

Хмельник С.И.

Механизм возникновения и метод расчета турбулентных течений

Аннотация

Предлагается объяснение механизма возникновения турбулентных течений, которое основано на максвеллоподобных уравнениях гравитации, уточненных на основе известных экспериментов. Показывается, что движущиеся молекулы текущей жидкости взаимодействуют между собой аналогично движущимся электрическим зарядам. Силы такого взаимодействия могут быть рассчитаны и включены в уравнения Навье-Стокса как массовые силы. Уравнения Навье-Стокса, дополненные такими силами, становятся уравнениями гидродинамики для турбулентного течения. При этом для расчета турбулентных течений можно использовать известные методы решения уравнений Навье-Стокса.

Оглавление

1. Вступление
 2. Взаимодействие движущихся электрических зарядов
 3. Гравитомагнитное взаимодействие движущихся масс
 4. Гравитомагнитное взаимодействие как причина турбулентности
 5. Количественные оценки
 6. Пример: турбулентный поток воды в трубе
 7. Уравнения турбулентного потока
- Приложение
Литература

1. Вступление

В [1] рассмотрена аналогия электромагнетизма и гравитоэлектромагнетизма, с позиций этой аналогии проведен анализ новых экспериментов Самохвалова [2]. На основе этого там показано, что максвеллоподобные уравнения гравитоэлектромагнетизма должны быть дополнены некоторым эмпирическим коэффициентом гравитационной проницаемости среды. Этот коэффициент для вакуума имеет величину порядка $\xi \approx 10^{12}$ и резко уменьшается с увеличением давления. Это объясняет отсутствие видимых эффектов гравитомагнитного взаимодействия движущихся масс в воздухе. Однако в вакууме эти взаимодействия отчетливо проявляются в указанных экспериментах.

В потоке жидкости движущиеся молекулы разъединены вакуумом. Поэтому силы их гравитомагнитного взаимодействия могут быть значительными и влиять на характер течения.

Известно, что при увеличении скорости ламинарного течения жидкости или газа самопроизвольно (без наличия внешних сил) возникает турбулентное течение [3]. Механизм самопроизвольного перехода от ламинарного течения к турбулентному не найден. Очевидно, должен быть обнаружен источник сил, перпендикулярных скорости потока.

Далее показывается, что гравитомагнитное взаимодействие движущихся масс жидкости может быть причиной возникновения турбулентности.

2. Взаимодействие движущихся электрических зарядов

Рассмотрим два заряда q_1 и q_2 , движущиеся со скоростями v_1 и v_2 соответственно. Известно [4], что индукция поля, создаваемого зарядом q_1 в точке, где в данный момент находится заряд q_2 , равна (здесь и далее используется система СГС)

$$\bar{B}_1 = q_1 (\bar{v}_1 \times \bar{r}) / cr^3. \quad (1)$$

При этом вектор \bar{r} направлен из точки, где находится движущийся заряд q_1 . Сила Лоренца, действующая на заряд q_2 ,

$$\bar{F}_{12} = q_2 (\bar{v}_2 \times \bar{B}_1) / c. \quad (2)$$

Аналогично,

$$\overline{B_2} = q_2(\overline{v_2} \times \overline{r})/cr^3, \quad (3)$$

$$\overline{F_{21}} = q_1(\overline{v_1} \times \overline{B_2})/c. \quad (4)$$

В общем случае $\overline{F_{12}} \neq \overline{F_{21}}$, т.е. не соблюдается третий закон Ньютона – возникают неуравновешенные силы, действующие на заряды q_1 и q_2 и искривляющие траектории движения этих зарядов.

