Гравитационное взаимодействие в среде с ненулевой плотностью

Кирьян Д. Г., Кирьян Г. В.

Институт Проблем Машиноведения РАН
В.О., Большой проспект 61, Санкт-Петербург, Россия, 199178
эл.адрес: diki.ipme@gmail.com

В работе приведены новые результаты анализа хорошо известных и наблюдаемых физических процессов связанных с гравитационным взаимодействием системы материальных тел в среде с ненулевой плотностью. В основу работы положено утверждение о том, что «выталкивающая» сила Архимеда, действующая на материальное тело, находящееся в среде с ненулевой плотностью имеет гравитационную природу. Не выходя за рамки определений классической физики и механики, этот подход позволил ввести понятие гравитирующей массы тела, как массы, которая определяет величину гравитационного взаимодействия, а так же установить аналитическое соотношение между гравитирующей и инерционной массой материального тела. Объединение прямого и опосредованного (сила Архимеда) гравитационного воздействия на материальное тело, находящегося в среде, позволило выделить из общего гравитационного поля этой системы структуру с характерным распределением силовых линий, соответствующую диполю. Этот факт позволяет утверждать, что, наряду с гравитационным притяжением, существует и гравитационное отталкивание материальных тел без смыслового конфликта с существующей системой базовых определений и понятий классической физики и механики.

«Известное вообще — от того, что оно *известно*, ещё *не познано*»

Георг Вильгельм Фридрих Гегель [1, стр. 22]

1. Постановка задачи

Общепринято рассматривать гравитационное взаимодействие системы материальных тел без учёта фактора среды в которой находится исследуемая система. Поэтому, представляет интерес задача о влиянии среды на гравитационное взаимодействие между материальными телами.

Пусть имеется статичная среда $\mathcal{F}$ с равномерным распределением плотности вещества $\rho_{\mathcal{F}} > 0$ (например, несжимаемая жидкость), ограниченная сферической поверхностью конечного радиуса $R_{\mathcal{F}}$. Поместим в произвольную фиксированную точку этой среды недеформируемую однородную сферу $\mathcal{G}$ с постоянной плотностью $\rho_{\mathcal{G}} > 0$ и радиусом $R_{\mathcal{G}} \ll R_{\mathcal{F}}$.

Требуется найти выражение, описывающее гравитационное взаимодействие материального тела $\mathcal{G}$ с окружающей его средой $\mathcal{F}$, при отсутствии каких-либо внешних воздействий гравитационной и иной природы. Задачу рассматриваем в предельно упрощённой постановке[1].

Так как материальное тело $\mathcal{G}$, в нашей постановке, выполняет роль инородного включения в рассматриваемую область среды $\mathcal{F}$, то, по отношению к $\mathcal{G}$ иногда используют термин *аномалия*[2]. В нашем случае, при наличии чётко выраженной неоднородности распределения вещества, источником гравитационного поля являются, как тело $\mathcal{G}$, так и среда $\mathcal{F}$. Поэтому, тело $\mathcal{G}$ испытывает гравитационное воздействие только со стороны среды $\mathcal{F}$.

Вопрос о влиянии гравитационного поля тела $\mathcal{G}$ на физические характеристики среды $\mathcal{F}$, а именно плотности, будет рассмотрен позднее, пока считаем, что распределение плотности среды $\mathcal{F}$ остаётся неизменным и после внесения в неё аномалии — тела $\mathcal{G}$.

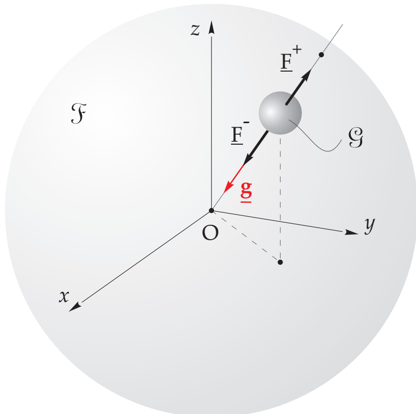


Рис. 1.

Введём в рассмотрение декартову систему координат $\mathbf{O}xyz$ (рис. 1), начало которой расположено в центре сферы с радиусом $R_{\mathcal{F}}$. Поместим центр масс тела $\mathcal{G}$ на расстоянии δ от точки $\mathbf{O}$. Гравитационное поле в произвольной точке среды $\mathcal{F}$ характеризуется вектором напряжённости $\underline{\mathbf{g}}_{\mathcal{F}}(\underline{r})$, где $\underline{r}$ — радиус-вектор рассматриваемой точки. В каждой точке, выбранной нами, области $\mathcal{F}$, в силу симметрии формы и распределения вещества по объёму, вектор напряжённости гравитационного поля $\underline{\mathbf{g}}_{\mathcal{F}}$ направлен к «центру притяжения» — центру сферы (точка $\mathbf{O}$).

Обозначим силу гравитационного взаимодействия тела $\mathcal{G}$ с веществом области $\mathcal{F}$ через $\underline{F}^{-}$. Направление действия силы $\underline{F}^{-}$ определяется вектором напряжённости центрально симметричного гравитационного по-

[1]Императив постоянства плотности вещества в области $\mathcal{F}$ по координате и времени, недеформируемости материального тела $\mathcal{G}$ и его неподвижности, относительно окружающей среды $\mathcal{F}$, а так же выбора их геометрии в виде сфер не является обязательным, но это позволило, без потери общности, упростить задачу и сосредоточиться на главном, а именно, найти выражение для гравитационной силы, действующей на тело $\mathcal{G}$ со стороны окружающей его среды $\mathcal{F}$.

[2]В гравиметрии термин *аномалия* используют применительно к материальному объекту конечного объёма (включению) с плотностью отличной от плотности окружающей его среды [2, 3].

ля $\underline{\mathbf{g}}_{\mathcal{F}}$, который направлен к центру сферической области $\mathbf{O}$. В свою очередь, центрально-симметричная структура гравитационного поля внутри сферической области $\mathcal{F}$ создаёт так же центрально-симметричное распределение давления вещества в среде $\mathcal{F}$. Наличие градиента давления в среде, окружающей тело $\mathcal{G}$, определяет, так называемую, «выталкивающую» силу $\underline{F}^{+}$.

Итак, на тело $\mathcal{G}$ одномоментно действуют две, как бы «независимые» силы, но зависящие от напряжённости гравитационного поля окружающей их среды $\mathcal{F}$. Запишем векторную сумму этих сил:

$$\underline{F} = \underline{F}^{+} + \underline{F}^{-}\ , \tag{1}$$

где $\underline{F}^{-}$ — сила прямого гравитационного воздействия на тело $\mathcal{G}$ со стороны среды $\mathcal{F}$ и «выталкивающая» сила $\underline{F}^{+}$, обусловленная наличием градиента давления в среде $\mathcal{F}$.

Примером реализации рассматриваемой нами задачи является эксперимент с «парящей» каплей жидкости в условиях невесомости[3]. Это когда в капле жидкости находится аномалия по плотности, например «дробинка», при отсутствии каких-либо внешних силовых факторов. В этих условиях «дробинка», в зависимости от соотношения своей плотности и плотности жидкости, может «тонуть» по направлению к центру капли или «всплывать» к её поверхности.

Тем не менее, несмотря на тривиальность поставленной задачи и очевидность её решения, детально рассмотрим каждую из силовых компонент равенства (1).

2. Прямое действие среды на тело

Так как, вследствие центральной симметрии распределения плотности вещества в сферической области $\mathcal{F}$, все радиальные направления равнозначны, то мы расположим центр масс $\mathbf{O}'$ тела $\mathcal{G}$ так, что бы он лежал на оси $\mathbf{O}z$ и на расстоянии δ от центра гравитационного притяжения $\mathbf{O}$ области $\mathcal{F}$ (рис. 2).

Вспомогательная прямоугольная система координат $\mathbf{O}'x'y'z$, связанная с центром массы тела $\mathcal{G}$, ориентирована таким образом, что ось $\mathbf{O}'x'$ параллельна оси $\mathbf{O}x$, а ось $\mathbf{O}'y'$ параллельна оси $\mathbf{O}y$.

В каждой точке, рассматриваемой нами области конечных разме-

[3]Область пространства, в которой гравитационные силы, действующие на материальное тело, в среднем уравновешены центробежными или силами иной природы.

