Teorema de congruencia de Zeller: Aplicaciones

Congruence theorem of Zeller: Applications

Wenceslao Segura González

e-mail: wenceslaoseguragonzalez@yahoo.es

Sinopsis. Formulamos y demostramos un teorema que nos permite establecer la función analítica de una aplicación entre número enteros que sea muy cercanamente lineal. El teorema tiene un amplio uso en cálculos calendaristas, en especial en la conversión de fechas de un calendario a otro. En la segunda parte de esta investigación aplicamos el teorema a varios casos particulares que aparecen en la teoría de los calendarios.

Abstract. We formulate and prove a theorem that allows us to establish the analytical function of an application between integer numbers that is closely linear. The theorem is widely used in Calendarists calculations, especially in converting dates from one calendar to another. In the second part of this research we apply the theorem to several specific cases that appear in the theory of the calendars.

I.- TEOREMA DE CONGRUENCIA DE ZELLER

1.1 Introducción

En teoría de calendarios nos enfrentamos de continuo con el problema de establecer expresiones analíticas de correspondencias entre números enteros que tienen la propiedad de ser muy cercanamente lineales. Por ejemplo, la correspondencia entre el año de un ciclo de cuatro años del calendario juliano y el número de días transcurridos es lineal, salvo la divergencia que se produce con los años bisiestos que hace aumentar en uno el número de días trasncurridos (ver tabla 1). La conveniencia de establecer una relación analítica de una aplicación numérica como la anterior, es principalmente para su uso en programas informáticos, eludiendo de esta forma las tablas que se usaron en el pasado.

Christian Zeller en una serie de trabajos publicados a final del siglo XIX hizo uso de este tipo de relaciones para el cálculo del día semanal de una fecha y para la obtención de la fecha de la Pascua. [1] [2] [3] [4] Tanto Zeller como otros después de él, [5] obtuvieron estas relaciones por tanteo. Nosotros hemos dado forma al teorema, que hemos llamado de Zeller en honor a Christian Zeller y lo hemos usado sistemáticamente en cálculos calendaristas. [6]

1.2 Teorema de congruencia de Zeller

Sean dos conjuntos de números enteros $X=\{x\}$ e $Y=\{y\}$, entre los que se establece una aplicación sobreyectiva $f: X \to Y$. Si existe un número fraccionario A tal que se cumpla que el rango estadístico del conjunto $\{y - Ax\}$ es menor que la unidad, es decir

$$\max(y-Ax)-\min(y-Ax)<1 \tag{1}$$

para todo par de valores *x, y*, entonces es válida la relación

$$y=\operatorname{int}(Ax-B) \tag{2}$$

donde B es otro número fraccionario definido por

$$B = \max\left(y - Ax\right). \tag{3}$$

Si la aplicación f es biyectiva entonces se cumple la relación inversa

$$x = \operatorname{int}\left(\frac{y - B'}{A}\right) \tag{4}$$

donde

$$B' = \min\left(y - Ax\right).$$

Como los números B y B' son fraccionarios con el mismo denominador que A, se puede poner

$$A = \frac{p}{r}; \qquad B = \frac{q}{r}; \qquad B' = -\frac{s}{r}$$

a los números enteros p, q, r, s les llamaremos coeficientes de congruencia, que permiten expresar (2) y (4) de la forma

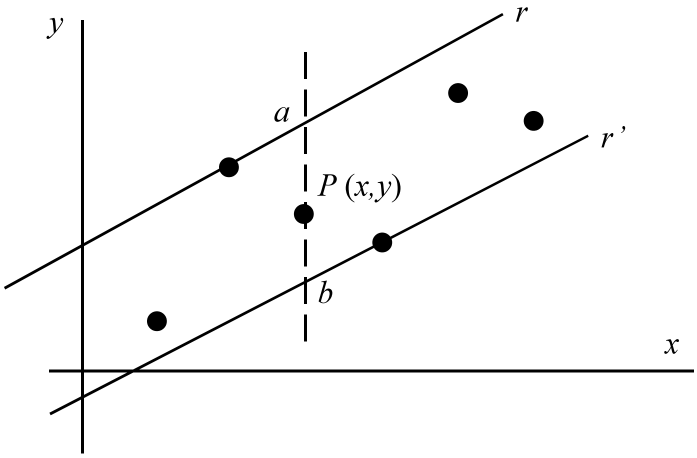
$$y = \operatorname{int}\left(\frac{px + q}{r}\right); \qquad x = \operatorname{int}\left(\frac{ry + s}{p}\right).$$

