DETERMINAREA PUNCTULUI DE INTERSECȚIE
DIN TEOREMA LINIILOR CONCURENTE
A LUI FLORENTIN SMARANDACHE
(Smarandache's Concurrent Lines Theorem)

Mircea Eugen Şelariu
Universitatea "Politehnica" din Timişoara

1. INTRODUCERE

Teorema liniilor concurente a lui **Florentin Smarandache** afirmă că diagonalele, care unesc vârfurile diametral opuse ale unui poligon cu **n** laturi **pare**, circumscris cercului C(O,R) şi liniile punctelor de tangența ale poligonului, diametral opuse, se intersectează într-un punct comun **$I(x_I,y_I)$** , aşa cum se arată în figura **1**, pentru un patrulater neregulat, de exemplu [1], [2], [3].

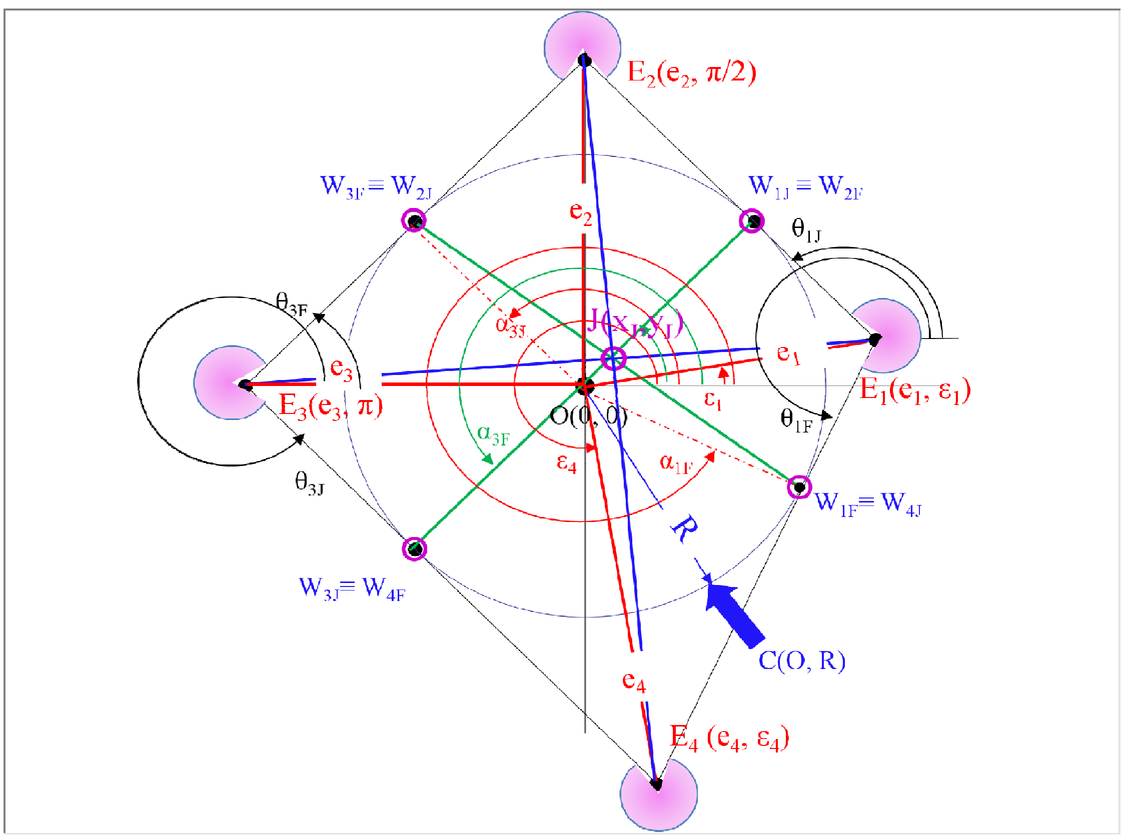

Fig.**1** Schiță explicativa la teorema liniilor concurente a lui Smarandache

2. DETERMINAREA COORDONATELOR PUNCTULUI $I(x_I, y_I)$ DE INTERSECȚIE COMUNĂ A LINIILOR, A DIAGONALELOR ŞI A ACESTORA ÎNTRE ELE

Cele **n** puncte **E_i**, $i = 1, 2, \ldots, n$, de coordonate polare (e_i, ε_i), adică **E_i**(e_i, ε_i), **n** = 4, care constituie vârfurile unui poligon (patrulater în cazul considerat în figura **1** ca şi în figura **2**), pot fi denumite **excentre** exterioare ale cercului C(O,R), cerc înscris în poligonul **P_n**, sau pe care poligonul îl circumscrie, excentre care stau la baza teoriei **funcţiilor supermatematice circulare excentrice** (**FSM**-**CE**), funcţii tratate pe larg în lucrările dedicate **supermatematicii** [4] şi [5].

FSM-**CE** pot fi de **variabilă excentrică**, notată **θ**, care sunt funcţii continue numai pentru o excentricitate liniară reală **e** < R, sau pentru o **excentricitate liniară numerică s** < 1, în timp ce **FSM**-**CE** de variabilă centrică α sunt continue pentru oricare valoare dată excentricităţii liniare s sau e.

Se ştie că, în acest caz, al excentricităţii liniare reale e > R sau a excentricităţii liniare numerice **s** = $\frac{e}{R}$ > 1, **FSM**-**CE** există doar în domeniile $D_i \in [\alpha_{ii}; \alpha_{fi}]$ în care semidreptele pozitive **d^+_i**, turnante în jurul excentrelor **E_i**, intersectează cercul **C.**

Între cele două variabile, centrică şi excentrică, există dependenţa dată de relaţia

(1) $\alpha_i = \theta_i - \arcsin[s.\sin(\theta_i - \varepsilon_i)] = aex_i[\theta_i, S(s_i, \varepsilon_i)]$

si care a fost denumită funcţie amplitudine excentrică şi notată aexθ.