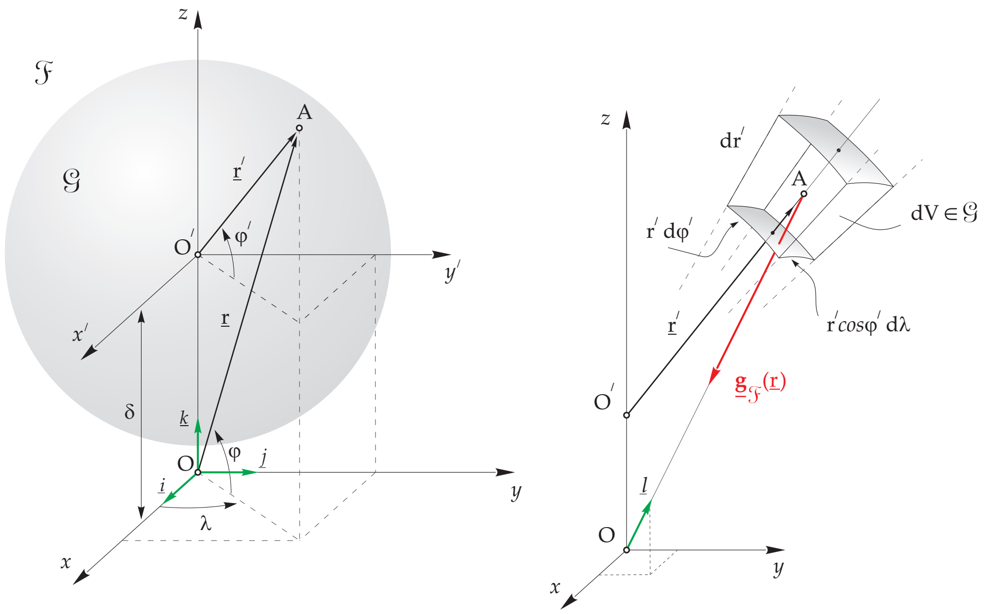


Рис. 2.

ров $\mathcal{F}$, определён вектор напряжённости гравитационного поля $\underline{\mathbf{g}}_{\mathcal{F}}$:

$$\underline{\mathbf{g}}_{\mathcal{F}}(\underline{r}) = -\mathbf{G}\,\frac{V_{\mathcal{F}}(|\underline{r}|)\rho_{\mathcal{F}}}{|\underline{r}|^3}\,\underline{r} = -\mathbf{G}\,\frac{4}{3}\pi\rho_{\mathcal{F}}\,\underline{r}\;, \qquad 0 \leqslant |\underline{r}| \leqslant R_{\mathcal{F}}\;, \tag{2}$$

где $\underline{r}$ — радиус-вектор произвольной точки **A** из области $\mathcal{F}$; $V_{\mathcal{F}}$ — объём сферической области $\mathcal{F}$, как функция радиуса $|\underline{r}|$; $\rho_{\mathcal{F}}$ — плотность среды $\mathcal{F}$; **G** — гравитационная постоянная. Подробно вывод выражения (2) для напряжённости гравитационного поля рассмотрен, например, в работах [2, 4]. Из выражения (2) следует, что вектор напряжённости гравитационного поля $\underline{\mathbf{g}}_{\mathcal{F}}$, в точке с радиус-вектором $\underline{r}$, всегда направлен к геометрическому центру (центру притяжения) рассматриваемой области $\mathcal{F}$, в данном случае — к точке **O**.

Теперь, зная напряжённость гравитационного поля $\underline{\mathbf{g}}_{\mathcal{F}}$ для любой точки области $\mathcal{F}$, мы можем определить результирующее гравитационное воздействие на тело $\mathcal{G}$ со стороны среды $\mathcal{F}$ через интеграл по объёму тела $V_{\mathcal{G}}$:

$$\underline{F}^{-} = \int\limits_{V_{\mathcal{G}}} d\underline{F}^{-}\;, \qquad d\underline{F}^{-} = \rho_{\mathcal{G}} dV\,\underline{\mathbf{g}}_{\mathcal{F}}\;. \tag{3}$$

Поскольку в задаче оговорена симметрия геометрии и физических параметров относительно оси $\mathbf{O}z$, то очевидно, что

$$F_x^{-} = \underline{i} \cdot \underline{F}^{-} = 0, \qquad F_y^{-} = \underline{j} \cdot \underline{F}^{-} = 0, \qquad F_z^{-} = \underline{k} \cdot \underline{F}^{-} = \int\limits_{V_{\mathcal{G}}} \underline{k} \cdot d\underline{F}^{-} \ .$$

Отсюда, с учётом выражений (2) и (3), получаем

$$F_z^{-} = \int\limits_{V_{\mathcal{G}}} \underline{k} \cdot d\underline{F}^{-} = \rho_{\mathcal{G}} \int\limits_{V_{\mathcal{G}}} \underline{k} \cdot \underline{\mathbf{g}}_{\mathcal{F}}\, dV = -\frac{4}{3}\pi \mathbf{G} \rho_{\mathcal{G}} \rho_{\mathcal{F}} \int\limits_{V_{\mathcal{G}}} \overbrace{\underline{k} \cdot \underline{r}}^{r \sin\varphi}\ dV \ . \tag{4}$$

Исходя из заданной геометрии задачи (рис. 2), мы можем записать равенство

$$r \sin\varphi = \delta + r' \sin\varphi' \ , \tag{5}$$

и выражение для элементарного объёма dV, построенного около точки $\mathbf{A}(r', \varphi', \lambda) \in \mathcal{G}$:

$$dV = r' d\varphi' \cdot r' \cos\varphi'\ d\lambda \cdot dr' = {r'}^2 \cos\varphi'\ dr'\ d\varphi'\ d\lambda \ . \tag{6}$$

Подставляя (5) и (6) в выражение (4) для F_z^{-}, получаем:

$$F_z^{-} = -\frac{4}{3}\pi \mathbf{G} \rho_{\mathcal{G}} \rho_{\mathcal{F}} \left(\delta V_{\mathcal{G}} + \overbrace{\int\limits_{V_{\mathcal{G}}} r' \sin\varphi'\ dV}^{\mathbf{I}} \right) , \tag{7}$$

где интеграл $\mathbf{I} = 0$, так как

$$\mathbf{I} = \int\limits_{V_{\mathcal{G}}} r' \sin\varphi'\ \overbrace{r' d\varphi' r' \cos\varphi' d\lambda dr'}^{dV} = \int\limits_0^{2\pi} d\lambda \int\limits_0^{R_{\mathcal{G}}} {r'}^3 dr' \cancelto{0}{\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin\varphi' \cos\varphi' d\varphi'} = 0 \ .$$

Группируя множители в выражении (7), получаем

$$F_z^{-} = \overbrace{-\frac{4}{3}\pi \mathbf{G} \rho_F \delta}^{\mathbf{g}_{\mathcal{F}}(\delta)}\ \rho_{\mathcal{G}} V_{\mathcal{G}}$$

или в векторной форме:

$$\boxed{\underline{F}^{-} = \rho_{\mathcal{G}} V_{\mathcal{G}}\ \underline{\mathbf{g}}_{\mathcal{F}}(\delta) \ .} \tag{8}$$

Итак, сила $\underline{F}^{-}$ гравитационного воздействия на тело $\mathcal{G}$, с массой равной произведению $\rho_{\mathcal{G}} V_{\mathcal{G}}$, со стороны среды $\mathcal{F}$, совпадает по направлению с вектором напряжённости гравитационного поля в области расположения тела. Выражение (8) справедливо и для случая, когда, точка **O**, центр притяжения среды $\mathcal{F}$, расположена внутри тела $\mathcal{G}$, то есть при $\delta < R_{\mathcal{G}}$.

3. Воздействие среды на тело через давление, индуцированное гравитационным полем самой среды

Теперь рассмотрим в уравнении (1) вторую составляющую силового воздействия на тело, а именно $\underline{F}^{+}$. Область $\mathcal{F}$ сферической формы с равномерно распределённой плотностью $\rho_{\mathcal{F}}$ создаёт центрально-симметричное гравитационное поле с центром притяжения в точке **O**. Это поле, в свою очередь, порождает, в рассматриваемой среде $\mathcal{F}$, центрально симметричное распределение давления с соответствующим радиальным градиентом. Так как тело $\mathcal{G}$ это объект с не нулевым объёмом то, интегрируя действие давления окружающей среды $\mathcal{F}$ по её поверхности, получим силу, стремящуюся «вытолкнуть» $\mathcal{G}$ в область наименьшего давления среды $\mathcal{F}$, иными словами *силу Архимеда*.

Случаи образования градиентов давления иной природы, кроме как гравитационной, рассматриваемая постановка задачи не предусматривает.

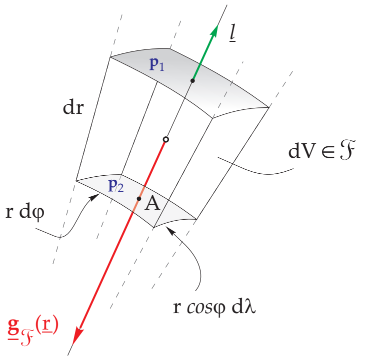


Рис. 3.

