Série Polinomial Infinita na Solução da Equação de Schwarzschild
(Polynomial Infinite Series in the Solution of Schwarzschild Equation)

Valdir Monteiro dos Santos Godoi
valdir.msgodoi@gmail.com

RESUMO – Desenvolvemos uma solução em polinômio de grau infinito para a equação de Schwarzschild e obtivemos alguns resultados numéricos. Concluímos que sua solução parece convergir para um movimento em espiral que converge para o ponto central, e não uma elipse que precessiona.

ABSTRACT – We develop a solution in an infinite degree polynomial for the Schwarzschild equation and obtained some numerical results. Conclude that their solution seems to converge to a spiraling motion that converges to the center point, and not an ellipse that has precession.

Palavras-Chave: série polinomial infinita, equação de Schwarzschild, relatividade geral, valores numéricos.
Key Words: infinite power series, Schwarzschild equation, general relativity, numerical values.

1 – Introdução

Em [1] encontramos soluções exatas para a equação de Schwarzschild (que corresponde à equação diferencial de Binet para a Relatividade Geral),

$$u'' + u = A + Bu^2, \tag{1}$$

para 3 casos:

a) soluções constantes:

$$u = \alpha = \frac{1 \pm \sqrt{1-4AB}}{2B}, \tag{2}$$

b) binômio de grau *n*:

$$u = \frac{6}{B}\varphi^{-2} + \frac{1}{2B}, \tag{3}$$

para $A = \frac{1}{4B}$ e $n = -2$,

c) série polinomial infinita, na base $(1, \varphi, \varphi^2, \varphi^3, \dots, \varphi^n, \dots)$.

Vamos agora desenvolver melhor a solução para o 3º caso, além de obter alguns valores numéricos para a função u.

2 – Série polinomial infinita

Vamos supor para a solução de (1) uma expansão em série polinomial infinita de tal forma que $u(\varphi)$ possa ser expressa como

$$u(\varphi) = a_0 + a_1\varphi + a_2\varphi^2 + a_3\varphi^3 + \cdots + a_n\varphi^n + \cdots \qquad (4)$$

Assim sendo,

$$u' = a_1 + 2a_2\varphi + 3a_3\varphi^2 + 4a_4\varphi^3 + \cdots + na_n\varphi^{n-1} + \cdots \qquad (5)$$
$$u'' = 2a_2 + 3\cdot 2a_3\varphi + 4\cdot 3a_4\varphi^2 + \cdots + n(n-1)a_n\varphi^{n-2} + \cdots \qquad (6)$$
$$u^2 = a_0^2 + (a_0a_1 + a_1a_0)\varphi + (a_0a_2 + a_1a_1 + a_2a_0)\varphi^2 + \cdots \qquad (7)$$
$$= \sum_{i=0}^{2n}\left(\sum_{j+k=i} a_j a_k\right)\varphi^i$$

Substituindo as igualdades anteriores na equação original, obtemos com o termo livre o valor

$$2a_2 + a_0 = A + B{a_0}^2 \qquad (8.1)$$
$$a_2 = \frac{A + Ba_0^2 - a_0}{2} \qquad (8.2)$$

Com o termo de 1º grau,

$$3\cdot 2a_3 + a_1 = B\cdot 2a_0a_1 \qquad (9.1)$$
$$a_3 = \frac{(2Ba_0 - 1)a_1}{3\cdot 2} \qquad (9.2)$$

Com o termo de 2º grau,

$$4\cdot 3a_4 + a_2 = B(2a_0a_2 + a_1^2) \qquad (10.1)$$
$$a_4 = \frac{(2Ba_0 - 1)a_2 + Ba_1^2}{4\cdot 3} \qquad (10.2)$$

