\frac{-E^\alpha}{g_{00}}=\frac{-D^\alpha/\varepsilon_0}{\sqrt{g_{00}}}$$

y teniendo presente que

$$j^0=\frac{\rho}{\sqrt{g_{00}}}\tag{38.4}$$

entonces se obtiene la primera de las ecuaciones de Maxwell

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial\left(\sqrt{\gamma}D^\alpha\right)}{\partial x^\alpha}=\rho\quad\Rightarrow\quad\nabla\mathbf{D}=\rho.$$

Por último obtengamos la cuarta de las ecuaciones de Maxwell, para ello partimos del primer grupo de (33.4)

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\left(\sqrt{g}F^{\alpha r}\right)}{\partial x^r}=-\frac{j^\alpha}{\varepsilon_0}\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\left(\sqrt{g}F^{\alpha\beta}\right)}{\partial x^\beta}+\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\left(\sqrt{g}F^{\alpha 0}\right)}{\partial x^0}=-\frac{j^\alpha}{\varepsilon_0},$$

haciendo la definición

$$H^{\alpha\beta}=\frac{1}{\mu_0}\sqrt{g_{00}}B^{\alpha\beta}$$

y de (37.4)

$$\rho_0=\frac{\rho}{\sqrt{g_{00}}}$$

donde ρ_0 es la densidad propia de carga eléctrica. Entonces encontramos

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial\left(\sqrt{\gamma}H^{\alpha\beta}\right)}{\partial x^{\beta}}+\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial\left(\sqrt{\gamma}D^{\alpha}\right)}{\partial t}=-\rho u^{\alpha},$$

siendo u^{α} las componentes espaciales de la tetravelocidad de un elemento de volumen de carga eléctrica de densidad ρ. Por la segunda de las definiciones de (36.4) se deduce que

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial\left(\sqrt{\gamma}H^{\alpha\beta}\right)}{\partial x^{\beta}}=\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\left(\sqrt{\gamma}\Delta^{\alpha\beta\gamma}H_{\gamma}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\left(\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}H_{\gamma}\right)=\Delta^{\alpha\beta\gamma}\frac{\partial H_{\gamma}}{\partial x^{\beta}}$$

representando el último término el rotacional del vector **H**, entonces

$$\nabla\wedge\mathbf{H}=j+\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial\left(\sqrt{\gamma}\mathbf{D}\right)}{\partial t}=0,$$

que es la cuarta de las ecuaciones de Maxwell. Notemos que la presencia de campo gravitatorio es equivalente a la modificación de la constante dieléctrica del vacío, como si la gravedad fuera un medio dieléctrico.

11.4 Ecuaciones de campo gravitatorio en el formalismo vierbein

Hemos obtenido las ecuaciones de campo gravitatorio partiendo de una densidad lagrangiana en función del tensor métrico y de la conexión afín. Es posible igualmente tomar una densidad lagrangiana que dependa del vierbein y de la conexión spin.

La densidad lagrangiana de Einstein es

$$\mathfrak{L}=\sqrt{g}\,R \tag{38.4}$$

donde R es la curvatura escalar en función del tensor métrico y de la conexión afín. Por lo deducido en el epígrafe 33.1 (38.4) es igual a

$$\mathfrak{L}=e\,R'$$

ISBN: 978-84-617-1463-6

donde R' es la curvatura escalar en función del vierbein (ver 33.1). Observemos que ahora $\mathfrak{L}$ está en función del vierbein y de la conexión spin y así la vamos a utilizar para obtener las ecuaciones de campo gravitatorio en el vacío.

Nos encontramos con dos posibilidades. O bien exigir de entrada que la derivada covariante del vierbein sea nula, ecuación (60.1), lo que nos lleva a establecer una relación entra la conexión spin y el vierbein; o partir de dos conjuntos de potenciales, en principio independientes entre sí: el vierbein y la conexión spin, obteniendo de esta forma dos conjuntos de ecuaciones de campo, siendo uno de ellos la relación existente entre la conexión spin y el vierbein.

Al seguir el segundo procedimiento tenemos como primer conjunto de ecuaciones de campo

$$\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial e^{\mu}_{m,\nu}}\right)-\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial e^{\mu}_{m}}=0.$$

Al desarrollar la densidad lagrangiana en función del vierbein tenemos

$$eR'=\sqrt{g}R=\eta^{sm}R_{sm}=e\eta^{sm}e^{\mu}_{m}e^{\nu}_{r}R^{r}{}_{s\mu\nu}$$

o sea, que no depende de las derivadas del vierbein; entonces la ecuación de campo se reduce a

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial e^{\mu}_{m}}=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial e}{\partial e^{\mu}_{m}}R'+e\frac{\partial R'}{\partial e^{\mu}_{m}}=0.$$

Por otra parte la variación del determinante del vierbein es

$$\delta e=e\,e^{\mu}_{m}\delta e^{m}_{\mu}=-e\,e^{m}_{\mu}\delta e^{\mu}_{m},$$

obtenida de igual forma a como se obtuvo la variación del determinante del tensor métrico (ver 12.1). Por todo lo expuesto obtenemos

$$\frac{\partial e}{\partial e^{\mu}_{m}}=-e\,e^{m}_{\mu}$$

$$\frac{\partial R'}{\partial e^{\mu}_{m}}=2\eta^{sm}e^{\nu}_{r}R^{r}{}_{s\mu\nu}$$

y la ecuación de campo gravitatorio queda tras multiplicar por e^{μ}_{n}

$$-e^{\mu}_{n}e^{m}_{\mu}R+2\eta^{sm}e^{\mu}_{n}e^{\nu}_{r}R^{r}{}_{s\mu\nu}=0$$

o bien

$$R^{m}{}_{n}-\frac{1}{2}\delta^{m}_{n}R=0 \quad\Rightarrow\quad R_{mn}=0$$

que coincide con la ecuación de Einstein de la relatividad general $R_{\mu\nu}=0$ al tener en consideración que el vierbein es invertible.

El segundo conjunto de ecuaciones de campo es

$$\frac{\partial}{\partial x^{\gamma}}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \omega_{\alpha\ q,\gamma}^{\ \ p}}\right)-\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \omega_{\alpha\ q}^{\ \ p}}=0. \tag{39.4}$$

para su cálculo debemos tener presente que la curvatura escalar en función de la conexión spin es

$$\mathfrak{L}=eR'=\eta^{sm}R_{sm}=e\eta^{sm}e_m^{\mu}e_r^{\nu}R^{r}{}_{s\mu\nu}=$$
$$=e\eta^{sm}e_m^{\mu}e_r^{\nu}\left(\partial_{\mu}\omega_{\nu}{}^{r}{}_{s}-\partial_{\nu}\omega_{\mu}{}^{r}{}_{s}+\omega_{\nu}{}^{m}{}_{s}\omega_{\mu}{}^{r}{}_{m}-\omega_{\mu}{}^{m}{}_{s}\omega_{\nu}{}^{r}{}_{m}\right).$$

Al aplicar la ecuación (39.4) obtenemos

$$\eta^{qm}\partial_{\gamma}\left[e\left(e_m^{\gamma}e_p^{\alpha}-e_m^{\alpha}e_p^{\gamma}\right)\right]-\eta^{sm}e\left(e_m^{\alpha}e_p^{\mu}-e_m^{\mu}e_p^{\alpha}\right)\omega_{\mu}{}^{q}{}_{s}+$$
$$+\eta^{qm}e\left(e_m^{\alpha}e_r^{\mu}-e_m^{\mu}e_r^{\alpha}\right)\omega_{\mu}{}^{r}{}_{p}=0,$$

multiplicando toda la expresión anterior por η_{qn} y teniendo en cuenta la antisimetría de la conexión spin

$$\eta_{qn}\eta^{sm}\omega_{\mu}{}^{q}{}_{s}=\eta^{sm}\omega_{\mu ns}=-\eta^{sm}\omega_{\mu sn}=-\omega_{\mu}{}^{m}{}_{n}$$

se obtiene

$$D_{\mu}\left[e\left(e_n^{\mu}e_p^{\alpha}-e_n^{\alpha}e_p^{\mu}\right)\right]=0 \tag{40.4}$$

que representa el segundo conjunto de ecuaciones de campo gravitatorio en el vacío. (40.4) se puede resolver en la conexión afín obteniéndose (63.2). Si ahora seguimos el razonamiento inverso desarrollado en 32.1 partiendo de (63.1) y de (62.1) se llega a (61.1) y de aquí se deduce la nulidad de la derivada covariante del vierbein (60.1) que así se constituye en el segundo grupo de las ecuaciones de campo gravitatorio.

En el caso de la existencia de un campo físico presente en el campo gravitatorio, la ecuación (40.4) seguirá siendo válida siempre y cuando la densidad lagrangiana del campo físico no dependa de la conexión spin. En este caso la densidad lagrangiana será

$$\mathfrak{L}=\frac{1}{2\chi}\sqrt{g}\,R+\mathfrak{L}_f=\frac{1}{2\chi}eR'+\mathfrak{L}_f$$

como suponemos que el campo físico $\mathfrak{L}_f$ solo depende del vierbein pero no de sus derivadas ni de la conexión spin, entonces la ecuación de Euler-Lagrange se reduce a

ISBN: 978-84-617-1463-6

$$\frac{\partial\left(eR'\right)}{\partial e_m^{\mu}}+\frac{\partial \mathfrak{L}_f}{\partial e_m^{\mu}}=0. \tag{41.4}$$

El primer sumando ya ha sido obtenido antes. Para resolver el segundo sumando tengamos en cuenta que por (57.1) tenemos

$$g^{\alpha\beta}=e_m^{\alpha}e_n^{\beta}\eta^{mn}$$

entonces

$$\frac{\partial \mathfrak{L}_f}{\partial e_m^{\mu}}=2\frac{\partial \mathfrak{L}_f}{\partial g^{\alpha\mu}}e_s^{\alpha}\eta^{sm}=e\,T_{\alpha\mu}e_s^{\alpha}\eta^{sm}$$

donde hemos usado la definición de tensor de energía-momento (28.2). Entonces (41.4) queda después de multiplicar los dos sumandos por e_n^{μ}

$$R^m{}_n-\frac{1}{2}\delta_n^m R=-\chi T^m{}_n \quad\Leftrightarrow\quad R_{mn}-\frac{1}{2}\eta_{mn}R=-\chi T_{mn} \tag{42.4}$$

donde el tensor de energía-momento puesto en función de coordenadas Lorentz es definido por

$$T_{mn}=e_m^{\mu}e_n^{\nu}T_{\mu\nu}.$$

Notemos que la ecuación de campo gravitatorio (42.4) es idéntica a la obtenida en la relatividad general como se comprueba al multiplicar sus dos miembros por $e_{\mu}^{m}e_{\nu}^{n}$.

En cuanto al segundo conjunto de ecuaciones de campo, es decir, aquellas que se obtienen de la conexión spin, siguen siendo las mismas que las del caso de asuencia de materia (40.4).

En el caso de presencia de materia sigue siendo válido el razonamiento realizado en (8.4) por el que añadimos al tensor energía-momento del campo físico el correspondiente tensor asociado a la materia.

10.4 Bibliografía seleccionada

* MÖLLER, C.: *The Theory of Relativity*, Oxford University Press, 1972.
* TONNELAT, M. A.: *Les théories unitaires de l'ectromagnétisme et de la gravitation*, Paris, Gauthier Villars, 1965.
* HILBERT, D.: «The foundations of Physics (first communication)», en Jürgen Renn (ed.), *The Genesis of General Relativity*, Springer, 2007, vol. 4, pp. 1003-1015.
* LANDAU, L.; LIFSHITZ, E. M.: *Teoría clásica de los campos*, Reverté, 1973.
* RAMOND, Pierre: *Field Theory: A Modern Primer*, Adison-Wesley, 1990, pp. 206-222.

Teoría de campo relativista
Wenceslao Segura González
ISBN: 978-84-617-1463-6

5

Teoría de campo unificado de Weyl

1.5 Desplazamiento paralelo de un vector en una espacio de Riemann

Consideremos un punto P donde se encuentra definido un vector (no un campo vectorial) de componentes contravariantes A^i con respecto a un determinado sistema de coordenadas. Decimos que en un punto P′ infinitamente cercano al P se ha definido una traslación paralela del vector A^i si asociamos al punto P′ un vector de componentes

$$A^i + dA^i = A^i - \Gamma^i_{jk} A^j dx^k \quad \Rightarrow \quad dA^i = -\Gamma^i_{jk} A^j dx^k \tag{1.5}$$

referido al mismo sistema de coordenadas. Las dx^k son las diferencias de coordenadas entre los puntos P y P′.

La operación de trasladar un vector paralelamente la podemos hacer para cualquier punto, de tal forma que podemos definir un campo vectorial. Este campo tendría por (1.5) la propiedad de que su derivada covariante DA^i es nula en todo punto.

El campo vectorial que obtenemos trasladando paralelamente el vector A^i no es dado unívocamente, ya que la forma diferencial

$$\Gamma^i_{jk} A^j dx^k \tag{2.5}$$

no es, en general, una diferencial exacta; es decir, que su integral entre dos puntos es una integral de línea que depende del camino seguido. Por lo tanto, con la traslación paralela de un vector podemos obtener infinitos campos vectoriales, todos ellos originados en el mismo vector definido en el punto P, campos que tienen la propiedad común de la nulidad de su derivada covariante en todo punto.

La condición necesaria para que (2.5) sea una diferencial exacta es que se cumpla la relación

$$\frac{\partial}{\partial x^r}\left(\Gamma^i_{jk}A^j\right)=\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\Gamma^i_{jr}A^j\right)$$

que al desarrollarla y utilizar (1.5) se encuentra que es equivalente a la nulidad del tensor de curvatura. O sea, en un espacio euclídeo se puede trasladar unívocamente un vector paralelamente, lo que no ocurre en un espacio de Riemann.

La variación que experimentan las componentes contravariantes de un vector cuando sufre un desplazamiento paralelo es dada por (1.5), de donde se logra obtener la correspondiente variación de las componentes covariantes del mismo vector. En efecto

$$DA_i=D\left(g_{ik}A^k\right)=Dg_{ik}A^k+g_{ik}DA^k$$

que es nula por (1.5) y por anularse en un espacio de Riemann la derivada covariante del tensor métrico. Entonces

$$DA_i=0 \quad\Rightarrow\quad dA_i=\Gamma^j_{ik}A_j dx^k\,. \tag{3.5}$$

El módulo del vector de componentes contravariantes A^i es definido por

$$A^2=g_{ik}A^iA^k=A^iA_i\,,$$

cuando el vector se ve sometido a un desplazamiento paralelo sus componentes cambian como (1.5) y (3.5) de donde resulta

$$dA^2=A_i dA^i+A^i dA_i=0$$

o sea, el módulo del vector no cambia en el transporte paralelo de un punto a otro infinitamente cercano; igual propiedad se puede extender al caso de un desplazamiento finito. Si lo que hacemos es un transporte del vector paralelamente pero por un recinto cerrado es de aplicación la ecuación obtenida en el epígrafe 9.1

$$dA^r=R^r{}_{nik}A^n da^k db^i \tag{4.5}$$

que nos da la variación de las componentes contravariantes de un vector en función del tensor de curvatura. da^k y db^i son las diferencias de las coordenadas entre los puntos que forman el paralelogramo infinitesimal que recorre paralelamente el vector A^i. Como la superficie elemental tiene de área (epígrafe 20.1)

$$dS^{ij}=da^i db^j-da^j da^i$$

y el tensor de curvatura es simétrico respecto a sus dos últimos índices, tendremos que (4.5) queda

$$A_r dA^r=1/2\,R_{pnik}A^pA^n dS^{ik}\,,$$

entonces como

$$A_r dA^r = \frac{1}{2} d\left(A_r A^r\right) = \frac{1}{2} dA^2 ,$$

la variación que experimenta el módulo de un vector cuando es trasladado paralelamente a través de un circuito elemental cerrado es

$$dA^2 = R_{pnik} A^p A^n dS^{ik}$$

pero como el tensor de curvatura en su forma covariante es antisimétrico respecto al primer par de índices (ver 17.1) entonces se anula la anterior expresión, lo que nos viene a decir que al hacer un recorrido paralelo por un circuito elemental cerrado no varía el módulo del vector.