Как распределено давление в гравитирующей среде $\mathcal{F}$? Для этого в среде $\mathcal{F}$ выделим элементарный объём $dV \in \mathcal{F}$, построенный около точки **A** с координатами r, φ и λ (рис. 3)

$$dV = dS\, dr = \overbrace{r\, d\varphi \cdot r \cos\varphi\, d\lambda}^{dS}\, dr\ .$$

Элементарный объём dV находится в равновесии. На нижнюю грань элементарного объёма dV действует давление p_2, которое уравновешивает давление p_1 действующее на верхнюю грань, плюс объёмную силу гравитационной природы. Сила гравитационного взаимодействия совпадает по направлению с вектором напряжённости гравитационного поля среды $\mathcal{F}$. Силы вызванные давлением на боковые грани элементарного объёма взаимно уравновешенны. Принимая во внимание эти факторы, запишем уравнение равновесия элементарного объёма dV в виде проекции на направление задаваемое с единичным вектором $\underline{l}$

$$p_2 dS\, \underline{l} = p_1 dS\, \underline{l} + \rho_{\mathcal{F}} dV\, \underline{\mathbf{g}}_{\mathcal{F}}\ , \quad \underline{l} = \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|}\ . \tag{9}$$

Умножив левую и правую части равенства на единичный вектор $\underline{l}$ получим приращение давления dp:

$$dp = p_2 - p_1 = \rho_{\mathcal{F}} dr\, \underline{\mathbf{g}}_{\mathcal{F}} \cdot \underline{l}\ . \tag{10}$$

После интегрирования (10) по r, с учётом выражения (2), для вектора напряжённости гравитационного поля $\underline{\mathbf{g}}_{\mathcal{F}}$, находим, что

$$p(r) = -\frac{2}{3}\pi \mathbf{G} \rho_{\mathcal{F}}^2 r^2 + const\ . \tag{11}$$

Константу определим из условия на границе области $\mathcal{F}$:

$$p\Big|_{r=R_{\mathcal{F}}} = p_{\mathcal{F}}\ , \tag{12}$$

где $p_{\mathcal{F}}$ — внешнее давление на границе среды $\mathcal{F}$. Теперь выражение для давления в произвольной точке области $\mathcal{F}$ примет вид:

$$\boxed{p(r) = p_{\mathcal{F}} + \frac{2}{3}\pi \mathbf{G} \rho_{\mathcal{F}}^2 \left(R_{\mathcal{F}}^2 - r^2\right)\ .} \tag{13}$$

Сила, обусловленная наличием градиента давления гравитационной природы. Итак, распределение давления в области $\mathcal{F}$ нам известно. Определим теперь силу «выталкивания» $\underline{F}^{+}$, действующую на тело $\mathcal{G}$, обусловленную наличием градиента давления (10) в среде $\mathcal{F}$.

$$\underline{F}^{+} = \int\limits_{S_{\mathcal{G}}} p(\underline{r})\underline{dS}, \quad \text{где} \qquad \underline{dS} = \underline{n}\, dS\ , \tag{14}$$

здесь $p(\underline{r})$ — давление среды $\mathcal{F}$ на элементарную площадку dS поверхности тела $\mathcal{G}$; $\underline{n}$ — нормаль к элементарной площадке dS поверхности тела в точке $\mathbf{A}(\underline{r})$. Из рис. 3 следует, что

$$dS = R_{\mathcal{G}} \cos\varphi' d\lambda\ R_{\mathcal{G}} d\varphi'\ .$$

Вычисляя интеграл (14), учтём, что в нашей постановке задача обладает геометрической и полевой симметрией относительно оси $\mathbf{O}z$, следовательно:

$$F_x^+ = \underline{i} \cdot \underline{F}^+ = 0 \ , \quad F_y^+ = \underline{j} \cdot \underline{F}^+ = 0 \ , \quad F_z^+ = \underline{k} \cdot \underline{F}^+ = \int\limits_{S_\mathcal{G}} p(\underline{r}) \overbrace{\underline{k} \cdot \underline{n}}^{\sin\varphi'} dS$$

отсюда, с учётом выражения для dS, получаем

$$F_z^+ = \int\limits_{S_\mathcal{G}} p(r) \sin\varphi' dS = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} p(r) \sin\varphi' \overbrace{R_\mathcal{G} \cos\varphi' d\lambda \, R_\mathcal{G} d\varphi'}^{dS} =$$

$$= R_\mathcal{G}^2 \int\limits_0^{2\pi} d\lambda \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} p(r) \sin\varphi' \cos\varphi' d\varphi' \ .$$

Подставляя сюда выражение (13) для $p(r)$, считая при этом, что $p_\mathcal{F} = 0$ мы получаем в результате интегрирования силу:

$$F_z^+ = \frac{4}{3} \pi R_\mathcal{G}^2 \, \pi \mathbf{G} \rho_\mathcal{F}^2 \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(R_\mathcal{F}^2 - r^2 \right) \sin\varphi' \cos\varphi' d\varphi' \ . \tag{15}$$

Выражение для r^2 следует из геометрии задачи (рис. 2)

$$r^2 = \delta^2 + R_\mathcal{G}^2 + 2\delta R_\mathcal{G} \sin\varphi' \ , \tag{16}$$

здесь δ — смещение центра аномалии $\mathcal{G}$; r — расстояние между центром притяжения среды $\mathcal{F}$ и точкой на поверхности тела $\mathcal{G}$. После подстановки (16) в выражение для F_z^+ получаем:

$$F_z^+ = \frac{4}{3} \pi R_\mathcal{G}^2 \, \pi \mathbf{G} \rho_\mathcal{F}^2 \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(R_\mathcal{F}^2 - \overbrace{\left(\delta^2 + R_\mathcal{G}^2 + 2\delta R_\mathcal{G} \sin\varphi' \right)}^{r^2} \right) \sin\varphi' \cos\varphi' d\varphi' \ . \tag{17}$$

Вычислим вспомогательные интегралы:

$$\mathbf{I}_1 = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin\varphi' \cos\varphi' \, d\varphi' = \frac{1}{2} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d \sin^2\varphi' = 0 \ ,$$

$$\mathbf{I}_2 = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2\varphi' \cos\varphi' \, d\varphi' = \frac{1}{3} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\sin^3\varphi' = \frac{2}{3} \, .$$

Теперь, с учётом $\mathbf{I}_1$ и $\mathbf{I}_2$, выражение (17) примет вид:

$$F^{+} = \frac{4}{3}\pi R_{\mathcal{G}}^2 \, \pi \mathbf{G} \rho_{\mathcal{F}}^2 2\delta R_{\mathcal{G}} \cdot \mathbf{I}_2 = \overbrace{\frac{4}{3}\pi R_{\mathcal{G}}^3}^{V_{\mathcal{G}}} \, \rho_{\mathcal{F}} \, \overbrace{\frac{4}{3}\pi \mathbf{G} \rho_{\mathcal{F}} \delta}^{-\mathbf{g}_{\mathcal{F}}(\delta)} \tag{18}$$

или в векторном виде:

$$\boxed{\underline{F}^{+} = -\rho_{\mathcal{F}} V_{\mathcal{G}} \; \underline{\mathbf{g}}_{\mathcal{F}}(\delta) \; .} \tag{19}$$

Таким образом, тело $\mathcal{G}$, помещённое в среду $\mathcal{F}$ с ненулевой плотностью, испытывает «выталкивающее» воздействие через силу F^{+}, приложенную к её центру масс. Из выражения (19) следует, что сила «выталкивания» $\underline{F}^{+}$, действующая на тело $\mathcal{G}$, всегда направлена против вектора напряжённости гравитационного поля $\underline{\mathbf{g}}_{\mathcal{F}}$. Важно подчеркнуть, что сила «выталкивания» $\underline{F}^{+}$, при заданной напряжённости гравитационного поля, зависит только от плотности среды $\rho_{\mathcal{F}}$ и объёма рассматриваемого тела $V_{\mathcal{G}}$ и не определяется величиной и характером распределения давления в среде $\mathcal{F}$, что полностью соответствует классическому определению *закона Архимеда*[4] о силе, действующей на тело погружённое в жидкую среду.

4. Результирующее воздействие на тело

Теперь вернёмся к главной задаче, а именно, поиску реакции среды $\mathcal{F}$ на привнесённое в неё материальное тело $\mathcal{G}$. Подставим в выражение (1) силы (8) и (19), действующие на тело $\mathcal{G}$ со стороны среды $\mathcal{F}$:

$$\underline{F} = \underline{F}^{+} + \underline{F}^{-} = -\rho_{\mathcal{F}} V_{\mathcal{G}} \, \underline{\mathbf{g}}_{\mathcal{F}} + \rho_{\mathcal{G}} V_{\mathcal{G}} \, \underline{\mathbf{g}}_{\mathcal{F}} = \overbrace{\underbrace{\rho_{\mathcal{G}} V_{\mathcal{G}}}_{M_{\mathcal{G}}} \left(1 - \frac{\rho_{\mathcal{F}}}{\rho_{\mathcal{G}}}\right)}^{m_{\mathcal{G}}} \underline{\mathbf{g}}_{\mathcal{F}} \, , \tag{20}$$

или

$$\underline{F} = m_{\mathcal{G}} \underline{\mathbf{g}}_{\mathcal{F}} \, , \quad \text{где} \quad m_{\mathcal{G}} = M_{\mathcal{G}} \left(1 - \frac{\rho_{\mathcal{F}}}{\rho_{\mathcal{G}}}\right) \, , \tag{21}$$

[4] «... все давления жидкости на погруженное в нее тело имеют равнодействующую, равную весу вытесненного объема жидкости, направленную вертикально вверх; точка приложения ее находится в центре тяжести погруженного в жидкость объёма.» Н. Е. Жуковский [5, стр.654].