e continuando,

$$a_5 = \frac{(2Ba_0 - 1)a_3 + 2Ba_1a_2}{5\cdot 4} \qquad (11)$$

$$a_6 = \frac{(2Ba_0 - 1)a_4 + B(2a_1a_3 + a_2^2)}{6\cdot 5} \qquad (12)$$

$$a_7 = \frac{(2Ba_0 - 1)a_5 + 2B(a_1a_4 + a_2a_3)}{7\cdot 6} \qquad (13)$$

$$a_8 = \frac{(2Ba_0-1)a_6+B[2(a_1a_5+a_2a_4)+a_3^2]}{8\cdot7} \tag{14}$$

$$a_9 = \frac{(2Ba_0-1)a_7+2B(a_1a_6+a_2a_5+a_3a_4)}{9\cdot8} \tag{15}$$

$$a_{10} = \frac{(2Ba_0-1)a_8+B[2(a_1a_7+a_2a_6+a_3a_5)+a_4^2]}{10\cdot9} \tag{16}$$

$$a_{n\geq3} = \begin{cases} \dfrac{(2Ba_0-1)a_{n-2}+2B\sum_{i+j=n-2}\ a_ia_j}{n(n-1)}, n\ \acute{\imath}mpar \\ \dfrac{(2Ba_0-1)a_{n-2}+B[2\sum_{i+j=n-2}\ a_ia_j + a_{n/2-1}^2]}{n(n-1)}, n\ par \end{cases} \tag{17}$$

Os casos mais simples de se analisar ocorrem quando

a) $a_0 = u(0) = 0$, i.e., na posição angular $\varphi = 0$ o corpo se encontra em $r = \frac{1}{u} = +\infty$, infinitamente distante da origem;

b) $a_1 = u'(0) = 0$, i.e., a quantidade $du/d\varphi$ é nula em $\varphi = 0$, e consequentemente $dr/d\varphi$, se $r \neq 0$, e portanto $\varphi = 0$ é um ponto de máximo ou mínimo da função $r(\varphi)$;

c) $2Ba_0 - 1 = 0$;

d) uma combinação dos casos anteriores.

2.1 – O caso $a_0 = a_1 = 0$

Combinando os casos a) e b), se $a_0 = a_1 = 0$ então todos os termos de ordem ímpar são iguais a zero e os de ordem par têm os coeficientes

$$a_2 = \frac{A}{2} \tag{18}$$

$$a_4 = \frac{-a_2}{4\cdot3} = \frac{-A}{4!} \tag{19}$$

$$a_6 = \frac{-a_4+Ba_2^2}{6\cdot5} = \frac{a_2}{6\cdot5\cdot4\cdot3} + \frac{Ba_2^2}{6\cdot5} = \frac{A}{6!} + \frac{A^2B}{5!} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} a_8 &= \frac{-a_6+2Ba_2a_4}{8\cdot7} = \frac{-a_2}{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3} - \frac{2^3\cdot3^2Ba_2^2}{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3} \\ &= -\frac{A}{8!} - \frac{36\,A^2B}{8!} \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} a_{10} &= \frac{-a_8+B(2a_2a_6+a_4^2)}{10\cdot9} \\ &= \frac{A}{10!} + A^2B\left\{\frac{36}{10!} + \frac{1}{10\cdot9}\left[\frac{1}{6!} + \frac{1}{(4!)^2} + \frac{AB}{6\cdot5\cdot4}\right]\right\} \end{aligned} \tag{22}$$

Continuando,

$$a_{12} = \frac{-a_{10} + 2B(a_2 a_8 + a_4 a_6)}{12 \cdot 11} \tag{23}$$

$$a_{14} = \frac{-a_{12} + B[2(a_2 a_{10} + a_4 a_8) + a_6^2]}{14 \cdot 13} \tag{24}$$

$$a_{16} = \frac{-a_{14} + 2B(a_2 a_{12} + a_4 a_{10} + a_6 a_8)}{16 \cdot 15} \tag{25}$$

$$a_{18} = \frac{-a_{16} + B[2(a_2 a_{14} + a_4 a_{12} + a_6 a_{10}) + a_8^2]}{18 \cdot 17} \tag{26}$$

$$a_{2n \geq 4} = \begin{cases} \dfrac{-a_{2n-2} + 2B \sum_{i+j=2n-2} a_i a_j}{(2n)(2n-1)}, n\ par \\ \dfrac{-a_{2n-2} + B[2 \sum_{i+j=2n-2} a_i a_j + a_{n-1}^2]}{(2n)(2n-1)}, n\ \acute{\imath}mpar \end{cases} \tag{27}$$

Como se pode perceber, os coeficientes ficam cada vez mais complicados com o aumento do índice n em $a_n\, \varphi^n$, mesmo no caso mais simples de $a_0 = a_1 = 0$, embora numericamente, com um programa de computador, podemos calcular os coeficientes até o limite que desejarmos.

