

Resolution of Single Photon and Electron Interference Enigma

Masahito Morimoto¹

Fitel Photonics Laboratory of Furukawa Electric Co., Ltd.

6, Yawata-Kaigandori, Ichihara, Chiba Japan

E-mail: morimoto@ch.furukawa.co.jp

Here we review the single photon and electron interference experiments by using an optical Mach-Zehnder and a 2-slits (2-pinholes) electron interferometer. According to Maxwell equations, the electromagnetic fields of the interference using the Mach-Zehnder waveguides can be described by a localized optical wave in the waveguide and non-localized vector and scalar potentials. In a quantum mechanical description of the interference, quantum-superposition state has been introduced. However, the single photon interference can also be calculated under the assumption that the states are expressed as the localized optical wave (a photon) and the non-localized potentials. Similarly, Maxwell equations can be divided into a localized electron beam and the non-localized potentials in case of the 2-slits (2-pinholes) single electron interferometer. From the analysis results, the non-localized potentials can be identified as an indefinite metric vector with zero probability amplitude and correspond to gauge fields introduced by gauge transformation of the second kind. The results show we can express quantum states without quantum-superposition state, which leads to an improved understanding of the uncertainty principle and resolution of paradox of reduction of the wave packet. The concept provides not only exactly the same calculation and experimental results using quantum-superposition state, but also can eliminate zero-point energy and cause spontaneous symmetry breaking without complexity. The results insist that Quantum theory is a kind of statistical physics.

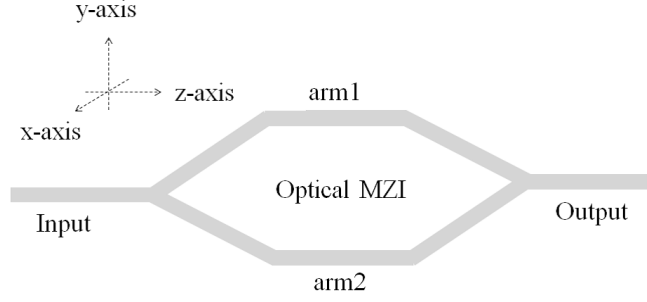


FIG. 1. Schematic view of MZI.

I. CLASSICAL ELECTROMAGNETIC FIELD IN WAVEGUIDES - POTENTIALS AND PHOTON

Figure 1 shows schematic view of the Mach-Zehnder Interferometer (MZI) and coordinate system.

First we examine the input waveguide. Assume that an x-polarized optical wave propagates in z-direction with angular frequency ω and propagation constant β , the electric field \mathbf{E} of the optical wave is well confined in the input, e.g., the cross section profile of the electric field is expressed as Gaussian distribution.

Then, the electric field of the optical wave in the input can be expressed as follows.

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_x \cdot C_E \cdot \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w_0^2}\right) \cdot \cos(\omega t - \beta z) \quad (1)$$

Where, \mathbf{e}_x is unit vector parallel to the x-axis. C_E is an arbitrary constant of which squared is proportional to the field intensity. w_0 is the mode field radius of the optical wave. \mathbf{E} and \mathbf{B} are expressed by vector and scalar potentials as follows.

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} - \nabla \phi \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \end{aligned} \quad (2)$$

From (1) and (2), \mathbf{A} is expressed by introducing a vector function \mathbf{C} as follows.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= -\frac{1}{\omega} \mathbf{e}_x \cdot C_E \cdot \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w_0^2}\right) \cdot \sin(\omega t - \beta z) + \mathbf{C} \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{C} &= -\nabla \phi \end{aligned} \quad (3)$$

By taking \mathbf{C} as an irrotational vector function $\nabla \times \mathbf{C} = 0$ in order for \mathbf{B} to localize in the input, for example, \mathbf{C} and ϕ can be expressed by introducing an arbitrary scalar function λ as $\mathbf{C} = \nabla \lambda$ and $\nabla \left(\frac{\partial}{\partial t} \lambda + \phi\right) = 0$ respectively.