здесь через $M_{\mathcal{G}}$ мы обозначили массу тела $\mathcal{G}$ в классическом понимании — произведение плотности тела $\rho_{\mathcal{G}}$ на её объём $V_{\mathcal{G}}$, а через $m_{\mathcal{G}}$ ввели обозначение той части массы $M_{\mathcal{G}}$ тела $\mathcal{G}$, которая участвует в гравитационном взаимодействии со средой $\mathcal{F}$; $\underline{\mathbf{g}}_{\mathcal{F}}$ — вектор напряжённости гравитационного поля в среде $\mathcal{F}$ в области расположения тела $\mathcal{G}$.

Почему предлагается объединить эти две силы в одну и не рассматривать их порознь? Для этого есть следующие основания. Во первых, рассматриваемые силы имеют одну и ту же физическую природу — гравитационную, то есть зависят от напряжённости гравитационного поля среды в области тела. Во вторых, эти силы лежат на касательной к силовой линии гравитационного поля индуцируемого материальной средой $\mathcal{F}$.

Так сложилось, что сила гравитационного притяжения и выталкивающая сила Архимеда были открыты в разные исторические эпохи[5], а это привело к тому, что они стали рассматриваться и восприниматься, как «независимые» силовые факторы воздействующие извне на материальное тело, расположенное в среде с ненулевой плотностью.

Изложенное выше, даёт основание для утверждения, что на тело $\mathcal{G}$, расположенное в среде $\mathcal{F}$, при отсутствии иных внешних факторов не гравитационной природы, действует только одна сила — сила гравитационного взаимодействия, определяемая выражением (21).

Знак этой силы, или направление действия, зависит только от соотношения плотности тела $\mathcal{G}$ и окружающей её среды $\mathcal{F}$. Графическое отображение перехода от классической концепции двух сил к одной показано на рис. 4. Криволинейное движение тела вдоль силовой линии гравита-

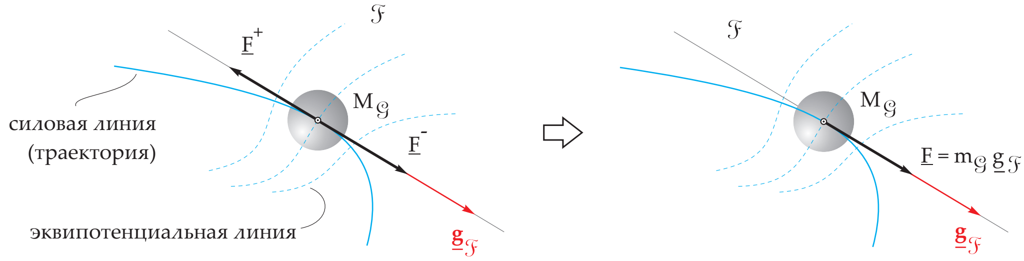


Рис. 4. Переход от двухкомпонентного интерпретации гравитационного воздействия среды $\mathcal{F}$ на тело $\mathcal{G}$ к однокомпонентной.

ционного поля подразумевает возникновение дополнительных сил, как

[5] Временной отрезок между введением в научное обращение этих сил составляет чуть меньше 2000 лет. Архимед (227–212 до н.э.) — выталкивающая сила действующая на погружённое в среду тело и Исаак Ньютон (1643–1727) — закон о гравитационном притяжение двух тел.

следствие движения тела в диссипирующей среде и отклоняющих его от заданной траектории, но эти силы другой природы и поэтому вне нашей области внимания.

Из выражения (21) следует, что гравитационное взаимодействие в среде $\mathcal{F}$ определяется не всей массой тела, а только её частью $m_{\mathcal{G}}$, которую назовём *гравитирующей массой*. Термин *гравитирующая масса* точнее передаёт причинно-следственную связь между материальным телом и его гравитационнным полем, чем выражение гравитационная масса[6]. Полную же массу тела $\mathcal{G}$, обозначенную выше через $M_{\mathcal{G}}$, назовём *инерционной*, которая определяется, как произведение объёма тела $V_{\mathcal{G}}$ на его плотность $\rho_{\mathcal{G}}$.

Таким образом, опуская символы обозначения для тела и среды в выражении (21), мы получаем выражение, устанавливающее функциональную связь между инерционной массой M и гравитирующей массой m тела, находящейся в среде с плотностью $\rho_0 \geqslant 0$:

$$\boxed{m = M\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)\ , \quad \text{где} \qquad M = \rho V\ .} \tag{22}$$

Анализ выражения (22) позволяет сформулировать два важных свойства гравитирующей массы материального тела при условии возможности оперировать понятием плотности вещества:

1) Гравитирующая масса всегда меньше инерционной:

$$|m| < M\ . \tag{23}$$

2) Равенство гравитирующей и инерционной массы выполняется только в предельном случае, когда плотность среды, окружающей материальное тело, равна нулю:

$$\lim_{\rho_0 \to 0} m = M\ . \tag{24}$$

[6]В литературе, например [6], для гравитационной массы дано множество различных определений. Рассмотренные ранее, два варианта гравитационного взаимодействия материального тела со средой дали основание для нового определения гравитирующей массы, которое по нашему убеждению, в большей степени согласуется с наблюдаемыми проявлениями гравитационного взаимодействия в окружающей нас Природе: *гравитирующая масса тела — это произведение объёма, занимаемого телом, на величину отклонения его плотности от плотности среды.* Более утилитарное определение гравитирующей массы может быть следующим: гравитирующая масса тела это то, что определяет возможность гравитационного взаимодействия с другими материальными объектами.

Эти свойства гравитирующей массы тела графически отображены на рис. 5, где через ρ_* обозначена предельно возможная минимальная плотность среды. Эта минимальная плотность обозначает тот предел количества вещества, когда в выбранном мерном объёме, в рамках конкретной задачи, имеет физический смысл понятие плотности. Левый график на рис. 5 показывает, что существующие в настоящее время методы создания глубокого вакуума[7] принципиально не могут свести плотность среды к нулю. Многочисленные эксперименты [7, 8, 9] по проверке постулата о равенстве гравитирующей и инерционной массы материального тела однозначно подтверждают абсолютно теоретический характер принципа эквивалентности масс, реализуемый лишь в среде с нулевой плотностью.

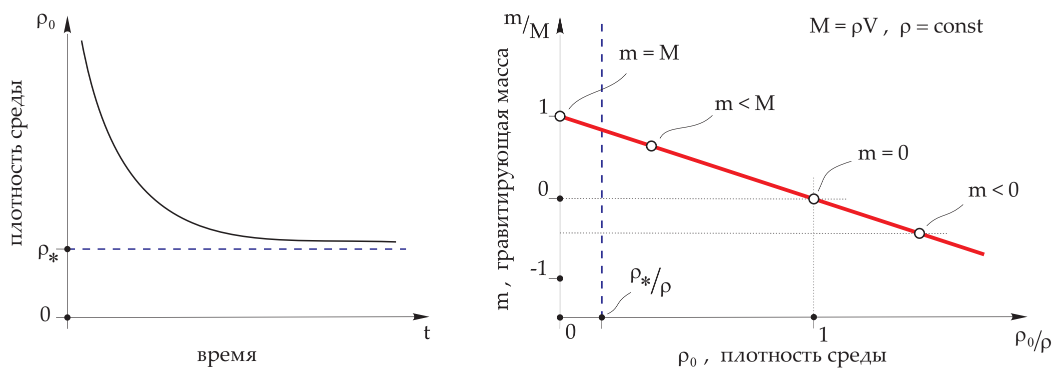


Рис. 5. Зависимость гравитирующей массы тела от плотности окружающей её среды.

Выражение (22) для гравитирующей массы тела использовалось в рамках работы по изучению природы движения центра массы Земли под действием внешних гравитационных сил [10] и в исследованиях движения ядра Земли под влиянием перигейной массы Луны [11], а так же в работе о гравитирующей массе [12].

5. Принцип аддитивности

Для среды с нулевой плотностью, принцип аддитивности применительно к гравитационным силам, действующим в системе материальных тел, соблюдается строго и не требует доказательства, ввиду отсутствия материальной среды. А как обстоит дело с *принципом аддитивности* в среде с ненулевой плотностью?

[7]Материальная среда с минимально возможной плотностью.

Из выражения (22), устанавливающего связь между инерционной и гравитирующей массой тела, мы видим, что гравитирующая масса материального тела, при своих фиксированных геометрических и физических характеристиках, зависит только от плотности окружающей её среды.

Следовательно, допуская возможность гравитационного уплотнения среды $\mathcal{F}$ вокруг тела $\mathcal{G}$, мы становимся перед фактом, что *принцип аддитивности* применять нельзя и, рассматривая гравитационное взаимодействие двух тел между собой в среде с плотность $\rho_{\mathcal{F}} > 0$, необходимо учитывать влияние каждого из тел на изменение плотности во всей расчётной области среды $\mathcal{F}$.

Тем не менее, покажем, что на практике *принцип аддитивности* может быть использован и для задач о гравитационном взаимодействии тел в среде с плотностью отличной от нуля.

