Teoría de Weyl y efecto Einstein-Pauli

Weyl theory and Einstein-Pauli effect

DOI: 10.13140/RG.2.1.4600.7523

Wenceslao Segura González
Investigador independiente
e-mail: wenceslaoseguragonzalez@yahoo.es
Página web: http://wenceslaoseguragon.wix.com/wenceslao-segura

Sinopsis. En el mismo artículo en que Hermann Weyl publicó en 1918 su teoría de campo unificado, Albert Einstein planteó una dura crítica a la teoría recién nacida. Argumentaba que de ser cierta no existirían líneas espectrales definidas. Posteriormente Wolfgang Pauli desarrolló esta opinión con más detalle, planteamiento que aceptaron otros físicos destacados de la época, incluido el propio Weyl. El resultado fue que la primera teoría que unificaba gravitación y electromagnetismo nacía ya muerta. En esta investigación analizamos en profundidad el concepto de transformación conforme, concepto base en la teoría de Weyl, y la interpretamos como un cambio de escala de unidades, llegando a la conclusión que los fenómenos físicos no se alteran al hacer una transformación conforme. Interpretamos el significado físico de la conexión métrica y obtenemos su correspondencia con el vector de campo electromagnético, estimando su valor numérico. Concluimos que el fenómeno previsto por Einstein existe, pero es de magnitud tan débil que no es observable.

Abstract. In the same publication in which Hermann Weyl in 1918 published his unified field theory, Albert Einstein raised sharp criticism to the new theory. He argued that if true would not exist defined spectral lines. Later Wolfgang Pauli developed this review in more detail, which was accepted by other physicists of the time, including to Weyl. The result was that the theory that unified gravitation and electromagnetism born dead. In this research, we analyze in depth the concept of conformal transformation, a concept basic in the theory of Weyl, and we interpret it as a change in the scale of the units, concluding that the physical phenomena are not altered by making a conformal transformation. We interpret the physical meaning of the metric connection and found his correspondence with the electromagnetic field vector and estimate its numerical value. We conclude that the phenomenon predicted by Einstein exists, but is so weak that it is not observable.

La versión *v1* del artículo «Invariancia de escala y teoría de Weyl» fue publicada el día 14 de julio de 2014
La versión *v3* fue publicada el 28 de agosto de 2015

1. Cambio de unidad y cambio de escalas

El principio de Fourier establece que las ecuaciones físicas deben ser homogéneas dimensionalmente. Es decir que si una ecuación se representa por

$$A+B=C+D$$

entonces la dimensión de todos los sumandos deben ser la misma

$$[A]=[B]=[C]=[D].$$

Este principio asegura que cuando se hace un cambio de unidades, ya sea de una única unidad o de varias unidades simultáneamente, las ecuaciones físicas deben permanecer inalterables, aunque los valores numéricos de las diferentes magnitudes puedan diferir y lo mismo pueda ocurrir con las constantes físicas que sean dimensionales. Podemos decir, por tanto, que es válido el principio de invariancia ante cambios de unidades, que afirma que las leyes físicas quedarán inalterables cuando se hace algún cambio de unidades.

Un concepto diferente es el cambio de escala de unidad, en el cual la unidad permanece la misma pero su valor (o sea, su definición) queda modificado. Es posible que el cambio se refiera a una única unidad o bien a varias unidades, pudiendo tener o no estos cambios las mismas leyes de transformación. Hay que distinguir entre cambios globales (el mismo para todo momento y todo punto del espacio) o locales (que dependen del tiempo y de las coordenadas espaciales).

Por ejemplo, podemos alterar la unidad de masa tomando el valor de la nueva unidad kilogramo como el doble de la antigua unidad kilogramo. Este cambio afectaría a todas las magnitudes que tuvieran la masa en su dimensión, en particular podrían quedar alteradas las constantes físicas. Siguiendo con este ejemplo es fácil ver que la velocidad o la aceleración quedarían inalteradas ante este cambio de unidades, pero el momento lineal o la fuerza si serían afectadas, de tal forma que los nuevos valores de estas magnitudes estarían relacionadas con los valores antiguos por

$$p'=\lambda p;\quad F'=\lambda F \qquad \text{si} \qquad m'=\lambda m,$$

decimos que ambas magnitudes tienen de peso 1 pues se transforman con la misma ley que la masa. λ es la función del cambio de escala, que depende de las coordenadas espacio-temporales y es adimensional.