2.5 Espacio de Weyl

El espacio de Riemann se caracteriza por tener métrica y conexión simétricas y porque su tensor de no-metricidad es nulo. Un espacio de Weyl sigue conservando la propiedad de simetría del tensor métrico y considera que la torsión (o parte antisimétrica de la conexión) es nula; no obstante, ya no se supone válida la anulación del tensor de no-metricidad, sino que se le da un valor determinado.

En un espacio de Weyl el tensor métrico viene dado por la expresión

$$g_{ik} = \psi\left(x^r\right) \hat{g}_{ik} \tag{5.5}$$

donde suponemos que ψ es un campo escalar llamado calibración y $\hat{g}_{ik}$ es un tensor. Por definición, en un espacio de Weyl se cumple

$$Dg_{ik} = -2 g_{ik} d\phi \tag{6.5}$$

siendo $d\phi$ es una forma diferencial. (6.5) es la expresión básica que conjuntamente con la anulación de la torsión y la simetría del tensor métrico definen el espacio de Weyl.

La forma diferencial $d\phi$ se puede poner como

$$d\phi = \phi_k dx^k$$

lo que no garantiza que sea una diferencial exacta, es decir que en general

$$\phi_k \neq \phi_{,k} ,$$

para que ϕ_k sea un gradiente es necesario que

$$\frac{\partial \phi_k}{\partial x^i} = \frac{\partial \phi_i}{\partial x^k}$$

lo cual no ocurre en general. A las funciones ϕ_k se les llama componentes de la conexión métrica y en la teoría de campo unificado de Weyl son proporcionales al potencial de campo electromagnético.

ISBN: 978-84-617-1463-6

La condición $d\phi = 0$ implica que nos encontraríamos en un espacio de Riemann, pues entonces por (6.5) $Dg_{ik} = 0$. Es fácil encontrar a partir de (6.5) que

$$Dg^{ik} = 2g^{ik}d\phi.$$

3.5 Cambio de calibración

La calibración ψ en la ecuación (5.5) no es única; al contrario, puede ser cualquier función. Entonces nos encontramos que en un espacio de Weyl son arbitrarios tanto el sistema de coordenadas como la calibración. Al igual que hemos exigido que las ecuaciones de la Física sean invariantes frente a cambios en el sistema de coordenadas, también exigiremos que queden inalterables cuando se hace un cambio de calibración, lo que es llamada invariancia gauge o invariancia conforme. No obstante, las distintas funciones geométricas tendrán particulares formas de transformación cuando se cambia de calibración, siendo unas invariantes y otras no.

Nótese que, en general, mediante un cambio de calibración no podemos pasar de un espacio de Weyl a otro de Riemann. Indiquemos también que aún en el caso de que la calibración sea una constante (el mismo valor en todos los puntos del espacio) el espacio seguirá siendo, en general, un espacio de Weyl, lo que nos viene a decir que el tensor $\hat{g}_{ik}$ cumple una relación análoga a (6.5), como se puede comprobar aplicando la derivada covariante a (5.5) y aplicando (6.5).

Supongamos que se efectúa el siguiente cambio de calibración

$$\psi\left(x^k\right) \to \psi'\left(x^k\right)$$

entonces el módulo de un vector que en la antigua calibración era

$$A^2 = \psi \hat{g}_{ik} A^i A^k$$

pasa a tomar el valor diferente

$$A'^2 = \psi' \hat{g}_{ik} A^i A^k = \frac{\psi'}{\psi} A^2 = \lambda^2 A^2$$

donde λ es una función de las coordenadas y distinta de cero.

Cuando hay un transporte paralelo seguirá siendo válida (1.5) pero ahora la variación de las componentes covariantes no será (3.5) sino

$$DA_i = A^i Dg_{ik} = -2A^i g_{ik} d\phi \quad \Rightarrow \quad dA_i = \Gamma^j_{ik} A_j dx^k - 2g_{ik} A^k d\phi. \qquad (7.5)$$

por este motivo cuando se traslada paralelamente un vector su módulo queda modificado

$$dA^2 = A_i dA^i + A^i dA_i ,$$

utilizando (1.5) y (7.5) se encuentra

$$dA = -A\,d\phi = -A\phi_k dx^k\,, \tag{8.5}$$

que nos da la variación que registra el módulo de un vector cuando se le somete a una traslación paralela infinitesimal. Démonos cuenta que por la definición de espacio de Weyl la variación del módulo es proporcional al módulo. En vez de proceder a definir un espacio de Weyl como antes lo hemos hecho mediante (6.5), podríamos haber partido de (8.5), encontrándose (6.5). Si en un espacio de Weyl no se produce variación del módulo de un vector cuando se hace una traslación paralela arbitraria, entonces se reduce a un espacio de Riemann, pues en este caso $d\phi = 0$, lo que implica que el tensor de no-metricidad es nulo.

La métrica en el espacio de Weyl está recalibrada en el sentido de que la calibración o patrón de medida espacio-temporal tiene una escala que es diferente en cada punto. Por otra parte en un espacio de Weyl la variación que experimenta el módulo de un vector depende del camino que se haya seguido para hacer el transporte. En efecto, al integrar (8.5) nos encontramos con una integral de línea, pues en general $d\phi$ no es una diferencial exacta. Esto viene a significar que no podemos comparar módulos de vectores que estén en posiciones diferentes. Para ello tendríamos que trasladar un vector para llevarlo junto al otro, pero esta operación de traslación queda indefinida porque depende del camino que se siga.

4.5 Variación del módulo de un vector cuando recorre un circuito elemental por transporte paralelo

Hemos mostrado en 1.5 que en un espacio de Riemann el módulo de un vector no cambia cuando, trasladado paralelamente, recorre un circuito cerrado. Este resultado cambia cuando estamos en un espacio de Weyl. Consideremos el circuito infinitesimal de la figura 1.5

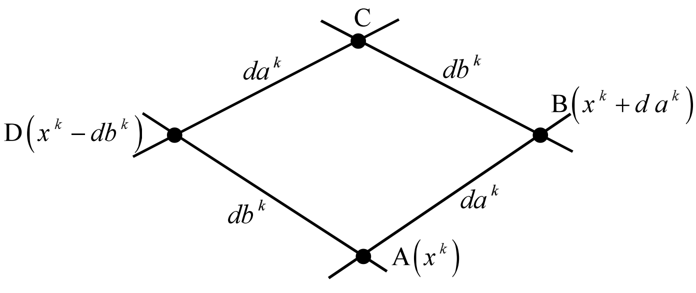

Figura 1.5

ISBN: 978-84-617-1463-6

donde da^k y db^k representan las diferencias de coordenadas entre los vértices del paralelogramo.

Consideremos un vector de módulo A en el punto $\mathrm{A}\left(x^k\right)$ y lo trasladamos paralelamente al punto $\mathrm{B}\left(x^k + da^k\right)$, su longitud cambiará según (8.5)

$$dA_1 = -A\phi_i\left(x^k\right)da^i \ ,$$

al hacer ahora la traslación de B al C el cambio de módulo será

$$dA_2 = -A\phi_i\left(x^k + da^k\right)db^i \ .$$

La variación de módulo del vector cuando se traslada paralelamente del punto C al D será el mismo que de D a C pero cambiado de signo

$$dA_3 = A\phi_i\left(x^k + db^k\right)da^i$$

mientras que la variación experimentado por el módulo al pasar de D a A es la misma que de A a D pero con el signo cambiado

$$dA_4 = A\phi_i\left(x^k\right)db^i \ .$$

Por tanto el cambio total experimentado por el módulo del vector cuando ha recorrido el paralelogramo es

$$dA = dA_1 + dA_2 + dA_3 + dA_4 \ ,$$

y al desarrollar hasta el primer orden de ϕ_i se encuentra

$$dA = A\left(\frac{\partial\phi_k}{\partial x^i} - \frac{\partial\phi_i}{\partial x^k}\right)da^k db^i \ ,$$

si hacemos la definición

$$F_{ik} = \frac{\partial\phi_k}{\partial x^i} - \frac{\partial\phi_i}{\partial x^k}$$

e introducimos el elemento de superficie nos queda

$$dA = \frac{1}{2}AF_{ik}dS^{ki} \tag{9.5}$$

que representa la variación que experimenta el módulo de un vector cuando es trasladado paralelamente por un circuito infinitesimal cerrado. Como en general el tensor F_{ik} no es nulo, el módulo del vector cambiará. No obstante, y tal como hemos advertido anteriormente, si ϕ_k cumple

$$\frac{\partial\phi_k}{\partial x^i} = \frac{\partial\phi_i}{\partial x^k}$$

entonces el tensor F_{ik} es nulo y el vector no sufre ninguna modificación en su módulo al hacer la traslación paralela.

5.5 Efectos del cambio de calibración

Cuando tiene lugar un cambio de calibración el tensor métrico queda alterado. Si la nueva calibración es la función ψ' entonces el nuevo tensor métrico será

$$g'_{ik} = \psi' \hat{g}_{ik} = \frac{\psi'}{\psi} \psi \hat{g}_{ik} = \lambda^2 g_{ik} \tag{10.5}$$

y decimos que el tensor métrico es de peso –2, que es la potencia en la que aparece la función λ. Las componentes contravariantes del tensor métrico también quedarán modificadas

$$g'_{ik} g'^{rk} = \delta^r_i \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 g_{ik} g'^{rk} = \delta^r_i \quad \Rightarrow \quad g'^{rk} = \lambda^{-2} g^{rk}$$

entonces el peso de g'^{rk} es 2. Mientras que el determinante de las componentes covariantes del tensor métrico se transforma ante un cambio de calibración por

$$g' = \lambda^8 g$$

siendo, por tanto, de peso 8.

La forma diferencial $d\phi$ también queda alterada en un cambio de calibración. Hallando la derivada covariante en ambos miembros de (10.5) se tiene

$$Dg'_{ik} = 2\lambda d\lambda g_{ik} - 2\lambda^2 g_{ik} d\phi,$$

pero como después del cambio de calibración el espacio sigue siendo de Weyl entonces deberá cumplirse (6.5)

$$Dg'_{ik} = -2g'_{ik}\, d\phi' = -2\lambda^2 g_{ik}\, d\phi$$

e igualando los dos últimos resultados se obtiene

$$d\phi' = d\phi - \frac{d\lambda}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \phi'_k = \phi_k - \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x^k} \tag{11.5}$$

que es la ley de transformación de la forma diferencial $d\phi$.

Notemos que las coordenadas de un punto del espacio no cambian en una transformación de calibración, pues solo son números que identifican al punto. Por tanto, el elemento de línea del espacio de Weyl queda modificado por la ley

$$ds' = \lambda\, ds$$

es decir, tiene de peso 1, el mismo peso que tendrá el tiempo propio $d\tau$ de una partícula. Definida la tetravelocidad por

$$u^k = \frac{dx^k}{d\tau}$$

encontramos que tiene de peso –1, mientras que la tetraaceleración tendrá de peso –2.

ISBN: 978-84-617-1463-6

6.5 La calibración geodésica

En un espacio de Weyl siempre es posible encontrar una calibración para cada punto tal que en un entorno infinitesimal de ese punto los módulos de los vectores no sufran modificación cuando son traladados paralelamente. A esta calibración se le llama geodésica.

Démonos cuenta en el parecido entre la calibración geodésica y el sistema de coordenadas geodésico que permite que en el entorno infinitesimal de un punto queden anuladas las componentes de la conexión.

Consideremos un punto P_0 de coordenadas x_0^i entonces es siempre posible definir una nueva calibración ψ' tal que cumpla

$$\ln\frac{\psi'}{\psi}=\ln\lambda^2=2\phi_i\left(x^i-x_0^i\right) \quad\Rightarrow\quad \lambda=\exp\left[\phi_i\left(x^i-x_0^i\right)\right].$$

La nueva forma diferencial que se obtiene de la anterior transformación se calcula a partir de (11.5)

$$\phi_k'=-\frac{\partial\phi_i}{\partial x^k}\left(x^i-x_0^i\right)$$

lo que significa que en el punto P_0 $\phi_k'=0\Rightarrow d\phi'=0$ y por (8.5) no existe alteración de un vector cuando se traslada paralelamente a un punto infinitamente cercano a P_0.

De forma equivalente a lo que ocurre con el sistema de coordenadas geodésico, no es posible en general encontrar una calibración que haga posible que en todo punto del espacio tenga la propiedad de que sea nula la variación del módulo de un vector frente a transformaciones paralelas infinitesimales. Si esta operación fuera posible, entonces tendríamos una calibración en que la forma diferencia $d\phi$ sería nula en todo punto y por lo tanto el espacio no sería de Weyl sino de Riemann.

Si $d\phi$ es una diferencial exacta, es decir si existe una función ϕ tal que

$$d\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x^k}dx^k$$

entonces es siempre posible encontrar una calibración tal que el espacio sea riemanniano. En efecto, si elegimos una calibración tal que $\lambda=\exp\phi$ entonces por (11.5) encontramos que $\phi_k=\phi_{,k}=0$ en todo punto del espacio, lo que significa que el espacio es de Riemann puesto que en este caso $Dg_{ik}=0$ por (6.5).

7.5 Geometrías de Weyl integrables y no integrables

El carácter de $d\phi$ permite hacer una clasificación de las geometrías de Weyl. Si $d\phi$ es una diferencial exacta entonces tenemos la geometría integrable de Weyl. En caso contrario hablamos de geometria no integrable de Weyl. Las razones de estas denominaciones serán entendidas más adelante.

Debemos notar que en las geometrías integrables de Weyl la conexión métrica es no nula. No obstante, siempre es posible encontrar una calibración tal que con respecto a ella la conexión métrica sea idénticamente nula. En efecto, supongamos que la conexión métrica sea ϕ_k entonces si elegimos un calibración caracterizada por λ tal que

$$\frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x^k}=\phi_k$$

y entonces la nueva conexión métrica en todo punto es nula por (11.5). Lo que significa que la nueva geometría que se obtiene de la anterior calibración es riemanniana, o sea caracterizada porque la derivada covariante del tensor métrico es idénticamente nula. No obstante, aunque siempre es posible mediante un cambio de escala pasar de un espacio integrable de Weyl a un espacio de Riemann, ambos tipos de espacios son diferentes.

En una geometría integrable de Weyl (8.5) es integrable, en el sentido de que la variación del módulo de un vector sólo dependerá del punto de partida y del de llegada y no del camino seguido en su transporte paralelo, o sea, que la integral de (8.5) no es de línea; además, si el vector hace un recorrido cerrado no se registrará variación del módulo del vector ya que $F_{ik}=0$, lo que nos viene a significar que en la teoria integrable de Weyl no se contempla el campo electromagnético como manifestación de la geometría.