Определим, по какому закону произойдёт сжатие, уплотнение среды $\mathcal{F}$ вокруг тела $\mathcal{G}$. Для этого возьмём в качестве среды $\mathcal{F}$ идеальный газ, который может значительно сжиматься (изменять плотность) под действием внешних сил разной природы. Эффектом гравитационного самоуплотнения среды пренебрегаем. В рамках рассмотренной ранее задачи (см. рис. 1, 2 и 3), источник гравитационного поля, тело $\mathcal{G}$, разместим в геометрическом центре области $\mathcal{F}$. Из условия равновесия элементарного объёма среды (рис. 3) получаем выражение для приращения давления dp:

$$dp = p_2 - p_1 = \rho_{\mathcal{F}}(r)\mathbf{g}_{\mathcal{G}}(r)dr \;, \tag{25}$$

где

$$\mathbf{g}_{\mathcal{G}}(r) = -\mathbf{G}\frac{V_{\mathcal{G}}\rho_{\mathcal{G}}}{(R_{\mathcal{G}}+r)^2} \;, \quad V_{\mathcal{G}} = \frac{4}{3}\pi R_{\mathcal{G}}^3 \,. \tag{26}$$

Здесь p_2 — давление на нижней, ближней к телу, грани; p_1— давление на верхнюю грань рассматриваемого элементарного объёма; r — расстояние от поверхности тела до рассматриваемого элементарного объёма среды; $\mathbf{g}_{\mathcal{G}}$ — напряжённость гравитационного поля тела $\mathcal{G}$; $R_{\mathcal{G}}$ и $\rho_{\mathcal{G}}$ — радиус и плотность тела соответственно; $\rho_{\mathcal{F}}$ — плотность среды; $\mathbf{G}$ — гравитационная постоянная.

Из кинетической теории идеальных газов [13, 14] для связи давления, плотности и температуры, рассматриваемой газовой среды, воспользуемся следующим уравнением:

$$pV = \frac{m}{\mathcal{M}}\mathbf{R}T \;, \quad m = V\rho \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{\rho}{\mathcal{M}}\mathbf{R}T \quad \Longrightarrow \quad dp = \frac{\mathbf{R}T}{\mathcal{M}}d\rho \;, \tag{27}$$

здесь V — рассматриваемый объём газа; ρ — плотность; $\mathcal{M}$ — молярная масса; $\mathbf{R}$ — универсальная газовая постоянная; p — давление; T — температура.

Исключая dp из уравнений (27) и (25)

$$d\rho_{\mathcal{F}} = \frac{\mathcal{M}}{\mathbf{R}T}\,\rho_{\mathcal{F}}\mathbf{g}_{\mathcal{G}}(r)\,dr \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\rho_{\mathcal{F}}}{\rho_{\mathcal{F}}} = -\frac{\mathcal{M}}{\mathbf{R}T}\,\mathbf{G}\frac{V_{\mathcal{G}}\rho_{\mathcal{G}}}{(R_{\mathcal{G}}+r)^2}\,dr \tag{28}$$

и интегрируя получаем:

$$\ln\rho_{\mathcal{F}} = -\frac{\mathcal{M}}{\mathbf{R}T}\,\mathbf{G}V_{\mathcal{G}}\rho_{\mathcal{G}}\int\frac{dr}{(R_{\mathcal{G}}+r)^2} = \frac{\mathcal{M}}{\mathbf{R}T}\,\mathbf{G}\frac{V_{\mathcal{G}}\rho_{\mathcal{G}}}{R_{\mathcal{G}}+r} + const\ . \tag{29}$$

Постоянную интегрирования определим из граничного условия для плотности среды $\mathcal{F}$ на поверхности тела $\mathcal{G}$:

$$\rho_{\mathcal{F}}\Big|_{r=0} = \rho_0\ . \tag{30}$$

В результате получаем экспоненциальную зависимость, характеризующую изменение плотности среды $\mathcal{F}$ по мере удаления от поверхности тела $\mathcal{G}$:

$$\rho_{\mathcal{F}} = \rho_0\ \exp\left(-\frac{\mathcal{M}}{\mathbf{R}T}\,\mathbf{g}_0 R_{\mathcal{G}}\left(1-\frac{1}{1+r/R_{\mathcal{G}}}\right)\right)\ , \tag{31}$$

где $\mathbf{g}_0$ — напряжённость гравитационного поля на поверхности тела; $\mathbf{R} = 8{,}3144621\,\text{\textit{Дж}}/(\text{\textit{К}}\cdot\text{\textit{моль}})$.

Теперь, используя выражение (31), строим распределение плотности среды $\mathcal{F}$ вокруг тела $\mathcal{G}$. В качестве среды $\mathcal{F}$ берём идеальный газ, который по основным физическим параметрам соответствует стандартной атмосфере Земли ($T = 288{,}15\,°\text{K}$, $\mathcal{M} = 0{,}02898\,\text{\textit{кг/моль}}$, $\rho_0 = 1{,}225\,\text{\textit{кг}}/\text{\textit{м}}^3$). Характеристики материального тела $\mathcal{G}$ приведены в таб. 1. На рис. 6

Таблица 1. Параметры тел

	плотность, $кг/м^3$	радиус, $м$	масса, $кг$	$\mathbf{g}_0$, $м/с^2$
Земля	5514	$6{,}371\times10^6$	$5{,}973\times10^{24}$	9,821
пробное тело	7200	10	$3{,}016\times10^7$	$2{,}013\times10^{-5}$

приведено изменение плотности среды $\mathcal{F}$ при удалении от поверхности для двух гравитирующих тел $\mathcal{G}$ (таб. 1).

Для Земли плотность газовой среды $\mathcal{F}$, на удалении $r = 10\,км$ от поверхности, составляет $0{,}37412\,кг/м^3$, а для пробного тела — плотность среды $\mathcal{F}$ остаётся практически неизменной — $1{,}224999997\,кг/м^3$. Это есть следствие того, что масса пробного тела много меньше массы Земли и,

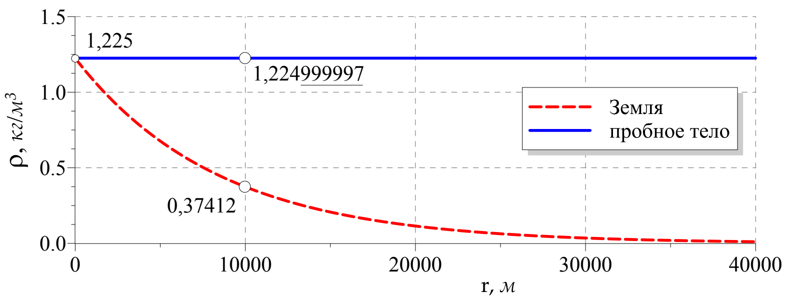


Рис. 6. Изменение плотности среды $\mathcal{F}$ (воздушная среда) по мере удаления от поверхности Земли и пробного тела.

следовательно, напряжённость гравитационного поля так же значительно меньше. В нашей задаче, напряжённость гравитационного поля $\mathbf{g}_0$ на поверхности пробной массы, приблизительно, в 487900 раз меньше напряжённости поля на поверхности Земли.

Итак, оценка эффекта гравитационного уплотнения газовой среды вблизи пробного тела, обладающего значительной гравитирующей массой[8], показала, что плотность среды формально изменилась, но весьма незначительно. То есть, для физически реализуемой системы материальных тел, находящихся в идеальном газе, мы можем пренебречь изменением плотности среды от привнесения в неё гравитирующих тел. Это верно так же и для жидких, сыпучих, деформируемых и твёрдых сред, так как, их сжимаемость, по сравнению с газовой средой, значительно меньше.

6. Гравитационное взаимодействие пары тел

Изложенное выше, позволяет применить Закон всемирного тяготения, в общепринятой форме записи, для описания гравитационного взаимодействия двух и более материальных тел в среде с ненулевой плотностью, но уже с использованием понятия — *гравитирующая масса*. Для простоты исключим гравитационное воздействие среды и включённые в неё материальные тела. Это означает, что среда $\mathcal{F}$ однородна по плотности и неограниченна по объёму, то есть у неё отсутствует центр тяжести и центр притяжения.

В этом случае, сила гравитационного взаимодействия $\underline{F}$, для двух тел $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$, центры масс которых расположены на расстоянии $\underline{r}$ (рис. 7) в

[8] Реализуемой в лабораторных условиях.

однородной среде $\mathcal{F}$ с постоянной плотностью ρ_0, примет вид:

$$\underline{F} = \mathbf{G}\,\frac{m_1 m_2}{|\underline{r}|^3}\,\underline{r} \quad \text{или} \quad F = \mathbf{G}\,\frac{m_1 m_2}{r^2}\ , \tag{32}$$

где $r = |\underline{r}|$; $F = |\underline{F}|$; m_1 и m_2 — гравитирующие массы тел $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$ соответственно. Гравитирующие массы тел, согласно выражению (22), определены как:

$$m_1 = M_1\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_1}\right)\ , \quad m_2 = M_2\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_2}\right)\ .$$

Здесь $M_1 = \rho_1 V_1$ и $M_2 = \rho_2 V_2$ — инерционные массы тел.