Рассмотрим соотношение между силой Лоренца и силой притяжения зарядов. В простейшем случае сила Лоренца, найденная из (1, 2) имеет вид

$$F = \frac{q_1 q_2 v_1 v_2}{r^2 c^2}. \quad (5)$$

Сила притяжения двух зарядов

$$P = \frac{q_1 q_2}{r^2}. \quad (6)$$

Следовательно,

$$\phi_e = \frac{F}{P} = \frac{v_1 v_2}{c^2}. \quad (7)$$

Будем называть эту величину эффективностью сил Лоренца

3. Гравитомагнитное взаимодействие движущихся масс

По аналогии с взаимодействием электрических зарядов, две массы m_1 и m_2 , движущиеся со скоростями v_1 и v_2 соответственно, также взаимодействуют между собой. В [1] показано, что в этом случае возникают гравитомагнитные индукции вида

$$\overline{B_{g1}} = Gm_1(\overline{v_1} \times \overline{r})/cr^3, \quad (1)$$

$$\overline{B_{g2}} = Gm_2(\overline{v_2} \times \overline{r})/cr^3, \quad (2)$$

где

c — скорость света в вакууме, $c \approx 3 \cdot 10^{10}$ см/сек;

G - гравитационная постоянная, $G \approx 7 \cdot 10^{-8}$ дин · см² г⁻².

При этом на массы также действуют гравитомагнитные силы Лоренца, которые имеют следующий вид [1]:

$$\overline{F_{12}} = \zeta \xi m_2 (\overline{v_2} \times \overline{B_{g1}}) / c, \quad (3)$$

$$\overline{F_{21}} = \zeta \xi m_1 (\overline{v_1} \times \overline{B_{g2}}) / c, \quad (4)$$

где

$\zeta = 2$, что следует из ОТО,

$\xi \approx 10^{12}$ - коэффициент гравитационной проницаемости вакуума [1].

При параллельных скоростях $\overline{v_1} = \overline{v_2}$ и равных массах силы $\overline{F_{12}} = -\overline{F_{21}}$ и ламинарное течение сохраняет свой характер. Однако в общем случае, когда $\overline{v_1} \neq \overline{v_2}$, возникают силы $\overline{F_{12}} \neq \overline{F_{21}}$, т.е. возникает неуравновешенная сила $\overline{\Delta F} = \overline{F_{12}} + \overline{F_{21}}$, действующая на массы m_1 и m_2 и искривляющая траектории движения этих масс (заметим, что при этом не соблюдается третий закон Ньютона [4]). Из приведенных формул следует, что неуравновешенная сила направлена под углом к скорости потока, что нарушает ламинарность.

Найдем соотношение между гравитомагнитной силой Лоренца и силой притяжения масс. Аналогично предыдущему в простейшем случае гравитомагнитную силу Лоренца, найдем из (1, 3):

$$F = \zeta \xi \frac{G m_1 m_2 v_1 v_2}{r^2 c^2}. \quad (5)$$

Сила притяжения двух масс

$$P = \frac{G m_1 m_2}{r^2}. \quad (6)$$

Следовательно,

$$\phi_g = \frac{F}{P} = \zeta \xi \cdot \frac{v_1 v_2}{c^2}. \quad (7)$$

Будем называть эту величину эффективностью гравитомагнитных сил Лоренца. Сравнивая (2.7) и (3.7) находим, что

$$\phi_g = \phi_e \zeta \xi. \quad (8)$$

Следовательно, эффективность гравитомагнитных сил Лоренца намного превышает эффективность электромагнитных сил Лоренца при сравнимых скоростях.

4. Гравитомагнитное взаимодействие как причина турбулентности

Для появления неуравновешенных сил должны выполняться следующие условия:

1. скорости должны иметь определенную величину (при которой силы становятся существенными);
2. должна возникнуть причина местного изменения скоростей, например,
 - появление преграды
 - изменение давления при вытекании струи из воды.

Можно указать ряд причин, увеличивающих неуравновешенные силы:

- увеличение температуры, при котором скорости V_1 и V_2 перестают быть параллельными из-за тепловых флуктуаций,
- уменьшение вязкости, т.е. межмолекулярных сил притяжения, которые противодействуют неуравновешенной силе, раздвигающей молекулы.