Es lógico pensar que las leyes físicas no deben modificarse al realizar un cambio de escala de unidad, pues no es más que una operación matemática; entonces suponemos válido el principio de invariancia frente a cambios de escala de unidad, principio que tiene su fundamento en el principio de Fourier antes mencionado.

Veamos un ejemplo simple. Según la ley de gravitación de Newton, la aceleración de la gravedad es dada por

$$g=G\frac{M}{r^2}$$

ecuación que debe permanecer inalterable en un cambio de escala de masa. La aceleración de la gravedad g y la distancia r quedan invariables en el cambio $m'=\lambda m$, por tanto será necesario que la constante de gravitación universal se modifique, de tal forma que

$$G'=\lambda^{-1}G$$

entonces G tiene de peso –1. Esto significa que podemos hacer que la masa se convierta en una variable dependiente de las coordenadas espacio-temporales con sólo hacer un cambio local de escala de unidad, lo que nos lleva a que la constante de gravitación universal deje de ser una constante y sea una magnitud dependiente tanto de la posición como del tiempo.

Debemos de observar que este cambio de escala de la masa no es más que una operación matemática. Si no supiéramos de antemano cuál es la función λ que caracteriza el cambio de escala no podríamos determinarlo a partir de las leyes físicas, puesto que son invariables y por tanto no dependen de la escala, aunque si podemos determinar λ a partir de la definición de las unidades, como luego veremos.

Es fácil imaginar otros cambios más elaborados que el anteriormente descrito. Por ejemplo, se puede dar simultáneamente un cambio en la escala de las unidades de masa y tiempo, pudiendo tener leyes de transformación diferentes

$$m' = \lambda m; \qquad t' = \mu t,$$

ahora tenemos dos funciones de cambio de escala λ y μ. En este ejemplo la constante de gravitación universal tendría de peso (–1, –2), representando el primer número el peso respecto al cambio de la unidad de masa y el segundo el peso frente al cambio de la unidad de tiempo, es decir tendríamos

$$G' = \lambda^{-1}\mu^{-2}G.$$

Por tanto concluimos que la homogeneidad de las ecuaciones físicas nos conduce a una simetría de carácter universal que no es otra que la invariancia frente a cambios de escala de las unidades; aunque éstas sean recalibradas, las leyes físicas permanecen invariables.

Podemos observar la semejanza existente entre el principio de invariancia ante cambios de escala de unidades y el principio especial de la relatividad. Mientras que la relatividad especial declara la imposibilidad de detectar la velocidad absoluta de un sistema de referencia; nuestro principio de invariancia declara la imposibilidad de medir el factor de escala de las distintas unidades a partir de las leyes físicas.

2. Teoría de campo unificado de Weyl

En el año 1918 Hermann Weyl diseñó la primera teoría de campo unificado [1], con la que pretendía explicar tanto el campo gravitatorio como el electromagnético a partir de una base geométrica. En esencia la teoría de Weyl supone una variedad espacio-temporal tetradimensional de tensor métrico simétrico, sin torsión (es decir de conexión simétrica) y con un tensor de no-metricidad no nulo dado por la expresión

$$Q_{ikr} = D_r g_{ik} = -2g_{ik}\phi_r \tag{1}$$

D_r es la derivada covariante, g_{ik} es el tensor métrico y

$$d\phi = \phi_r dx^r$$

es una forma diferencial que en general no es exacta.

En la teoría de Weyl g_{ik} cumple el mismo doble papel que en la teoría general de la relatividad, a saber, es el tensor que nos informa de las propiedades métricas de la variedad y también son las componentes del potencial gravitatorio. El tetravector ϕ_r (que se llama conexión métrica) representa en la teoría de Weyl las componentes del tetrapotencial electromagnético, o mejor dicho, ambos son proporcionales.