Os numeradores de cada parcela da série resultante aparecem como múltiplos de A, A^2B, A^3B^2, A^4B^3, etc., e os denominadores vão sendo divididos por $n(n-1)$ a cada novo coeficiente a_n. Sendo $AB \ll 1$ a convergência desta série não traz nenhum problema e é muito rápida, para valores de φ razoáveis.

Vemos que u é uma função par, apresentando simetria em torno do eixo horizontal, e para um determinado ângulo φ o valor de u, e por conseqüência $1/r$, é único. Mas sendo φ uma coordenada polar é importante pesquisar sobre a periodicidade $u(\varphi) = u(\varphi + 2k\pi)$, embora a propriedade das funções pares $u(\varphi) = u(-\varphi)$ nos remeta a concluir precipitadamente que a órbita é fechada, sem precessão alguma.

2.2 – O caso $(2Ba_0 - 1) = 0$

As expressões indicadas em (17) mostram que deve haver uma considerável simplificação para a obtenção dos coeficientes da solução quando $(2Ba_0 - 1) = 0$. Vejamos.

De (8.2), sendo

$$a_0 = \frac{1}{2B}, \tag{28}$$

vem

$$a_2 = \frac{4AB-1}{8B}. \tag{29}$$

De (9.2),

$$a_3 = 0. \tag{30}$$

De (10.2),

$$a_4 = \frac{B}{4\cdot 3} a_1^2 = \frac{2B}{4!} a_1^2. \tag{31}$$

De (11),

$$a_5 = \frac{2Ba_1 a_2}{5\cdot 4} = \frac{(4AB-1)}{5\cdot 4^2} a_1 = \frac{9\,(4AB-1)}{6!} a_1. \tag{32}$$

E continuando,

$$a_6 = \frac{Ba_2^2}{6\cdot 5} = \frac{(4AB-1)^2}{6\cdot 5\cdot 2^6 B} = \frac{21\,(4AB-1)^2}{8!\,B} \tag{33}$$

$$a_7 = \frac{2Ba_1 a_4}{7\cdot 6} = \frac{B^2}{7\cdot 6\cdot 3\cdot 2} a_1^3 = \frac{20B^2}{7!} a_1^3 \tag{34}$$

$$a_8 = \frac{2B(a_1 a_5 + a_2 a_4)}{8\cdot 7} = \frac{33B(4AB-1)}{8!} a_1^2 \tag{35}$$

$$a_9 = \frac{2B(a_1 a_6 + a_2 a_5)}{9\cdot 8} = \frac{(4AB-1)^2}{2^7\cdot 3^3\cdot 5} a_1 = \frac{21\,(4AB-1)^2}{9!} a_1 \tag{36}$$

$$\begin{aligned} a_{10} &= \frac{B[2(a_1 a_7 + a_2 a_6) + a_4^2]}{10\cdot 9} = \frac{5B^3}{10\cdot 9\cdot 7\cdot 3\cdot 2^4} a_1^4 + \frac{(4AB-1)^3}{10\cdot 9\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 2^6 B} \\ &= \frac{60B^3}{9!} a_1^4 + \frac{21\,(4AB-1)^3}{4\cdot 10!\,B} \end{aligned} \tag{37}$$

$$a_{n\geq 3} = \begin{cases} \dfrac{2B\sum_{i+j=n-2} a_i a_j}{n(n-1)}, n\ ímpar \\ \dfrac{B[2\sum_{i+j=n-2} a_i a_j + a_{n/2-1}^2]}{n(n-1)}, n\ par \end{cases} \tag{38}$$

Vemos que o coeficiente a_{10} já apresenta uma expressão mais complicada, e a dificuldade tenderia a aumentar para índices cada vez maiores.