Можно указать также ряд внешних факторов, вызывающих появление неуравновешенных сил за счет внешнего нарушения параллельности скоростей V_1 и V_2 , например,

- резкие изменения температуры, давления,
- впрыскивание дополнительной жидкости или других веществ.

Локальное изменение равных скоростей пары связанных молекул, вызванное, например, несимметричным ударом, неизбежно распространяется на всю область течения.

Поскольку силы Лоренца не совершают работы, энергия для турбулентного движения должна поступать из энергии ламинарного течения, т.е. энергия входного потока должна превышать некоторую величину для возникновения турбулентности.

Уравнения Навье-Стокса позволяют определить скорости потока, встречающего преграду или покидающего преграду. Зная эти скорости, по указанным выше уравнениям можно определить неуравновешенные силы. Затем эти силы, как функции скорости, могут быть включены в уравнения Навье-Стокса как массовые силы.

5. Количественные оценки

В общем случае из (3.2, 3.4) найдем

$$\overline{F}_{21} = \frac{\zeta \xi G m_1 m_2}{c^2 r^3} (\overline{v}_1 \times (\overline{v}_2 \times \overline{r})). \quad (1)$$

Рассмотрим орты векторов, обозначая их штрихом. Тогда из (1) получим:

$$\overline{F}_{21} = \sigma \overline{f}_{21}, \quad (2)$$

где

$$\overline{f}_{21} = (\overline{v}'_1 \times (\overline{v}'_2 \times \overline{r}')). \quad (3)$$

$$\sigma = \frac{\zeta \xi G \cdot m_1 m_2 v_1 v_2}{c^2 r^2}, \quad (4)$$

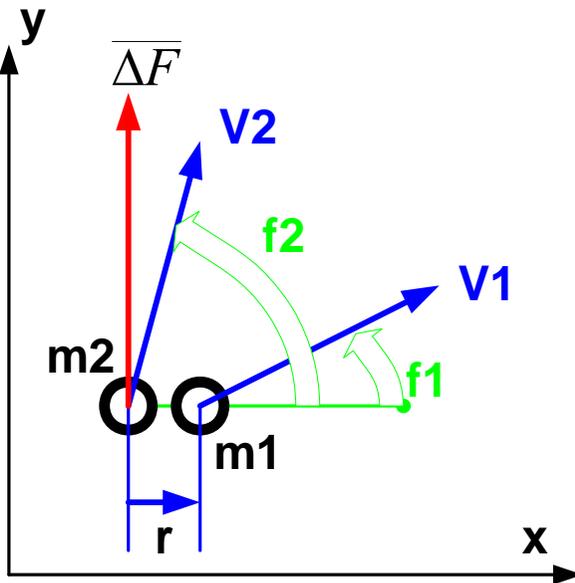


Рис. 1.

Аналогично,

$$\overline{F}_{12} = \sigma \overline{f}_{12}, \quad (5)$$

где

$$\overline{f}_{12} = (\overline{v}'_2 \times (\overline{v}'_1 \times \overline{r}')), \quad (6)$$

и

$$\overline{\Delta F} = \sigma \overline{\Delta f}, \quad (7)$$

где

$$\overline{\Delta F} = \overline{F_{21}} + \overline{F_{12}}, \quad (8)$$

$$\overline{\Delta f} = \overline{f_{21}} + \overline{f_{12}}. \quad (9)$$

Рассмотрим две соседние молекулы жидкости. Расстояние между молекулами жидкости остается неизменным. В силу малости расстояния r между ними можно полагать, что векторы скоростей $\overline{v'_1}$, $\overline{v'_2}$ этих молекул приложены к одной точке и лежат в некоторой общей плоскости xOy . Тогда вектор (9) также лежит в этой плоскости. На рис. 1 показано расположение векторов $\overline{v'_1}$, $\overline{v'_2}$, $\overline{r'}$.