Pentru fiecare poziţie a excentrelor E_i, există câte două puncte de tangenţă ale semidreptelor pozitive excentrice **d^+_i** (deoarece trec prin excentrele **E_i**), turnante în jurul excentrelor respective, cu cercul **C**: W_{ii} (R, α_{ii}) punctul iniţial sau de începutul al domeniului de existenţă şi W_{fi} (R, α_{fi}), punctul final de existenţă al domeniului $D_i \in [\alpha_{ii}; \alpha_{fi}]$, în care semidreptele turnante excentrice pozitive **d^+_i**, de orientare /unghi θ_i cu axa OX, sunt tangente cercului C(R,O). Coordonatele **polare** ale acestor puncte au aceaşi rază polara R şi sunt de argumente de variabilă centrică α_i, date de expresiile (9) şi (12) cat şi de cele din figura **2**

(2) $$\begin{cases} W_{ii}(\boldsymbol{R}, \alpha_{ii}) \\ W_{fi}(\boldsymbol{R}, \alpha_{fi}) \end{cases},$$

în care **R** este raza cercului înscris în poligon sau a cercului circumscris de poligon.

FSM-**CE,** rezultând din intersecţia cercului unitate/trigonometric **CU(O,1)** cu dreapta excentrică **d** = $d^+ \cap d^-$ va avea două deterimnari: principală **1**, rezultată din intersecţia **CU(O,1)**∩ d^+ şi secundară 2, rezultata din intersecţia **CU(O,1)**∩ d^-, pentru s < 1 şi patru determinări pentru s > 1.

În prezenta lucrare, se va opera numai cu prima determinare, principală, care, conform uzanţei stabilite pentru acest caz, nu va purta niciun indice. Indicii i, i = 1, 2, .., n care apar se referă la excentrul, respectiv, la numărul vârful poligonului E_i considerat.

Punctele de tangenţă **$W_{1,2}$**, date de relaţia (2), sunt singurele puncte în care cele două determinări ale **FSM**-**CE** au valori egale între ele, deoarece cele două puncte de intersecţie ale cercului sunt confundate (**$W_1 \equiv W_2$**) în puntele de tangenţă W_i pentru θ_{ii} şi, totodată, pentru **α_{ii}**, şi în W_f pentru θ_{fi} şi, totodată, pentru **α_{fi}**. Pornind din punctul W_i cele două puncte **$W_{1,2}$** se rotesc pe cerc în sensuri opuse. Punctul principal **W_1**este Intotdeauna acela care se roteste în sens trigonometric, adica sinistrorum sau levogin, iar celălalt punct este punctul secundar **W_2**, care se roteşte pe cerc în sens dextrogin sau dextrorum. Pornind simultan din punctul iniţial W_i cele două puncte ajung simultan în punctul final W_f, pe măsura ce semidreapta **d^+_I** se roteşte în jurul excentrului E_i cu unghiul θ_i.

În punctul I(x_I, y_I) se intersectează patru segmente de dreaptă, în cazul unui patrulater considerat în demonstraţia sa de **Florentin Smarandache**.

Teorema, odată demonstrata de autorul ei, din cele patru segmente se pot alege doar două, strict necesare pentru determinarea punctului de intersecţie I. S-a ales intersecţia dintre diagonala **E_1 E_2** şi linia punctelor de tangenţă **$W_{i1}W_{i2}$**, cu notaţiile din figura **2**. În figură sunt indicate şi valorile alese precum şi rezultatele obţinute.

Diagonala are ecuaţia dreptei suport

(3) $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

(4) $y - e_1.\sin\varepsilon_1 = \frac{e_2 \sin\varepsilon_2 - e_1 \sin\varepsilon_1}{e_2 \cos\varepsilon_2 - e_1 \cos\varepsilon_1}(x - e_1.\cos\varepsilon_1)$.

(5) $\frac{y - e1.\sin\varepsilon 1}{x - e_1.\cos\varepsilon_1} = \frac{e_2 \sin\varepsilon_2 - e_1 \sin\varepsilon_1}{e_2 \cos\varepsilon_2 - e_1 \cos\varepsilon_1}$

Dintre cele două linii, a fost aleasă linia determinată de punctele **W_{i1}** cu **W_{i2}**, a cărei dreaptă suport are ecuaţia

(6) $\quad y - R.\sin\alpha_{i1} = \dfrac{R.\sin\alpha_{i2} - R.\sin\alpha_{i1}}{R.\cos\alpha_{i2} - R.\cos\alpha_{i1}}(x - R.\cos\alpha_{i1}) \Rightarrow$

(7) $\quad y - R.\sin\alpha_{i1} = \dfrac{\sin\alpha_{i2} - \sin\alpha_{i1}}{\cos\alpha_{i2} - \cos\alpha_{i1}}(x - R.\cos\alpha_{i1})$