Nota-se, entretanto, que todos estes coeficientes a partir de a_4 são múltiplos de a_1, que se torna um coeficiente dependente das condições iniciais.

Se fizermos $a_1 = 0$, mais a condição $(2Ba_0 - 1) = 0$, ficaríamos com uma reduzida expansão para u:

$$u = a_0 + a_2\varphi^2 = \frac{1}{2B} + \frac{4AB-1}{8B}\varphi^2, \tag{39}$$

que deveria ser solução da equação (1),

$$u'' + u = A + Bu^2. \tag{40}$$

Entretanto, em [1] já tínhamos verificado que apenas para $n = -2$ há solução em forma de binômio $a\varphi^n + b$ para esta equação, e realmente (39) não resolve (1). O que aconteceu então?

A somatória (7) para u^2 resulta em um polinômio de grau $2n$, enquanto a somatória (4) para u é um polinômio de grau n. Assim, poderíamos concluir que nunca haverá uma solução possível na forma de série polinomial infinita para a equação (1) válida para todo φ, entretanto, estamos admitindo, numa série convergente de infinitos termos, que vale o limite no infinito

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} a_k\,\varphi^k = 0. \tag{41}$$

É como numa progressão geométrica de razão q, onde o termo a_k e a soma S_n valem respectivamente

$$a_k = a_1 q^{k-1}, \tag{42}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 \frac{q^n-1}{q-1}. \tag{43}$$

No caso das P.G. infinitas, convergentes (|q| < 1), temos

$$S_\infty = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} a_1 \frac{q^n-1}{q-1} = a_1 \frac{1}{1-q}, \tag{44}$$

e portanto

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} a_k = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} \frac{q^{2n}-1}{q-1} = \frac{1}{1-q} \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = 0, \tag{45}$$

ou seja, a convergência até o termo de ordem n infinito implica que a convergência também vale até o termo de ordem infinita $2n$, sem alteração no valor da soma final.

2.3 – O caso $\boldsymbol{a_1 = 0}$, $\boldsymbol{a_0 \neq 0}$

Faremos deste o último caso a calcular neste *paper*, parecendo ser o de maior importância, uma vez que remete à situação mais real de que em $\varphi = 0$ temos um ponto extremo (por exemplo, periélio) e o corpo não está no infinito.

Partindo dos coeficientes obtidos na introdução da seção 2, e definindo, para abreviar a notação,

$$\alpha = A + Ba_0^2 - a_0, \tag{46}$$

$$\gamma = 2Ba_0 - 1, \tag{47}$$

onde $a_0 = u(0)$, obtemos

$$a_2 = \frac{A+Ba_0^2 - a_0}{2} = \frac{\alpha}{2} \tag{48}$$

$$a_3 = a_1 = a_5 = a_7 = a_{2n+1} = 0 \tag{49}$$

$$a_4 = \frac{\gamma a_2}{4\cdot 3} = \frac{\gamma\alpha}{4!} \tag{50}$$

$$a_6 = \frac{\gamma a_4 + Ba_2^2}{6\cdot 5} = \frac{\gamma^2\alpha}{6!} + \frac{B\alpha^2}{5!} = \frac{\gamma^2\alpha + 6B\alpha^2}{6!} \tag{51}$$

$$a_8 = \frac{\gamma a_6 + 2Ba_2a_4}{8\cdot 7} = \frac{\gamma^3\alpha + 36B\gamma\alpha^2}{8!} \tag{52}$$

$$\begin{aligned} a_{10} &= \frac{\gamma a_8 + B[2a_2a_6 + a_4^2]}{10\cdot 9} \\ &= \frac{\gamma^4\alpha}{10!} + B\gamma^2\alpha^2\left[\frac{92}{10!} + \frac{1}{(4!)^2}\right] + \frac{B^2\alpha^3}{10\cdot 9\cdot 5!} \end{aligned} \tag{53}$$

$$a_n = \frac{\gamma a_{n-2} + B[2\sum_{i+j=n-2} a_ia_j + a_{n/2-1}^2]}{n(n-1)}, i, j, n\, par, n \geq 4 \tag{54}$$

Novamente temos uma função par, valendo $u(\varphi) = u(-\varphi)$, o que por si só não nos garante que a órbita é fechada, nem permite saber se há periodicidade e qual seu valor.