Рассмотрим две соседние молекулы жидкости. Расстояние между молекулами жидкости остается неизменным. В силу малости расстояния r между ними можно полагать, что векторы скоростей $\overline{v'_1}$, $\overline{v'_2}$ этих молекул приложены к одной точке и лежат в некоторой общей плоскости xOy . Тогда вектор (9) также лежит в этой плоскости. На рис. 1 показано расположение векторов $\overline{v'_1}$, $\overline{v'_2}$, $\overline{r'}$.

В приложении (см. (6)) показано, что величина вектора (9) определяется по формуле

$$\Delta f = r \sin(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (8)$$

С учетом (9, 10) отсюда получаем:

$$\Delta F = \sigma \sin(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (9)$$

Эта сила возникает тогда, когда соседние молекулы ударяются о преграду под разными углами. Можно полагать, что суммарная сила приложена к одной из молекул. Поэтому она создает крутящий момент диполя, составленного из двух молекул,

$$M = r \cdot \Delta F. \quad (10)$$

Каждая пара соседних молекул жидкости образует диполь с крутящим моментом (10). Крутящие моменты увеличивают локальные скорости молекул жидкости, что, в свою очередь, увеличивает крутящие моменты указанных диполей. Поэтому турбулентность, начавшись, продолжает развиваться, распространяясь в объеме жидкости.

Формула (9) определяет силы гравитоманнитного взаимодействия молекул жидкости, как функцию скоростей этих соприкасающихся молекул. Эти силы могут быть включены в уравнения Навье-Стокса как массовые силы – см. ниже.

6. Пример: турбулентный поток воды в трубе

Далее рассмотрим случай взаимодействия струй жидкости, предполагая, что взаимодействуют группы молекул, образующих элемент струи. Рассмотрим частный случай, когда у струй векторы скоростей равны $|v_1| = |v_2| = v$ и массы группы равны $m_1 = m_2 = m$. При этом по (4) найдем силу

$$\sigma = \zeta \xi G \left(\frac{mv}{cr} \right)^2. \quad (11)$$

где r – расстояние между струями. Обозначим через d характерный размер группы (диаметр струи) и перепишем (11) в виде

$$\sigma = \zeta \xi G \left(\frac{\rho \cdot d^3 v}{cr} \right)^2. \quad (11a)$$

где ρ – плотность жидкости, а масса группы

$$m = \rho \cdot d^3. \quad (11b)$$

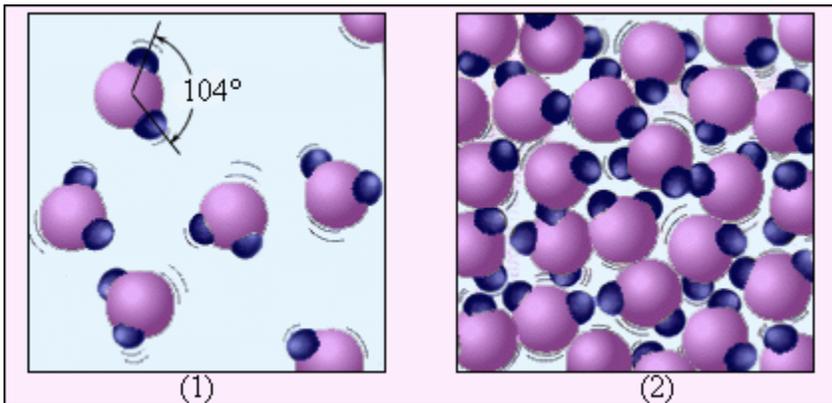


Рис. 2 (из Википедии). Водяной пар (1) и вода (2). Молекулы воды увеличены примерно в $5 \cdot 10^7$ раз.