Nótese que los coeficientes de congruencia no son únicos, igual ocurre con las fracciones A, B y B'.

1.3 Demostración del teorema de congruencia de Zeller

Representemos en unos ejes coordenadas todos los puntos (x,y). Imaginemos la familia de rectas que teniendo pendiente A pasan por algún punto (x,y). Elijamos dos de esas rectas r y r', caracterizadas por tener la mayor y menor ordenada en el origen de entre todas las rectas. Entonces todos los puntos (x,y) se encuentran en o entre las rectas r y r', no existiendo ningún punto fuera de la banda formada por ambas rectas. Bajos estas condiciones, las ordenadas en el origen de las rectas r y r' son los parámetros que hemos llamado B y B'.

Consideremos un punto determinado $P(x,y)$. Tal como se muestra en la gráfica 1, a y b son las ordenadas de los puntos de corte de la recta perpendicular que pasa por el punto P con las rectas r y r' respectivamente.



Gráfica 1.- **Representación gráfica de los puntos (x,y).**

Como se cumpe la relación (1) podemos poner

$$B - B' = a - b < 1$$

por la definición de las rectas r y r'

$$a \geq y \geq b.$$

Combinando las dos últimas expresiones se llega a

$$a < y + 1$$

o bien

$$y+1>a\geq y$$

o lo que es lo mismo

$$y=\mathrm{int}(a)$$

pero al estar el punto (x,a) en la recta r deberá cumplirse

$$a=Ax+B$$

quedando

$$y=\mathrm{int}(Ax+B),$$

el razonamiento se puede repetir para cualquier punto P, con lo que el resultado toma carácter general.

La demostración del teorema inverso es similar. Partimos de las ecuaciones de las rectas r y r' pero convirtiendo ahora la x en la variable dependiente

$$x=\frac{y-B}{A};\qquad y=\frac{x-B'}{A}.$$

Nótese que ahora la recta r' es la que tiene mayor ordenada en el origen. La condición (1) se puede poner de la forma

$$\max\left(x-\frac{y}{A}\right)-\min\left(x-\frac{y}{A}\right)<1$$

donde $x-y/A$ es la ordenada en el origen de las rectas en el nuevo sistema de coordenadas. Ahora basta repetir el razonamiento anterior, para obtener el resultado

$$x=\mathrm{int}\left(\frac{y-B'}{A}\right).$$

1.4 Relación entre los coeficientes de congruencia

Al considetar los coeficientes de congruencia lineal y usar la relación (1) se encuentra que debe cumplirse

$$\frac{q}{r}-\left(-\frac{s}{r}\right)<1\ \Rightarrow\ q+s<r,$$

como todos los coeficientes son números enteros debe existir un número positivo e tal que

$$q+s=r-e$$

cumpliéndose

$$r>e\geq 1$$

$r-e$ tiene que ser siempre positio por ser B mayor que B', o lo que es lo mismo $q+s$ mayor que cero. Queremos demostrar que entre los varios valores posibles de A que cumplen la relación (1), existe al menos uno que hace tomar a e el valor 1.