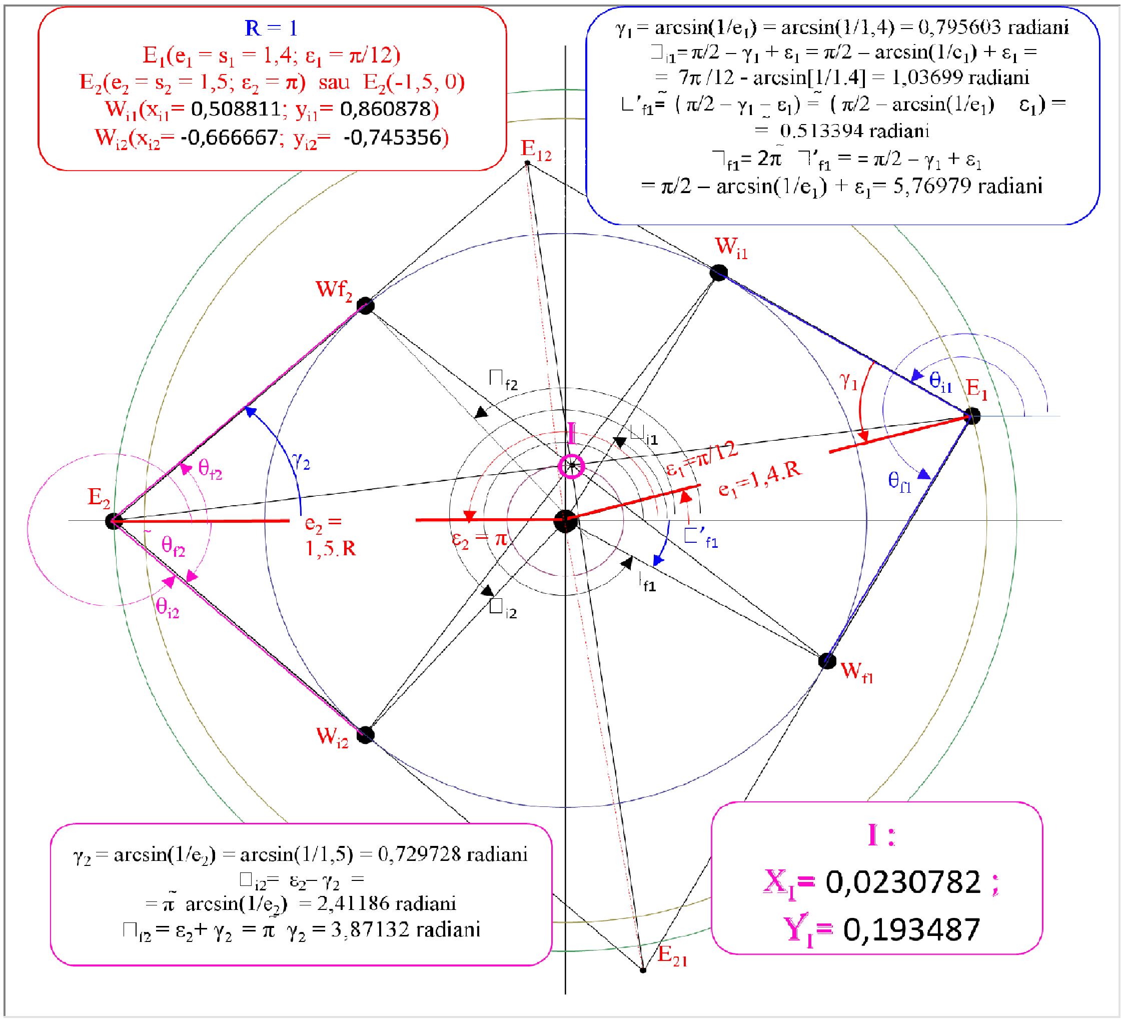

Fig.**2** Schiță explicativa pentru determinarea punctului de intersectie din teorema liniilor concurente a lui **Smarandache**

Din triunghiul dreptunghic OE_1W_{i1} cu unghiul drept în W_{i1} rezulta unghiul $\gamma_1$din E_1

(8) $\quad \gamma_1 = \text{arc sin}\,\dfrac{R}{e_1} = \text{arcsin}\,\dfrac{R}{Rs_1} = arcsin\dfrac{1}{s_1}$

şi, pe de altă parte

(9) $\quad \gamma_1 = \dfrac{\pi}{2} - (\alpha_{i1} - \varepsilon_1)$ din care rezultă $\Rightarrow$

(10) $\quad \alpha_{i1} = \dfrac{\pi}{2} - \gamma_1 + \varepsilon_1 = \dfrac{\pi}{2} + \varepsilon_1 - arcsin\dfrac{1}{s_1}$

Din triunghiul dreptunghic OE_2W_{i2} cu unghiul drept în W_{i2} rezulta unghiul $\gamma_2$din E_2

(11) $\quad \gamma_2 = \text{arc sin}\,\dfrac{R}{e_2} = \text{arcsin}\,\dfrac{R}{Rs_2} = \text{arcsin}\,\dfrac{1}{s_2}$

şi, pe de altă parte

(12) $\quad \gamma_2 = \dfrac{\pi}{2} - (\alpha_{i2} - \varepsilon_2)$ din care rezultă $\Rightarrow$

(13) $\quad \alpha_{i2} = (\dfrac{\pi}{2} - \gamma_2) + \varepsilon_2 = \dfrac{\pi}{2} + \varepsilon_2 - arcsin\dfrac{1}{s_2}$

Pentru determinarea punctului de intersecție I(x_I, y_I), se soluționeaza sistemul de două ecuații algebrice de gradul I cu cele două necunoscute $x = x_I$ şi $y = y_I$, format de ecuațiile (4) şi (6) în care se întroduc valorile unghiurilor din relațiile (9) şi (12).

$$(14)\quad y - R.\sin\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon_1 - arcsin\frac{1}{s_1}\right) =$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon_2 - arcsin\frac{1}{s_2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon_1 - arcsin\frac{1}{s_1}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon_2 - arcsin\frac{1}{s_2}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon_1 - arcsin\frac{1}{s_1}\right)}\left[x - R.\cos\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon_1 - arcsin\frac{1}{s_1}\right)\right] \quad \Box$$

$$y - R\left[sin\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon_1\right)\cos\left(arcsin\frac{1}{s_1}\right) - cos\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon_1\right)\sin\left(arcsin\frac{1}{s_1}\right)\right] =$$

$$= \frac{\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon_2\right)\cos\left(arcsin\frac{1}{s_2}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon_2\right)\sin\left(arcsin\frac{1}{s_2}\right)\right] - \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon_1\right)\cos\left(arcsin\frac{1}{s_1}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon_1\right)\sin\left(arcsin\frac{1}{s_1}\right)\right.}{\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon_2\right)\cos\left(arcsin\frac{1}{s_2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon_2\right)\sin\left(arcsin\frac{1}{s_2}\right)\right] - \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon_1\right)\cos\left(arcsin\frac{1}{s_1}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon_1\right)\sin\left(arcsin\frac{1}{s_1}\right)\right]}$$

$$* \left[x - R.\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon_1\right)\cos\left(arcsin\frac{1}{s_1}\right) + sin\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon_1\right)\sin\left(arcsin\frac{1}{s_1}\right)\right]\right] \quad \Box$$

$$y - R\left[\cos\varepsilon_1\frac{\sqrt{s_1^2-1}}{s_1} - \sin\varepsilon_1\frac{1}{s_1}\right] = \frac{\left[\cos\varepsilon_2\frac{\sqrt{s_2^2-1}}{s_2} + \sin\varepsilon_2.\frac{1}{s_2}\right] - \left[\cos\varepsilon_1\frac{\sqrt{s_1^2-1}}{s_1} + \sin\varepsilon_1\frac{1}{s_1}\right]}{-\sin\varepsilon_2\frac{\sqrt{s_2^2-1}}{s_2} + \cos\varepsilon_2\frac{1}{s_2}\Big] - \left[-\sin\varepsilon_1\frac{\sqrt{s_1^2-1}}{s_1} + \cos\varepsilon_1\frac{1}{s_1}\right]} *$$