Дальнейший пример относится к воде. Поскольку в жидкостях молекулы располагаются на расстояниях соизмеримых с размерами

самих молекул (см. рис. 2), то расстояние между молекулами примем равным диаметру молекулы, который для воды равен $r \approx 3 \cdot 10^{-12}$ см. Плотность воды $\rho = 1 \text{ г/см}^3$. Найдем еще скорость потока воды, при котором возникает турбулентность. Известно [3], что условие возникновения турбулентности определяется критерием Рейнольдса, который для круглой трубы имеет вид

$$\text{Re} = Dv / \eta, \tag{12}$$

где D - диаметр трубы, η - коэффициент кинематической вязкости. Для воды $\eta \approx 0.01 \text{ см}^2/\text{с}$ [5]. Пусть $D = 2.5 \text{ см}$. Турбулентность возникает, если число Рейнольдса $\text{Re} > 2300$. При этом из (12) найдем скорость турбулентного потока $v = 10 \text{ см/сек}$. Пусть диаметр взаимодействующих струй $d \approx 0.1 \text{ см}$. Выше указано, что $\zeta = 2$, $\xi \approx 10^{12}$, $G \approx 7 \cdot 10^{-8}$. Тогда из (11а) найдем

$$\sigma = 2 \cdot 10^{12} \cdot 7 \cdot 10^{-8} \left(1 \cdot 0.1^3 \cdot 10 / (3 \cdot 10^{10} \cdot 3 \cdot 10^{-12}) \right)^2 \approx 2000 \text{ дин} \tag{13}$$

Предположим, что $\sin(\varphi_2 - \varphi_1) \approx 10^{-2}$. Тогда найдем силу (9):

$$\Delta F \approx 20 \text{ дин}. \tag{14}$$

Из (10, 14) найдем еще крутящий момент:

$$M \approx r \cdot \Delta F \approx 2 \text{ дин} \cdot \text{см}. \tag{15}$$

7. Уравнения турбулентного потока

Снова вернемся к формуле (5.1):

$$\overline{F_{21}} = \frac{\zeta \xi G m^2}{c^2 r^3} (\overline{v_1} \times (\overline{v_2} \times \overline{r})) \left[\text{дина} = \frac{\text{г} \cdot \text{см}}{\text{сек}^2} \right]. \tag{1}$$

Аналогично п. 5 найдем

$$\overline{\Delta F} = \mathcal{G} \cdot \overline{\Delta f}, \tag{2}$$

где

$$\mathcal{G} = \frac{\zeta \xi G m^2}{c^2 r^3} \left[\frac{z}{\text{см}^2} \right], \tag{3}$$

$$\overline{\Delta f} = \mathcal{G} \left((\overline{v_1} \times (\overline{v_2} \times \overline{r})) - (\overline{v_2} \times (\overline{v_1} \times \overline{r})) \right). \tag{4}$$

Учитывая (11в), перепишем (3) в виде

$$g = \frac{\zeta \xi G \rho^2 d^6}{c^2 r^3} \left[\frac{z}{\text{см}^2} \right]. \quad (4a)$$

Далее силы, вызывающие турбулентность, будем обозначать как T . В приложении показано (см. также рис. 1), что, если все векторы лежат в одной плоскости, то (4) эквивалентно формуле

$$T_y = g \cdot R_x (v_{2x} v_{1y} - v_{2y} v_{1x}), \quad (5)$$

где

T_y - сила, действующая на массу, движущуюся со скоростью v_2

R_x - расстояние между центрами масс.

Пусть две соседние группы молекул расположены на оси ox . Обозначим:

$$R_x = dx, \quad (6a)$$

$$v_2 = v, \quad v_1 = v + dv. \quad (6b)$$

Тогда

$$T_y = g \cdot dx (v_x (v_y + dv_y) - v_y (v_x + dv_x)) \quad (7)$$

или

$$T_y = g \cdot dx (v_x dv_y - v_y dv_x). \quad (8)$$

Аналогично, для правой системы координат имеем:

$$T_z = g \cdot dy (v_y dv_z - v_z dv_y), \quad (9)$$

$$T_x = g \cdot dz (v_z dv_x - v_x dv_z). \quad (10)$$

Рассмотрим оператор (который в дальнейшем для краткости будем называть турбулеаном)

$$\Omega(v) = \begin{vmatrix} v_z \frac{dv_x}{dz} - v_x \frac{dv_z}{dz} \\ v_x \frac{dv_y}{dx} - v_y \frac{dv_x}{dx} \\ v_y \frac{dv_z}{dy} - v_z \frac{dv_y}{dy} \end{vmatrix} \left[\frac{\text{см}}{\text{сек}^2} \right]. \quad (11)$$