Nótese que si se realiza un cambio de calibración en un espacio de Riemann se convierte en un espacio con geometría integrable de Weyl. Si en vez de un cambio local de escala, lo que hacemos es un cambio global (es decir el mismo para todo punto del espacio), entonces no será modificada la geometría riemanniana

En la geometría no integrable de Weyl, caracterizada porque la conexión métrica no se puede poner como el gradiente de una función de las coordenadas espacio-temporales, la variación que experimenta el módulo de un vector al ir de un punto a otro depende del camino seguido, de aquí el nombre de esta geometría. Es más, por (9.5) al hacer un recorrido cerrado el módulo de un vector al ser trasladado paralelamente será distinto del módulo que tenía al comienzo, ya que en la geometría no integrable de Weyl el tensor F_{ik} es distinto de cero.

Mediante un cambio de escala no es posible convertir una geometría no integrable de Weyl en una integrable. En efecto, cualquiera que sea la función λ de (11.5) siempre obtendríamos una conexión métrica ϕ'_k que no podría expresarse mediante un gradiente y por lo tanto la geometría seguiría siendo no integrable.

ISBN: 978-84-617-1463-6

Siempre es posible elegir una calibración tal que para un punto determinado la conexión métrica sea nula, pero como hemos antes señalado no es posible que el cambio de calibración tenga este efecto para todos los puntos. Es decir, una geometría no integrable de Weyl no puede transformarse mediante un cambio de calibración en una geometría integrable.

8.5 Conexiones en el espacio de Weyl

En el caso en que el tensor de no-metricidad sea distinto de cero, la conexión se calcula a partir de (27.1), que para el caso de ser nula la contorsión, como de hecho ocurre en un espacio de Weyl, será

$$\Gamma_{rpq} = L_{rpq} + \frac{1}{2}\left(Q_{rpq} - Q_{pqr} - Q_{qrp}\right)$$

donde L_{rpq} son los símbolos de Christoffel de primera especie (o sea, con todos los índices covariantes) calculados a partir del tensor métrico g_{ik} y $Q_{pqr} = D_r g_{pq}$ es el tensor de no-metricidad. Por (6.5) tenemos que la conexión de un espacio de Weyl es

$$\Gamma_{rp}{}^{s} = L_{rp}{}^{s} + \delta^{s}_{p}\phi_r + \delta^{s}_{r}\phi_p - g_{rp}\phi^{s}\,. \tag{12.5}$$

Podemos asociar otros símbolos de Christoffel con el tensor $\hat{g}_{ik}$

$$\hat{L}_{rp}{}^{s} = \frac{1}{2}\hat{g}^{st}\left(\partial_r \hat{g}_{tp} + \partial_p \hat{g}_{rt} - \partial_t \hat{g}_{rp}\right), \tag{13.5}$$

que coincide con $L_{rp}{}^{s}$ en el caso en que la calibración sea la unidad.

Veamos a continuación la ley de transformación que sigue la conexión cuando tiene lugar un cambio de calibración. De (5.5) se obtiene

$$g^{ik} = \frac{1}{\psi}\hat{g}^{ik}$$

entonces cuando se tiene una nueva calibración ψ' los símbolos de Christoffel se transforman según

$$L'_{rp}{}^{s} = \frac{1}{2}\frac{1}{\psi'}\hat{g}^{st}\left[\partial_r\left(\psi'\hat{g}_{tp}\right) + \partial_p\left(\psi'\hat{g}_{rt}\right) - \partial_t\left(\psi'\hat{g}_{rp}\right)\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\lambda^2} g^{st}\left[\partial_r\left(\lambda^2 g_{tp}\right) + \partial_p\left(\lambda^2 g_{rt}\right) - \partial_t\left(\lambda^2 g_{rp}\right)\right]$$

al hacer la derivación queda

$$L'_{rp}{}^{s} = L_{rp}{}^{s} + \delta^{s}_{p}\left(\frac{1}{\lambda}\partial_r\lambda\right) + \delta^{s}_{r}\left(\frac{1}{\lambda}\partial_p\lambda\right) - g^{st}g_{rp}\left(\frac{1}{\lambda}\partial_t\lambda\right)$$

y teniendo presente la ley de transformación (11.5) se encuentra que

$$\Gamma'_{rp}{}^{s} = \Gamma_{rp}{}^{s}$$

lo que significa que la conexión del espacio de Weyl es invariante frente a cambios de calibración, aunque no ocurre lo mismo con los símbolos de Christoffel.

9.5 Tensor de curvatura en el espacio de Weyl

Se llega al concepto de tensor de curvatura en un espacio de Weyl por el mismo procedimiento seguido en el espacio de Riemann, obteniéndose el mismo resultado (14.1). Directamente se ve que el tensor de curvatura es antisimétrico con respecto a la dos últimos índices. El tensor de curvatura totalmente covariante se puede descomponer en dos partes

$$R_{ikpq}=P_{ikpq}+F_{ikpq} \tag{14.5}$$

siendo P_{ikpq} antisimétrico respecto al primer par de índices y F_{ikpq} es simétrico respecto al primer par de índices.

Cuando un vector A^k es trasladado paralelamente por un circuito cerrado su módulo cambia según

$$dA^2=R_{pnik}A^pA^n dS^{ik}$$

como se demostró en 1.5. Sustituyendo en la anterior expresión (14.5) resulta

$$dA^2=P_{pnik}A^pA^n dS^{ik}+F_{pnik}A^pA^n dS^{ik}$$

el primer sumando es nulo por la propiedad de antisimetría del tensor de curvatura, entonces queda

$$dA^2=F_{pnik}A^pA^n dS^{ik}, \tag{15.5}$$

término que se anula en un espacio de Riemann pero no en el de Weyl. Por (9.5) tenemos

$$dA=\frac{1}{2}AF_{ik}dS^{ki} \quad\Rightarrow\quad dA^2=g_{pn}A^pA^nF_{ki}\,dS^{ik}$$

por tanto comparándola con (15.5) queda

$$F_{pnik}=-g_{pn}F_{ik}$$

lo que significa que el tensor de curvatura de un espacio de Weyl se puede poner como

$$R^q{}_{nik}=P^q{}_{nik}-\delta^q_nF_{ik},$$

donde el primer tensor del segundo miembro es antisimétrico respecto al primer par de índices (cuando están en forma covariante) y también respecto al segundo par. La anulación del tensor F_{ik} significa que el espacio se puede reducir a un espacio de Riemann por un adecuado cambio de calibración y por tanto en este caso $P^q{}_{nik}$ sería su tensor de curvatura.

Para poder desarrollar el tensor de curvatura en función tanto de la co-

ISBN: 978-84-617-1463-6

nexión afín como de ϕ_k necesitamos definir una nueva derivada covariante de un vector, que la identificaremos con un arterisco. Esta derivada no usa la conexión para su cálculo, sino los símbolos de Christoffel $L_{sk}{}^{r}$

$$D_k^* A^r = \partial_k A^r + A^s L_{sk}{}^{r},$$

por la definición de $L_{sk}{}^{r}$ se comprueba que $D^* g_{ik} = 0$. También será válida la relación (43.1)

$$L_{sr}{}^{s} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^r}.$$

Por tanto la divergencia de un vector será

$$D_k^* A^k = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial\left(\sqrt{g} A^k\right)}{\partial x^k} \quad \Rightarrow \quad D_k^*\left(\sqrt{g} A^k\right) = \partial_k\left(\sqrt{g} A^k\right).$$

10.5 La derivada co-covariante

Sea A un escalar de peso n, es decir que ante un cambio de calibración el escalar caracterizado por la función λ cambia según la ley

$$A' = \lambda^n A.$$

Al hallar la derivada parcial de la anterior igualdad se obtiene

$$\partial_k A' = \lambda^n \partial_k A + n\lambda^{n-1} \partial_k \lambda A$$

pero por (11.5) se puede poner

$$\partial_k A' = \lambda^n \left[\partial_k A + n\left(\phi_k - \phi'_k\right) A\right]$$

de donde se deriva que

$$\left(\partial_k A + n\phi_k A\right)' = \lambda^n \left(\partial_k A + n\phi_k A\right)$$

entonces definimos una nueva derivada por

$$\hat{D}_k A = \partial_k A + n\phi_k A$$

que es un vector que tiene el mismo peso que el escalar A. Nótese que si n es cero la nueva derivada coincide con la derivada parcial.

Este razonamiento se extiende al caso de un vector. En efecto, sea A_k un vector de peso n

$$A'_k = \lambda^n A_k$$

su derivada covariante se transforma ante un cambio de calibración según

$$\left(\partial_i A_k - A_s \Gamma_{ik}{}^{s}\right)' = \lambda^n \partial_i A_k + n\lambda^{n-1} \partial_i \lambda A_k - \lambda^n A_s \Gamma_{ik}{}^{s}$$

donde hemos tenido en cuenta que la conexión es invariante frente a cambios de calibración. Si de nuevo utilizamos (11.5) podemos poner

$$\left(\partial_i A_k - A_s \Gamma_{ik}^{\ \ s} + n\phi_i A_k\right)' = \lambda^n \left(\partial_i A_k - A_s \Gamma_{ik}^{\ \ s} + n\phi_i A_k\right)$$

lo que nos viene a decir que la derivada co-covariante de un vector definida por

$$\hat{D}_i A_k = \partial_i A_k - A_s \Gamma_{ik}^{\ \ s} + n\phi_i A_k$$

tiene, además del carácter tensorial, la misma ley de transformación frente a cambios de calibración que el vector A_k.

La derivada co-covariante se puede generalizar a cualquier tipo de tensor, así por ejemplo para el tensor $A_p^{\ q}$ de peso *n* tendremos

$$\hat{D}_i A_p^{\ q} = \partial_i A_p^{\ q} + A_p^{\ s} \Gamma_{is}^{\ \ q} - A_s^{\ q} \Gamma_{ip}^{\ \ s} + n\phi_i A_p^{\ q}$$

que se puede poner en función de la derivada covariante

$$\hat{D}_i A_p^{\ q} = D_i A_p^{\ q} + n\phi_i A_p^{\ q}.$$

La derivada co-covariante del tensor métrico es

$$\hat{D}_i g_{pq} = D_i g_{pq} + 2\phi_i g_{pq}$$

donde tenemos en cuenta que el peso del tensor métrico en forma covariante es 2. Por (6.5) encontramos que

$$\hat{D}_i g_{pq} = 0,$$

teniendo igual propiedad la derivada co-covariante del tensor métrico en forma contravariante.

11.5 El tensor de curvatura en función de ϕ_k

El tensor de curvatura (14.1) es definido en función de la conexión, pero estos símbolos están a su vez en función de los símbolos de Christoffel $L_{ik}^{\ \ p}$ y de la conexión métrica ϕ_k según se ve en (12.5). A continuación vamos a obtener la expresión del tensor de curvatura en función de ϕ_k y de $L_{ik}^{\ \ p}$, que son los símbolos de Christoffel formados a partir del tensor métrico g_{ik} del espacio de Weyl.

Vemos que el tensor de curvatura (14.1) se puede poner como

$$R^h_{\ ijk} = \left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^{\ \ h}}{\partial x^k} - \Gamma_{jr}^{\ \ h}\Gamma_{ik}^{\ \ r}\right) - \left(\frac{\partial \Gamma_{ik}^{\ \ h}}{\partial x^j} - \Gamma_{kr}^{\ \ h}\Gamma_{ij}^{\ \ r}\right) \tag{16.5}$$

donde comprobamos que el contenido de ambos paréntesis es el mismo con tal de intercambiar *j* por *k*. Por esta razón los términos que en cada paréntesis sean simétricos respecto a *j* y *k* no los tendremos en cuenta, ya que se anularán entre sí. Las conexiones que nos interesan son

ISBN: 978-84-617-1463-6

$$\Gamma_{ij}{}^{h} = L_{ij}{}^{h} + \delta_j^h \phi_i + \delta_i^h \phi_j - g_{ij}\phi^h$$
$$\Gamma_{jr}{}^{h} = L_{jr}{}^{h} + \delta_r^h \phi_j + \delta_j^h \phi_r - g_{jr}\phi^h$$
$$\Gamma_{ik}{}^{r} = L_{ik}{}^{r} + \delta_k^r \phi_i + \delta_i^r \phi_k - g_{ik}\phi^r$$

por tanto tenemos después de alguna simplificación

$$\begin{gathered}\frac{\partial \Gamma_{ij}{}^{h}}{\partial x^k} - \Gamma_{jr}{}^{h}\Gamma_{ik}{}^{r} = \frac{\partial L_{ij}{}^{h}}{\partial x^k} - L_{jr}{}^{h} L_{ik}{}^{r} + \delta_j^h \phi_{i,k} + \delta_i^h \phi_{j,k} - g_{ij,k}\,\phi^h - \\ - g_{ij}\phi^h_{,k} - \phi_i L_{jk}{}^{h} - \phi_k L_{ji}{}^{h} + g_{ik}\phi^r L_{jr}{}^{h} - \phi_j L_{ik}{}^{h} - \delta_j^h \phi_r L_{ik}{}^{r} + \\ + g_{jr}\phi^h L_{ik}{}^{r} - \delta_k^h \phi_j \phi_i - \delta_i^h \phi_j \phi_k + g_{ik}\phi_j \phi^h - \delta_j^h \phi_k \phi_i - \delta_j^h \phi_i \phi_k + \\ + \delta_j^h g_{ik}\phi_r \phi^r + g_{jk}\phi^h \phi_i + g_{ji}\,\phi^h \phi_k - g_{jr} g_{ik}\phi^h \phi^r .\end{gathered}$$

Vamos a enumerar los sumandos del segundo miembro de la anterior expresión desde el 1 hasta 21. El término 7 es simétrico respecto a j,k por tanto se anulará con un término igual pero de signo contrario que surge del segundo paréntesis de (16.5). La suma de los sumandos 8 y 10 es simétrica respecto a los índices j,k por lo que se anulará por igual razón. También son simétricos los términos 14 y 19 y las sumas de los términos 13 y 16, y 15 y 20, por lo que todos ellos se descartan.