Siempre podemos formar rectas r y r' que pasando por puntos (x,y) sean perpendiculares al eje horizontal y que contengan en su interior a todos los restantes puntos. La pendiente de esta recta no cumple la relación (1). A partir de aquí podemos obtener nuevos pares de rectas r y r' de pendientes paulatinamente menores. La diferencia entre los parámetros B y B' que le son asociados a las nuevas pendientes, será en un principio mayor que 1. A medida que vayamos disminuyendo la pendiente disminuirá la diferenia entre B y B'. Como q y s son números enteros, la diminución que vaya experimentando su suma, como consecuencia de la disminución de la diferencia entre B y B', deberá ser saltos de una unidad. Si seguimos eligiendo nuevos valores de A según el criterio anterior, llegará el momento en que el valor elegido de la pendiente cumpla la condición (1), a este primer valor de la pendiente que cumpla la condición, le corresponde valores de q y s cuya suma será el mayor valor posible compatible con (1), es decir cumplirá

$$q+s=r-1. \tag{5}$$

1.5 Generalizaciones del teorema de congruencia de Zeller

-*Relación de congruencia con excepciones*. Puede darse el caso que la relación entre los conjuntos X e Y cumpla la condición (1) para todos los pares de números excepto para uno (o varios) de ellos. Por ejemplo, supongamos que no se cumple cuando $x=a$. Podemos en este caso readaptar la relación de congruencia, de tal forma que el punto $x = a$ se encuentre excluido de la relación, esto se logra mediante

$$y = \operatorname{int}(Ax + B)\bar{\delta}(x - a) + C\,\delta(x - a)$$

donde A y B son los coeficientes calculados al igual que antes pero sin tener el cuenta el valor $x = a$, mientras que C es el valor de y cuando $x = a$, $\bar{\delta}(x - a)$ es 1 para $x \neq a$ y 0 para $x = a$, finalmente $\delta(x - a)$ es 1 si $x = a$ y 0 en caso contrario.

-*Relación de congruencia poligonal de igual pendiente*. Hay situaciones en que no se cumple la condición (1) para todos los pares de valores (x,y) a consecuencia de que a partir de cierto valor $x = a$ los puntos (x,y) han sufrido un desplazamiento de su ordenada de valor C, entonces hacemos uso de

$$y = \operatorname{int}\left[Ax + B + C\varepsilon(x - a)\right]$$

donde $\varepsilon(x - a)$ es la función salto, o sea es igual a 1 si $x \geq a$ y 0 si $x < a$.

Fácilmente se puede adaptar el teorema a situaciones más complejas.

1.6 Cálculo de los coeficientes *A*, *B* y *B'*

Como la relación entre los conjuntos X e Y es muy aproximadamente lineal, deberá ocurrir que el coeficiente A será muy cercano a la pendiente de la recta de regresión lineal a que es definida por

$$a = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma^2_x}$$

donde σ_{xy} es la covarianza y σ^2_x es la varianza. Para buscar posibles valores de A se obtienen números fraccionarios muy cercano a a, lo que se logra con

$$A = \frac{1}{n}\operatorname{cint}(an) \tag{6}$$

donde cint es la función redondedo y n es un número natural. Con (6) se van obteniendo fracciones con denominadores 1, 2, 3.... y todas ellas muy cercanos al valor a. El siguiente paso consiste en calcular el conjunto de números $\{y - Ax\}$ para cada posible valor de A y comprobar cual de ellos cumple la relación (1) que exige el teorema. Finalmente los valores B y B' se calculan por (3) y (4).

II.- APLICACIONES

2.1 Días transcurridos en un ciclo del calendario juliano

El calendario juliano está compuesto de ciclos de cuatro años, tres de ellos con una duración de 365 días y un año con una duración extra de 366 días. Vamos a suponer que el primer año del ciclo es el que viene después de un año bisiesto. Entonces el número de días trasncurridos al final de cada año del ciclo es dado por la tabla 1.