$$* \left[x - R.\left[-\sin\varepsilon_1.\frac{\sqrt{s_1^2-1}}{s_1} + \cos\varepsilon_1\frac{1}{s_1}\right]\right] \quad \Box$$

$$y - \frac{R}{s_1}\left(\cos\varepsilon_1 - sin\varepsilon_1\sqrt{s_1^2-1}\right) = \frac{s_1\left(cos\varepsilon_2\sqrt{s_2^2-1} + \sin\varepsilon_2\right) - s_2\left(cos\varepsilon_1\sqrt{s_1^2-1} + \sin\varepsilon_1\right)}{s_1\left(-sin\varepsilon_2\sqrt{s_2^2-1} + \cos\varepsilon_2\right) - s_2\left(-sin\varepsilon_1\sqrt{s_1^2-1} + \cos\varepsilon_1\right)} *$$

$$* x - \frac{R}{s_1}\left(\cos\varepsilon_1 - sin\varepsilon_1\sqrt{s_1^2-1}\right) \Box$$

$$\frac{y - \frac{R}{s_1}\left(\cos\varepsilon_1 - sin\varepsilon_1\sqrt{s_1^2-1}\right)}{x - \frac{R}{s_1}\left(\cos\varepsilon_1 - sin\varepsilon_1\sqrt{s_1^2-1}\right)} = \frac{s_1\left(cos\varepsilon_2\sqrt{s_2^2-1} + \sin\varepsilon_2\right) - s_2\left(cos\varepsilon_1\sqrt{s_1^2-1} + \sin\varepsilon_1\right)}{s_1\left(\cos\varepsilon_2 - sin\varepsilon_2\sqrt{s_2^2-1}\right) - s_2\left(\cos\varepsilon_1 - sin\varepsilon_1\sqrt{s_1^2-1}\right)}$$

Rezultă următorul sistem de ecuații algebrice cu două necunoscute, din care se pot obține coordonatele x şi y ale punctului de intersecție I (x, y)

$$(15)\quad \begin{cases} \dfrac{y - e1.\sin\varepsilon1}{x - e_1.cos\varepsilon_1} = \dfrac{e_2\,sin\varepsilon_2 - e_1\,sin\varepsilon_1}{e_2\,cos\varepsilon_2 - e_1\,cos\varepsilon_1} \\ \dfrac{y - \frac{R}{s_1}\left(\cos\varepsilon_1 - sin\varepsilon_1\sqrt{s_1^2-1}\right)}{x - \frac{R}{s_1}\left(\cos\varepsilon_1 - sin\varepsilon_1\sqrt{s_1^2-1}\right)} = \dfrac{s_1\left(cos\varepsilon_2\sqrt{s_2^2-1} + \sin\varepsilon_2\right) - s_2\left(cos\varepsilon_1\sqrt{s_1^2-1} + \sin\varepsilon_1\right)}{s_1\left(\cos\varepsilon_2 - sin\varepsilon_2\sqrt{s_2^2-1}\right) - s_2\left(\cos\varepsilon_1 - sin\varepsilon_1\sqrt{s_1^2-1}\right)} \end{cases}$$

$$(16)\quad \begin{cases} y = \dfrac{e_2\,sin\varepsilon_2 - e_1\,sin\varepsilon_1}{e_2\,cos\varepsilon_2 - e_1\,cos\varepsilon_1}\left(x - e_1.cos\varepsilon_1\right) + e_1.\sin\varepsilon_1 \\ y = \dfrac{s_1\left(cos\varepsilon_2\sqrt{s_2^2-1} + \sin\varepsilon_2\right) - s_2\left(cos\varepsilon_1\sqrt{s_1^2-1} + \sin\varepsilon_1\right)}{s_1\left(\cos\varepsilon_2 - sin\varepsilon_2\sqrt{s_2^2-1}\right) - s_2\left(\cos\varepsilon_1 - sin\varepsilon_1\sqrt{s_1^2-1}\right)}\left[x - \frac{R}{s_1}\left(\cos\varepsilon_1 - sin\varepsilon_1\sqrt{s_1^2-1}\right)\right] + \frac{R}{s_1}\left(\cos\varepsilon_1 - sin\varepsilon_1\sqrt{s_1^2-1}\right) \end{cases}$$

Prin scaderea acestora, se elimină necunoscuta y şi rezultă o singură ecuație cu o singură necunoscută x

$$(17)\quad -\frac{e_2\,sin\varepsilon_2 - e_1\,sin\varepsilon_1}{e_2\,cos\varepsilon_2 - e_1\,cos\varepsilon_1}\left(x - e_1.cos\varepsilon_1\right) - e_1.\sin\varepsilon_1 + \frac{s_1\left(cos\varepsilon_2\sqrt{s_2^2-1} + \sin\varepsilon_2\right) - s_2\left(cos\varepsilon_1\sqrt{s_1^2-1} + \sin\varepsilon_1\right)}{s_1\left(\cos\varepsilon_2 - sin\varepsilon_2\sqrt{s_2^2-1}\right) - s_2\left(\cos\varepsilon_1 - sin\varepsilon_1\sqrt{s_1^2-1}\right)}\left[x - \frac{R}{s_1}\left(\cos\varepsilon_1 - sin\varepsilon_1\sqrt{s_1^2-1}\right)\right] + \frac{R}{s_1}\left(\cos\varepsilon_1 - sin\varepsilon_1\sqrt{s_1^2-1}\right) = 0$$