Dos coeficientes dados em (48) a (54) só uma parte da série nos apresenta como facilmente reconhecível:

$$\tilde{u} = a_0 + \frac{\alpha}{2!}\varphi^2 + \frac{\gamma\alpha}{4!}\varphi^4 + \frac{\gamma^2\alpha}{6!}\varphi^6 + \cdots + \frac{\gamma^{n-1}\alpha}{(2n)!}\varphi^{2n} + \cdots \tag{55}$$

semelhante, mas não igual, à expansão em série de Taylor de duas funções conhecidas:

$$\cosh\varphi = 1 + \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \cdots + \frac{\varphi^{2n}}{(2n)!} + \cdots, -\infty < \varphi < +\infty, \tag{56}$$

e

$$\sec\varphi = 1 + \frac{E_1\varphi^2}{2!} + \frac{E_2\varphi^4}{4!} + \cdots + \frac{E_n\varphi^{2n}}{(2n)!} + \cdots, |\varphi| < \frac{\pi}{2}, \qquad (57)$$

onde E_n são os números de Euler (1, 5, 61, 1.385, 50.521, 2.702.765, etc.).

Na próxima seção calcularemos alguns valores numéricos para u, no intuito de acompanharmos a variação de u com o aumento do valor de k em $u(\varphi + 2k\pi)$ e verificarmos seu sinal (lembrando que distâncias e seus recíprocos devem ser quantidades positivas).

3 – Valores numéricos para u

Conforme mencionamos, embora analiticamente seja difícil calcularmos cada coeficiente da solução da equação de Schwarzschild, numericamente, com um programa de computador, isto é realizável sem maiores dificuldades, e fornecerá o valor de $u(\varphi)$ para o ângulo φ que desejarmos. É o que faremos nesta seção, especificamente para o caso descrito na seção 2.3 anterior: $a_1 = 0,\ a_0 \neq 0$, que representa a existência de periélio ou afélio em $\varphi = 0$ e o corpo não está no infinito nesta posição inicial.

Vamos analisar duas situações:

1) parâmetros compatíveis com o sistema Mercúrio-Sol

2) $B = A = 1{,}71 \times 10^{-11},\ a_0 = A(1 + e)$.

O algoritmo principal está abaixo, e um cuidado que se deve ter é com o *overflow* da variável u na soma de $a_n\varphi^n$ para os valores grandes de n. Para isso é conveniente realizar um cálculo intermediário com logaritmos. Nosso programa em C utilizou um polinômio de grau máximo 250, cujo respectivo coeficiente do termo de maior grau não nulo foi $a[240] = -8.435103e - 316$ para o primeiro caso e $a[192] = -1.541485e - 321$ no segundo caso.

```
int main()
{system("cls");
 printf("Equacao de Schwarzschild\n");
 printf("caso a1 = 0\n\n");
 inicializacoes();
 for (n=4; n<=nMax; n+=2)
      calcular_a(n);
 system("pause");
 k=0;
 while (k<=kMax)
    {for (fi1=0; fi1<=doisPi; fi1+=Pi_4)
        {reinicializacoes();
         for (n=4; n<=nMax; n+=2)
              if (a[n] != 0)
                 {if (a[n] < 0)
                     {log_du = log10(-a[n]) + n*log10_fi;
                      du = -pow(10, log_du);
                     }
                  else
```

```
                {log_du = log10(a[n]) + n*log10_fi;
                 du = pow(10, log_du);
                }
              u+=du;
             }
        exibe_resultado();
        }
    printf("\n");
    if (k<=4)
       k++;
    else
    if (k<10)
       k=10.0;
    else
       k*=10.0;
   }
 printf("Termino de Processamento.\n");
 system("pause");
 return 1;

void calcular_a(int n)
{double s;
 int i;
 s = 0;
 for (i=0; i<=n-2; i+=2)
      s+=a[i]*a[n-2-i];
 a[n] = (gama*a[n-2] + B*(2.0*s + pow(a[n/2-1],2)))/(n*(n-1.0));
 printf("a[%3d]=%14.6e\n", n, a[n]);
 return;
}
```