В случае, когда плотность среды $\mathcal{F}$ устремляется к нулю, выражение (32) принимает классический вид:

$$\lim_{\rho_0 \to 0} F = \mathbf{G}\,\frac{M_1 M_2}{r^2}\ . \tag{33}$$

Итак, выражение (22) для гравитирующей массы материального тела, позволяет определить условия при которых гравитирующая масса тела может принимать, как положительные, так и отрицательные значения. Мы видим, что само существование гравитирующей массы, её знак и величина неотъемлемо связаны с плотностью окружающей среды.

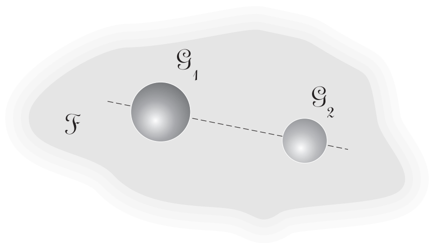


Рис. 7.

Знакопеременность гравитирующей массы позволяет с полным основанием оперировать такими терминами, как гравитационное «притяжение» и «отталкивание» для системы материальных тел в среде с ненулевой плотностью при изучении наблюдаемых в Природе физических процессов[9].

[9]Например, факт погружения или всплытия подводной лодки есть не что иное, как управление величиной и знаком гравитирующей массы, посредством регулирования балласта, что приводит, при отсутствии ходовой скорости, к движению судна вдоль силовой линии гравитационного поля Земли. Зависание подводной лодки на заданной глубине означает, что её гравитирующая масса равна нулю. Аналогичный принцип работает и в случае воздухоплавательных аппаратов. Дирижабль, воздушный шар поднимается (отталкивается от Земли) не в следствие наличия градиента давления, в окружающей его атмосфере Земли, а по причине наличия у него отрицательной гравитирующей массы, так как средняя плотность дирижабля меньше плотности атмосферы. Изменяя среднюю плотность аппарата, относительно плотности окружающей среды, мы меняем знак и величину его гравитирующей массы.

7. Гравитационный диполь

Здесь мы рассмотрим задачу о нахождении эквипотенциальных и силовых линий гравитационного поля, создаваемого двумя материальными телами $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$, которые находятся в неподвижной однородной среде $\mathcal{F}$ с плотностью ρ_0 без учёта гравитационного влияния на тела самой среды $\mathcal{F}$. В качестве тел возьмём однородные и недеформируемые сферы с радиусами R_1 и R_2, центры масс которых удалены друг от друга на фиксированное расстояние $L = 30$ *мм*. Величины радиусов и плотности аномалий приведены в таб. 2.

Таблица 2. Параметры тел $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$

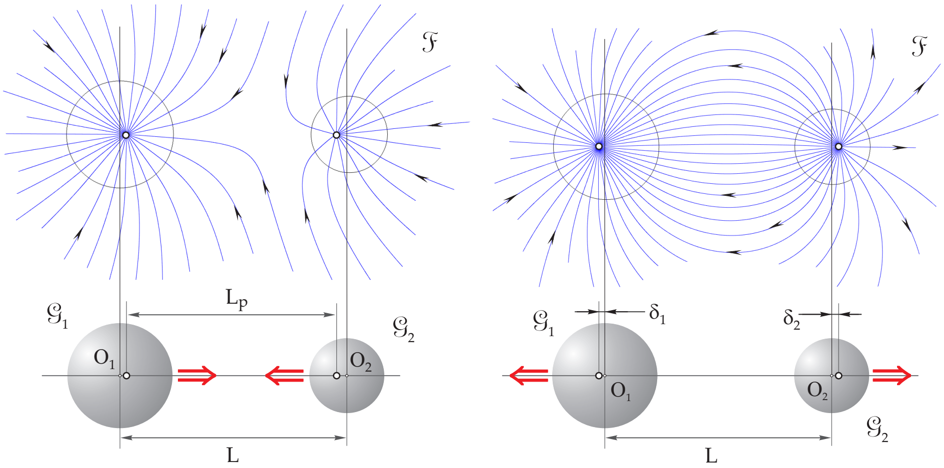
	плотность, *кг/м*^{3}	радиус, *мм*
$\mathcal{G}_1$	$\rho_1 = 7200$	$R_1 = 7$
$\mathcal{G}_2$	$\rho_2 = 6700$	$R_2 = 5$

Задачу рассматриваем в 3-х мерной постановке. Сферы $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$ неподвижны, а объём среды $\mathcal{F}$ достаточно велик, что исключает возможное влияние краевых эффектов. Будем считать, что $\rho_1 > \rho_2$. Параметром в нашей задаче будет плотность среды ρ_0. Запишем систему уравнений Пуассона для среды $\mathcal{F}$ и включённых в неё тел $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$:

$$\left\{\begin{aligned} \Delta\mathbf{U}_{\mathcal{F}} &= -4\pi\mathbf{G}\rho_0 \,, \\ \Delta\mathbf{U}_{\mathcal{G}_1} &= -4\pi\mathbf{G}\rho_1 \,, \\ \Delta\mathbf{U}_{\mathcal{G}_2} &= -4\pi\mathbf{G}\rho_2 \,. \end{aligned}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{aligned} \Delta\mathbf{U}_{\mathcal{F}} &= 0 \,, \\ \Delta\mathbf{U}_{\mathcal{G}_1} &= -4\pi\mathbf{G}(\rho_1 - \rho_0) \,, \\ \Delta\mathbf{U}_{\mathcal{G}_2} &= -4\pi\mathbf{G}(\rho_2 - \rho_0) \,. \end{aligned}\right. \tag{34}$$

Решение системы (34) представлено на рис. 8, в виде распределения силовых линий гравитационного поля $\mathbf{U} = \mathbf{U}_{\mathcal{G}_1} + \mathbf{U}_{\mathcal{G}_2}$. На левом рис. 8(a) показан результат решения задачи (34) для случая, когда плотность среды равна нулю. Правый рис. 8(b) показывает распределение силовых линий в среде $\mathcal{F}$, плотность которой удовлетворяет неравенству $\rho_1 > \rho_0 > \rho_2$ и по величине равна $\rho_0 = 7000$ *кг/м*^{3}.

Из рассмотрения характера распределения силовых линий гравитационного поля двух тел (рис. 8), видно, что силовые линии замкнуты на особые точки, не совпадающих с центрами масс каждого из тел. В этих точках сумма гравитационных сил, действующих на пробную массу, равна нулю. Далее, эти точки равновесия мы будем называть *гравитационными полюсами*. Положение гравитационных полюсов в каждом из тел, рассматриваемой системы, зависит от их геометрических и физических



(a) Эффект притяжения. (b) Эффект отталкивания. $(\rho_1 > \rho_0 > \rho_2)$

Рис. 8. Структура силовых линий гравитационного поля системы двух тел $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$ в среде с плотностью ρ_0 при условии, что $\rho_1 > \rho_2$.

характеристик, а так же взаимного расположения и ориентации. Для задачи (34) величины смещений гравитационных полюсов, относительно центров масс, приведены в таб. 3.

Таблица 3. Смещение гравитационных полюсов.

ρ_0, *кг/м*^{3}	δ_1, *мм*	δ_2, *мм*
0	0,126	0,493
7000	-0,198	-0,250

Для гравитирующих масс тел $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$ (рис. 8(b)) мы отмечаем характерное распределение силовых линий, которое соответствует конфигурации силовых линий диполя электрической или магнитной природы. Отличие только в одном, при том же характере распределения силовых линий, что и для магнитного диполя или пары разноимённо заряженных частиц, проявляется полная противоположность по физическому действию, то есть пара материальных тел с разноимёнными гравитационными полюсами не притягиваются, а отталкиваются.

Основываясь на вышеизложенном мы может сформулировать ряд аксиом, определяющих понятие гравитационного диполя:

Аксиома 7.1. *Материальное тело произвольной формы и конечного объёма, окружённое средой с ненулевой плотностью, проявляет свойства* *положительного монополя при условии, что средняя плотность тела больше плотности среды.*

Аксиома 7.2. *Материальное тело произвольной формы и конечного объёма, окружённое средой с ненулевой плотностью, проявляет свойства отрицательного монополя при условии, что средняя плотность тела меньше плотности среды.*

Аксиома 7.3. *Материальное тело произвольной формы и конечного объёма, находящееся на границе двух сред, образует гравитационный диполь, при условии, что средняя плотность тела меньше плотности одной из граничащих сред и больше плотности другой.*

Аксиома 7.4. *Система двух материальных тел произвольной формы и конечного объёма, находящихся в среде с ненулевой плотностью, образует гравитационный диполь, при условии, что плотность среды меньше плотности одного из тел и больше плотности другого.*

8. Гравитирующая масса в задачах механики

8.1. «Падение» тела в гравитационном поле Земли

Рассмотрим задачу о «падении» материального тела в воздушной среде Земли, а именно, сравним время «падения» двух тел и ответим на вопрос: *Какое из двух, одинаковых по геометрии, но разных по плотности тел «упадёт» быстрее при прочих равных начальных условиях*?