sau

$$(18)\quad x\left[\frac{s_1\left(cos\varepsilon_2\sqrt{s_2^2-1} + \sin\varepsilon_2\right) - s_2\left(cos\varepsilon_1\sqrt{s_1^2-1} + \sin\varepsilon_1\right)}{s_1\left(\cos\varepsilon_2 - sin\varepsilon_2\sqrt{s_2^2-1}\right) - s_2\left(\cos\varepsilon_1 - sin\varepsilon_1\sqrt{s_1^2-1}\right)} - \frac{e_2\,sin\varepsilon_2 - e_1\,sin\varepsilon_1}{e_2\,cos\varepsilon_2 - e_1\,cos\varepsilon_1}\right] = \frac{s_1\left(cos\varepsilon_2\sqrt{s_2^2-1} + \sin\varepsilon_2\right) - s_2\left(cos\varepsilon_1\sqrt{s_1^2-1} + \sin\varepsilon_1\right)}{s_1\left(\cos\varepsilon_2 - sin\varepsilon_2\sqrt{s_2^2-1}\right) - s_2\left(\cos\varepsilon_1 - sin\varepsilon_1\sqrt{s_1^2-1}\right)}\frac{R}{s_1}\left(\cos\varepsilon_1 - sin\varepsilon_1\sqrt{s_1^2-1}\right) - \frac{R}{s_1}\left(\cos\varepsilon_1 - sin\varepsilon_1\sqrt{s_1^2-1}\right) - e_1.\sin\varepsilon_1\frac{e_2\,sin\varepsilon_2 - e_1\,sin\varepsilon_1}{e_2\,cos\varepsilon_2 - e_1\,cos\varepsilon_1}$$

Din care rezultă expresia abscisei x,

$$(19)\quad x=\frac{\frac{s_1(cos\varepsilon_2\sqrt{s_2^2-1}+\sin\varepsilon_2)-s_2(cos\varepsilon_1\sqrt{s_1^2-1}+\sin\varepsilon_1)}{s_1(\cos\varepsilon_2-sin\varepsilon_2\sqrt{s_2^2-1})-s_2(\cos\varepsilon_1-sin\varepsilon_1\sqrt{s_1^2-1})}\frac{R}{s_1}\left(\cos\varepsilon_1-sin\varepsilon_1\sqrt{s_1^2-1}\right)-\frac{R}{s_1}\left(\cos\varepsilon_1-sin\varepsilon_1\sqrt{s_1^2-1}\right)-e_1.\sin\varepsilon_1\frac{e_2\, sin\varepsilon_2-e_1\, sin\varepsilon_1}{e_2\, cos\varepsilon_2-e_1\, cos\varepsilon_1}}{\frac{s_1(cos\varepsilon_2\sqrt{s_2^2-1}+\sin\varepsilon_2)-s_2(cos\varepsilon_1\sqrt{s_1^2-1}+\sin\varepsilon_1)}{s_1(\cos\varepsilon_2-sin\varepsilon_2\sqrt{s_2^2-1})-s_2(\cos\varepsilon_1-sin\varepsilon_1\sqrt{s_1^2-1})}-\frac{e_2\, sin\varepsilon_2-e_1\, sin\varepsilon_1}{e_2\, cos\varepsilon_2-e_1\, cos\varepsilon_1}}=$$

$$\frac{\frac{R}{s_1}\left(\cos\varepsilon_1-sin\varepsilon_1\sqrt{s_1^2-1}\right)\left(\frac{s_1(cos\varepsilon_2\sqrt{s_2^2-1}+\sin\varepsilon_2)-s_2(cos\varepsilon_1\sqrt{s_1^2-1}+\sin\varepsilon_1)}{s_1(\cos\varepsilon_2-sin\varepsilon_2\sqrt{s_2^2-1})-s_2(\cos\varepsilon_1-sin\varepsilon_1\sqrt{s_1^2-1})}-1\right)-e_1.\sin\varepsilon_1\frac{e_2\, sin\varepsilon_2-e_1\, sin\varepsilon_1}{e_2\, cos\varepsilon_2-e_1\, cos\varepsilon_1}}{\frac{s_1(cos\varepsilon_2\sqrt{s_2^2-1}+\sin\varepsilon_2)-s_2(cos\varepsilon_1\sqrt{s_1^2-1}+\sin\varepsilon_1)}{s_1(\cos\varepsilon_2-sin\varepsilon_2\sqrt{s_2^2-1})-s_2(\cos\varepsilon_1-sin\varepsilon_1\sqrt{s_1^2-1})}-\frac{e_2\, sin\varepsilon_2-e_1\, sin\varepsilon_1}{e_2\, cos\varepsilon_2-e_1\, cos\varepsilon_1}}$$

Apoi, prin înlocuirea valorii lui x în prima ecuație a sistemului (16), rezultă valoarea ordonatei y a lui I(x, y). Astfel, coordonatele punctului comun de intersecție au fost determinate.

Pentru valorile adoptate în figura 2

$$(20)\quad \begin{cases} R = 1 :\ E_i = S_i(s_i;\ \varepsilon_i) \\ E_1(\ e_1 = s_1 = 1{,}4;\ \varepsilon_1 = \frac{\pi}{12}) \\ E_2(e_2 = s_2 = 1{,}5;\ \varepsilon_2 = \pi) \end{cases}$$

au rezultat coordonatele punctului de intersecție

$$(21)\quad \mathrm{I(x,\ y)}\begin{cases} x = 0{,}0230782 \\ y = 0{,}193487 \end{cases}$$

Dacă se consideră coordonatele carteziene ale excentrelor E_i, şi anume

$$(22)\quad \begin{cases} E_1\ (x_1 = cos\varepsilon_1;\ y_1 = sin\varepsilon_1) \\ E_2\ (x_2 = cos\varepsilon_2;\ y_2 = sin\varepsilon_2) \end{cases} \text{ şi } \begin{cases} s_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \\ s_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \end{cases},$$

atunci relațiile anterior deduse vor avea un aspect mai prietenesc

$$(19')\quad x = \frac{\frac{R}{s_1}\left(x_1-y_1\sqrt{s_1^2-1}\right)\left(\frac{s_1\left(x_2\sqrt{s_2^2-1}+y_2\right)-s_2\left(x_1\sqrt{s_1^2-1}+y_1\right)}{s_1\left(x_2-y_2\sqrt{s_2^2-1}\right)-s_2\left(x_1-y_1\sqrt{s_1^2-1}\right)}-1\right)-e_1.y_1\frac{e_2\,y_2-e_1\,y_1}{e_2\,x_2-e_1x_1}}{\frac{s_1\left(x_2\sqrt{s_2^2-1}+y_2\right)-s_2\left(x_1\sqrt{s_1^2-1}+y_1\right)}{s_1\left(x_2-y_2\sqrt{s_2^2-1}\right)-s_2\left(x_1-y_1\sqrt{s_1^2-1}\right)}-\frac{e_2\,y_2-e_1\,y_1}{e_2\,x_2-e_1\,x_1}}$$