Teniendo presente que $D^* g_{ik} = 0$, entonces la suma de los términos 5 y 12 es

$$g_{ij,k}\phi^h - g_{rj} L_{ik}{}^{r} \phi^h = g_{ir} L_{jk}{}^{r} \phi^h$$

de los sumandos 3 y 11 se encuentra

$$\phi_{i,k} - \phi_r L_{ik}{}^{r} = D_k^* \phi_i ,$$

y del término 9

$$L_{jr}{}^{h} g_{ik}\phi^r = L_{jr}{}^{h} g_{ik}\phi^r + L_{kr}{}^{h} g_{ij}\phi^r - L_{kr}{}^{h} g_{ij}\phi^r = -L_{kr}{}^{h} g_{ij}\phi^r ,$$

donde los dos primeros sumandos no los consideramos por ser simétricos respecto a j y k. Finalmente del sumando 6 y del 9 ya transformado

$$-g_{ij}\,\phi^h_{,k} + L_{kr}{}^{h} g_{ij}\phi^r = -g_{ij} D_k^* \phi^h .$$

Reuniendo todos los resultados queda para el tensor de curvatura en el espacio de Weyl

$$\begin{gathered}R^h{}_{ijk} = R^{*h}{}_{ijk} + \left(\delta_j^h D_k^* \phi_i - \delta_k^h D_j^* \phi_i\right) + \delta_i^h \left(\phi_{j,k} - \phi_{k,j}\right) - \\ - \left(g_{ij} D_k^* \phi^h - g_{ik} D_j^* \phi^h\right) + \left(\delta_k^h \phi_j \phi_i - \delta_j^h \phi_k \phi_i\right) + \\ + \left(\delta_j^h g_{ik} - \delta_k^h g_{ij}\right)\phi_r \phi^r + \left(g_{ij}\phi_k - g_{ik}\phi_j\right)\phi^h\end{gathered} \qquad (17.5)$$

donde R^{*h}_{ijk} es el tensor de curvatura obtenido de los símbolos de Christoffel. El tensor de curvatura es simétrico respecto a sus dos últimos índices, pero no respecto a los dos primeros como ocurre en los espacios de Riemann. De (17.5) se obtiene que

$$R_{hijk} - R_{ihjk} = 2g_{ih}\left(\phi_{j,k} - \phi_{k,j}\right) = 2g_{ih}F_{kj}.$$

12.5 Tensor de Ricci y curvatura escalar en el espacio de Weyl

El tensor de Ricci se obtiene del tensor de curvatura (17.5) contrayendo los índices h y k

$$R_{ij} = R^*_{ij} + F_{ij} - 2D^*_j\phi_i - g_{ij}D^*_k\phi^k + 2\phi_j\phi_i - 2g_{ij}\phi_k\phi^k.$$

teniendo presente que

$$F_{ij} - 2D^*_j\phi_i = F_{ij} - D^*_j\phi_i - D^*_j\phi_i - D^*_i\phi_j + D^*_i\phi_j = 2F_{ij} - D^*_j\phi_i - D^*_i\phi_j$$

entonces el tensor de Ricci queda como

$$R_{ij} = R^*_{ij} + 2F_{ij} - D^*_j\phi_i - D^*_i\phi_j - g_{ij}D^*_k\phi^k + 2\phi_j\phi_i - 2g_{ij}\phi_k\phi^k. \quad (18.5)$$

El tensor de Ricci (18.5) se descompone en parte simétrica y antisimétrica

$$R_{(ij)} = R^*_{ij} - D^*_j\phi_i - D^*_i\phi_j - g_{ij}D^*_k\phi^k + 2\phi_j\phi_i - 2g_{ij}\phi_k\phi^k$$
$$R_{[ij]} = 2F_{ij}.$$

Al contraer el tensor de Ricci se obtiene la curvatura escalar

$$R = R^* - 6D^*_k\phi^k - 6\phi_k\phi^k, \quad (19.5)$$

donde R^* es la curvatura escalar calculada a partir de los símbolos de Christoffel. La expresión (19.5) también se puede poner como

$$R = R^* - \frac{6}{\sqrt{g}}\frac{\partial\left(\sqrt{g}\phi^k\right)}{\partial x^k} - 6\phi_k\phi^k. \quad (20.5)$$

13.5 Posibles densidades lagrangianas

La teoría de Weyl pretende unificar los campos gravitatorios y electromagnéticos y a la vez darle a este último una explicación geométrica. En la teoría de Weyl el tensor métrico sigue siendo el potencial gravitatorio y la conexión métrica ϕ_k será proporcional al tetrapotencial electromagnético, mientras que el tensor F_{ik} será proporcional al tensor de campo electromagnético.

Las ecuaciones de campo gravitatorio y electromagnético van a ser obtenidas a partir del principio de mínima acción. Para ello necesitamos una

ISBN: 978-84-617-1463-6

densidad lagrangiana que tenga la estructura $\sqrt{g}\,\mathfrak{L}$ siendo $\mathfrak{L}$ invariante frente a transformaciones genéricas de coordenadas y $\sqrt{g}\,\mathfrak{L}$ invariante ante transformaciones de calibración, gauge o conformes. Nótese que la raíz cuadrada del determinante del tensor métrico tiene de peso 4, por tanto tenemos que encontrar una función $\mathfrak{L}$ que tenga de peso –4 para así conseguir la deseada invariancia conforme.

Los posibles candidatos para lagrangianas son

$$\sqrt{g}R^2; \qquad \sqrt{g}R_{ik}R^{ik}; \qquad \sqrt{g}R^h{}_{ijk}R^{ijk}{}_h; \qquad \sqrt{g}F_{ik}F^{ik}, \tag{21.5}$$

en general la densidad lagrangiana será una combinación lineal de las cuatro anteriores. Encontramos que la densidad lagrangiana $\sqrt{g}R$ que nos da las ecuaciones de la gravitación en la teoría de Einstein no es invariante conforme y no es válida en el marco de la teoría de Weyl. Al utilizar las densidades lagrangianas (21.5) encontramos para la gravitación ecuaciones de campo de cuarto orden, por tanto diferentes de las obtenidas en la teoría de Einstein. En efecto, las tres primeras lagrangianas (21.5), que son las que pueden dar lugar a las ecuaciones del campo gravitatorio, dependen de las derivadas segundas del tensor métrico. En este caso será de aplicación la ecuación (10.2) y de su segundo sumando surgen derivadas de hasta el orden cuatro del tensor métrico.

Indicar que si la densidad lagrangiana $\sqrt{g}\,\mathfrak{L}$ es invariante frente a transformaciones de calibración, así también lo serán las ecuaciones de campo deducidas de un principio variacional.

Originalmente Weyl eligió, sin razón alguna, la densidad lagrangiana

$$\sqrt{g}\,\mathfrak{L} = \sqrt{g}R^2 + \alpha\sqrt{g}F_{ik}F^{ik} \tag{22.5}$$

donde α es una constante de acomplamiento entre los campos gravitatorio y electromagnético. Más adelante le aplicaremos a (22.5) el principio de mínima acción para obtener las ecuaciones de campo.

14.5 Leyes de conservación

Aún sin conocer exactamente la densidad lagrangiana se pueden obtener resultados generales, en particular las leyes de conservación. Partimos de una densidad lagrangiana que tiene la siguiente dependencia funcional

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}\left(g^{ik}, g^{ik}_{,r}, \Gamma^{\,j}_{ik}, \Gamma^{\,j}_{ik,r}, \phi_i, \phi_{i,k}\right),$$

démonos cuenta que se toman las componentes de la conexión afín como potenciales de campo, es decir no consideramos previamente la ecuación (6.5), la cual debe surgir de las ecuaciones de campo.

El principio de mínima acción establece que la variación de la acción se anula

$$\delta I=\int\left(\boldsymbol{m}^{i}\delta\phi_{i}+\boldsymbol{W}^{ik}\delta g_{ik}+\boldsymbol{n}_{j}{}^{ik}\delta\Gamma_{ik}{}^{j}\right)d\Omega=0 \qquad (23.5)$$

siempre y cuando las variaciones de los potenciales (y eventualmente las variaciones de las derivadas de los potenciales) se anulen en los límites de integración. $\boldsymbol{m}^{i}$, $\boldsymbol{W}^{ik}$ y $\boldsymbol{n}_{j}{}^{ik}$ son densidades tensoriales. En efecto, al hacer la variación de la acción se encuentra

$$\delta I=\int\delta\left(\sqrt{g}\mathfrak{L}\right)d\Omega=\int\frac{\partial\left(\sqrt{g}\mathfrak{L}\right)}{\partial g^{ik}}\delta g^{ik}d\Omega+\int\frac{\partial\left(\sqrt{g}\mathfrak{L}\right)}{\partial g^{ik}_{,r}}\delta g^{ik}_{,r}d\Omega+\ldots.$$

e integrales similares para los dos restantes conjuntos de potenciales. La segunda integral del último miembro se transforma según

$$\int\frac{\partial\left(\sqrt{g}\mathfrak{L}\right)}{\partial g^{ik}_{,r}}\delta g^{ik}_{,r}d\Omega=\int\frac{\partial}{\partial x^{r}}\left[\frac{\partial\left(\sqrt{g}\mathfrak{L}\right)}{\partial g^{ik}_{,r}}\delta g^{ik}\right]d\Omega-$$

$$-\int\frac{\partial}{\partial x^{r}}\left[\frac{\partial\left(\sqrt{g}\mathfrak{L}\right)}{\partial g^{ik}_{,r}}\right]\delta g^{ik}d\Omega$$

la primera integral del segundo miembro se anula al convertirse por el teorema de Gauss en una integral de superficie y ser nula la variación en los límites de la integral. Por tanto la variación de la acción queda

$$\delta I=\int\left\{\frac{\partial\left(\sqrt{g}\mathfrak{L}\right)}{\partial g^{ik}}-\frac{\partial}{\partial x^{r}}\left[\frac{\partial\left(\sqrt{g}\mathfrak{L}\right)}{\partial g^{ik}_{,r}}\right]\right\}\delta g^{ik}d\Omega+\ldots\ldots$$

desarrollando las derivadas de la expresión anterior y teniendo cuenta que $\delta g=g\,g^{pq}\,\delta g_{pq}$ se encuentra

$$\delta I=\int\sqrt{g}W^{ik}\delta g_{ik}d\Omega+\ldots..=\int\boldsymbol{W}^{ik}\delta g_{ik}d\Omega+\ldots.$$

y lo mismo para los restantes potenciales, con lo que reencontramos (23.5).

Al aplicar el principio de mínima acción a (23.5) se encuentra que es nula la variación de la acción y como las variaciones de los potenciales son arbitrarias, deberán ser nulos sus coeficientes; por tanto las ecuaciones de campo son

$$\boldsymbol{m}^{i}=0;\qquad \boldsymbol{W}^{ik}=0;\qquad \boldsymbol{n}_{j}{}^{ik}=0,$$

el primer conjunto de ecuaciones son las correspondientes al campo electromagnético. El segundo grupo son las ecuaciones de la gravitación. Finalmente el tercer grupo nos da la relación existente entre la conexión afín y los restantes potenciales del campo. En el caso de la teoría de Weyl esta última

ISBN: 978-84-617-1463-6

relación nos viene dada de partida, por tanto la conexión afín no hay que entenderla como un potencial independiente, sino como una función del tensor métrico y del potencial electromagnético y así lo haremos en lo sucesivo.

Vamos a considerar una transformación infinitesimal y arbitraria de la calibración que vamos a representar por la función $\lambda = 1 + \pi$. Entonces por (10.5) el tensor métrico se transformará como

$$g'_{ik} = \lambda^2 g_{ik} \approx \left(1 + 2\pi\right) g_{ik} \quad \Rightarrow \quad \delta g_{ik} = 2\pi g_{ik}$$

y ϕ_i cambiará según (11.5)

$$\phi'_i = \phi_i - \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x^i} \approx \phi_i - \frac{\partial \pi}{\partial x^i} \quad \Rightarrow \quad \delta\phi_i = -\frac{\partial \pi}{\partial x^i} \; .$$

La acción del campo queda inalterada cuando se produce un cambio de calibración, ya que la densidad lagrangiana no varía ni tampoco lo hacen los límites de la integral de acción, por tanto ante un cambio infinitesimal de calibración se encuentra que

$$\delta I = 0 = \int \left[\boldsymbol{m}^i \left(-\frac{\partial \pi}{\partial x^i} \right) + \boldsymbol{W}^{ik} 2\pi g_{ik} \right] d\Omega,$$

aplicando el teorema integral de Gauss al primer sumando de la integral obtenemos

$$\int \left[\boldsymbol{m}^i_{,i} + 2\boldsymbol{W}^{ik} g_{ik} \right] \pi d\Omega = 0$$

como la función infinitesimal π es arbitraria resulta la nulidad del integrando

$$\boldsymbol{m}^i_{,i} + 2\boldsymbol{W}^i{}_i = 0, \text{(25.5)}$$

ahora bien, de la ecuación de campo gravitatorio se tiene que $\boldsymbol{W}^i{}_i = 0$ por tanto de la invariancia de la densidad lagrangiana frente a transformaciones de calibración se concluye la ley de conservación diferencial

$$\boldsymbol{m}^i_{,i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \boldsymbol{m}^i}{\partial x^i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial\left(\sqrt{g} m^i\right)}{\partial x^i} = 0 \qquad (26.5)$$

donde hemos usado (50.1). (26.5) representa la ley de conservación de la carga eléctrica. Como veremos más adelante, la teoría de Weyl conduce a las ecuaciones habituales del campo electromagnético

$$\frac{\partial\left(\sqrt{g} F^{ik}\right)}{\partial x^k} + \frac{1}{\varepsilon_0}\sqrt{g} j^i = 0$$

que es una densidad tensorial que identificamos con $\boldsymbol{m}^i = 0$. Al aplicarle

(25.5) y teniendo en cuenta el carácter antisimétrico del tensor de campo electromagnético queda

$$\frac{\partial\left(\sqrt{g}\,j^{i}\right)}{\partial x^{i}}=0$$

que es la ley de conservación diferencial de la carga eléctrica, la misma ley que se encuentre en relatividad general, pero en este caso al ser el espacio de Riemann y por tanto nula la derivada covariante del tensor métrico, toma la forma $D_i\, j^i = 0$. Démonos cuenta que esta última forma no es válida en un espacio de Weyl, por no ser nula la derivada covariante del tensor métrico.

Si ahora suponemos la variación que registra la acción del campo cuando a sus potenciales se le someten a una transformación infinitesimal de coordenadas, reencontraremos la ley de conservación del tensor energía-momento del campo electromagnético. En efecto, consideremos la transformación infinitesimal de coordenadas

$$x'^{\,i}=x^{i}+\xi^{i}\left(x^{k}\right)$$

donde suponemos que las funciones ξ^i se anulan en los límites de integración y eventualmente lo mismo ocurrirá con su derivadas. Ante este cambio de coordenadas la conexión métrica se transformará por la ley

$$\phi'_i=\frac{\partial x^{k}}{\partial x'^{\,i}}\phi_k=\left(\delta_i^k-\xi^k_{,i}\right)\phi_k=\phi_i-\xi^k_{,i}\phi_k\,.$$

Usando (14.5) encontramos que la variación del tetrapotencial se realiza como en el epígrafe 9.4, resultando

$$\bar{\delta}\phi_i=-\xi^k_{,i}\phi_k-\xi^k\phi_{i,k} \tag{26.5}$$

donde $\bar{\delta}$ indica variación del tetrapotencial pero sin incluir la variación resultado de la variación de las coordenadas. Al igual que se obtuvo en 9.4 tendremos para el tensor métrico

$$\bar{\delta}g_{ij}=-\xi^k g_{ij,k}-g_{kj}\xi^k_{,i}-g_{ik}\xi^k_{,j}\,. \tag{27.5}$$

La variación de la acción cuando se le somete a una variación de coordenadas de las características anteriores se anula, dado que el integrando es invariante y no se modifican los límites de la integración, o dicho de otra forma, porque cumplen las condiciones exigidas por el teorema de Noether; entonces

$$\bar{\delta}I=0=\int\left[\boldsymbol{m}^{i}\bar{\delta}\phi_i+\boldsymbol{W}^{ij}\bar{\delta}g_{ij}\right]d\Omega,$$

donde ahora no consideramos el término $\boldsymbol{n}_j^{\;ik}$, es decir vamos a dar por establecida la relación (6.5) entre la conexión y el tensor métrico. Utilizando