La variedad de Weyl admite cambios en la calibración o transformaciones conforme. Es decir, si $\hat{g}_{ik}$ es el tensor métrico podemos obtener nuevos valores de las componentes del tensor métrico a partir de la relación

$$g_{ik} = \psi\left(x^r\right)\hat{g}_{ik}$$

donde ψ es una función cualquiera de la posición espacio-temporal. La teoría de Weyl exige que las ecuaciones de campo sean invariantes no sólo frente a transformaciones de coordenadas genéricas, sino también ante cambios de calibración. Consideremos dos calibraciones diferentes ψ y ψ', que dan lugar a dos nuevos tensores métricos

$$g_{ik} = \psi\hat{g}_{ik} \qquad g'_{ik} = \psi'\hat{g}_{ik}$$

entonces al pasar de la calibración ψ a la ψ' el tensor métrico se transforma por

$$g'_{ik} = \frac{\psi'}{\psi}\psi\hat{g}_{ik} = \frac{\psi'}{\psi}g_{ik} = \lambda^2 g_{ik} \tag{2}$$

DOI: 10.13140/RG.2.1.4600.7523

y decimos que el tensor métrico es de peso 2 por ser éste el exponente de la función λ en la ecuación de transformación. Fácilmente se encuentra que el tensor métrico en forma contravariante tiene de peso -2 y que el determinante del tensor métrico es de peso 8. De aquí se deduce que el peso de la conexión afín es 0 e igual propiedad tienen el tensor de curvatura $R^{i}{}_{kpq}$ y su contracción el tensor de Ricci R_{ik} (definido por $R_{ik} = R^{p}{}_{ikp}$); no obstante la curvatura escalar tiene de peso -2, mientras que las coordenadas espacio-temporales no tienen peso, ya que son independientes de la calibración, puesto que son meramente unos indicadores que identifican cada punto del espacio-tiempo.

La forma diferencial $d\phi$ también queda alterada en un cambio de calibración. Hallando la derivada covariante en ambos miembros de (2) se tiene

$$Dg'_{ik} = 2\lambda\, d\lambda g_{ik} - 2\lambda^2 g_{ik} d\phi,$$

pero como después del cambio de calibración el espacio sigue siendo de Weyl entonces deberá cumplirse (1)

$$Dg'_{ik} = -2g'_{ik}\, d\phi' = -2\lambda^2 g_{ik}\, d\phi + 2\lambda\, d\lambda g_{ik}$$

e igualando los dos últimos resultados se obtiene

$$d\phi' = d\phi - \frac{d\lambda}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \phi'_k = \phi_k - \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x^k} \tag{3}$$

que es la ley de transformación de la forma diferencial $d\phi$.

Supongamos que se efectúa el siguiente cambio de calibración

$$\psi\left(x^k\right) \to \psi'\left(x^k\right)$$

entonces el módulo de un vector que en la antigua calibración era

$$A^2 = \psi \hat{g}_{ik} A^i A^k$$

pasa a tomar el valor diferente

$$A'^2 = \psi' \hat{g}_{ik} A^i A^k = \frac{\psi'}{\psi} A^2 = \lambda^2 A^2$$

donde λ es una función de las coordenadas y distinta de cero.

Cuando hay un transporte paralelo se cumple por definición que

$$DA^i = 0 \quad \Rightarrow \quad dA^i = -\Gamma^{\,i}_{jk} A^j dx^k \tag{4}$$

mientras que la derivada de las componentes covariantes será

$$DA_i = A^k Dg_{ik} = -2A^k g_{ik} d\phi \quad \Rightarrow \quad dA_i = \Gamma^{\,j}_{ik} A_j dx^k - 2g_{ik} A^k d\phi, \tag{5}$$

por este motivo cuando se traslada paralelamente un vector su módulo queda modificado

$$dA^2 = A_i\, dA^i + A^i dA_i,$$

utilizando (4) y (5) se encuentra

$$dA = -A\, d\phi = -A\, \phi_k dx^k \text{ , (6)} \tag{6}$$

que nos da la variación que registra el módulo de un vector cuando se le somete a una traslación paralela infinitesimal. Al integrar (6) entre los sucesos P_0 y P tendremos

$$A = A_0 e^{-\int_{P_0}^{P} \phi_k dx^k}, \tag{7}$$

donde A_0 es el valor del módulo del vector A^i en P_0 y en general la integral depende del camino que se haya seguido el desplazamiento del vector.