Dând factor comun pe R în relația (19') se observă că, odată deduse coordonatele pentru cercul trigonometric/unitate (R = 1) prin amplificare cu R se obțin coordonatele pe cercul de raza oarecare R. Rezultă

$$(23)\quad x = R\,\frac{\frac{x_1-y_1\sqrt{s_1^2-1}}{s_1}\left(\frac{s_1\left(x_2\sqrt{s_2^2-1}+y_2\right)-s_2\left(x_1\sqrt{s_1^2-1}+y_1\right)}{s_1\left(x_2-y_2\sqrt{s_2^2-1}\right)-s_2\left(x_1-y_1\sqrt{s_1^2-1}\right)}-1\right)-s_1.y_1\frac{s_2\,y_2-s_1\,y_1}{s_2\,x_2-s_1x_1}}{\frac{s_1\left(x_2\sqrt{s_2^2-1}+y_2\right)-s_2\left(x_1\sqrt{s_1^2-1}+y_1\right)}{s_1\left(x_2-y_2\sqrt{s_2^2-1}\right)-s_2\left(x_1-y_1\sqrt{s_1^2-1}\right)}-\frac{s_2\,y_2-s_1\,y_1}{s_2\,x_2-s_1\,x_1}} = R.\boldsymbol{X_1}$$

Ordonata y a punctului de intersecție I(x, y) va fi

$$(24)\quad y = \frac{e_2\,sin\varepsilon_2-e_1\,sin\varepsilon_1}{e_2\,cos\varepsilon_2-e_1\,cos\varepsilon_1}\,(x - e_1.cos\varepsilon_1) + \mathrm{e}_1.\sin\varepsilon_1 = \frac{s_2\,sin\varepsilon_2-s_1\,sin\varepsilon_1}{s_2\,cos\varepsilon_2-es_1\,cos\varepsilon_1}\,(x - Rs_1.cos\varepsilon_1) + \mathrm{Rs}_1.\sin\varepsilon_1 =$$

$$(25)\quad y = R\left[\frac{s_2\,sin\varepsilon_2-s_1\,sin\varepsilon_1}{s_2\,cos\varepsilon_2-es_1\,cos\varepsilon_1}\,(\boldsymbol{X_1} - s_1.cos\varepsilon_1) + \mathrm{s}_1.\sin\varepsilon_1\right]$$

3. CONCLUZII

Este evident că importantă este demonstrarea teoremei liniilor concurente [1], constând în demonstrarea faptului că diagonalele între ele, liniile punctelor de contact diametral opuse între ele, cât şi ansamblul acestora sunt concurente în I(x,y).

Lucrarea prezentă nu face altceva decât să determine coordonatele acestui punct comun de intersecție uzând de cunoștintele matematice ale funcțiilor supermatematice circulare excentrice de excentru exterior cercui unitate.

Evident că soluționarea determinării coordonatelor punctului I se putea face şi direct, pe baza coordonatelor a doua vârfuri, diametral opuse ale poligomnului cu un numar par de varfuri (E_1 si E_2), utilizând o ecuație ca cea din relația (3). Determinarea coordonatelor a două puncte de tangență, duse din punctele anteriaore E_1 şi E_2 la cerc, prezintă însă unele dificultăți, deoarece nu se cunoaşte direcția m a tangentelor şi, evident, nici punctele de tangența P_0, care, tocmai, trebuie determinate. De aceea, este necesar să se rezolve sistemul de ecuații neliniare ale cercului şi ale unei drepte, din care rezultă două puncte de intersecție şi, punând condiția ca aceste coordonatele să fie aceleaşi, se obțin coordonatele punctelor de tangentă. Dintr-un punct exterior cercului se pot duce două tangente la cerc. Deci mai e necesar să se determine care din cele două puncte este cel căutat.

Toate aceste dificultăți din **matematica centrică** (**MC**) au fost eliminate în **matematica excentrică** (**ME**), aşa cum s-a văzut, prin considerarea punctelor $\mathbf{W_{i\,1,2}}$ şi, respectiv, $\mathbf{W_{f\,1,2}}$.

Mai mult, teorema liniilor concurente a lui **Florentin Smarandache**, din **MC**, se poate extinde şi în domeniul **ME** sub forma :

"*Fiind date un numar 2n par de puncte, denumite excentre, $E_i(e_i, \varepsilon_i)$, care sunt, totodată, vârfurile unui poligon circumscris cercului C(R,O), adică cu $e_i > R$, liniile $\overline{E_iE_j}$ care unesc două dintre excentrele diametral opuse, liniile punctele de început* ***W_i***, *ca şi liniile punctelor* ***W_j*** *de sfârşit ale domeniilor de existența a* ***FSM-CE*** *care sunt, totodată, şi punctele de contact dintre poligon şi cerc* **,** *considerate din excentrele $E_i(e_i, \varepsilon_i)$, sunt toate /(cele 2n segmente) concurente într-un unic punct I(x, y), de abscisă x dată de relația (19) sau (23), iar ordonata va fi dată de relația (25)*"

Totodată, apare posibilitatea stabilirii unei ecuții, inexistente în literatura matematică, a unei drepte, dusă dintr-un punct exterior cercului, tangentă la un cerc.

4. ECUAȚIA UNEI DREPTE TANGENTĂ LA UN CERC DUSĂ DINTR-UN PUNC EXTERIOR CERCULUI

Sunt cunoscute, în literatura matematică, următoarele ecuații ale dreptelor în plan:

1) Care trece prin două puncte $P_1(x_1, y_1)$ şi $P_2(x_2, y_2)$, sau care este determinată de cele două puncte:

(4.1) $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ sau $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$;

2) De coeficient unghiular m = tanα, sau de orientare de unghi α, care trece prin P_0 (x_0, y_0):

(4.2) $y - y_0 = m(x - x_0)$; sau $y - y_0 = tan\alpha\,(x - x_0)$;

3) De coeficient unghiular m şi ordonată la origine n:

(4.3) $y = mx + n$, sau $y = x.tan\alpha + n$;

4) Cu tăieturile a şi b pe axele de coordonate:

(4.4) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, b □ ∞ □ x = a □ D ‖Oy; a □ ∞ □ y = b □ D ‖Ox .