Под «падением» тела на поверхность Земли мы понимаем взаимное гравитационное притяжение Земли и материального тела $\mathcal{G}$. Землю представим однородной, по плотности, сферой радиуса $R_\oplus$ и массой $M_\oplus$.

Гравитационное поле Земли характеризуется напряжённостью поля $\underline{\mathbf{g}}$. Считаем, что Земля остаётся неподвижной, а перемещается, по направлению к Земле, только тело $\mathcal{G}$ (рис. 9). Так же полагаем, что во время «падения» напряжённость гравитационного поля Земли $\underline{\mathbf{g}}$ неизменна по направлению и величине:

$$\underline{\mathbf{g}} = -\underline{k}\mathbf{g}\,, \quad \text{где} \qquad \mathbf{g} = \mathbf{G}\,\frac{M_\oplus}{R_\oplus^2}\,. \qquad (35)$$

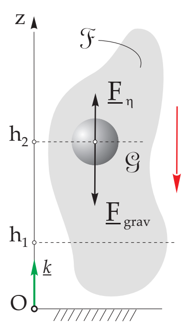


Рис. 9.

В качестве «падающего» тела $\mathcal{G}$ рассмотрим однородную сферу с радиусом $R_\mathcal{G}$ и плотностью $\rho_\mathcal{G}$. Тело «падает» в воздушной среде $\mathcal{F}$, которая имеет постоянную температуру, плотность $\rho_{\mathcal{F}}$ и вязкость η. В начальный момент времени тело обладает нулевой начальной скоростью и находится на расстоянии h от поверхности Земли. В процессе «падения» тело $\mathcal{G}$, в рамках нашей задачи, испытывает действие только двух сил: $\underline{F}_{\text{grav}}$ — сила взаимного гравитационного притяжения сферы $\mathcal{G}$ и Земли, а также силы сопротивления $\underline{F}_{\eta}$ со стороны среды $\mathcal{F}$. Поэтому уравнение для силы $\underline{F}$, под действием которой тело совершает своё движение, можно записать как

$$\underline{F} = \underline{F}_{\text{grav}} + \underline{F}_{\eta} \; , \tag{36}$$

где

$$\underline{F}_{\mathcal{G}} = M\ddot{\underline{r}} \; , \quad \underline{F}_{\text{grav}} = m\underline{\mathbf{g}} \; , \quad \underline{F}_{\eta} = \alpha\eta\dot{\underline{r}} \; . \tag{37}$$

Здесь $\underline{r} = \underline{k}z$ — радиус-вектор положения «падающего» тела; M и m — инерционная и гравитирующая масса тела $\mathcal{G}$; α — коэффициент формы тела.

При дальнейшем рассмотрении, силу сопротивления среды $\underline{F}_{\eta}$ не рассматриваем, так как наша задача заключается в следующем: в заданной среде, при одинаковых начальных условиях сравнить время «падения» двух тел равных по геометрии, но разных по плотности. Умножая левую и правую часть уравнения (36) на орт $\underline{k}$, получаем уравнение движения в проекции на ось $\mathbf{O}z$

$$M\ddot{z} = -m\mathbf{g} \; , \quad \text{где} \qquad m = M\left(1 - \frac{\rho_{\mathcal{F}}}{\rho_{\mathcal{G}}}\right) \; . \tag{38}$$

В нашей постановке задачи главным параметром является плотность среды $\mathcal{F}$ и тела $\mathcal{G}$. То есть решаем уравнение (38) со следующими начальными условиями:

$$\dot{z}\Big|_{t=0} = 0 \; , \quad z\Big|_{t=0} = h_2 \; . \tag{39}$$

Интегрируя, получаем:

$$\dot{z} = -\left(1 - \frac{\rho_{\mathcal{F}}}{\rho_{\mathcal{G}}}\right)\mathbf{g}\, t \; , \quad z = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\rho_{\mathcal{F}}}{\rho_{\mathcal{G}}}\right)\mathbf{g}\, t^2 + h_2 \; . \tag{40}$$

Отсюда находим время «падения» тела с высоты h_2 до отметки h_1 в гравитационном поле Земли, как функцию плотности среды $\rho_{\mathcal{F}}$ и средней плотности «падающего» тела $\rho_{\mathcal{G}}$:

$$t = \sqrt{\frac{2(h_2 - h_1)}{\left(1 - \dfrac{\rho_{\mathcal{F}}}{\rho_{\mathcal{G}}}\right)\mathbf{g}}} \tag{41}$$

В пределе, когда плотность среды $\rho_{\mathcal{F}}$ стремится к нулю, время «падения» будет минимальным, то есть:

$$t_{min} = \lim_{\rho_{\mathcal{F}} \to 0} t = \sqrt{\frac{2(h_2 - h_1)}{\mathbf{g}}} \ . \qquad (42)$$

Так же из (41) следует, что по мере приближения плотности среды $\rho_{\mathcal{F}}$ к средней плотности тела $\rho_{\mathcal{G}}$, время «падения» t растёт и становится бесконечным при равенстве плотностей, что соответствует «зависанию» тела $\mathcal{G}$ в среде $\mathcal{F}$, то есть тело приобретает нулевую плавучесть.

Теперь воспользуемся формулой (41) и ответим на, поставленный выше, вопрос: какое из двух одинаковых по геометрии, но разных по плотности тел в «падении» первым достигнет отметки h_1 ? Из (41) следует, что при условии $\rho_{\mathcal{G}_1} > \rho_{\mathcal{G}_2}$ выполняется $t_{\mathcal{G}_1} < t_{\mathcal{G}_2}$ и наоборот. Таким образом, получаем, что из двух геометрически одинаковых тел в среде с ненулевой плотностью, в гравитационном поле Земли при отсутствии иных силовых факторов, тело с большей плотностью всегда «падает» быстрее.

Вычислим время «падения» сферического тела с радиусом $R_{\mathcal{G}} = 5$ *мм* и плотностью $\rho_{\mathcal{G}}$ с высоты $h_2 = 1$ *м* до отметки $h_1 = 0$ *м* в среде с плотностью $\rho_{\mathcal{F}}$. Результат расчёта для разных сочетаний плотности тела и среды приведен в таб. 4. Мы видим, что в среде с ненулевой плотностью

Таблица 4. Время «падения» тела $\mathcal{G}$ в среде $\mathcal{F}$.

	вакуум $\rho_{\mathcal{F}} = 0$ *кг/м*^{3}	**воздух** $\rho_{\mathcal{F}} = 1{,}225$ *кг/м*^{3}	**вода** $\rho_{\mathcal{F}} = 1000$ *кг/м*^{3}
свинец $\rho_{\mathcal{G}} = 11336$ *кг/м*^{3}	0,45127 *с*	0,45129 *с*	0,47259 *с*
железное дерево $\rho_{\mathcal{G}} = 1170$ *кг/м*^{3}	0,45127 *с*	0,45150 *с*	1,18386 *с*

из двух одинаковых по геометрии тел первым «упадёт» более тяжёлое, как тело обладающее большей гравитирующей массой.

Здесь уместно сделать одно замечание, касающееся часто используемого понятия «свободное падение» применительно к телу «падающему» на Землю, по направлению к её поверхности. Это установившееся выражение содержит в себе смысловую ошибку и противоречит физике наблюдаемого процесса. Существует ли «свободное падение» тела? Ответ очевиден — нет, так как тело совершает вынужденное движение в результате гравитационного взаимодействия с Землёй.

8.2. Уравнение колебания маятника

Цель этого примера, показать роль гравитирующей и инерционной массы в колебательном процессе маятника. Рассмотрим колебательный процесс маятника (рис. 10) в гравитационном поле постоянной напряжённости $\underline{\mathbf{g}}$, с учётом того, что процесс происходит в среде $\mathcal{F}$ с плотностью $\rho_{\mathcal{F}} > 0$. Вязкость среды не учитываем, так как для нас важно показать влияние плотности среды $\mathcal{F}$ на период колебаний маятника. Баланс моментов в этом случае примет вид:

$$J\ddot{\varphi} = -L\,F_{\text{grav}} \sin\varphi \ , \tag{43}$$

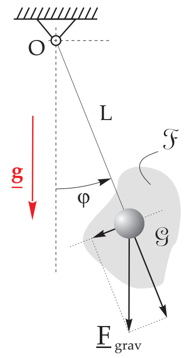


Рис. 10.

где

$$F_{\text{grav}} = m\mathbf{g} \ , \qquad J = ML^2 \ , \quad M = \rho_{\mathcal{G}} V_{\mathcal{G}} \ .$$

Здесь M и m — инерционная и гравитирующая масса сферы $\mathcal{G}$, определяемая выражением (22); L — длина невесомого и недеформируемого подвеса; $\rho_{\mathcal{G}}$ — средняя плотность сферы $\mathcal{G}$. Таким образом, уравнение колебаний маятника, принимает вид:

$$\ddot{\varphi} + \left(1 - \frac{\rho_{\mathcal{F}}}{\rho_{\mathcal{G}}}\right) \frac{\mathbf{g}}{L} \sin\varphi = 0 \ . \tag{44}$$

Из уравнения видно, что колебательный процесс сохранится и в случае, когда плотность среды $\rho_{\mathcal{F}}$ больше плотности тела $\rho_{\mathcal{G}}$. В этом случае мы получаем конфигурацию обратного маятника. Если реализуется условие равенства плотностей, то колебательный процесс будет отсутствовать, то есть при любом, наперёд заданном, начальном значении угла φ маятник будет находится в состоянии равновесия.