Si se hace una transformación conforme, la conexión métrica cambia según (3) mientras que el módulo de un vector se transforma según (6), pero de tal forma que

$$A' = \lambda\left(P\right) A; \qquad A'_0 = \lambda\left(P_0\right) A_0$$

puesto que A y A_0 representan el módulo del mismo vector pero en dos puntos P y P_0 espacio-temporales distintos; ciertamente la función λ es la misma que hay que aplicar para ambos módulos, pero su valor será diferente en los puntos P y P_0. Por tanto la ecuación (7) en la nueva gauge o calibración es

$$\frac{1}{\lambda(P)}A' = \frac{1}{\lambda(P_0)}A'_0 e^{-\int_{P_0}^{P}\phi'_k dx^k} e^{-\int_{P_0}^{P}\frac{\partial \ln\lambda}{\partial x^k}dx^k} = \frac{1}{\lambda(P_0)}A'_0 e^{-\int_{P_0}^{P}\phi'_k dx^k}\left[\frac{1}{\lambda(P)}\lambda(P_0)\right]$$

simplificando

$$A' = A'_0 e^{-\int_{P_0}^{P}\phi'_k dx^k} \tag{8}$$

lo que demuestra que la ecuación (7) es invariante frente a un cambio de calibración.

3. La crítica a la teoría de Weyl

Al final del artículo en que Weyl presentaba su teoría se encuentra una valoración crítica de Einstein. En ella reconoce que si los rayos luminosos fueran la única forma para la determinación de las relaciones métricas, la teoría de Weyl no tendría problemas; no obstante, como el tiempo propio se puede determinar tendría como consecuencia que las longitudes y las tiempos dependerían de la prehistoria de los instrumentos de medida, y por tanto no existirían líneas espectrales definidas de los elementos químicos [3].

Pauli desarrolló con más precisión esta crítica [4] que reconstruimos a continuación. Vamos a considerar un campo gravitatorio estático y un potencial electroestático ϕ que al igual que las componentes del tensor métrico son independientes del tiempo, aunque ambas pueden depender de la posición espacial. Las componentes del potencial vector magnético las suponemos nulas, o sea las componentes espaciales de la conexión métrica son nulas $\phi_\alpha = 0$. En su razonamiento Pauli identifica la conexión métrica ϕ_k con el vector de campo electromagnético φ_k, que como más adelante es una suposición incorrecta.

Supongamos un reloj (regulado por un fenómeno físico) fijo en un punto del espacio y que se encuentra sometido al campo electromagnético de tetrapotencial $\phi_k = (\phi, 0)$, siendo ϕ constante. Si τ_0 es el periodo en el instante P_0, en un instante posterior P el periodo será τ ya que por (7) el módulo del vector formado por los momentos extremos del periodo del reloj $(c\tau, 0)$ viene afectado por el campo electroestático. La relación entre los periodos del reloj será por (7)

$$\tau = \tau_0 e^{-2\phi\int_{P_0}^{P} dx^0} = \tau_0 e^{-2c\phi t} \tag{9}$$

siendo t la diferencia entre los tiempos coordenados de los sucesos P y P_0. Notemos que la marcha del reloj no se altera por una variación de la escala de tiempo, sino porque el fenómeno físico que regula al reloj es afectado por la presencia del campo electroestático.

Consideremos dos relojes exactamente iguales, mientras que uno permanece en un punto del espacio en el que hay un potencial electroestático ϕ_1, el otro es trasladado a un punto en que el potencial es ϕ_2 *. Pasado un tiempo coordenado t ambos relojes se vuelven a reunir y por (9) se encontrará que la relación entre sus marchas será

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = e^{-ct(\phi_1-\phi_2)}, \tag{10}$$

Pauli concluía su razonamiento con las siguientes palabras: «En particular, este efecto seria notado en las líneas espectrales de una sustancia dada, y las líneas espectrales de una definida frecuencia no existirían. [...] las diferencias se incrementarían indefinidamente con el curso del tiem-

* Suponemos que la traslación del segundo reloj, tanto en su viaje de ida como en su vuelta al punto donde se encuentra el otro reloj, no tiene incidencia en su marcha.

DOI: 10.13140/RG.2.1.4600.7523

po» *. En efecto, como los átomos que componen una muestra de gas han estado sometidos a condiciones diferentes en el pasado, la frecuencia de emisión de estos átomos reflejará su prehistoria, haciendo que sus frecuencias sean diferentes y, por tanto, las líneas espectrales de los átomos que componen la muestra serán diferentes entre sí, de tal forma que el espectro de la muestra, mas que líneas nítidas, mostraría bandas que estarían formadas por las líneas espectrales de cada uno de los átomos de la muestra. Efecto que llamaremos de Einstein-Pauli.