5) Ecuațiile parametrice ale dreptei care trece prin punctul P_0 (x_0, y_0) şi face un unghi α cu axa Ox:

(4.5) $\begin{cases} x = x_0 + r.cos\alpha \\ y = y_0 + r.sin\alpha \end{cases}$;

6) Ecuația generală a dreptei:

(4.6) Ax + By + C = 0, □ m = tanα = $-\frac{A}{B}$; b = $-\frac{C}{A}$; C = 0 □ O(0,0) ⊂ D; B = 0 □ D ‖Oy, A = 0 □ D ‖Ox.

Ecuația generala a dreptei poate fi redusă la forma normală prin înmulțirea cu **factorul de normare** $\mathbf{M} = \pm \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{A^2+B^2}}$, semnul lui **M** fiind opus semnului lui **C.**

Între coeficienții A, B şi C şi parametrii α şi p există următoarele relații

$cos\alpha = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} = A.\boldsymbol{M}$; sinα $=\pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} = A.\boldsymbol{M}$; p $= \pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} = C.\boldsymbol{M}$

7) Ecuația normală a dreptei (Hesse):

(4.7) x.cosα + y.sinα - p = 0,

în care, unghiul α este unghiul direcției normalei din O(0, 0) la dreapta D şi p este lungimea acestei normale, sau distanța de la originea O(0, 0) la dreaptă.

8) Ecuația tangentei la cercul C(O,R) în **$P_0(x_0, y_0) \subset$ C(O,R),** obținută prin dedublarea ecuațiilor cercului:

(4.8.1) $x_0.x+y_0.y – R = 0$,

(4.8.2) $x_0.x+y_0.y + a(x_0 +x) + b(y_0 +y) + c = 0$,

(4.8.3) $\vec{r}.\vec{r}_1 - R^2 = 0$, sau $\vec{r}.\vec{r}_1 = R^2$ ecuațiile vectoriale ale tangentei în $P_1 \subset$ C(O, R), la cercul centrat în originea O(0, 0), în care $\vec{r}_1$ este vectorul de poziție din O(0,0) al punctului de tangentă al cercului P_1, iar $P(\vec{r})$ este punctul curent al dreptei tangente.

Ca urmare a tangenței, drepta D şi vectorul $\vec{r}_1$ sunt perpendiculari, astfel că produsul scalar $\vec{r}_1 . \overrightarrow{P_1P} = 0$.

9) Ecuația tangentei de direcție m la cercul cu centrul în origine C(O,R):

(4.9.1) y = mx ± R $\sqrt{1+m^2}$ şi

(4.9.2) y = m(x - a) + b ± R $\sqrt{1+m^2}$, la cercul de raza R cu centrul în punctul M (a, b).

10) Ecuația în coordonate polare a dreptei ce nu trece prin pol este

(4.10) $\rho = \frac{p}{\cos(\varphi-\alpha)}$, în care p este lungimea (raza polară sau modulul) polarei normală pe D din pol, a cărei direcție este de orientare/unghi α, fața de axa polară, iar φ este unhiul polar al razei polare ρ a punctului curent M al dreptei D.

Fie cercul **C**(O,R), şi dreapta D(**E**, /C), prin care, în paranteză, s-a specificat faptul că dreapta **D** conține punctul **E** (E ⊂ **D**), sau că e dusă prin punctul **E (e_x, e_y)**, denumit şi excentru şi este tangentă la **C.** Excentrul **E** are coordonatele polare **E(e, ε)**. Între acestea şi coordonatele carteziene există relațiile

(4.11) **E** $\begin{cases} e_x = e.cos\varepsilon \\ e_y = e.sin\varepsilon \end{cases}$

Din **ME** se cunoaşte că **FSM-CE** există şi sunt continue, în cazul e > R, dar în domeniul

(4.12) $\theta \in [\theta_i, \theta_f]$,

în care, dreapta excentrică **d ≡ D** din **E** intersectează cercul C(O,R) pentru θ_i şi θ_f, care sunt, deci, tocmai unghiurile pentru care semidreapta pozitivă a drepotei **d^+** este tangenta la cerc în punctele **W_i** şi, respectiv, **W_f**, aşa cum s-a mai afirmat anterior.

Dacă unghiurile θ_i şi θ_f sunt cunoscute, atunci prin cazul 9) se poate determina ecuația tangentei de direcție $m_{i,f} = \tan\theta_{i,f}$ la cercul cu centrul în origine C(O,R). Ele sunt [6], aşa cum se poate observa şi în figura 2

(4.13) $\theta_{i,f} = \varepsilon + \pi \mp \gamma$,

în care γ este unghiul format de tangenta **d^+** din **E** la C(O, R) cu raza vectoare $\vec{\boldsymbol{e}}$ a excentrului **E**. şi are expresia

(4.14) $\gamma = arcsin\frac{R}{e}$.

În acest fel rezultă

(4.15) $\theta_{i,f} = \varepsilon + \pi \mp arcsin\frac{R}{e}$,

şi ecuația dreptei din **E** tangentă la C(O,R) dată de ecuația

(4.16) $y = mx \pm R\sqrt{1+m^2}$,
în care

(4.17) $m = \tan\theta_{i,f} = \tan(\varepsilon + \pi \mp arcsin\frac{R}{e}) = \tan[(\varepsilon+\pi) \mp (arcsin\frac{R}{e})\,] = \frac{tan(\varepsilon+\pi) \mp \tan(arcsin\frac{R}{e})}{1 \pm tan(\varepsilon+\pi).\tan(arcsin\frac{R}{e})}$

Se ştie că

(4.18) $\tan(\arcsin\frac{R}{e}) = \frac{\frac{R}{e}}{\sqrt{1-\left(\frac{R}{e}\right)^2}} = \frac{R}{\sqrt{e^2-R^2}}$, iar $\tan(\varepsilon + \pi) = \tan\varepsilon$, astfel că (4.17) devine

(4.17') $m = \frac{tan\varepsilon \mp \frac{R}{\sqrt{e^2-R^2}}}{1 \pm tan\varepsilon.\frac{R}{\sqrt{e^2-R^2}}} = \frac{tan\varepsilon.\sqrt{e^2-R^2} \mp R}{\sqrt{e^2-R^2} \pm R.tan\varepsilon}$,

iar

(4.18) $m^2 = \left(\frac{tan\varepsilon.\sqrt{e^2-R^2} \mp R}{\sqrt{e^2-R^2} \pm R.tan\varepsilon}\right)^2$, care înlocuite în (4.16) dau o expresie a ecuației tangentei căutate.