Then \mathbf{B} is expressed as follows

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \\ &= \frac{\beta}{\omega} \mathbf{e}_y \cdot C_E \cdot \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w_0^2}\right) \cdot \cos(\omega t - \beta z) \\ &\quad - \frac{2y}{\omega \cdot w_0^2} \mathbf{e}_z \cdot C_E \cdot \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w_0^2}\right) \cdot \sin(\omega t - \beta z)\end{aligned}\quad (4)$$

Therefore, \mathbf{E} and \mathbf{B} are localized in the input waveguide. In contrast, the vector and scalar potentials, which can not be observed alone, are not necessarily localized. The above localized form (1) is one example, other forms can be employed as will be described in the next section.

II. POTENTIALS AND ELECTRON

Figure 2 shows schematic view of a typical setup for the 2-slits (2-pinholes) single electron interference experiment.¹

An electron is launched from the electron source and propagates in right direction. According to the traditional explanation, the propagating electron passes through the both pinholes. However, we can obtain the interference pattern even if the electron passes through one of the two pinholes as described below.

The propagating electron can be identified as an electron beam whose space current density is $j = Nqv$, where N is the number of electron per unit volume, q is the electron charge and v is the electron velocity. When the radius of the electron beam is w_0 , the current I can be expressed as $I = \pi w_0^2 j$. According to Biot-Savart Law, the propagation generates magnetic fields and potentials around the propagation path.

Assume that the electron propagates parallel to z-axis at a constant velocity. Then, the vector potentials around the propagation path are expressed as^{1,2}

$$\begin{aligned}A_x &= A_y = 0 \\ A_z &= \frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2} \ln \frac{1}{r}\end{aligned}\quad (5)$$

where $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, ϵ_0 is the permittivity and c is the speed of light.

Therefore the vector potential clearly passes through not only the pinhole the electron passes through but also the opposite pinhole.

However, we examine the following Maxwell equations to clarify the discussion.

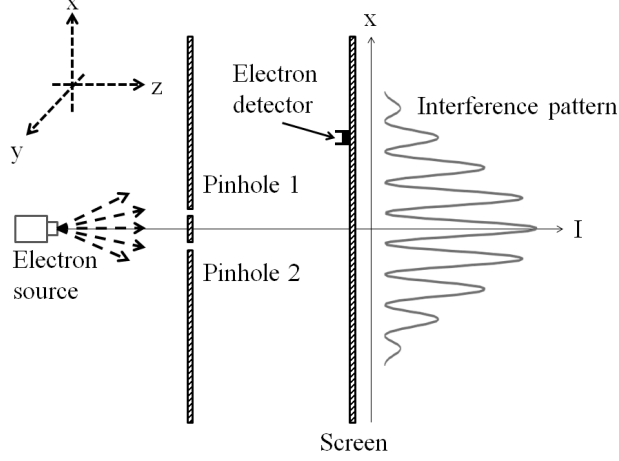


FIG. 2. Schematic view of a typical setup for the 2-slits (2-pinholes) single electron interference experiment.

$$\begin{aligned}
\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{A} - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t}\right) &= -\mu_0 \mathbf{i} \\
\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \phi + \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t}\right) &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0}
\end{aligned} \tag{6}$$

where μ_0 is the permeability and ρ is the electric charge density.