4. La teoría de Weyl y el principio de invariancia de escala de unidades

Los relojes físicos marcan su tiempo propio. Supongamos un reloj fijo en un punto del espacio, entonces un intervalo infinitesimal de su tiempo propio viene dado por

$$d\tau^2 = g_{00}\, dt^2 .$$

Las reglas de medida miden longitudes propias. La longitud infinitesimal de una regla es dada por

$$dl^2 = \gamma_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta$$

donde α y β varían de 1 a 3 y el tensor métrico tridimensional $\gamma_{\alpha\beta}$ es

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{g_{0\alpha} g_{0\beta}}{g_{00}} - g_{\alpha\beta} .$$

Observamos que el tiempo propio y la longitud propia cambian ante la transformación conforme (2) por

$$d\tau' = \lambda\, d\tau; \qquad dl' = \lambda\, dl .$$

Como el tiempo que se mide físicamente es el propio de un reloj y las longitudes que se miden son las propias de una regla de medida, significa que las relaciones anteriores cabe entenderlas como un cambio de escala de las unidades de tiempo y de longitud, obedeciendo ambas a la misma ley de transformación. Por tanto la transformación conforme es en realidad lo que hemos llamado un cambio de escala de unidad.

Debemos aceptar la validez del principio de invariancia frente a transformaciones conformes, que nos dice que todas las ecuaciones físicas quedan inalteradas cuando se hace una transformación conforme. O dicho de otra forma, la transformación conforme no es más que una operación matemática, no una alteración del mundo físico.

Un reloj recalibrado estará marcando segundos de distinta duración, y esta duración va a depender de su posición espacio-temporal. Cuando se mide la duración de un mismo fenómeno físico que se da en lugares diferentes del espacio y del tiempo, los relojes colocados en esos lugares marcarán tiempos diferentes, pero esto no quiere decir que los fenómenos hayan tenido duraciones diferentes. Si en vez de medir los segundos que dura este fenómeno, lo que hacemos es contar el número de oscilaciones del reloj, entonces encontramos siempre el mismo número, ya que el número de oscilaciones es adimensional y no está afectado por la calibración.

Debemos de notar que cuando hacemos la operación de cambio de escala de unidad correspondiente a una transformación conforme, las constantes físicas pueden verse alteradas. Por ejemplo, como la ecuación dimensional de la constante de gravitación universal es

$$[G] = L^3 T^{-2} M^{-1}$$

entonces su valor cambiará según

$$G' = \lambda G .$$

Por su parte la constante de Planck cambiará según

$$[h] = L^2 T^{-1} M \qquad \Rightarrow \qquad h' = \lambda h$$

* Pauli en su razonamiento introduce una constante α en (10) que relaciona con la gauge y que supone arbitraria, pero esta constante no existe, como más adelante se demuestra.

Si bien la calibración no aparece en las leyes físicas y por tanto a partir de ellas no se puede medir la función de cambio de escala λ, sí se puede determinar esta función a partir de medidas espacio-temporales. Para ver este asunto vamos a definir la calibración natural como aquella en que las definiciones de las unidades físicas son independientes de la posición y del tiempo y además coinciden con las definiciones del Sistema Internacional de Unidades. Esta es la calibración que usamos en Física, por la simple razón que nos simplifica el estudio de la naturaleza.

En la escala natural de tiempo el segundo es la duración de 9.192$_1$631.770 periodos de la radiación correspondiente a la transición entre dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo de cesio 133. Si nuestros aparatos de medida nos mostraran, por ejemplo, que el segundo es la mitad de 9.192$_1$631.770 oscilaciones del átomo de cesio 133, entonces comprobaríamos que estos aparatos están calibrados en una escala diferente de la natural, concretamente en una que daría lugar al tensor métrico

$$g_{ik} = 2\hat{g}_{ik} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2$$

donde $\hat{g}_{ik}$ es el tensor métrico correspondiente a la calibración natural.

Por lo que hemos dicho está claro que una regla de medida no altera su magnitud cuando se hace una transformación conforme. Lo que se produce es un cambio de unidad de longitud, de tal forma que la longitud de la regla (expresada por ejemplo en metros) tendrá un valor que va a depender de su posición espacio-temporal. Si tenemos dos reglas iguales situadas en un mismo punto y trasladamos una de ellas haciendo un recorrido cerrado, las dos reglas continarán teniendo la misma longitud cuando vuelvan a coincidir. Las longitudes que se midan de esas reglas cuando están en puntos diferentes serán valores diferentes, naturalmente debido a que la unidad metro es diferente en un punto que en otro.