ISBN: 978-84-617-1463-6

(26.5) y (27.5) tenemos

$$\bar{\delta} I=\int\left[\begin{array}{c}-\mathfrak{m}^{i} \xi_{,i}^{k} \phi_{k}-\mathfrak{m}^{i} \xi^{k} \phi_{i,\mathrm{k}}-\mathfrak{W}^{ij} \xi^{k} g_{jk,k}- \\ -\mathfrak{W}^{ij} g_{kj} \xi_{,i}^{k}-\mathfrak{W}^{ij} g_{ik} \xi_{,j}^{k}\end{array}\right] d \Omega, \tag{28.5}$$

aplicando el teorema de Gauss y teniendo en cuenta que ξ^{k} se anula en los límites de la integral queda

$$\int\left[\left(\mathfrak{m}^{i} \phi_{k}\right)_{,i}-\mathfrak{m}^{i} \phi_{i,k}-\mathfrak{W}^{ij} g_{ij,k}+2\left(\mathfrak{W}_{k}^{i}\right)_{,i}\right] \xi^{k} d \Omega=0,$$

como ξ^{k} es una función arbitraria se llega a

$$\mathfrak{m}_{,i}^{i} \phi_{k}+\mathfrak{m}^{i} \phi_{k,i}-\mathfrak{m}^{i} \phi_{i,k}-\mathfrak{W}^{ij} g_{ij,k}+2\left(\mathfrak{W}_{k}^{i}\right)_{,i}=0. \tag{29.5}$$

Como es válida (12.5) y

$$\begin{aligned} \mathfrak{W}_{k}^{i} \Gamma_{ir}{}^{k} &=\mathfrak{W}_{k}^{i} L_{ir}{}^{k}+\mathfrak{W}_{r}^{i} \phi_{i}+\mathfrak{W}_{i}^{i} \phi_{r}-\mathfrak{W}_{rk} \phi^{k}= \\ &=\mathfrak{W}_{k}^{i} L_{ir}{}^{k}+\mathfrak{W}_{i}^{i} \phi_{r}=\frac{1}{2} \mathfrak{W}^{ij} g_{ij,r}+\mathfrak{W}_{i}^{i} \phi_{r}\end{aligned}$$

entonces (29.5) queda

$$\frac{\partial \mathfrak{W}_{k}^{i}}{\partial x^{i}}-\mathfrak{W}_{k}^{i} \Gamma_{ir}{}^{k}+\frac{1}{2} \mathfrak{m}^{i} F_{ik}=0$$

y teniendo en cuenta las ecuaciones de campo $\mathfrak{m}^{i}=0$ y $\mathfrak{W}_{k}^{i}=0$

$$\frac{\partial \mathfrak{W}_{k}^{i}}{\partial x^{i}}=0 \quad \Rightarrow \quad D_{i}^{*} \mathfrak{W}_{k}^{i}=0 \tag{30.5}$$

ya que $\mathfrak{W}^{ik}$ al ser una densidad tensorial simétrica cumple (53.1).

(30.5) corresponde a la ley de conservación del tensor de energía-momento del campo electromagnético. En efecto, $\mathfrak{W}_{i}{}^{k}=0$ está compuesta de dos términos, en el caso de las ecuaciones de campo de Einstein sería

$$W_{k}^{i}=E_{k}^{i}+\chi T_{k}^{i}=0$$

donde E_{k}^{i} es el tensor de Einstein, mientras que T_{k}^{i} el tensor energía-momento del campo electromagnético. Como la divergencia de E_{i}^{k} es idénticamente nula, la ecuación (30.5) significa que

$$D_{i}^{*} T_{k}^{i}=0.$$

15.5 Ecuaciones de campo electromagnético deducidas de la lagrangiana de Weyl

Para obtener las ecuaciones de campo electromagnético partimos de la acción formada por la lagrangiana (22.5) y aplicamos el principio de mínima acción, haciendo una variación arbitraria de la conexión métrica con el requisito, ya habitual, de que se anule en los extremos de la integración. Entonces será válida la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial\sqrt{g}\mathfrak{L}}{\partial\phi_{i,k}}\right)-\frac{\partial\sqrt{g}\mathfrak{L}}{\partial\phi_i}=0$$

ya que (22.5) sólo depende de la conexión métrica y de sus primeras derivadas.

La curvatura escalar (20.5) se desarrolla como

$$R=R^*-\frac{6}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^i}g^{ik}\phi_k-6\phi_k\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^i}-6g^{ik}\frac{\partial\phi_k}{\partial x^i}-6g^{ik}\phi_k\phi_i.$$

El segundo sumando de la ecuación de Euler-Lagrange aplicado a (22.5) es

$$\frac{\partial\left(\sqrt{g}\mathfrak{L}\right)}{\partial\phi_i}=\frac{\partial\left(\sqrt{g}R^2\right)}{\partial\phi_i}=2\sqrt{g}R\frac{\partial R}{\partial\phi_i}=-2\sqrt{g}R\left[\frac{6}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x_i}+6\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^i}+12\phi^i\right].$$

Por otra parte

$$\frac{\partial\left(\sqrt{g}\mathfrak{L}\right)}{\partial\phi_{i,k}}=2\sqrt{g}R\frac{\partial R}{\partial\phi_{i,k}}+\frac{\partial}{\partial\phi_{i,k}}\left(F_{ik}F^{ik}\right)=-12\sqrt{g}Rg^{ik}+4\alpha\sqrt{g}F^{ki},$$

su derivada es

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left[\frac{\partial\left(\sqrt{g}\mathfrak{L}\right)}{\partial\phi_{i,k}}\right]=-12\sqrt{g}\frac{\partial R}{\partial x_i}-12R\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x_i}-12\sqrt{g}R\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^k}+4\alpha\frac{\partial\left(\sqrt{g}F^{ki}\right)}{\partial x^k}$$

al aplicar la ecuación de Euler-Lagrange obtenemos

$$-12\sqrt{g}\frac{\partial R}{\partial x_i}+4\alpha\frac{\partial\left(\sqrt{g}F^{ki}\right)}{\partial x^k}+24\sqrt{g}R\phi^i=0$$

o bien

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\left(\sqrt{g}F^{ik}\right)}{\partial x^k}=-\frac{3}{\alpha}\left(\frac{\partial R}{\partial x_i}-2R\phi^i\right) \qquad (31.5)$$

que corresponde al primer grupo de las ecuaciones de Maxwell si se supone que la densidad de corriente es

$$j^i=\beta\left(\frac{\partial R}{\partial x_i}-2R\phi^i\right)$$

con β una constante desconocida tal que

ISBN: 978-84-617-1463-6

$$\frac{3}{\alpha\beta} = \frac{1}{\varepsilon_0}.$$

Notemos que por la propia definición de F_{ik} se cumple el segundo conjunto de ecuaciones de Maxwell.

Como era de esperar la ecuación de campo electromagnético (31.5) es invariante frente a cambios de calibración y teniendo presente (53.1) y el carácter antisimétrico del tensor F_{ik} también se observa que (31.5) es una ecuación tensorial.

16.5 Relaciones matemáticas

Con vista a obtener las ecuaciones generales de campo gravitatorio de la teoría de Weyl debemos obtener algunas relaciones matemáticas. Vamos a utilizar dos derivadas covariantes. Una de ellas es la expresión habitual, donde la derivación se calcula respecto a la conexión del espacio. Para el caso de la derivada de un vector tendremos

$$D_k v^i = \partial_k v^i + v^s \Gamma_{sk}^{\ \ i}.$$

La otra derivada covariante se calcula respecto a los símbolos de Christoffel $L_{sk}^{\ \ i}$

$$D_k^* v^i = \partial_k v^i + v^s L_{sk}^{\ \ i}.$$

Se estabece una relación entre ambas derivadas covariantes teniendo en cuenta que en una espacio de Weyl la conexión afín está relacionada con los símbolos de Christoffel por (12.5). Para el caso de un vector tendremos

$$D_k v^i = D_k^* v^i + \delta_k^i v^s \phi_s + v^i \phi_k - v_k \phi^i$$

y para su divergencia

$$D_k v^k = D_k^* v^k + 4 v^k \phi_k. \qquad (32.5)$$

Se puede comprobar sin dificultad que tanto en un espacio de Riemann como en uno de Weyl es válida la relación

$$D_k\left(\sqrt{g}\, v^k\right) = \partial_k\left(\sqrt{g}\, v^k\right)$$

esto significa que podemos formular el teorema integral de Gauss de dos formas ligeramente diferentes

$$\int_V D_k\left(\sqrt{g}\, v^k\right) d\Omega = \int_\Sigma v_k dS^k$$

$$\int_V D_k^*\left(\sqrt{g}\, v^k\right) d\Omega = \int_V \sqrt{g}\, D_k^* v^k d\Omega = \int_\Sigma v_k dS^k$$

este teorema será profusamente aplicado en nuestros ulteriores cálculos, indicar que haremos uso de la segunda formulación por parecernos que facilita las largas operaciones matemáticas típicas de los cálculos variacionales, pero igualmente se podría hacer uso de la primera forma del teorema de Gauss.

Para abordar la variación de la acción frente a una variación arbitraria del tensor métrico es de suma utilidad la identidad de Palatini (5.4), aplicable tanto al tensor de Ricci

$$\delta R_{ik} = D_k\left(\delta\Gamma_{il}{}^{l}\right) - D_l\left(\delta\Gamma_{ik}{}^{l}\right),$$

como al tensor de curvatura

$$\delta R^{i}{}_{kpq} = D_p\left(\delta\Gamma_{kq}{}^{i}\right) - D_q\left(\delta\Gamma_{kp}{}^{i}\right), \tag{33.5}$$

expresión que se obtiene de manera similar a la (5.4) . Nótese que debemos tener presente que aunque la conexión no sea un tensor sí lo es su variación.

De (12.5) obtenemos la variación de la conexión

$$\delta\Gamma_{sk}{}^{i} = \delta L_{sk}{}^{i} - \phi^{i}\delta g_{sk} + g_{sk}g^{im}\phi^{n}\delta g_{mn}$$

donde tomamos como conexión métrica sus componentes covariantes. La variación de los símbolos de Christoffel es

$$\delta L_{sk}{}^{i} = -g^{ip}L_{sk}{}^{q}\delta g_{pq} + \frac{1}{2}g^{im}\left(\partial_s\delta g_{km} + \partial_k\delta g_{sm} - \partial_m\delta g_{sk}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}g^{im}\left(D^{*}_{s}\delta g_{km} + D^{*}_{k}\delta g_{sm} - D^{*}_{m}\delta g_{sk}\right),$$

por tanto la variación de la conexión ante una variación del tensor métrico es

$$\begin{aligned}\delta\Gamma_{sk}{}^{i} = \frac{1}{2}g^{im}\left(D^{*}_{s}\delta g_{km} + D^{*}_{k}\delta g_{sm} - D^{*}_{m}\delta g_{sk}\right) - \\ - \phi^{i}\delta g_{sk} + g_{sk}g^{im}\phi^{n}\delta g_{mn}.\end{aligned} \tag{34.5}$$

Con estas herramientas matemáticas estamos en condiciones de abordar la obtención de las ecuaciones de la gravitación aplicando el principio de mínima acción a la densidad lagrangiana de Weyl.

17.5 Ecuaciones de campo gravitatorio

Nos proponemos obtener las ecuaciones de la gravedad con la densidad lagrangiana de Weyl (22.5) cuya acción es

$$I = \int\sqrt{g}\left(R^2 + \alpha F_{ik}F^{ik}\right)d\Omega$$

para ello variamos la acción I con respecto a una variación arbitraria del tensor métrico, con la única condición de que tanto esta variación como su

ISBN: 978-84-617-1463-6

derivada se anulen en los límites de la integral de la acción. La variación del primer sumando de la acción es

$$\delta\left(\sqrt{g}R^2\right) = R^2\delta\sqrt{g} + 2\sqrt{g}R\delta R =$$
$$= -\frac{1}{2}\sqrt{g}g_{ik}R^2\delta g^{ik} + 2\sqrt{g}RR_{ik}\delta g^{ik} + 2\sqrt{g}Rg^{ik}\delta R_{ik}$$

para calcular la variación del tensor de Ricci usamos la relación de Palatini (5.4)

$$2\sqrt{g}Rg^{ik}\delta R_{ik} =$$
$$= 2\sqrt{g}R\begin{bmatrix} D_k\left(g^{ik}\delta\Gamma_{il}{}^{l}\right) - D_l\left(g^{ik}\delta\Gamma_{ik}{}^{l}\right) - \\ -\left(D_k g^{ik}\right)\delta\Gamma_{il}{}^{l} + \left(D_l g^{ik}\right)\delta\Gamma_{ik}{}^{l} \end{bmatrix} \qquad (35.5)$$

Para mostrar como se hace el anterior cálculo vamos a desarrollarlo para el primer sumando de (35.5).

$$2\sqrt{g}RD_k\left(g^{ik}\delta\Gamma_{il}{}^{l}\right) = 2\sqrt{g}R\left[\overset{*}{D}_k\left(g^{ik}\delta\Gamma_{il}{}^{l}\right) + 4\phi_k g^{ik}\delta\Gamma_{il}{}^{l}\right], \qquad (36.5)$$

donde hemos utilizado (32.5). El primer sumando de (36.5) lo simplificamos con el teorema integral de Gauss

$$2\sqrt{g}R\overset{*}{D}_k\left(g^{ik}\delta\Gamma_{il}{}^{l}\right) = 2\sqrt{g}\overset{*}{D}_k\left(Rg^{ik}\delta\Gamma_{il}{}^{l}\right) - 2\sqrt{g}g^{ik}\left(\overset{*}{D}_k R\right)\delta\Gamma_{il}{}^{l},$$

el primero de los sumandos se anula al aplicar el teorema de Gauss y utilizando (34.5) en el segundo sumando queda

$$2\sqrt{g}R\overset{*}{D}_k\left(g^{ik}\delta\Gamma_{il}{}^{l}\right) = -\sqrt{g}g^{ik}g^{im}\overset{*}{D}_k R\left(\overset{*}{D}_i\delta g_{lm} + \overset{*}{D}_l\delta g_{im} - \overset{*}{D}_m\delta g_{il}\right) +$$
$$+ 2\sqrt{g}g^{ik}\overset{*}{D}_k R\phi^l\delta g_{il} - 2\sqrt{g}g^{ik}\overset{*}{D}_k R\phi^n\delta g_{in}.$$

De nuevo se aplica el teorema de Gauss en cada uno de los sumandos del segundo miembro y se encuentra finalmente

$$2\sqrt{g}R\overset{*}{D}_k\left(g^{ik}\delta\Gamma_{il}{}^{l}\right) = \sqrt{g}g^{ik}g^{lm}\overset{*}{D}_i\overset{*}{D}_k R\delta g_{lm}.$$

Para concluir con el primero de los sumandos de (35.5) analizamos el segundo sumando de (36.5)

$$8\sqrt{g}R\phi_k g^{ik}\delta\Gamma_{il}{}^{l} = 4\sqrt{g}g^{ik}g^{lm}R\phi_k\left(\overset{*}{D}_i\delta g_{lm} + \overset{*}{D}_l\delta g_{im} - \overset{*}{D}_m\delta g_{il}\right) -$$
$$-8\sqrt{g}R\phi^i\phi^l\delta g_{il} + 8\sqrt{g}R\phi^i\phi^n\delta g_{in}$$

y de nuevo al hacer la integración por partes y usar el teorema de Gauss nos queda

$$\sqrt{g}\left(-4g^{ik}g^{lm}\phi_k\overset{*}{D}_i R - 4g^{ik}g^{lm}R\overset{*}{D}_i\phi_k\right)\delta g_{lm}$$

por tanto el primer sumando de (35.5) queda

$$2\sqrt{g}RD_k\left(g^{ik}\delta\Gamma_{il}{}^{l}\right)=$$
$$=\sqrt{g}\left(g^{il}g^{km}D_i^*D_l^*R-4g^{km}\phi^iD_i^*R-4g^{km}RD_i^*\phi^i\right)\delta g_{km}.$$