Para a primeira execução, com os dados do sistema Mercúrio-Sol[2],[1] obtivémos os valores abaixo (fi1, em radianos exibido com 2 decimais, é a primeira determinação positiva do ângulo $\varphi = \varphi_1 + 2k\pi$):

```
fi1:  0.00, k: 0e+000, u:  2.061576e-011, r=1/u:  4.850658e+010
fi1:  0.79, k: 0e+000, u:  1.958602e-011, r=1/u:  5.105683e+010
fi1:  1.57, k: 0e+000, u:  1.710000e-011, r=1/u:  5.847953e+010
fi1:  2.36, k: 0e+000, u:  1.461398e-011, r=1/u:  6.842761e+010
fi1:  3.14, k: 0e+000, u:  1.358424e-011, r=1/u:  7.361471e+010
fi1:  3.93, k: 0e+000, u:  1.461398e-011, r=1/u:  6.842762e+010
fi1:  4.71, k: 0e+000, u:  1.710001e-011, r=1/u:  5.847951e+010
fi1:  5.50, k: 0e+000, u:  1.958606e-011, r=1/u:  5.105673e+010
fi1:  6.28, k: 0e+000, u:  2.061595e-011, r=1/u:  4.850613e+010

fi1:  0.00, k: 1e+000, u:  2.061595e-011, r=1/u:  4.850613e+010
fi1:  0.79, k: 1e+000, u:  1.958688e-011, r=1/u:  5.105458e+010
fi1:  1.57, k: 1e+000, u:  1.710389e-011, r=1/u:  5.846623e+010
fi1:  2.36, k: 1e+000, u:  1.463168e-011, r=1/u:  6.834483e+010
fi1:  3.14, k: 1e+000, u:  1.366532e-011, r=1/u:  7.317797e+010
fi1:  3.93, k: 1e+000, u:  1.498703e-011, r=1/u:  6.672434e+010
fi1:  4.71, k: 1e+000, u:  1.882282e-011, r=1/u:  5.312700e+010
```

fi1: 5.50, k: 1e+000, u: 2.756671e-011, r=1/u: 3.627563e+010
fi1: 6.28, k: 1e+000, u: 5.768168e-011, r=1/u: 1.733653e+010

fi1: 0.00, k: 2e+000, u: 5.768168e-011, r=1/u: 1.733653e+010
fi1: 0.79, k: 2e+000, u: 1.921205e-010, r=1/u: 5.205065e+009
fi1: 1.57, k: 2e+000, u: 8.217248e-010, r=1/u: 1.216952e+009
fi1: 2.36, k: 2e+000, u: 3.772815e-009, r=1/u: 2.650541e+008
fi1: 3.14, k: 2e+000, u: 1.758882e-008, r=1/u: 5.685430e+007
fi1: 3.93, k: 2e+000, u: 8.230822e-008, r=1/u: 1.214946e+007
fi1: 4.71, k: 2e+000, u: 3.866503e-007, r=1/u: 2.586317e+006
fi1: 5.50, k: 2e+000, u: 1.846979e-006, r=1/u: 5.414246e+005
fi1: 6.28, k: 2e+000, u: 9.622639e-006, r=1/u: 1.039216e+005

fi1: 0.00, k: 3e+000, u: 9.622639e-006, r=1/u: 1.039216e+005
fi1: 0.79, k: 3e+000, u: 7.762417e-005, r=1/u: 1.288259e+004
fi1: 1.57, k: 3e+000, u: -8.213980e-002, r=1/u: -1.217437e+001
fi1: 2.36, k: 3e+000, u: -8.428364e+002, r=1/u: -1.186470e-003
fi1: 3.14, k: 3e+000, u: -5.559277e+006, r=1/u: -1.798795e-007
fi1: 3.93, k: 3e+000, u: -2.652473e+010, r=1/u: -3.770066e-011
fi1: 4.71, k: 3e+000, u: -9.441696e+013, r=1/u: -1.059132e-014
fi1: 5.50, k: 3e+000, u: -2.561704e+017, r=1/u: -3.903652e-018
fi1: 6.28, k: 3e+000, u: -5.394505e+020, r=1/u: -1.853738e-021