Si dos relojes iguales tienen la misma marcación cuando están juntos y uno de ellos realiza un recorrido cerrado y se vuelven a comparar entre sí cuando coinciden de nuevo, entonces la marcación de los dos relojes no tiene que ser la misma *. Si siempre marcaran lo mismo, con independencia del camino recorrido por el reloj móvil, decimos que la geometría espacio-temporal es integrable, en caso contrario sería no integrable. Dentro de la teoría de Weyl, en el primer caso no existe campo electromagnético pero sí lo hay en el segundo.

La diferencia entre los dos casos considerados (longitud y tiempo) radica en que el reloj no sólo mide la unidad de tiempo, sino que es un dispositivo que «acumula el tiempo», algo que no ocurre con una regla de medida.

5. Dimensiones de las magnitudes geométricas

Podemos analizar dimensionalmente las ecuaciones geométricas, para ello entendemos que el elemento de línea ds tiene la dimensión de longitud L. Las coordenadas espacio-temporales en su forma contravariantes (x^k) no tienen unidades ya que sólo son números que identifican a puntos del espacio-tiempo.

Hay que observar que las dx^k no son distancias, sólo representan diferencias de coordenadas entre dos puntos muy cercanos. Esto quiere decir que sus valores no son alterados cuando se hace un cambio de escala, ya que ésta es una alteración de las longitudes y del tiempo.

Como el elemento de línea ds tiene unidades de longitud, todas las componentes del tensor métrico tendrán la dimensión de longitud al cuadrado (o sea dimensión L^2), unidad que dependerá de las adoptadas para la velocidad de la luz c.

Las componentes de la conexión son adimensionales. Como se deduce de la definición de la

* Se entiende que el reloj físico debe tener un mecanismo que lo ajuste según la calibración que hayamos definido, de tal manera que pueda convertir el número de sus oscilaciones en segundos de tiempo. Naturalmente, el ajuste al que nos referimos en el texto no significa que todos los relojes físicos alteren su «marcha» de forma automática cuando hacemos un cambio de calibración. Como queda dicho los fenómenos físicos (y en particular las oscilaciones de un reloj) no quedan alterados cuando se cambia de calibración.

DOI: 10.13140/RG.2.1.4600.7523

derivada covariante

$$D_k A^r = \partial_k A^r + A^s \Gamma_{sk}^{\ r}$$

y de la adimensionalidad de las coordenadas.

Si la conexión es adimensional también lo serán el tensor de curvatura y el tensor de Ricci. Lo que significa que ante un cambio de unidades sus valores no sufrirán cambios.

$d\phi$ es adimensional por su definición (1) y lo mismo ocurrirá con ϕ_r. Por tanto

$$F_{ik} = \frac{\partial \phi_k}{\partial x^i} - \frac{\partial \phi_i}{\partial x^k}$$

tampoco tendrá unidades. Si embargo F^{ik} tiene la dimensión L^{-4} puesto que la inversa del tensor métrico tiene la dimensión L^{-2}. La curvatura escalar tiene la dimensión L^{-2} según se deriva de su definición. Finalmente indicar que la densidad lagrangiana usada por Weyl en su teoría

$$\mathfrak{L} = \sqrt{g}\left(R^2 - \alpha F_{ik} F^{ik}\right) \tag{10}$$

es adimensional, al igual que ocurre con la correspondiente acción

$$I = \int \sqrt{g}\left(R^2 - \alpha F_{ik} F^{ik}\right) d\Omega$$

puesto que $d\Omega$ (producto de las diferenciales de las coordenadas espacio-temporales) no tiene unidades.

6. Las magntiudes físicas

Debemos notar que la constante adimensional α que aparece en (10) es la constante de acoplamiento entre los dos sumandos de la densidad lagrangiana. Si bien el primer sumando de (10) se identifica con la densidad lagrangiana del campo gravitatorio, no se puede identificar el segundo sumando de (10) con la parte electromagnética ya que F_{ik} no es el tensor de campo electromagnético f_{ik}, aunque ambos son proporcionales

$$f_{ik} = \partial_i \varphi_k - \partial_k \varphi_i = \kappa\left(\partial_i \phi_k - \partial_k \phi_i\right) = \kappa F_{ik}$$