Пример 1. Рассмотрим идеальное ламинарное течение, в котором $v_x \neq 0$, $v_y = 0$, $v_z = 0$. Очевидно, при этом

$\Omega(v) = 0$, т.е. ламинарное течение не может самопроизвольно перейти в турбулентное течение.

В соответствии с (6а) имеем

$$R = dx = dy = dz \tag{12}$$

Из (10-12) следует выражение

$$T = R^2 g \cdot \Omega(v) \left[\frac{\text{см}^2}{\text{см}^2} \cdot \frac{\Gamma}{\text{сек}^2} = \frac{\Gamma \cdot \text{см}}{\text{сек}^2} = \text{дина} \right]. \tag{13}$$

или

$$T = g_1 \cdot \Omega(v) [\text{дина}], \tag{14}$$

где

$$g_1 = R^2 g = \frac{R^2 \zeta \xi G \rho^2 d^6}{c^2 r^3} [g]. \tag{15}$$

Выражение (14) определяет силу, действующую на группу молекул со стороны трех соседних групп молекул, находящихся перед ней на осях координат, если дифференциалы координат равны расстоянию между молекулами (12). Эта сила действует на объем четырех групп молекул, т.е. на объем $4d^3$. Поэтому сила, действующая на единичный объем,

$$T_m = \rho_m \Omega(v) \left[\frac{\text{дина}}{\text{см}^3} = \frac{\Gamma}{\text{сек}^2 \text{см}^2} \right], \tag{16}$$

где

$$\rho_m = \frac{g_1}{4d^3} = \frac{R^2 \zeta \xi G \rho^2 d^3}{4c^2 r^3} \left[\frac{\Gamma}{\text{см}^3} \right]$$

или

$$\rho_m = \frac{\zeta \xi G \rho^2 d^8}{4c^2 r^3} \left[\frac{\Gamma}{\text{см}^3} \right], \tag{17}$$

поскольку $R \approx d$.

Заметим для сравнения, что в уравнениях гидродинамики размерность массовой силы $F_m \left[\frac{\text{дина}}{\Gamma} = \frac{\text{см}}{\text{сек}^2} \right]$, а размерность силы, действующей на единичный объем,

$$\rho F_m \left[\frac{\text{дина}}{\Gamma} \frac{\Gamma}{\text{см}^3} = \frac{\text{дина}}{\text{см}^3} = \frac{\Gamma}{\text{сек}^2 \text{см}^2} \right]. \quad \text{Именно такую}$$

размерность имеет и сила (16). При этом коэффициент (17) имеет размерность плотности и может быть назван турбулентной плотностью данной жидкости.

Пример 2. Найдем турбулентную плотность ρ_m воды. Имеем:

$$\rho = 1\text{г/см}^3, d \approx 0.1\text{см}, c \approx 3 \cdot 10^{10} \text{ см/сек}, \zeta = 2, \xi \approx 10^{12}.$$

Пусть диаметр струи $d \approx 0.1\text{см}$ и расстояние между струями $r \approx 10^{-8}\text{см}$. Тогда

$$\rho_m = \frac{\zeta \xi G \rho^2 d^8}{4c^2 r^3} = \frac{2 \cdot 10^{12} \cdot 7 \cdot 10^{-8} \cdot 10^{-8}}{4 \cdot (3 \cdot 10^{10})^2 (10^{-8})^3}$$

$$\text{или } \rho_m \approx 0.4 \left[\frac{\Gamma}{\text{см}^3} \right].$$

Силы (16) могут быть включены в уравнения Навье-Стокса. Уравнения Навье-Стокса, дополненные такими силами, становятся уравнениями гидродинамики для турбулентного течения.