fi1: 0.00, k: 4e+000, u: -5.394505e+020, r=1/u: -1.853738e-021
fi1: 0.79, k: 4e+000, u: -8.959539e+023, r=1/u: -1.116129e-024
fi1: 1.57, k: 4e+000, u: -1.190708e+027, r=1/u: -8.398362e-028
fi1: 2.36, k: 4e+000, u: -1.282936e+030, r=1/u: -7.794621e-031
fi1: 3.14, k: 4e+000, u: -1.134168e+033, r=1/u: -8.817035e-034
fi1: 3.93, k: 4e+000, u: -8.317182e+035, r=1/u: -1.202330e-036
fi1: 4.71, k: 4e+000, u: -5.110536e+038, r=1/u: -1.956742e-039
fi1: 5.50, k: 4e+000, u: -2.655628e+041, r=1/u: -3.765587e-042
fi1: 6.28, k: 4e+000, u: -1.177033e+044, r=1/u: -8.495941e-045

Para a segunda execução, com $B = A = 1{,}71 \times 10^{-11}$, o resultado foi conforme a seguir:

fi1: 0.00, k: 0e+000, u: 2.061576e-011, r=1/u: 4.850658e+010
fi1: 0.79, k: 0e+000, u: 1.958602e-011, r=1/u: 5.105683e+010
fi1: 1.57, k: 0e+000, u: 1.710000e-011, r=1/u: 5.847953e+010
fi1: 2.36, k: 0e+000, u: 1.461398e-011, r=1/u: 6.842762e+010
fi1: 3.14, k: 0e+000, u: 1.358424e-011, r=1/u: 7.361472e+010
fi1: 3.93, k: 0e+000, u: 1.461398e-011, r=1/u: 6.842762e+010
fi1: 4.71, k: 0e+000, u: 1.710000e-011, r=1/u: 5.847953e+010
fi1: 5.50, k: 0e+000, u: 1.958602e-011, r=1/u: 5.105683e+010
fi1: 6.28, k: 0e+000, u: 2.061576e-011, r=1/u: 4.850658e+010

fi1: 0.00, k: 1e+000, u: 2.061576e-011, r=1/u: 4.850658e+010
fi1: 0.79, k: 1e+000, u: 1.958602e-011, r=1/u: 5.105683e+010
fi1: 1.57, k: 1e+000, u: 1.710000e-011, r=1/u: 5.847953e+010
fi1: 2.36, k: 1e+000, u: 1.461398e-011, r=1/u: 6.842762e+010
fi1: 3.14, k: 1e+000, u: 1.358424e-011, r=1/u: 7.361472e+010
fi1: 3.93, k: 1e+000, u: 1.461398e-011, r=1/u: 6.842762e+010

fi1: 4.71, k: 1e+000, u: 1.710000e-011, r=1/u: 5.847953e+010
fi1: 5.50, k: 1e+000, u: 1.958602e-011, r=1/u: 5.105683e+010
fi1: 6.28, k: 1e+000, u: 2.061576e-011, r=1/u: 4.850658e+010

fi1: 0.00, k: 2e+000, u: 2.061576e-011, r=1/u: 4.850658e+010
fi1: 0.79, k: 2e+000, u: 1.958602e-011, r=1/u: 5.105683e+010
fi1: 1.57, k: 2e+000, u: 1.710000e-011, r=1/u: 5.847953e+010
fi1: 2.36, k: 2e+000, u: 1.461398e-011, r=1/u: 6.842762e+010
fi1: 3.14, k: 2e+000, u: 1.358424e-011, r=1/u: 7.361472e+010
fi1: 3.93, k: 2e+000, u: 1.461398e-011, r=1/u: 6.842762e+010
fi1: 4.71, k: 2e+000, u: 1.710000e-011, r=1/u: 5.847953e+010
fi1: 5.50, k: 2e+000, u: 1.958602e-011, r=1/u: 5.105683e+010
fi1: 6.28, k: 2e+000, u: 2.061576e-011, r=1/u: 4.850658e+010