φ_k es el vector de campo electromagnético y κ es una constante dimensional. Vamos a utilizar dimensiones físicas y no geométricas, es decir consideramos que tanto las componentes covariantes como las contravariantes de las coordenadas espacio-temporales tienen dimensión L y el tensor métrico es adimensional. f_{ik} (o f^{ik}) tiene misma dimensión que el campo eléctrico $MLT^{-3}A^{-1}$ y F_{ik} (o F^{ik}) tiene la dimensión L^{-2} pues ϕ_k (o ϕ^k) tiene la dimensión L^{-1} entonces

$$[\kappa] = ML^3T^{-3}A^{-1},$$

(10) la podemos poner como

$$\mathfrak{L} = \sqrt{g}\left[R^2 - \left(\frac{\alpha}{\kappa^2}\frac{4}{\varepsilon_0}\right)\frac{\varepsilon_0}{4} f_{ik} f^{ik}\right]$$

ε_0 es la constante dieléctrica del vacío y χ es la constante gravitatoria definida por

$$\chi = \frac{8\pi G}{c^4}$$

con G la constante de gravitación universal, entonces

$$\frac{\alpha}{\kappa^2}\frac{4}{\varepsilon_0} = \beta\chi \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{L} = \sqrt{g}\left[R^2 - \beta\chi\left(\frac{\varepsilon_0}{4} f_{ik} f^{ik}\right)\right] \tag{11}$$

siendo β una constante indeterminada de dimensión L^{-2}.

Como $-\varepsilon_o/4\, f_{ik} f^{ik}$ es la lagrangiana del campo electromagnético maxweliano, entonces (11) reproduce el tensor energía-momento del campo electromagnético. (11) es congruente dimensionalmente y de ella se obtiene unas ecuaciones formalmente correctas para la descripción del campo gravitatorio.

Al aplicar el principio de mínima acción a (10) se obtiene tanto las ecuaciones gravitatorias como las de campo electromagnético [5]. Elegir una u otra calibración no afecta a las ecuaciones de campo, por lo que se puede elegir una calibración concreta que tenga como propiedad que simplifique los cálculos. Una opción es la gauge natural definida por

$$R = -4\Lambda \tag{12}$$

donde Λ es la constante cosmológica, cuyo valor no puede ser determinado por las ecuaciones de la gravedad y debe ser valorado por la experiencia. En contraste con la condición gauge Lorentz del electromagnetismo, sólo existe una única solución de las ecuaciones gravitatorias que cumpla la condición gauge natural. Si estamos en la gauge natural y hacemos un nuevo cambio de calibración, obtendremos una nueva curvatura escalar

$$R' = \lambda^{-2} R = -\lambda^{-2} 4\Lambda$$

que no corresponde a la gauge natural. Esto no ocurre en la gauge Lorentz del electromagnetismo, donde existe una familia de soluciones que cumplen esa condición; la diferencia observada es ocasionada porque la gauge natural no es invariante frente a un cambio de calibración, mientras que la condición gauge Lorentz es invariante frente a transformaciones de coordenadas.

Siempre es posible elegir la condición gauge natural. En efecto, supongamos que resolvemos las ecuaciones de la gravedad y obtenemos un determinado valor de R. Siempre podemos obtener unos nuevos potenciales al hacer un cambio de calibración que venga definido por la función

$$\lambda = \sqrt{\frac{R}{-4\Lambda}}$$

en esta nueva calibración la curvatura escalar cumplirá la gauge natural

$$R' = \lambda^{-2} R = -4\Lambda$$

Cuando se impone la condición gauge natural a las ecuaciones de campo gravitatorio derivadas de la acción (10) se obtiene [5]

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R - \Lambda g_{ik} = -\chi M_{ik} - \frac{\beta\chi}{R} T_{ik} \tag{13}$$

donde M_{ik} hay que entenderlo como el tensor de energía-momento de la materia y T_{ik} es el tensor de energía-momento del campo electromagnético. Si queremos que (13) se reduzca a las ecuaciones de la Relatividad General debe cumplirse

$$\beta = R = -4\Lambda$$

entonces de (11)

$$\kappa = \sqrt{\frac{|\alpha|}{\chi \Lambda \varepsilon_0}} \tag{14}$$

donde α es una constante adimensional indeterminada que debe ser negativa. Notemos que κ es la constante de proporcionalidad entre la conexión métrica y el vector de campo electromagnético $\varphi_k = \kappa \phi_k$.