(4.19) $y = \frac{tan\varepsilon.\sqrt{e^2-R^2} \mp R}{\sqrt{e^2-R^2} \pm R.tan\varepsilon}\, x \pm R\sqrt{1+\left(\frac{tan\varepsilon.\sqrt{e^2-R^2} \mp R}{\sqrt{e^2-R^2} \pm R.tan\varepsilon}\right)^2}$

Cunoscându-se unghiul γ dat de (14), pot fi determinate unghiurile $\alpha_{i,f}$ la centrul O, de poziție pe cerc a punctelor de tangentă $\mathbf{W_{i,f}}$ şi, totodată, punctele inițial şi final al domeniului de existență al **FSM-CE** corespunzătoare punctului $\mathbf{E_1}$ din figura 2, care sunt

(4.20) $\alpha_{i,f} = \left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) \pm \varepsilon = (\frac{\pi}{2} \pm \varepsilon) - arcsin\frac{R}{e}$

Coordonatele carteziene ale punctelor $\mathbf{W_{i,f}}$ vor fi

(4.21) $\mathbf{W_{i,f}}$
$$\begin{cases} x_{i,f} = R.\cos\alpha_{i,f} = R.\cos\left[\left(\frac{\pi}{2} \pm \varepsilon\right) - arcsin\frac{R}{e}\right] = \\ = R[cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \varepsilon\right).\cos\left(arcsin\frac{R}{e}\right) + sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \varepsilon\right).\sin\left(arcsin\frac{R}{e}\right)] = \\ = R\left[\mp sin\varepsilon.\sqrt{1-\left(\frac{R}{e}\right)^2} + \frac{R}{e}.cos\varepsilon\right] = \frac{R}{e}(R.cos\varepsilon \mp sin\varepsilon.\sqrt{e^2-R^2}) \\ y_{i,f} = R.sin\alpha_{i,f} = Rsin\left[\left(\frac{\pi}{2} \pm \varepsilon\right) - arcsin\frac{R}{e}\right] = \\ = R\left[sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \varepsilon\right).\cos\left(arcsin\frac{R}{e}\right) - cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \varepsilon\right).\sin\left(arcsin\frac{R}{e}\right)\right] = \\ = R\left[cos\varepsilon.\sqrt{1-\left(\frac{R}{e}\right)^2} \pm \frac{R}{e}\, sin\varepsilon\right] = \frac{R}{e}(cos\varepsilon\sqrt{e^2-R^2} \pm R\, sin\varepsilon) \end{cases}$$

Astfel că, ecuațiile celor două tangente la cerc, în punctele $\mathbf{W_{i,f}}$, conform ecuației (4.8.1), după divizarea ecuației cu $\frac{R}{e}$, vor fi

(4.22) $(R.cos\varepsilon \mp sin\varepsilon.\sqrt{e^2-R^2})\, x + (cos\varepsilon\sqrt{e^2-R^2} \pm R\, sin\varepsilon)\, y - e = 0$

Comparând cele doua ecuații obținute, (4.22) şi (4.19), se poate constata că prima, (4.22), este cu mult mai simplă şi, în consecință, mai facil de utilizat.

Ea este suficient de simplă pentru a putea fi adăugată celorlalte ecuații clasice cunoscute în literatură, pentru a umple un gol altfel existent în literatura matematică.

Cunoscându-se coordonatele punctului $E(e_x, e_y)$ – date inițial– şi fiind determinate coordonatele carteziene ale punctelor $\mathbf{W_{i,f}}$ prin utilizarea ecuatiei dreptei dată prin doua puncte (4.1), rezultă

(4.23) $y - R.sin\varepsilon = \frac{\frac{R}{e}(cos\varepsilon\sqrt{e^2-R^2} \pm R\, sin\varepsilon) - R.sin\varepsilon}{\frac{R}{e}(R.cos\varepsilon \mp sin\varepsilon.\sqrt{e^2-R^2}) - R.cos\varepsilon}\,(x - R.cos\varepsilon)$ sau

(4.24) $y - R.sin\varepsilon = \frac{(cos\varepsilon\sqrt{e^2-R^2} \pm R\, sin\varepsilon) - e.sin\varepsilon}{(R.cos\varepsilon \mp sin\varepsilon.\sqrt{e^2-R^2}) - e.cos\varepsilon}(x - R.cos\varepsilon)$

ecuații care sunt puțin mai complicate decât ecuațiile (4.22).

5. BIBLIOGRAFIE

1	F. Smarandache,	Eight Solved and Eight Open Problems in Elementary Geometry,	arXiv.org.
2	F. Smarandache,	*Problèmes avec et sans… problèmes!*, pp. 49 & 54-60	Somipress, Fés, Morocoo, 1983.
3	M. Khoshnevisan	Smarandache's Concurrent Lines Theorem	Neuro Intelligence Center, Australia
4	M.E.Şelariu	SUPERMATEMATICA. Fundamente. Vol.I	Editura "Politehnica" Timişoara, 2007, 267 pagini
5	M.E.Şelariu	SUPERMATEMATICA. Fundamente. Vol.II	Editura "Politehnica" Timişoara, 2011, 401 pagini
6	M.E.Şelariu	FUNCŢII CIRCULARE EXCENTRICE ŞI EXTENSIA LOR	Bul. Şt. Şi tehnic al IP"TV" Timişoara, Seria MECANICA, Tom25(39), Fasc.1-1980, pag.191

www.supermathematica.com

www.supermatematica.ro

www.eng.upt.ro/~mselariu