8.3. Равновесие тела на границе двух сред

Рассмотрим границу двух взаимно уравновешенных, в гравитационном поле Земли, полубесконечных сред: воды и воздуха. Вектор напряжённости гравитационного поля $\underline{\mathbf{g}}$ направлен перпендикулярно к поверхности воды, которая и является границей раздела сред. Пусть деревянный кубик находится в статическом равновесии, в состоянии неполного погружения (рис. 11) на границе раздела сред. Определим на какую глубину он погрузился в воду. Нам известно, что плотность воздуха (среда над поверхностью воды) $\rho = 1{,}29\,\textit{кг}/\textit{м}^3$, плотность воды $\rho = 1000\,\textit{кг}/\textit{м}^3$, а плотность деревянного кубика (дуб) $\rho = 800\,\textit{кг}/\textit{м}^3$. Длина ребра кубика $a = 1\,\textit{м}$.

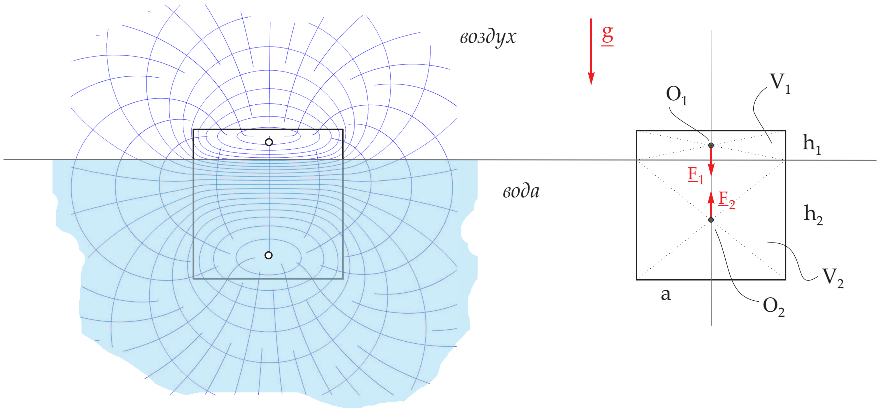


Рис. 11. Равновесие тела на границе двух сред.

Граница раздела двух сред условно делит кубик на две части. Одна его часть является аномалией в воздухе, а другая — аномалией в воде. Каждая из двух этих аномалий подвержена гравитационному воздействию со стороны Земли. Так как кубик находится в равновесии, это означает, что сумма гравитационных сил, действующих на его части, равна нулю. Учитывая, что вектор напряжённости гравитационного поля Земли $\underline{\mathbf{g}}$ для воздушной и водной среды направлен в одну сторону можно записать

$$\underline{F}_1 + \underline{F}_2 = 0 \;, \quad \text{или} \quad (m_1 + m_2)\, \underline{\mathbf{g}} = 0 \,.$$

Отсюда получаем условие равновесия: сумма гравитирующих масс надводной и подводной частей кубика равна нулю

$$m_1 + m_2 = 0 \;, \tag{45}$$

где

$$m_1 = \overbrace{\rho_{\text{куб}} V_1}^{M_1} \left(1 - \frac{\rho_{\text{воздух}}}{\rho_{\text{куб}}} \right) \;, \quad m_2 = \overbrace{\rho_{\text{куб}} V_2}^{M_2} \left(1 - \frac{\rho_{\text{вода}}}{\rho_{\text{куб}}} \right) \;.$$

Подставив гравитирующие массы m_1, m_2 в (45) с учётом того, что $V_1 = a^2 h_1$ и $V_2 = a^2 h_2$, получаем систему уравнений

$$h_1(\rho_{\text{куб}} - \rho_{\text{воздух}}) + h_2(\rho_{\text{куб}} - \rho_{\text{вода}}) = 0 \;, \quad h_1 + h_2 = a$$

откуда следует, что глубина погружения кубика составляет:

$$h_2 = a\, \frac{\rho_{\text{куб}} - \rho_{\text{воздух}}}{\rho_{\text{вода}} - \rho_{\text{воздух}}} \approx 0{,}8\,\text{м} \,.$$

Этот пример наглядно показывает справедливость приведённой ранее аксиомы 7.4 на стр. 19.

9. Выводы

Рассмотрение движения материальных тел в средах с ненулевой плотностью в гравитационном поле при отсутствии силовых факторов иной природы, позволило выявить новые проявления гравитирующей массы в окружающем нас Мире. Основные результаты:

1) Обоснована применимость *принципа аддитивности* для гравитационного взаимодействия двух и более материальных тел в среде с ненулевой плотностью.

2) Предложено определение *гравитирующей массы* материального тела конечного объёма, которое полностью соответствует наблюдаемым процессам, происходящим в окружающей нас Природе, в основе которых лежит гравитационное взаимодействие.

3) Сформулированы условия при которых, материальное тело или система двух тел образуют *гравитационный диполь* с конфигурацией силовых линий, присущей классическому представлению диполя электрической или магнитной природы. Особенность выявленного гравитационного диполя только в том, что разноимённые гравитирующие массы отталкиваются, а одноимённые притягиваются.

4) Приведено аналитическое доказательство достоверности постулата о *эквивалентности масс*, то есть о равенстве инерционной и гравитирующей массы материального тела для среды с нулевой плотностью.

Если выделить главное, то объединение закона Архимеда и закона всемирного тяготения Ньютона, позволило установить физическое существование, в окружающей нас природе, недостающее проявление гравитационного взаимодействия, а именно — явление отталкивания. То, что материя окружающего нас Мира должна обладать таким фундаментальным свойством, как гравитационное отталкивание (антитеза притяжению) указывалось ещё в прошлом:

> «Обыкновенно принимается, что тяжесть есть наиболее всеобщее определение материальности, т.е. что притяжение, а не отталкивание есть необходимое свойство материи. Но притяжение и отталкивание столь же неотделимы друг от друга, как положительное и отрицательное, и поэтому уже на основании самой диалектики можно предсказать, что истинная

теория материи должна отвести отталкиванию такое же важное место, как и притяжение, и что теория материи, основывающаяся только на притяжении, ложна, недостаточна, половинчата.»

Фридрих Энгельс [15, стр.210–211]

Список литературы

[1] *Гегель, Георг Вильгельм Фридрих.* Феноменология духа / Георг Вильгельм Фридрих Гегель. — Москва: «НАУКА», 2000. — С. 495.

[2] *Миронов, В. С.* Курс гравиразведки / В. С. Миронов. — Ленинград: Недра, 1980. — С. 543.

[3] *Торг, Вольфганг.* Гравиметрия / Вольфганг Торг. — Москва: «Мир», 1999. — С. 429.

[4] *Грушинский, Н. П.* Основы гравиметрии / Н. П. Грушинский. — Москва: «НАУКА», 1983. — С. 352.

[5] *Жуковский, Н. Е.* Теоретическая механика / Н. Е. Жуковский. — 1950. — С. 812.

[6] *Джеммер, М.* Понятие массы в классической и современной физике / М. Джеммер. — Москва: «Прогресс», 1967. — С. 246.

[7] *Брагинский, В. Б.* Физические эксперименты с пробными телами / В. Б. Брагинский. — «Наука», 1970. — С. 136.

[8] *Braginsky, V. B.* Verification of the equivalence of inertial and gravitational mass / V. B. Braginsky, V. I. Panov // *Sov. Phys.-JETP.* — 1972. — Vol. 34. — Pp. 463–76.

[9] *Tian Chen, Y.* Gravitational Experiments in the Laboratory / Y. Tian Chen, Alan Cook. — Cambridge University Press, 2005. — July. — P. 282.

[10] *Kiryan, D. G.* Motion of the Earth's centre of mass. Physical principles / D. G. Kiryan, G. V. Kiryan // *Kinematika i Fizika Nebesnykh Tel Supplement.* — 2005. — June. — Vol. 5. — Pp. 376–380.

[11] *Kiryan, D. G.* Moon's perigee mass as a missing component of the Earth's precession-nutation theory / D. G. Kiryan, G. V. Kiryan // *ArXiv e-prints (1109.4969v6).* — 2013. — June.

[12] *Kiryan, D. G.* On the gravitational mass / D. G. Kiryan, G. V. Kiryan // *International Journal Of Applied And Fundamental Research.* — 2013. — Vol. 1. — http://www.science-sd.com/452-24059.

[13] *Dushman, S.* The Scientific Foundations of Vacuum Techniques / S. Dushman. — John Wiley & Sons, 1949.

[14] *Кикоин, И. К.* Молекулярная физика / И. К. Кикоин, А. К. Кикоин. — Физматгиз, 1963. — С. 500.

[15] *Энгельс, Фридрих.* Диалектика природы / Фридрих Энгельс. — Москва, 1953. — С. 328.