El procedimiento es similar para los restantes tres sumandos de (35.5) y obtenemos para el segundo sumando

$$-2\sqrt{g}RD_l\left(g^{ik}\delta\Gamma_{ik}{}^{l}\right)=$$
$$=\sqrt{g}\begin{pmatrix}-2g^{ik}g^{lm}D_i^*D_l^*R+g^{km}g^{il}D_i^*D_l^*R-6g^{km}\phi^iD_i^*R+\\ +16g^{im}\phi_kD_i^*R+8g^{ik}RD_i^*\phi^m-4g^{km}RD_i^*\phi^i-\\ -32\phi^k\phi^m+8g^{km}R\phi_l\phi^l\end{pmatrix}\delta g_{km},$$

para el tercer sumando

$$-2\sqrt{g}RD_kg^{ik}\delta\Gamma_{il}{}^{l}=\sqrt{g}\left(2g^{km}RD_i^*\phi^i+2g^{km}\phi^iD_i^*R\right)\delta g_{km},$$

donde hemos aplicado la relación $D_rg^{ik}=2g^{ik}\phi_r$ que se establece como definición de un espacio de Weyl. Para el cuarto sumando de (35.5) encontramos

$$2\sqrt{g}RD_lg^{ik}\delta\Gamma_{ik}{}^{l}=$$
$$=\sqrt{g}\begin{pmatrix}-4g^{ik}RD_i^*\phi^m-4g^{ik}\phi^mD_i^*R+2g^{km}RD_i^*\phi^i+\\ +2g^{km}\phi^iD_i^*R-4g^{km}R\phi_l\phi^l+16R\phi^k\phi^m\end{pmatrix}\delta g_{km}.$$

Reuniendo todos los resultados y considerando la variación respecto a las componentes contravariantes del tensor métrico en vez de con respecto a las covariantes

$$2\sqrt{g}Rg^{ik}\delta R_{ik}=$$
$$=\sqrt{g}\begin{pmatrix}-2g_{ik}D_l^*D^{*l}R+D_i^*D_k^*R+6g_{ik}\phi^lD_l^*R+4g^{ik}RD_l^*\phi^l-\\ -6\phi_iD_k^*R-6\phi_kD_i^*R-2RD_i^*\phi_k-\\ -2RD_k^*\phi_i+16R\phi_i\phi_k-4Rg_{ik}\phi_l\phi^l\end{pmatrix}\delta g^{ik}.$$

Reagrupando términos encontramos

$$\delta\left(\sqrt{g}R^2\right)=\sqrt{g}\begin{pmatrix}2RR_{(ik)}-\frac{1}{2}g_{ik}R^2-2g_{ik}D_l^*D^{*l}R+\\ +2D_i^*D_k^*R+6g_{ik}\phi^lD_l^*R+4g^{ik}RD_l^*\phi^l-\\ -6\phi_iD_k^*R-6\phi_kD_i^*R-\\ -2RD_i^*\phi_k-2RD_k^*\phi_i+16R\phi_i\phi_k-4g_{ik}R\phi^l\phi_l\end{pmatrix}\delta g^{ik},$$

ISBN: 978-84-617-1463-6

donde $R_{(ik)}$ representa la parte simétrica del tensor de Ricci.

Es necesario finalmente hacer la variación de la parte electromagnética de la acción, obteniendo al igual que en Relatividad General, el tensor energía-momento del campo electromagnético. Por tanto las ecuaciones de campo gravitatorio que se obtienen de la acción de Weyl son

$$RR_{(ik)} - \frac{1}{4} g_{ik} R^2 - g_{ik} D_l^* R^{,l} + D_i^* R_{,k} + 3 g_{ik} \phi^l R_{,l} + 2 g_{ik} R D_l^* \phi^l -$$
$$-3\phi_i R_{,k} - 3\phi_k R_{,i} - R D_i^* \phi_k - R D_k^* \phi_i + 8R\phi_i \phi_k - 2 g_{ik} R \phi^l \phi_l = -\chi T_{ik}. \tag{37.5}$$

anotemos también que $D_i^* R$ coincide con la derivada parcial $\partial_i R = R_{,i}$ ya que R es un invariante.

Si en vez de usar la derivada covariante D_k^* usamos la otra derivada D_k se obtiene

$$RR_{(ik)} - \frac{1}{4} g_{ik} R^2 - 4 g_{ik} R \phi^l \phi_l + 4R\phi_i \phi_k + 2\phi_i R_{,k} + 2\phi_k R_{,i} - 4 g_{ik} \phi^l R_{,l} -$$
$$-g_{ik} D_l R^{,l} - 2 g_{ik} R D_l \phi^l + D_i R_{,k} + R D_i \phi_k + R D_k \phi_i = -\chi T_{ik}.$$

18.5 Ecuaciones de campo gravitatorio en ausencia de campo electromagnético

Como ya habíamos anticipado las ecuaciones de campo gravitatorio (37.5) son ecuaciones diferenciales de cuarto orden, donde se encuentran entremezclados los potenciales gravitatorio y electromagnético. A causa de la simetría, (37.5) son diez ecuaciones diferenciales, el mismo número que en relatividad general. A (37.5) hay que añadirle las cuatro ecuaciones de campo electromagnético (31.5) que resultan de la variación de la acción de Weyl respecto a una variación arbitraria del potencial electromagnético.

Si contraemos (37.5) encontramos

$$D_l^* \left(\frac{\partial R}{\partial x_l} - 2R\phi^l \right) = 0 \tag{38.5}$$

donde hemos tenido en cuenta que la traza del tensor energía-momento electromagnético es nulo. (38.5) corresponde a la ley de conservación de la densidad de carga eléctrica en la teoría de Weyl, como se deduce de (35.1).

Cuando no hay campo electromagnético $F_{ik} = 0$, entonces por (35.1) la conexión métrica se encuentra relacionada con la curvatura escalar por

$$\phi_i = \frac{1}{2R} \frac{\partial R}{\partial x^i}, \tag{39.5}$$

de tal manera que las 14 ecuaciones de campo quedan a reducidas a 10 ecuaciones, las correspondientes a (37.5) cuando en ella se haga la sustitución (39.5). La ecuaciones resultantes son invariantes de escala, por esta razón podemos elegir un calibración particular, de tal forma que nos simplifique las ecuaciones de campo. Una opción es elegir

$$R = -4\Lambda \tag{40.5}$$

donde Λ es una constante, que más adelante identificaremos con la constante cosmológica. A la calibración (40.5) se le llama calibración natural. Haciendo esta elección la conexión métrica es idénticamente nula y las ecuaciones (37.5) se reducen a

$$R^*_{ik} - \frac{1}{4} g_{ik} R^* = 0.$$

Teniendo en cuenta (40.5) la ecuación de campo nos queda

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R \; - \Lambda g_{ik} = 0$$

o sea, la misma que la obtenida en la teoría general de la relatividad. Nótese que hemos quitado los arteriscos ya que la ecuación es válida en un espacio de Riemann.

Se trata de saber si la fijación de la calibración por (40.5) es una operación realizable. Supongamos que resolvemos las ecuaciones de la gravedad y obtenemos un determinado valor de R. Siempre podemos hallar unos nuevos potenciales al hacer un cambio de calibración que venga definido por la función

$$\lambda = \sqrt{\frac{R}{-4\Lambda}},$$

en esta nueva calibración la curvatura escalar cumplirá la calibración o gauge natural

$$R' = \lambda^{-2} R = -4\Lambda.$$

Sólo existe una única solución de las ecuaciones gravitatorias que cumpla la condición gauge natural. En efecto, sea g_{ik} y ϕ_k los potenciales que corresponden cuando se impone la gauge natural. Si ahora hacemos un cambio de calibración, obtendremos una nueva curvatura escalar

$$R' = \lambda^{-2} R = -\lambda^{-2}\, 4\Lambda$$

lo que significa que los nuevos potenciales surgidos al hacer el cambio de calibración ya no cumplen la gauge natural. Esto no ocurre en la gauge Lorentz del electromagnetismo, donde existe una familia de soluciones que cumplen esa condición; la diferencia observada es porque la gauge natural no es

ISBN: 978-84-617-1463-6

invariante frente a un cambio de calibración, mientras que la condición gauge Lorentz es invariante frente a transformaciones gauge.

19.5 Ecuación de movimiento en la geometría integrable

En la teoría general de la relatividad una partícula libre sigue una geodésica, de ecuación dada por

$$\frac{d^2x^k}{d\tau^2}+L_{ij}{}^k\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau}=0$$

donde $d\tau$ es el tiempo propio de la partícula y $L_{ij}{}^k$ son los símbolos de Christoffel. Esta ley de movimiento no puede ser extendida a una variedad de Weyl ya que no es invariante frente a una transformación de escala; ni los símbolos de Christoffel, ni la tetravelocidad tienen esa propiedad de invariancia. Es por lo tanto necesario obtener una ecuación de movimiento válida para la geometría de Weyl que debe tener la característica de ser invariante frente a transformaciones de escala.

El razonamiento que seguimos es válido para las que hemos llamado geometrías de Weyl integrables. Obtenidas las ecuaciones de campo hacemos un cambio de escala geodésico, de tal forma que se anulará la conexión métrica en todo punto, o sea, las ecuaciones de campo estarán definidas en un espacio de Riemann; entonces la ecuación de movimiento será la línea geodésica. Posteriormente hacemos un nuevo cambio de calibración, caracterizado por la función λ, por lo que los símbolos de Christoffel cambian según lo deducido en (8.5) mientras que la tetravelocidad cambia por

$$u'^k=\frac{dx'^k}{d\tau'}=\lambda^{-1}\frac{dx^k}{d\tau}.$$

En la nueva escala

$$\frac{du^k}{d\tau}=\lambda\frac{d}{d\tau'}\left(\lambda u'^k\right)=\lambda\partial_t\lambda u'^t u'^k+\lambda^2\frac{du'^k}{d\tau'}$$

y usando (7) la ecuación (6) queda

$$\frac{du'^k}{d\tau'}+L'_{ij}{}^k u'^i u'^j-\frac{1}{\lambda}\partial_t\lambda u'^t u'^k+\frac{1}{\lambda}\partial^k\lambda u'^t u'_t=0.$$

Como la conexión métrica en el espacio de Riemann es nula, entonces por (11.5) la nueva conexión métrica es

$$\phi'_k=-\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x^k}$$

entonces la ecuación de movimiento de una partícula libre en una variedad integrable de Weyl es

$$\frac{du^k}{d\tau} + L_{ij}^{k} u^i u^j + \phi_t u^t u^k - \phi^k u^t u_t = 0 \tag{41.5}$$

donde para simplificar hemos quitado las primas. Nótese que, como era de esperar, si la conexión métrica es nula reencontramos la ecuación de la geodésica en una variedad de Riemann.

Se comprueba que en una transformación de calibración la ecuación (41.5) queda invariable, lo que está en consonancia con la exigencia de que las ecuaciones físicas sean invariantes frente a transformaciones de escala.

Los dos últimos sumandos de (41.5) no caben entenderlos como pequeñas perturbaciones, ya que pueden tener valores del mismo orden que los términos clásicos, lo que dependerá de la calibración que se haya elegido.

20.5 Bibliografía seleccionada

* Pauli, W.: *Theory of Relativity*, Dover, 1981, pp. 192-202 y pp. 223-224.
* Eddington, A. S.: *The mathematical theory of Relativity*, Chelsea, 1975, pp. 196-212.
* Vizgin, Vladimir P.: *Unified field Theories in the third of the 20th century*, Birkhäuser, pp. 71-112 y pp. 129-137.
* Weyl, Hermann: *Space-Time-Matter*, Dover, 1952, pp. 121-138 y pp. 282-312.
* Weyl, H.: «Gravitation and Electricity», en *The principle of relativity (a colletion of original memoirs on the special and general theory of relativity)*, Dover, 1952, pp. 201-216.
* Goenner, Hubert F. M.: «On the History of Unified Field theories», *Living Reviews in Relativity* 7 (2004) 1-153.

ISBN: 978-84-617-1463-6

*ISBN:*978-84-617-1463-6

6

Apéndice 1

1.6 ¿Es relativista la teoría de la Relatividad?

Cuando se estudia la teoria especial (o restringida) de la Relatividad, uno se pregunta por qué ese nombre, ¿será porque afirma que «todo es relativo»? como se dice coloquialmente. Si se examina con más detenimiento, lo que se encuentra es lo contrario. En efecto, la Relatividad expresa que las leyes físicas son independientes del sistema de referencia, o sea que no son relativas al observador.

John Lighton Synge fue muy aportuno cuando afirmó que nunca había podido entender lo que en este contexto significaba la palabra relatividad y concluía diciendo «me es ahora aparente que nadie lo entiende, probablemente ni el mismo Einstein».

Nuestra opinión es que esta denominación proviene de un error. Antes del advenimiento de la teoría de la Relatividad, se denominaban relativistas a los que opinaban que la Física (y en especial la Mecánica) debía ser relativa, en el sentido de que sólo tenían sentido las magnitudes relativas, o sea, la posición, velocidad y aceleración de un cuerpo respecto a otros cuerpos. Planteamiento que era opuesto al newtoniano que se apoyaba en el concepto de espacio absoluto, lo que permitía definir magnitudes absolutas, es decir referidas al espacio absoluto.

Es muy extendida la opinión de que la teoría especial de la Relatividad abolió el concepto de espacio absoluto newtoniano, lo que en definitiva viene a significar que la teoría es relativista, en el sentido de que es relativa. Pero esto no es así. El principio especial de la relatividad afirma que no es posible ni por medios mecánicos ni por electromagnéticos (y presumiblemente mediante ninguna otra técnica) determinar la velocidad absoluta de un cuerpo, es decir la velocidad respecto al espacio absoluto. Pero esto no significa que no exista el espacio absoluto. Respecto a este concepto, la Relatividad especial se encuentra en la misma situación que la mecánica newtoniana, porque tampoco en esta teoría se podía medir la velocidad absoluta, aún así consideraba el espacio absoluto como un entidad real.

Es más, la Relatividad especial necesita el concepto de espacio absoluto por la misma razón que le era necesario a Newton. En el esquema newtoniano las leyes de la mecánica son válidas respecto al espacio absoluto y por su quinto colorario (que ahora llamamos principio de Relatividad de Galileo) también son válidas en los espacios que se mueven respecto al espacio abosoluto con un movimiento uniforme y rectilíneo. Es decir, en la mecánica newtoniana el espacio absoluto sirve exclusivamente para poder definir los «buenos» sistemas de referencia (a los que hoy llamamos sistemas inerciales).

En la misma situación se encuentra la Relatividad especial, pues para definir un sistema de referencia inercial hay que partir del concepcto de espacio absoluto. Ciertamente se pueden definir operacionalmente buenos sistemas inerciales sin recurrir al inaccesible espacio absoluto, como ocurre con el sistema de referencia celeste internacional (ICRS), pero hay que advertir que esto no es más que una «realización» (y por tanto imperfecta) del concepto de sistema inercial y no una definición estricta.

La situación tal vez sea distinta en la Relatividad general y sea esta una verdadera teoría relativista, en el sentido de ser relativa y no requerir el espacio absoluto. El asunto puede plantearse desde otra perspectiva. Se trata de averiguar si el principio de Mach está o no incluido en la Relatividad general.