Podemos hacer una estimación numérica de (14); suponiendo que α es del orden la unidad y tomando $\Lambda \approx 10^{-52} m^{-2}$ se encuentra que $\kappa \approx 10^{54}$ en unidades del Sistema Internacional. Esto significa que la «dispersión» de las líneas espectrales predicha por Einstein y Pauli y dada por

$$\exp\left[ct(\phi_2 - \phi_1)\right] = \exp\left[\frac{ct}{\kappa}(\varphi_2 - \varphi_1)\right] = \exp\left[8 \cdot 10^{-39}(\varphi_2 - \varphi_1)\right]$$

exigiría para su observación que los átomos emisores hubiesen estado durante toda la edad del universo (unos quince mil millones de años) sometidos a una diferencia de potencial eléctrico del

DOI: 10.13140/RG.2.1.4600.7523

orden de un sextillón de voltios. Por tanto debemos concluir que aunque el efecto de Einstein-Pauli es cierto, o sea la frecuencia de emisión de los átomos depende de su historia previa, es inobservable a consecuencia del alto valor de la constante de proporcionalidad κ entre conexión métrica y vector electromagnético.

Un cambio de calibración no afecta a los resultados obtenidos. Por una nueva calibración el cociente entre los periodos de los dos relojes de nuestro experimento mental se transforma según

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} \to \frac{\tau'_1}{\tau'_2} = \frac{\lambda(P_1)}{\lambda(P_2)} \frac{\tau_1}{\tau_2}$$

(P_1 y P_2 son los puntos donde han estado colocados los relojes y correspondientes al instante coordenado *t*). El cociente de los periodos se ve alterado pero a consecuencia del cambio de escala de unidades implícito en el cambio de calibración, no por causa de una moficiación del fenómeno físico que regula el reloj, que es el asunto que nos interesa. Por tanto, un cambio de calibración no interviene en el efecto Einstein-Pauli, salvo en una variación de la escala de tiempo que sufren los periodos de los dos relojes y que será diferente en cada uno de ellos por haber estado situados en lugares diferentes.

Debemos advertir para terminar que el efecto Einstein-Pauli que estamos considerando se da en todas aquellas teorías donde se suponga que es distinto de cero el tensor de no-metricidad, pues bajo esta circunstancia el módulo de los vectores se modifica al desplazarlos paralelamente.

7. Conclusiones

Hemos interpretado la transformación conforme como un cambio de escala de las unidades de longitud y de tiempo. Con esta interpretación llegamos al resultado de que si bien los relojes que miden unidades de tiempo tendrán una marcha que depende de su posición espacio-temporal, sin embargo eso no significa que marquen tiempos diferentes, sino que usan unidades diferentes.

No se puede hacer una simple identificación entre la conexión métrica ϕ_k y el vector de campo electromagnético φ_k, los cuales tienen unidades diferentes, sólo podemos establecer su proporcionalidad. Hemos estimado el valor de esta constante y encontramos un valor del orden de 10^{54} (unidades en el SI). Este altísimo valor viene a significar que, si bien existe el efecto predicho por Einstein de una dependencia de la frecuencia de emisión de los átomos según su historia pasada, es tan extremadamente pequeño que es por completo inobservable.

8. Bibliografía

1] Weyl, H.: «Gravitation and Electricity», en *The principle of relativity (a colletion of original memoirs on the special and general theory of relativity)*, Dover, 1952, pp. 201-216; Pauli, W.: *Theory of Relativity*, Dover, 1981, pp. 192-202 y pp. 223-224; Eddington, A. S.: *The mathematical theory of Relativity*, Chelsea, 1975, pp. 196-212; Weyl, Hermann: *Space-Time-Matter*, Dover, 1952, pp. 121-138 y pp. 282-312.; Vizgin, Vladimir P.: *Unified field Theories in the third of the 20th century*, Birkhäuser, pp. 71-112 y pp. 129-137; Goenner, Hubert F. M.: «On the History of Unified Field theories», *Living Reviews in Relativity* 7 (2004) 1-153.

[2] Segura González, Wenceslao: «Geometrías de Weyl y ecuación de movimiento», viXra:1406.0166, 2014.

[3] Hubert F. M. Goenner, ob. cit., pp. 36-38.

[4] W. Pauli, ob. cit., pp. 195-196.

[5] Segura González, Wenceslao: «Ecuaciones de campo gravitatorio en la teoría unificada de Weyl», viXra:1405.0262, 2014.

DOI: 10.13140/RG.2.1.4600.7523