A solução exata de Schwarzschild

(The exact Schwarzschild solution)

Valdir Monteiro dos Santos Godoi
valdir.msgodoi@gmail.com

RESUMO – É feita uma segunda leitura da maneira como se calcula o movimento do periélio de um planeta na Relatividade Geral, chegando-se à conclusão de que a Relatividade Geral não explica este movimento de precessão.

ABSTRACT – A second reading of the way it calculates the motion of the perihelion of a planet in General Relativity is taken, coming to the conclusion that General Relativity does not explain this movement of precession.

Palavras-Chave: Schwarzschild, Einstein, solução exata, Relatividade Geral, precessão, periélio.

Key words: Schwarzschild, Einstein, exact solution, General Relativity, precession, perihelion.

Em 13 de janeiro de 1916 Schwarzschild[1] submeteu um estudo sobre a solução de Einstein[2] do seguinte problema: um ponto movendo-se de acordo com os seguintes requisitos

$$\begin{cases} \delta \int ds = 0 \\ ds = \sqrt{\sum g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}}, \mu, \nu = 1,2,3,4 \end{cases} \tag{1}$$

onde $g_{\mu\nu}$ são funções das variáveis *x*, constantes no início e fim do caminho de integração, e que em geral devem obedecer a determinadas condições: de simetria, variação temporal, no infinito, valor do determinante $|g_{\mu\nu}|$.

De acordo com o Cálculo Variacional, este ponto move-se ao longo de uma linha geodésica, onde a variedade é caracterizada pelo elemento de linha *ds*.

Da Geometria Diferencial chega-se à equação do movimento do ponto:

$$\frac{d^2 x^{\alpha}}{ds^2} = \sum_{\mu,\nu} \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{ds} \frac{dx^{\nu}}{ds}, \alpha, \beta = 1,2,3,4 \tag{2}$$

onde os símbolos de Christoffel são

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \sum_{\beta} g^{\alpha\beta} \left[\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\beta}} \right], \tag{3}$$

e $g^{\alpha\beta}$ é o determinante da matriz dos cofatores de $g_{\mu\nu}$ dividido pelo determinante $|g_{\mu\nu}|$.

Os coeficientes $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$ da equação do movimento, que são os coeficientes do campo gravitacional Γ, devem satisfazer às equações de campo

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} + \sum_{\alpha\beta} \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \Gamma_{\nu\alpha}^{\beta} = 0, \tag{4}$$

com o determinante

$$|g_{\mu\nu}| = -1, \tag{5}$$

e estando o corpo fonte maior da força gravitacional localizado imóvel em $x^1 = x^2 = x^3 = 0$.

Através de um raciocínio claro e rigoroso, superior ao de Einstein, definindo variáveis F, G, H e f_1, f_2, f_3, f_4 a determinar, Schwarzschild chega à solução exata (e única) do problema de Einstein, obtendo o elemento de linha, em coordenadas esféricas,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{R}\right) dt^2 - \frac{dR^2}{1 - \frac{\alpha}{R}} - R^2(d\vartheta^2 + sin^2\vartheta \, d\vartheta^2), \tag{6}$$

com

$$R = (r^3 + \alpha^3)^{1/3} \tag{7}$$

e

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \tag{8}$$

onde α é uma constante de integração, dependente do valor numérico da massa localizada na origem das coordenadas.

As constantes do movimento são

$$\left(1 - \frac{\alpha}{R}\right) \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 - \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{R}} \left(\frac{dR}{ds}\right)^2 - R^2 \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = const = h, \tag{9}$$

$$R^2 \frac{d\varphi}{ds} = const = c, \tag{10}$$

$$\left(1 - \frac{\alpha}{R}\right) \frac{dt}{ds} = const = 1, \tag{11}$$

esta última equação significando a definição da unidade de tempo. Observa-se que o c que aparece em (10) não é a velocidade da luz, considerada como igual a 1 nesta dedução.