Hay múltiples formas de enunciar el principio de Mach, no todas ellas equivalentes, aceptamos aquí la versión que afirma que la inercia (o masa inercial) de un cuerpo no es una propiedad intrínsica, sino que es adquirida como consecuencia de la acción que sufre dicho cuerpo por parte del resto del Universo. Este enunciado es lo mismo que el principio general de la Relatividad, o sea la afirmación de que todos los sistemas de referencia son equivalentes entre sí, por tanto carecería de sentido distinguir entre sistemas inerciales y no inerciales. Pero como hemos advertido anteriormente hay opiniones dispares sobre si el principio de Mach puede ser deducido de la Relatividad general.

2.6 ¿Relatividad especial o Relatividad general?

Al afirmar que existe la teoría especial de la Relatividad y además la teoría general de la Relatividad, se llega inevitablemente a la conclusión de que la primera es una teoría de validez limitada, mientras que la segunda es la teoría completa. Este creencia es infundada. Es más, tal vez sea al contrario. La más general teoría de la Relatividad es la conocida por teoría especial, formulada por Einstein en 1905, mientras que la otra teoría que fue concluida en 1915 se limita al estudio de la gravitación.

La Relatividad especial más que una teoría es un proyecto, que exige a todas las leyes físicas tener una determinada formulación. Se fundamenta en el principio especial de la Relatividad que afirma que todos los sistemas de referencia inerciales son equivalentes para la descripción de las leyes físicas. Por contra, la teoría general de la Relatividad es una teoría de la gravitación y se basa en el principio de equivalencia por el que se admite que existen sistemas de referencia para los cuales en un entorno infinitesimal se anulan los efectos gravitatorios.

Algunos creen que la Relatividad especial sólo es capaz de entender los movimientos uniformes y rectilíneos, o que sólo es de aplicación en sistemas de referencias inerciales y es frecuente escuchar que el uso de la Relatividad especial queda limitado a la ausencia de gravedad. Nada de esto es correcto. La Relatividad especial es una teoría que puede ser aplicada en cualquier sistema de referencia, sea inercial o no y que no queda alterada cuando existe gravitación.

Ocurre que la Relatividad especial es normalmente referida a un sistema de coordenadas respecto al cual el tensor métrico del espacio-tiempo euclídeo toma la forma diagonal de Minkowski. Pero al hacer una transformación de sistema de referencia, el tensor métrico del espacio-tiempo no puede tomar la forma de Minkowski y esta circunstancia hace pensar, equivocadamente, que la validez de la Relatividad especial es limitada.

3.6 Transformación de coordenadas y transformación de sistema de referencia

Debemos de distinguir entre una transformación del sistema de coordenadas y una transformación del sistema de referencia, ya que son cosas diferentes. Si bien un cambio de sistema de referencia lleva siempre implícito un cambio de coordenadas, el inverso no es cierto.

En efecto, consideremos la siguiente transformación de coordenadas

$$x'^{\alpha} = x'^{\alpha}\left(x^{\beta}\right); \qquad x'^{0} = x'^{0}\left(x^{\beta}, x^{0}\right) \tag{1.6}$$

que representa obviamente un cambio de coordenadas, pero no existe cambio en el sistema de referencia. (1.6) viene a ser exclusivamente una nueva denominación de las coordenadas, donde se admite que la coordenada temporal dependa de la posición. Para (1.6) se cumple la propiedad de que si para coordenadas primitivas una partícula se encuentra en reposo, respecto a las nuevas coordenadas se seguirá manteniendo en reposo

$$\frac{dx^{\beta}}{dt} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}}\frac{dx'^{\alpha}}{dt} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}}\frac{dt'}{dt}\frac{dx'^{\alpha}}{dt'}$$

ISBN: 978-84-617-1463-6

si dx^{β}/dt es nulo también lo será dx'^{α}/dt' ya que suponemos que el jacobiano de la transformación no es cero.

Pero si en la ecuación (1.6) las nuevas coordenadas espaciales dependen del tiempo entonces nos encontramos, no sólo ante una transformación de coordenadas, sino ante un cambio en el sistema de referencia, como se aprecia en el hecho de que si respecto a las antiguas coordenadas un cuerpo está en reposo no ocurrirá lo mismo respecto a las nuevas coordenadas.

4.6 Principio de covariancia

El principio de covariancia afirma que las leyes de la Física pueden expresarse en una forma la cual es independiente de la elección del sistema de coordenadas espacio-temporal. A veces se confunde este principio con el principio de la Relatividad general, entendido como la afirmación de que todos los sistemas de referencia son equivalentes para la descripción de las leyes naturales, pero estamos ante dos cosas distintas, aunque es cierto que el principio de covariancia se deriva del principio general de la Relatividad. Debemos añadir que el principio general de la Relatividad tiene un carácter físico pues expresa una propiedad de la naturaleza, mientras que el principio de covariancia es más bien una propiedad matemática de las leyes naturales y sólo aporta simplificación matemática.

El principio de covariancia encuentra su forma natural en la formulación tensorial de las leyes de la naturaleza, en realidad podemos considerar que el principio de covariancia no es más que la afirmación de que las leyes de la Física pueden expresarse tensorialmente, pues esto significa que las leyes así formuladas tendrán la misma forma en todos los sistemas de coordenadas.

Debemos advertir que la identidad en la forma de las ecuaciones, tal como dice el principio de covariancia, no significa la equivalencia de las leyes en todos los sistemas de coordenadas. Por ejemplo, la ecuación de movimiento de una partícula libre toma la forma

$$\frac{Du^k}{ds} = 0 \tag{2.6}$$

u^k es la tetravelocidad y ds el elemento de línea; y desarrollando

$$\frac{d^2x^k}{ds^2} + \Gamma^k_{pq}\frac{dx^p}{ds}\frac{dx^q}{ds} = 0. \tag{3.6}$$

Dado su carácter tensorial (2.6) será la misma ecuación en todos los sistemas de referencia con independencia de su estado de movimiento y de la presencia o no de gravedad. No obstante en el caso de una partícula libre en ausencia de gravedad, la ecuación (2.6) para un sistema inercial toma la forma

$$u^k = \text{cte} \tag{4.6}$$

en el que se usan coordenadas cartesianas (es decir, son nulas las componentes de los símbolos de Christoffel por usarse coordenadas cartesianas y no existir gravedad). La ecuación (4.6) nos dice que, en el caso considerado, la partícula aislada tendrá un movimiento uniforme, según es lo requerido por el principio de inercia.

Sin embargo, si ahora referimos el movimiento a un sistema acelerado o sea no inercial, entonces las componentes de la conexión no serán nulas, aunque se usen coordenadas cartesianas. La ecuación de movimiento tiene ahora un significado físico diferente de (4.6), pues nos dice que ahora la partícula aislada no está en movimiento uniforme, sino que existen fuerzas, las llamadas inerciales representadas por el segundo sumando de (3.6) que aceleran a la partícula.

Vemos por tanto, que si bien la ecuación (1.6) es la misma ya sea para el movimiento respecto a un sistema inercial o uno no inercial, incluso para el caso de presencia de campo gravitatorio, no son físicamente equivalentes, pues como hemos visto en el primer caso representa un movimiento uniforme y en los demás un movimiento acelerado.

5.6 El principio especial de la Relatividad implica el principio de covariancia

Si todos los sistemas de referencia son equivalentes para la descripción de las leyes naturales, debemos concluir que no hay forma de detectar si el observador se encuentra en un sistema inercial o no inercial. Esto viene a significar que debe ser válido el principio de covariancia, puesto que si las leyes de la naturaleza fueran distintas en uno u otro sistema de referencia, se encontraría una forma para distinguir un sistema de otro, lo que consideramos imposible. Por tanto concluimos que el principio general de la Relatividad implica la validez el principio de covariancia.

Ahora vamos a demostrar que el principio de covariancia también se deduce del principio especial de la Relatividad, que viene a afirmar que todos los sistemas inerciales son equivalentes y no hay forma de distinguir unos de otros. Al igual que hemos razonado antes, también en este caso se deben expresar las leyes de la naturaleza de igual forma en todos los sistemas inerciales, ya que en caso contrario tendríamos un método para distinguir un sistema inercial de otro. La forma natural de expresar matemáticamente esta propiedad es la formulación tensorial. Entonces debemos concluir que el principio especial de la Relatividad exige que las leyes naturales vengan expresadas en forma tensorial, es decir debe ser válido el principio de covariancia.

ISBN: 978-84-617-1463-6

Ciertamente sólo cuando se haga una transformación de un sistema inercial a otro también inercial las leyes en ambos sistemas tendrán el mismo contenido físico, algo que no ocurrirá cuando la transformación lleve de un sistema inercial a otro no inercial, no obstante, aún en este caso, las leyes tendrán la misma forma tensorial.

Pongamos un ejemplo. En forma general, la densidad lagrangiana de un campo escalar es (ver 7.2)

$$\mathfrak{L}\left(\phi,\phi_{,k},\rho\right)=\alpha\,\eta^{ik}\phi_{,i}\,\phi_{,k}+f\left(\phi\right)+h\left(\rho,\phi\right), \qquad (5.6)$$

siempre y cuando sea respecto a un sistema inercial cuya coordenadas son euclídeas. En (5.6) ϕ es el potencial, η^{ik} es el tensor métrico de Minkowski, ρ es la densidad de masa de la fuente de campo, f y g son dos funciones, α es la constante de acoplamiento y la coma es la derivación parcial respecto a las coordenadas. Si hacemos una transformación de coordenadas, que no de sistema de referencia, obtenemos para la misma densidad langragiana

$$\mathfrak{L}\left(\phi,\phi_{,k},\rho\right)=\alpha\,g^{ik}\phi_{,i}\,\phi_{,k}+f\left(\phi\right)+h\left(\rho,\phi\right), \qquad (6.6)$$

donde g^{ik} es el tensor métrico en el nuevo sistema de coordenadas y que se deriva del tensor métrico de Minkowksi.

Pero (6.6) es una ecuación tensorial, de tal forma que si ahora hacemos una transformación general de coordenadas, la forma de (6.6) se conserva por ser una expresión tensorial, tal como exige el principio de covariancia. Es más, si ahora suponemos la presencia de gravedad, la ecuación (6.6) seguirá siendo válida, con independencia del sistema de referencia elegido. La diferencia es que en este último caso el tensor métrico no es reducible a la forma de Minkowski mediante una transformación de coordenadas, pues en presencia de gravedad el espacio-tiempo es el de Riemann y no el euclidiano.

Si bien (6.6) tiene el mismo contenido físico en todos los sistemas inerciales, con independencia de las coordenadas elegidas, hay que decir que (6.6) es físicamente diferente en un sistema no inercial o cuando hay un campo gravitatorio.

En la anterior argumentación se basa la afirmación que hicimos antes de que la teoría especial de la relatividad se puede extender para formular las leyes tanto en un sistema no inercial como en presencia de gravedad, aunque, como hemos visto, en estas dos últimas situaciones las leyes no tendrán el mismo contenido físico que si estuviera referido a un sistema inercial.

7

Apéndice 2

1.7 Cambio de unidad y cambio de escalas

El principio de Fourier establece que las ecuaciones físicas deben ser homogéneas dimensionalmente. Es decir que si una ecuación se representa por

$$A+B=C+D$$

entonces la dimensión de todos los sumandos deben ser la misma

$$[A]=[B]=[C]=[D].$$

Este principio asegura que cuando se hace un cambio de unidades, ya sea de una única unidad o de varias unidades simultáneamente, las ecuaciones físicas deben permanecer inalterables, aunque los valores numéricos de las diferentes magnitudes puedan diferir y lo mismo pueda ocurrir con las constantes físicas que sean dimensionales. Podemos decir, por tanto, que es válido el principio de invariancia ante cambios de unidades, que afirma que las leyes físicas quedarán inalterables cuando se haga algún cambio de unidades.

Un concepto diferente es el cambio de escala de magnitud, por el cual una o varias magnitudes son alteradas. Por ejemplo, si todas las longitudes son aumentadas al doble, permaneciendo las restantes magnitudes (incluso las derivadas de la longitud) inalterables, nos encontraríamos en un cambio de escala de la magnitud longitud. Es evidente que las leyes físicas tendrían que ser alteradas y por este motivo serían perceptibles para el observador los cambios de escala de magnitud. Hay que señalar que aquí se admiten dos tipos de transformaciones: cambios globales, o sea el mismo en todo punto y en todo momento, o locales, por el cual la alteración de la magnitud depende de las coordenadas espaciales y de las temporales.

Finalmente nos encontramos con otro concepto como es el cambio de escala de unidad, en el cual la unidad permanece la misma pero su valor queda modificado. Es posible que el cambio se refiera a una única unidad o bien a varias unidades, pudiendo tener o no estos cambios las mismas leyes de transformación. También en este caso existen cambios globales y locales.

Por ejemplo, podemos alterar la unidad de masa tomando el valor de la nueva unidad kilogramo como el doble de la antigua unidad kilogramo. Este cambio afectaría a todas las magnitudes que tuvieran la masa en su dimensión, en particular podrían quedar alteradas las constantes físicas. Siguiendo con este ejemplo es fácil ver que la velocidad o la aceleración quedarían inalteradas ante este cambio de unidades, pero el momento lineal o la fuerza si serían afectadas, de tal forma que los nuevos valores de estas magnitudes estarían relacionadas con los valores antiguos por

$$p' = \lambda p; \quad F' = \lambda F \quad \text{si} \quad m' = \lambda m,$$

decimos que ambas magnitudes tienen de peso 1 pues se transforman con la misma ley que la masa. λ es la función del cambio de escala, que depende de las coordenadas espacio-temporales y es adimensional.

Es lógico pensar que las leyes físicas no deben modificarse al realizar un cambio de escala de unidad, pues no es más que una operación matemática; entonces suponemos válido el principio de invariancia frente a cambios de escala de unidad, principio que tiene su fundamento en el principio de Fourier antes mencionado.

Veamos un ejemplo simple. Según la ley de Newton, la aceleración de la gravedad es dada por

$$g = G\frac{M}{r^2}$$

ecuación que debe permanecer inalterable en un cambio de escala de masa. La aceleración de la gravedad y la distancia r quedan invariables en el cambio $m' = \lambda m$, por tanto será necesario que la constante de gravitación universal se modifique, de tal forma que

$$G' = \lambda^{-1} G$$

entonces G tiene de peso –1. Esto significa que podemos hacer que la masa se convierta en una variable dependiente de las coordenadas espacio-temporales con sólo hacer un cambio local de escala de unidad, lo que nos lleva a que la constante de gravitación universal deje de ser una constante y sea una magnitud dependiente tanto de la posición como del tiempo.

Debemos de observar que este cambio de escala de la masa no es más que una operación matemática. Si no supiéramos de antemano cuál es la función λ que caracteriza el cambio de escala no podríamos determinarlo a partir de las leyes físicas, puesto que son invariables y por tanto no dependen de la escala, aunque si podemos determinar λ a partir de la definición de las unidades, como luego veremos.

Es fácil imaginar otros cambios más elaborados que el anteriormente descrito. Por ejemplo, se puede dar simultáneamente un cambio en la escala de las unidades de masa y tiempo, pudiendo tener leyes de transformación diferentes

$$m' = \lambda m; \qquad t' = \mu t,$$

ahora tenemos dos funciones de cambio de escala λ y μ. En este ejemplo la constante de gravitación universal tendría de peso (-1, -2), representando el primer número el peso respecto al cambio de la unidad de masa y el segundo el peso frente al cambio de la unidad de tiempo, es decir tendríamos

$$G' = \lambda^{-1}\mu^{-2}G.$$

Por tanto concluimos que la homogeneidad de las ecuaciones físicas nos conduce a una simetría de carácter universal que no es otra que la invariancia frente a cambios de escala de las unidades; aunque éstas sean recalibradas, las leyes físicas permanecen invariables.