fi1: 0.00, k: 3e+000, u: 2.061576e-011, r=1/u: 4.850658e+010
fi1: 0.79, k: 3e+000, u: 1.958602e-011, r=1/u: 5.105683e+010
fi1: 1.57, k: 3e+000, u: 1.710000e-011, r=1/u: 5.847952e+010
fi1: 2.36, k: 3e+000, u: 1.461399e-011, r=1/u: 6.842757e+010
fi1: 3.14, k: 3e+000, u: 1.358427e-011, r=1/u: 7.361453e+010
fi1: 3.93, k: 3e+000, u: 1.461410e-011, r=1/u: 6.842707e+010
fi1: 4.71, k: 3e+000, u: 1.710046e-011, r=1/u: 5.847797e+010
fi1: 5.50, k: 3e+000, u: 1.958795e-011, r=1/u: 5.105179e+010
fi1: 6.28, k: 3e+000, u: 2.062439e-011, r=1/u: 4.848629e+010

fi1: 0.00, k: 4e+000, u: 2.062439e-011, r=1/u: 4.848629e+010
fi1: 0.79, k: 4e+000, u: 1.962572e-011, r=1/u: 5.095354e+010
fi1: 1.57, k: 4e+000, u: 1.728563e-011, r=1/u: 5.785154e+010
fi1: 2.36, k: 4e+000, u: 1.548858e-011, r=1/u: 6.456368e+010
fi1: 3.14, k: 4e+000, u: 1.772011e-011, r=1/u: 5.643307e+010
fi1: 3.93, k: 4e+000, u: 3.420852e-011, r=1/u: 2.923249e+010
fi1: 4.71, k: 4e+000, u: 1.100295e-010, r=1/u: 9.088469e+009
fi1: 5.50, k: 4e+000, u: 4.605922e-010, r=1/u: 2.171118e+009
fi1: 6.28, k: 4e+000, u: 2.114412e-009, r=1/u: 4.729448e+008

4 – Conclusão

O método aqui utilizado para a solução da Equação de Schwarzschild pode evidentemente ser generalizado para várias outras equações não lineares, de diferentes graus de dificuldade, levando-nos a uma rica área de pesquisa. Não se trata apenas de uma aproximação da solução em 1ª ou 2ª ordem, como tanto fizeram Einstein[1] e outros, mas sim de uma solução precisa cuja ordem de aproximação é infinita, portanto aceitável para quaisquer fins numéricos, desde evidentemente que o limite (41) seja válido.

Ainda que exibidos de forma rudimentar e sem interface gráfica, é possível verificar dos dados da seção anterior que com o aumento de k o valor de u tende a aumentar, e através de mais conjuntos de dados (não descritos aqui) foi possível inferir que deve valer o limite

$$\lim_{\varphi\to\infty} u(\varphi) = \pm\infty, \tag{58}$$

e portanto a tendência do movimento com o aumento do tempo é diminuir sua distância ao centro de forças, convergindo para este ponto central. Conforme comentado anteriormente[3], mais que uma precessão, o movimento parece convergir para uma espiral, indo em direção ao centro. Aliado a isso, os valores negativos que foram obtidos refletem soluções que começam a divergir.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Godoi, V.M.S., *O cálculo do movimento do periélio de Mercúrio na Relatividade Geral*, disponível em http://vixra.org/abs/1406.0050 (2014).

2. Novello, M. et al, *Programa Mínimo de Cosmologia*, cap. 1 (Teoria da Gravitação, autor Vitorio de Lorenci). Rio de Janeiro: editora Jauá (2010).

3. Godoi, V.M.S., *A commentary about the solution in 2nd. Order Schwarzschild's Equation*, disponível em http://www.vixra.org/abs/1406.0070 (2014).