Para $\frac{1}{R} = x$ vem

$$\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1-h}{c^2} + \frac{h\alpha}{c^2}x - x^2 + \alpha x^3, \quad (12)$$

e fazendo $\frac{c^2}{h} = B$ e $\frac{1-h}{h} = 2A$ chega-se à Equação de Einstein

$$\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 = 2\frac{A}{B^2} + \frac{\alpha}{B^2}x - x^2 + \alpha x^3, \quad (13)$$

onde $x = \frac{1}{r}$, obtida através de seguidas aproximações de 1ª e 2ª ordens [2],[3].

A solução aproximada (13) de Einstein difere então da solução exata (12) de Schwarzschild pela relação

$$R = (r^3 + \alpha^3)^{1/3} = r\left(1 + \frac{\alpha^3}{r^3}\right)^{1/3}, \quad (14)$$

e serão iguais se substituirmos *R* no lugar de *r* na solução de Einstein.

Para valores de α bastante pequenos (lembrando que o α de Einstein é igual ao raio de Schwarzschild, $\alpha = 2\frac{GM}{c^2}$), não deve haver diferença significativa entre os dois resultados.

Mas seja a solução aproximada de Einstein, seja a solução exata de Schwarzschild, ambas descrevem o movimento de um corpo ao redor de um centro de forças, ambos considerados pontuais, sendo a coordenada radial *R* ou *r*.

O gráfico de *x* em função de φ, que representa a solução das equações (12) ou (13), não pode ter um número infinito de pontos de máximos e mínimos, nem mesmo um número bastante grande destes pontos, por exemplo, $2\pi/\varepsilon$ pontos de máximos e mínimos, sendo ε o deslocamento angular do periélio de um planeta calculado na Relatividade Geral,

$$\varepsilon = \frac{6\pi GM}{ac^2(1-e^2)} = 24\pi^3 \frac{a^2}{T^2c^2(1-e^2)}, \quad (15)$$

usando os já conhecidos significados de *G*, *M*, *a*, *c*, *e*, *T*. [3],[2]

Isto porque os pontos extremos de $x(\varphi)$ são dados por $\frac{dx}{d\varphi} = 0$, e $\frac{dx}{d\varphi} = 0$ é uma equação do 3º grau apenas, e não uma equação com um número bastante grande ou infinito de soluções, que representariam um vasto conjunto de periélios e afélios em precessão, a cada revolução, a cada nova volta completa. Lembrando que um máximo de x, $x \neq 0$, corresponde a um mínimo de $r = 1/x$, e vice-versa.

Agora está bastante claro que a Relatividade Geral não explicou a precessão do periélio de Mercúrio, nem mesmo com a solução mais rigorosa de Schwarzschild.

A solução em série polinomial infinita obtida em [4] para a equação de Schwarzschild, escrita na forma genérica

$$u'' + u = A + Bu^2, \tag{16}$$

está coerente com o apresentado aqui: não há uma precessão periódica, regular, obtida com a equação do movimento de Einstein (ou de Schwarzschild).

Pela regra dos sinais há uma solução negativa e duas positivas para os extremos de $x(\varphi)$, podendo ser desprezada a solução negativa (não física). Uma das positivas deve ser dada pelas condições iniciais, e a outra pode, talvez, ser uma raiz dupla em alguns casos, ou senão algum máximo local, a pesquisar.

REFERÊNCIAS

1. Schwarzschild, K., *On the Gravitational Field of a Point-Mass, According to Einstein's Theory*, em http://zelmanov.ptep-online.com/papers/zj-2008-03.pdf, do original "*Uber das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie*", Sitzungsberichte der Koniglich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Phys.-Math. Klasse, 189-196 (1916).

2. Einstein, A., *Explanation of the Perihelion Motion of Mercury from General Relativity Theory*, do original *"Erklarung der Perihelbewegung der Merkur aus der allgemeinen Relativitatstheorie"*, Sitzungsberichte der Koniglich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 831–839 (1915), disponível em http://www.gsjournal.net/old/eeuro/vankov.pdf

3. Godoi, V.M.S., *O cálculo do movimento do periélio de Mercúrio na Relatividade Geral*, disponível em http://vixra.org/abs/1406.0050 (2014).

4. Godoi, V.M.S., *Série Polinomial Infinita na solução da Equação de Schwarzschild*, disponível em http://vixra.org/abs/1406.0157 (2014).