Podemos observar la semejanza existente entre el principio de invariancia ante cambios de escala de unidades y el principio especial de la relatividad. Mientras que la relatividad especial declara la imposibilidad de detectar la velocidad absoluta de un sistema de referencia; nuestro principio de invariancia declara la imposibilidad de medir el factor de escala de las distintas unidades a partir de las leyes físicas.

2.7 Crítica a la teoría de Weyl

Al final del artículo en que Weyl presentaba su teoría se encuentra una valoración crítica de Einstein. En ella reconocía que si los rayos luminosos fueran la única forma para la determinación de las relaciones métricas, la teoría de Weyl no tendría problemas; no obstante, como el tiempo propio se puede determinar tendría como consecuencia que las longitudes y las tiempos dependerían de la prehistoria de los instrumentos de medida, y por tanto no existirían líneas espectrales definidas de los elementos químicos.

Pauli desarrolló con más precisión esta crítica que reconstruimos a continuación.Vamos a considerar un campo gravitatorio estático y un potencial electroestático φ que al igual que las componentes del tensor métrico son independientes del tiempo, aunque ambas pueden depender de la posición espacial. Las componentes del potencial vector magnético las suponemos nulas, o sea las componentes espaciales de la conexión métrica que, Pauli identifica con el tetrapotencial electromagnético, son nulas $\phi_\alpha = 0$.

Notemos que se puede hacer un cambio de calibración tal que se manten-

ISBN: 978-84-617-1463-6

gan las mismas condiciones anteriormente impuestas. Como las nuevas componentes del tetrapotencial tienen que ser nulas, entonces se obtiene que la función de cambio de escala λ no puede depender de las coordenadas espaciales. Como ϕ'_0 tiene que ser constante entonces tiene que cumplirse

$$\frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x^0} = \mathrm{cte},$$

como ϕ_0 es constante siempre podremos poner

$$\frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x^0} = (1-\alpha)\phi_0$$

donde α es un número arbitrario que define el cambio de calibración, entonces por (11.5) la cuarta componente del tetrapotencial es

$$\phi'_0 = \alpha\phi_0\,, \tag{1.7}$$

que representa el único cambio de calibración que mantiene las condiciones que hemos impuesto al tetrapotencial electromagnético.

(8.5) nos da la variación que experimenta el módulo de un vector cuando se traslada paralelamente entre dos puntos cuyas diferencias de coordenadas es dx^k. Al integrar (8.5) entre los sucesos P_0 y P tendremos

$$A = A_0\, e^{-\int_{P_0}^{P}\phi_k dx^k}, \tag{2.7}$$

donde A_0 es el valor del módulo del vector A^i en P_0 y en general la integral depende del camino que se haya seguido en el desplazamiento del vector.

Supongamos ahora un reloj fijo en un punto del espacio y que se encuentra sometido al campo electromagnético de tetrapotencial $\phi_k = (\varphi, 0)$, siendo φ constante. Si τ_0 es el periodo en el instante P_0, en un instante posterior P el periodo será τ ya que por (2.7) el módulo del vector formado por los momentos extremos del periodo del reloj $dx^k = (c\,\tau, 0)$ viene afectado por el campo electroestático. La relación entre los periodos del reloj será

$$\tau = \tau_0\, e^{-c\phi_0 t} \tag{3.7}$$

siendo t la diferencia entre los tiempos coordenados de los sucesos P y P_0.

Consideremos dos relojes exactamente iguales, mientras que uno permanece en un punto del espacio en el que hay un potencial electroestático φ_1, el otro es trasladado a un punto en que el potencial es φ_2. Pasado un tiempo coordenado t ambos relojes se vuelven a reunir y por (9) se encontrará que la relación entre sus marchas será

$$e^{-ct(\varphi_1-\varphi_2)},$$

si elegimos otra calibración del tipo (1.7) entonces la relación entre las marchas de los dos relojes sería

$$e^{-\alpha ct(\varphi_1-\varphi_2)},$$

Pauli concluía su razonamiento con las siguientes palabras: «En particular, este efecto seria notado en las líneas espectrales de una sustancia dada, y las líneas espectrales de una definida frecuencia no existirían. Por muy pequeño que α sea elegida, las diferencias se incrementarían indefinidamente con el curso del tiempo».

3.7 La teoría de Weyl y el principio de invariancia de escala de unidades

Los relojes físicos marcan su tiempo propio. Supongamos un reloj fijo en un punto del espacio, entonces un intervalo infinitesimal de su tiempo propio viene dado por

$$d\tau^2 = g_{00}\, dt^2 .$$

Las reglas de medida miden longitudes propias. La longitud infinitesimal de una regla es dada por

$$dl^2 = \gamma_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta$$

donde α y β varían de 1 a 3 y el tensor métrico tridimensional $\gamma_{\alpha\beta}$ es

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{g_{0\alpha} g_{0\beta}}{g_{00}} - g_{\alpha\beta} .$$

Observamos que el tiempo propio y la longitud propia cambian ante una transformación conforme por

$$d\tau' = \lambda\, d\tau; \qquad dl' = \lambda\, dl .$$

Como el tiempo que se mide físicamente es el propio de un reloj y las longitudes que se miden son las propias de una regla de medida, significa que las relaciones anteriores cabe entenderlas como un cambio de escala de las unidades de tiempo y de longitud, obedeciendo ambas a la misma ley de transformación. Por tanto la transformación conforme es en realidad lo que hemos llamado un cambio de escala de unidad.

Debemos aceptar la validez del principio de invariancia frente a transformaciones conformes, que nos dice que todas las ecuaciones físicas quedan inalteradas cuando se hace una transformación conforme. O dicho de otra forma, la transformación conforme no es más que una operación matemática, no una alteración del mundo físico.

Un reloj recalibrado estará marcando segundos de distinta duración, y

ISBN: 978-84-617-1463-6

esta duración va a depender de su posición espacio-temporal. Cuando se mide la duración de un mismo fenómeno físico que se da en lugares diferentes del espacio y del tiempo, los relojes colcocados en esos lugares marcarán tiempos diferentes, pero esto no quiere decir que los fenómenos hayan tenido duraciones diferentes. Si en vez de medir los segundos que dura este fenómeno, lo que hacemos es contar el número de oscilaciones del reloj, entonces encontramos siempre el mismo número, ya que el número de oscilaciones es adimensional y no está afectado por la calibración.

Debemos de notar que cuando hacemos la operación de cambio de escala de unidad correspondiente a una transformación conforme, las constantes físicas pueden verse alteradas. Por ejemplo, como la ecuación dimensional de la constante de gravitación universal es

$$[G] = L^3 T^{-2} M^{-1}$$

entonces su valor cambiará según

$$G' = \lambda G.$$

Por su parte la constante de Planck cambiará según

$$[h] = L^2 T^{-1} M \qquad \Rightarrow \qquad h' = \lambda h.$$

En la crítica de Pauli a la teoría de Weyl τ es el tiempo marcado por el reloj, que va a depender del potencial electroestático según la expresión (3.7), pero esto sólo es debido a que la unidad segundo es definida de manera diferente en los instantes que van de P a P_0. Entonces (3.7) se refiere a lo que marca el reloj que mide unidades de tiempo, no al tiempo que ha transcurrido; en efecto, lo que marca el reloj son segundos, cuya definición va cambiando con el tiempo y este cambio de definición de la unidad segundo lo refleja el reloj*. Esta diferencia de marcación desaparece cuando para medir el tiempo usamos una magnitud adimensional. Por ejemplo, si el tiempo es medido por el número de oscilaciones de un reloj de péndulo, lo que «marcaría» el reloj sería independiente del potencial eléctrico al que estuviera sometido el reloj de péndulo.

No se puede mantener la crítica de Einstein sobre la inexistencia de líneas

---

* Se entiende que el reloj físico debe tener un mecanismo que lo ajuste según la calibración que hayamos definido, de tal manera que pueda convertir el número de sus oscilaciones en segundos de tiempo. Naturalmente, el ajuste al que nos referimos en el texto no significa que todos los relojes físicos alteren su «marcha» de forma automática cuando hacemos un cambio de calibración. Como queda dicho los fenómenos físicos (y en particular las oscilaciones de un reloj) no quedan alterados cuando se cambia de calibración.

espectrales definidas. Las leyes que rigen su emisión no son alteradas cuando hay una transformación conforme, por lo tanto la emisión quedará inalterable, lo único que varía es el valor numérico de la frecuencia de la emisión. Por tanto la prehistoria de un átomo no altera sus líneas espectrales, que siempre estarán ubicadas en el mismo lugar del espectro, aunque según el lugar de medición se le asigne frecuencias diferentes.

Si bien la calibración no aparece en las leyes físicas y por tanto a partir de ellas no se puede medir la función de cambio de escala λ, sí se puede determinar esta función a partir de medidas espacio-temporales. Para ver este asunto vamos a definir la calibración natural como aquella en que las definiciones de las unidades físicas son independientes de la posición y del tiempo y además coinciden con las definiciones del Sistema Internacional de unidades. Esta es la calibración que usamos en Física, por la simple razón que nos simplifica el estudio de la naturaleza.

En la escala natural de tiempo el segundo es la duración de 9.192$_1$631.770 periodos de la radiación correspondiente a la transición entre dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo de cesio 133. Si nuestros aparatos de medida nos mostraran, por ejemplo, que el segundo es la mitad de 9.192$_1$631.770 oscilaciones del átomo de cesio 133, entonces comprobaríamos que estos aparatos están calibrados en una escala diferente de la natural, concretamente en una que daría lugar al tensor métrico

$$g_{ik} = 2\hat{g}_{ik} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2$$

donde $\hat{g}_{ik}$ es el tensor métrico correspondiente a la calibración natural.

Por lo que hemos dicho está claro que una regla de medida no altera su magnitud cuando se hace una transformación conforme. Lo que se produce es un cambio de unidad de longitud, de tal forma que la longitud de la regla (expresada por ejemplo en metros) tendrá un valor que va a depender de su posición espacio-temporal. Si tenemos dos reglas iguales situadas en un mismo punto y trasladamos una de ellas haciendo un recorrido cerrado, las dos reglas continarán teniendo la misma longitud cuando vuelvan a coincidir. Las longitudes que se midan de esas reglas cuando están en puntos diferentes serán valores diferentes, naturalmente debido a que la unidad metro es diferente en un punto que en otro.

Si dos relojes iguales tienen la misma marcación cuando están juntos y uno de ellos realiza un recorrido cerrado y se vuelven a comparar entre sí cuando coinciden de nuevo, entonces la marcación de los dos relojes no tiene que ser la misma. Si siempre marcaran lo mismo, con independencia del camino recorrido por el reloj móvil, decimos que la geometría espacio-temporal es integrable, en caso contrario sería no integrable. Dentro de la teoría de Weyl, en el primer caso no existe campo electromagnético pero sí lo hay en el

ISBN: 978-84-617-1463-6

segundo.

La diferencia entre los dos casos considerados de longitud y tiempo radica en que el reloj no sólo mide la unidad de tiempo, sino que es un dispositivo que «acumula el tiempo», algo que no ocurre con una regla de medida.

4.7 Análisis de la crítica de Pauli

Las coordenadas espacio-temporales tienen unidades, dx^{α} tienen unidad de longitud y dt de tiempo. Estas unidades son las que corresponden a la unidad elegida para la velocidad de la luz c. De tal forma que si c es expresada, por ejemplo, en m/s entonces dx^{α} se mide en metros y dt en segundos.

Hay que observar que las dx^{k} no son distancias, sólo representan diferencias de coordenadas entre dos puntos muy cercanos. Esto quiere decir que sus unidades no son alteradas cuando se hace un cambio de escala, ya que ésta es una alteración de las longitudes y del tiempo. Dicho de otra forma el coeficiente l no está multiplicando a dx^{k} en el elemento de línea, sino que multiplica a las componentes del tensor métrico y por tanto a las distancias y tiempos propios. Para mostrar esta circunstancia vamos a representar a las unidades de dx^{k} con el símbolo dimensional L', indicando con ello que se trata de la unidad de longitud pero que no es alterada en una transformación conforme y con esta notación la distinguimos de la dimensión L que es también longitud pero el valor de la correspondiente unidad cambia en una transformación conforme. Con este concepto el tensor de Ricci y la curvatura escalar tiene de dimensión L'^{-2}. Como $d\phi$ es adimensional por (6.5) y por tanto no se ve afectada por un cambio de unidades y como dx^{r} tiene de dimensión L', entonces la conexión métrica ϕ_{r} debe tener de dimension L'^{-1}. El tensor

$$F_{ik}=\frac{\partial \phi_{k}}{\partial x^{i}}-\frac{\partial \phi_{i}}{\partial x^{k}}$$

tiene de unidad L'^{-2}. Indicar que la densidad lagrangiana usada por Weyl en su teoría

$$\mathfrak{L}=\sqrt{g}\left(R^{2}+\chi F_{ik}F^{ik}\right)$$

tiene la dimensión L'^{-4}, mientras que la correspondiente acción

$$I=\int\sqrt{g}\left(R^{2}+\chi F_{ik}F^{ik}\right)d\Omega$$

es adimensional, puesto que $d\Omega$ tiene de dimensión L'^{-4} siempre y cuando estemos en una variedad tetradimensional.

Las componentes de la conexión métrica ϕ_{k} no son idénticas al tetrapontencial electromagnético Φ_{k}, mientras que las primeras tienen la unidad de inversa de la longitud, la segunda viene dada en voltios. Podemos relacionar estas dos magnitudes mediante

$$\phi_k = \kappa \Phi_k$$

κ es una constante con las dimensiones de la inversa de voltios por metro, para que así Φ_k venga expresado en voltios, o más concretamente

$$\left[\kappa\right] = ML^2T^{-3}A^{-1}L'.$$

Ahora bien, la unidad amperio se ve afectada en un cambio de las unidades de longitud y tiempo, sin embargo la carga eléctrica queda inalterada, es decir que si Q es el símbolo dimensional de la carga eléctrica tenemos

$$\left[\kappa\right] = ML^2T^{-2}Q^{-1}L'$$

que nos muestra claramente que la constante κ no es modificada en una transformación conforme, porque si bien L y T varían con la misma ley, L' queda inalterable. Notemos, por último, que el valor numérico de κ es arbitrario.

Las consideraciones anteriores nos lleva a completar el razonamiento de Pauli. Si definimos el tetrapotencial electromagnético por

$$\Phi^k = \left(\varphi, c\mathbf{A}\right)$$

con **A** el vector magnético, entonces

$$\phi_k dx^k = \kappa g_{00} \Phi^0 cdt = \kappa c\, g_{00}\, \varphi dt$$

donde g_{00} al igual que c y κ son independientes del tiempo. Entonces la relación entre las marchas de los dos relojes es

$$e^{-\alpha\kappa g_{00} ct\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)} = e^{-\beta ct\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)}$$

donde β es una constante indeterminada que no depende del tiempo, aunque puede depender de la posición.

ISBN: 978-84-617-1463-6

Teoría de campo relativista

Wenceslao Segura González

"Teoría de campo relativista" expone de forma clara las técnicas físico-matemáticas usadas en el estudio de los campos clásicos relativistas. Este libro cumple una función pedagógica, estando dirigido a aquellos, que teniendo un conocimiento básico de electromagnetismo y relatividad, quieran profundizar en los aspectos formales de la teoría de campo.

εWT
Ediciones

9 788461 714636