Турбулеан (11) по структуре аналогичен выражению

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}, \quad (18)$$

входящему в уравнения Навье-Стокса. Поэтому для расчета турбулентных течений можно использовать известные методы решения уравнений Навье-Стокса и, в том числе, метод, предложенный в [6].

Выражение (18) входит в уравнение Навье-Стокса с множителем ρ . Следовательно, турбулеан (11) будет влиять на решение уравнения, если коэффициент (17) будет иметь значение $\rho_m \approx \rho$.

Приложение

Рассмотрим выражение с векторами вида

$$\bar{f} = (\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{r})). \quad (1)$$

В правой системе декартовых координат это выражение принимает вид

$$\bar{f} = \begin{bmatrix} a_y(b_x r_y - b_y r_x) - a_z(b_z r_x - b_x r_z) \\ a_z(b_y r_z - b_z r_y) - a_x(b_x r_y - b_y r_x) \\ a_x(b_z r_x - b_x r_z) - a_y(b_y r_z - b_z r_y) \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Предположим, что проекции этих векторов на ось Z равны нулю. Тогда

$$\bar{f} = (b_x r_y - b_y r_x) \begin{bmatrix} a_y \\ -a_x \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2a)$$

Предположим еще, что $r_y = 0$, т.е. $r = r_x$. Тогда

$$\bar{f} = r b_y \begin{bmatrix} -a_y \\ a_x \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Итак, при указанных условиях

$$\bar{f}_{ab} = (\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{r})) = r b_y \begin{bmatrix} -a_y \\ a_x \end{bmatrix}. \quad (3a)$$

Аналогично,

$$\bar{f}_{ba} = (\bar{b} \times (\bar{a} \times (-\bar{r}))) = -r a_y \begin{bmatrix} -b_y \\ b_x \end{bmatrix}.$$

Имеем

$$\bar{\Delta f} = \bar{f}_{ab} + \bar{f}_{ba} = r \begin{bmatrix} 0 \\ a_x b_y - a_y b_x \end{bmatrix} \quad (4)$$

или

$$\bar{\Delta f}_y = r(a_x b_y - a_y b_x) = r a b (\cos \varphi_a \sin \varphi_b - \sin \varphi_a \cos \varphi_a), \quad (5)$$

где φ_a , φ_b - углы векторов a , b с осью Ox . Таким образом, вектор $\overline{\Delta f}$ лежит в той же плоскости, где находятся исходные векторы, направлен вдоль оси Oy и имеет величину

$$\Delta f = rabsin(\varphi_b - \varphi_a). \quad (6)$$

Литература

1. Хмельник С.И. Экспериментальное уточнение максвеллоподобных уравнений гравитации, данный выпуск.
2. Самохвалов В.Н. Статьи в журнале «Доклады независимых авторов», изд. «ДНА», ISSN 2225-6717, Россия – Израиль, 2009, вып. 13; 2010, вып. 14; 2010, вып. 15; 2011, вып. 18; 2011, вып. 19.
3. Иванов Б.Н. Мир физической гидродинамики. От проблем турбулентности до физики космоса. Изд. 2-е. – М.: Едиториал УРСС, 2010. – 240с.
4. Зильберман Г.Е. Электричество и магнетизм, Москва, изд. "Наука", 1970.
5. Вильнер Я.М. и др. Справочное пособие по гидравлике, гидромашинам и гидроприводам, изд. "Высшая школа", 1976.
6. Хмельник С.И. Уравнения Навье-Стокса. Существование и метод поиска глобального решения (вторая редакция). Published by "MiC" - Mathematics in Computer Comp., printed in USA, Lulu Inc., ID 9971440. Израиль, 2011, ISBN 978-1-4583-1953-1.