Y	1	2	3	4
D	365	730	1095	1461
$Y - \frac{1461}{4}D$	-0.25	-0.5	-0.75	0

Tabla 1.- **Días transcurridos (*D*) al final de cada año (*Y*) del ciclo de cuatro años del calendario juliano.**

La pendiente de la recta de ajuste es $a = 365.3$, entonces usando (6) encontramos como posibles candidatos para el parámetro A

$$365;\quad \frac{731}{2};\quad \frac{1096}{3};\quad \frac{1461}{4};....$$

como se ve en la última fila de la tabla 1 la fracción $1461/4$ es la primera que cumple el requisito exigido por (1) y por tanto es el valor de A. De la misma tabla 1 se encuentra $B=0$ y $B'=-0.75=-3/4$, entonces las relaciones de congruencia buscadas son

$$D=\mathrm{int}\left(\frac{1461Y}{4}\right);\quad Y=\mathrm{int}\left(\frac{4D+3}{1461}\right).$$

Los coeficientes de congruencia son

$$p=1461;\qquad q=0;\qquad s=3;\qquad r=4$$

que cumplen la relación (5).

2.2 Días transcurridos desde el comienzo de año del calendario auxiliar

Para simplificar los cálculos, tanto en el calendario juliano como en el gregoriano, se usa un calendario auxiliar que comienza con el 1 de marzo (al que se le llama mes 0) y finaliza con el 28 de febrero (mes 11). De tal forma que el día bisiesto es colocado a final de año, evitándose además los problemas que genera la corta duración de febrero. Como la lógica matemática exige, los meses del calendario auxiliar comienzan con el día 0 y no con el 1.

Si M y D representan el mes y el día del año y M' y D' el mes y el día en el correspondiente calendario auxiliar, serán válidas las relaciones

$$M'=(M+9)\bmod 12;\qquad D'=D-1$$

donde la función módulo da el resto de la división.

Los días transcurridos d en el año del calendario auxiliar desde el comienzo del año (ya sea el juliano o el gregoriano) es igual a los días transcurridos en el mes D' más los días transcurridos en los meses anteriores del mismo año D'_Y

$$d = D' + D'_Y .$$

Los días transcurridos desde comienzo del año hasta el inicio del mes D'_Y están en la tabla 2.

M'	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
D'_Y	0	31	61	92	122	153	184	214	245	275	306	337
$D'_Y-\frac{153}{5}M'$	0	0.4	-0.2	0.2	-0.4	0	0.4	-0.2	0.2	0.4	-0.4	0.4

Tabla 2.- **Días transcurridos (D'_Y) al inicio de cada mes (M') del calendario auxiliar.**

El coeficiente de la recta de ajuste es $a=30.601393$, por tanto las primeras posibles fracciones que pueden ser el coeficiente A son

$$\frac{30}{1};\ \frac{61}{2};\ \frac{92}{3};\ \frac{122}{4};\ \frac{153}{5};\ \frac{184}{6};\ \ldots\ldots$$

el primero de ellos que cumple la condición (1) es $153/5$ como se aprecia en la tabla 2. De la misma tabla se encuentra que $B=0.4=2/5$ y $B'=-0.4=-2/5$ por tanto la relaciones de congruencia buscadas son por (2) y (4)

$$D'_Y=\mathrm{int}\left(\frac{153M'+2}{5}\right);\qquad M'=\mathrm{int}\left(\frac{5D'_Y+2}{153}\right).$$

y los parámetros de congruencia son

$$p=153;\quad q=2;\quad s=2;\quad r=5,$$

que cumplen la relación (5).

Entonces el número de días tanscurridos desde el comienzo del año del calendario auxiliar hasta una fecha dada es

$$d=D'+\mathrm{int}\left(\frac{153M'+2}{5}\right).$$

2.3 Días de diferencia entre el calendario juliano y el gregoriano

El calendario juliano tiene un ciclo de cuatro años. Tres de ellos con una duración de 365 días y uno bisiesto con 366 días. El calendario gregoriano sigue este mismo ritmo pero haciendo una corrección, de tal forma que cada 400 años se eliminan tres bisiestos. Concretamente dejan de ser bisiestos aquellos años centenarios (terminados en 00) cuyas cifras centenarias no sean divisibles entre 4. Así el año 1700 al ser divisible entre 4 fue bisiesto en el calendario juliano, pero al ser un año centenario y al no ser 17 divisible entre 4 deja de ser bisiesto en el calendario gregoriano.

Vamos a suponer que el ciclo de 400 años del calendario gregoriano empieza el 1 de marzo del año centenario en que no se elimina el bisiesto. Por tanto, el primer ciclo del calendario gregoriano, que fue implantado a final del siglo XVI, comenzó el 1 de marzo de año 1600. El segundo ciclo comenzó después de 400 años, es decir el 1 de marzo del año 2000.

Al haber más días bisiestos en el calendario juliano que en el gregoriano resulta que las fechas en uno y otro calendario de un mismo día se van separando. Además cuando se hizo la reforma gregoriana se eliminaron 10 días del calendario, diferencia que va aumentando con el tiempo. A la diferencia entre las fechas de un mismo día en cada uno de los calendarios los vamos a representar por *g*. Por ejemplo, el 1 de agosto de 2000 del calendario juliano fue el 14 de agosto de 2000 del calendario gregoriano, entonces para esa fecha $g = 13$.

En la tabla 3 se dan los valores de *g* en función de los siglos *S*, donde hay que tener presente que los siglos, al igual que los años, comienzan el día 1 de marzo.

S	17	18	19	20	21	22	23	24
g	10	11	12	13	13	14	15	16
$g-\frac{3}{4}S$	-2.75	-2.5	-2.25	-2	-2.75	-2.5	-2.25	-2

Tabla 3.- **Días de diferencia *g* entre las fechas del mismo día en el calendario gregoriano y el juliano según los siglos de nuestra era, *S*.**

La pendiente de la recta de regresión es $a = 0.8095$ de donde se obtienen los posibles candidatos al parámetro A

$$\frac{1}{1};\quad \frac{2}{2};\quad \frac{2}{3};\quad \frac{3}{4};\quad \frac{4}{5};\ldots.$$

Tal como se ve en la tabla 3, $A = 3/4$ mientras que $B = -8/4$ y $B' = -11/4$, por tanto las relaciones de congruencia directa e inversa, son por (2) y (4)

$$g = \operatorname{int}\left(\frac{3S-8}{4}\right); \qquad S = \operatorname{int}\left(\frac{4g+11}{3}\right)$$

y los parámetros de congruencia

$$q = -8; \quad s = 11; \quad r = 4$$

que cumplen la relación (5).

2.4 Años embolísmicos transcurridos en un ciclo lunar del calendario judío

El calendario judío se basa en el ciclo de Meton de 19 años, en los que hay 7 años embolísmicos o de 13 meses. Los años del ciclo que son embolísmicos son los que están en las posiciones 3, 6, 8, 11, 14, 17 y 19. Los embolísmicos E transcurridos al final del año *Y* del ciclo de 19 años vienen dados por la tabla 4.

Y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
E	0	0	1	1	1	2	2	3	3	3	4	4	4	5	5	5	6	6	7

Tabla 4.- **Años embolísmicos (*E*) transcurridos al final del año *Y* del ciclo de Meton.**

La pendiente de la recta de ajuste es $a = 0.37017544$ de donde podemos obtener los posibles coeficientes A por el método dado en el epígrafe 1.6. Se encuentra que la fracción $A = 7/19$ cumple con el requisito (1) como se muestra en la tabla 4, de donde también se deduce el valor de $B = 0.05263 = 1/19$. Nótese que no existe *B'* porque la aplicación no es biyectiva, o sea no hay relación de congruencia inversa.

La relación buscada que nos da los años embolísmicos transcurridos hasta final de cualquier año del ciclo de Meton es

$$E = \text{int}\left(\frac{7Y+1}{19}\right)$$

y los coeficientes de congruencia

$$p = 7; \quad q = 1; \quad r = 19.$$

2.5 Años embolísmicos transcurridos en un ciclo del calendario iraní

El calendario aritmético persa o iraní tiene un ciclo de 2820 años, 683 de los cuales son abundantes o de 366 días. El periodo de 2820 años está dividido en 21 ciclos de 128 años al que le sigue un único ciclo de 132 años. Cada ciclo de 128 años está dividido a su vez en 1 subciclo de 29 años y en 3 subciclos de 33 años. Mientras que el ciclo de 132 años tiene un subciclo de 29 años, 3 de 33 años y 1 de 37 años.

En cada subciclo son bisiestos los años que ocupan las posiciones 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33 y 37 (estas dos últimas posiciones si las hubiera). Queremos determinar una expresión analítica que nos de los años abundantes E que han transcurridos al final del año Y de cada periodo de 2820 años. Para ello fijémenos en un ciclo de 128 años en el que son abundantes los años de la tabla 5.

Y	5	9	13	17	21	25	29	34	38	42	46	50	54	58	62	67
E	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Y	71	75	79	83	87	91	95	100	104	108	112	116	120	124	128	
E	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	

Tabla 5.- **Años *Y* que son abundantes y embolismos *E* acumulados al final de cada uno de esos años.**

Por lo métodos ya expuestos se encuentra que la relación de congruencia es

$$E = \text{int}\left(\frac{31Y}{128}\right).$$

Pero esta relación no se aplica a un ciclo de 132 años, mejor dicho no se cumple para el último año de ese ciclo que a su vez es el último año del periodo de 2820 años. Estamos por tanto en lo expuesto en el segundo apartado del epígrafe 1.5. Entonces la relación de congruencia que es válida para un periodo de 2820 años es

$$E = \text{int}\left[\frac{31Y}{128} + \delta(Y - 2820)\right]. \tag{7}$$

Para el siguiente ciclo de 2820 años seguirá siendo válida (7) pero ambas relaciones se encuentran desplazadas entre sí. Para tener en cuenta esta circunstancia calculamos el número de periodos de 2820 años que han transcurrido hasta el final del año Y

$$N = \text{int}\left(\frac{Y}{2820}\right),$$

entonces la relación de congruencia válida para cualquier año del calendario iraní es

$$E = \text{int}\left[\frac{31(Y - 2820N)}{128} + \delta(Y - 2820N - 2820)\right] + 683N \tag{8}$$

obsérvese que 683 son los bisiestos que hay cada 2820 años. Debemos advertir que (8) es válida siempre y cuando si el año $Y = 1$ es el año de comienzo de un ciclo de 2820 años.

2.6 Conclusiones

Hemos demostrado un teorema que nos da relaciones analíticas de las aplicaciones entre conjuntos de números enteros que son cercanamente lineales, al que hemos llamado teorema de congruencia de Zeller, en honor a Christian Zeller (1824-1899).

Aunque este teorema es un resultado muy simple tiene una considerable potencia matemática cuando se aplica a cálculos calendaristas. En efecto, los distintos calendarios existentes tratan de conservar la mayor regularidad posible, esto significa que buscan la linealidad en la relaciones entre sus parámetros. Y es aquí donde surge la aplicación del teorema de congruencia de Zeller, que sistemáticamente aplicado permite la obtención de expresiones analíticas que facilitan los cálculos calendaristas y en especial los referentes a conversión de fechas de un calendario a otro.

2.7 Referencias

[1] Zeller, Christian: «Die Grundaufgaben der Kalenderrechnung auf neue und vereinfachte Weise gelöst», *Württembergische Vierteljahrshefte für Landesgeschichte* **V** (1882) 313–314.

[2] Zeller, Christian: «Problema duplex Calendarii fundamentale», *Bulletin de la Société Mathématique de France* **11** (1883) 59–61.

[3] Zeller, Christian: «Kalender-Formeln», *Mathematisch-naturwissenschaftliche Mitteilungen des mathematisch-naturwissenschaftlichen Vereins in Württemberg* **1-1** (1885) 54–58.

[4] Zeller, Christian: «Kalender-Formeln», *Acta Mathematica* **9** (1886) 131–136.

[5] Richards, E. G.: *Mapping Time*, Oxford, 1998, pp. 292-298.

[6] Segura González, Wenceslao: *Hemerología. La ciencia de los calendarios*, Acento 2000, 2006, pp. 161-197 y pp. 254-258.