Here, we divide the potentials \mathbf{A} , ϕ into localized \mathbf{A}_1 , ϕ_1 and non-localized \mathbf{A}_{nl} , ϕ_{nl} . Then the equations (6) can be divided into following equations

$$\begin{aligned}
\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{A}_1 - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A}_1 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi_1}{\partial t}\right) &= -\mu_0 \mathbf{i} \\
\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \phi_1 + \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \cdot \mathbf{A}_1 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi_1}{\partial t}\right) &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0}
\end{aligned} \tag{7}$$

and

$$\begin{aligned}
\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{A}_{\text{nl}} - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A}_{\text{nl}} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi_{\text{nl}}}{\partial t}\right) &= 0 \\
\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \phi_{\text{nl}} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \cdot \mathbf{A}_{\text{nl}} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi_{\text{nl}}}{\partial t}\right) &= 0
\end{aligned} \tag{8}$$

If the electron beam can be expressed by localized waveform, just as an example, Gaussian with angular frequency ω and propagation constant β

$$\mathbf{i} \propto \mathbf{e}_z \cdot q \cdot C_q \cdot \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w_0^2}\right) \cdot \cos(\omega t - \beta z) \tag{9}$$

where \mathbf{e}_z is unit vector parallel to the z-axis. C_q is arbitrary constant which is proportional to the number of electrons, then the localized potential can be expressed as a function which produces (9).

This functional form is determined by \mathbf{i} . Note that (9) is just one example. Arbitrary forms which satisfy (7) can be employed for \mathbf{A}_1 , ϕ_1 and \mathbf{i} . When $\mathbf{i} = 0$ and $\rho = 0$, the equations (7) can express the localized electromagnetic fields as described in the previous section.

In contrast, the equations (8) are independent of (7). Therefore the non-localized potentials can eternally populate the whole of space as waves defined by Maxwell equations, which propagate at the speed of light.

(8) expresses the gauge invariance of the localized electro magnetic field or electron flows and the non-localized potentials are well-known gauge field introduced by gauge transformation of the second kind.

III. INTERFERENCE OF SINGLE PHOTON

In a quantum mechanical description, the photon interference is calculated by introducing the electric field operator $\hat{E} = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{a}_1 \exp(i\theta) + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{a}_2$ and the number state $|n\rangle$ as follows.³ Where $\hat{a}_{1\text{or}2}$ is the electric field operator in arm 1 or 2 respectively, θ is the phase difference.

$$\langle \hat{I} \rangle \propto \frac{1}{2} \langle n | \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 | n \rangle + \frac{1}{2} \langle n | \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 | n \rangle + \cos \theta \langle n | \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 | n \rangle \quad (10)$$

Where $\langle \hat{I} \rangle$ is expectation value of the field intensity which is proportional to photon number. $\hat{a}_{1\text{or}2}$ and $\hat{a}_{1\text{or}2}^\dagger$ are defined as $\hat{a} = \frac{\hat{a}_1 + \hat{a}_2}{\sqrt{2}}$ and $\hat{a}^\dagger = \frac{\hat{a}_1^\dagger + \hat{a}_2^\dagger}{\sqrt{2}}$ by using the electric field operators \hat{a} and \hat{a}^\dagger at the input with $\langle n | \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 | n \rangle = \langle n | \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 | n \rangle = \langle n | \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 | n \rangle = \frac{1}{2}n$. When photon number is one ($n = 1$), i.e., single photon, the above expectation value is calculated to be $\langle \hat{I} \rangle \propto \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos \theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \theta$. In this traditional treatment, the electric field operators are obtained from quantization of (6) by using Coulomb gauge under assumption of $\mathbf{i} = 0$ and $\rho = 0$.

However we can make a different description by using the concept of the above non-localized potentials as follows.

Photon number will be proportional to C_E squared in equation (3). In contrast, the non-localized potentials \mathbf{C} and ϕ or (8) are not necessarily proportional to photon number. When there are a large number of photons, it is reasonable to suppose that half of photons

pass through arm 1 and the rest pass through arm 2 by law of large numbers because the probability of "which arm does each photon select" should be $\frac{1}{2}$. This concept corresponds to mixed state instead of quantum-superposition state whose probabilities are statistical and fundamental sense respectively.

However when there are only a few photons, which correspond to the localized vector potential expressed as first term of equation (3) is comparable with the non-localized potentials expressed as the rest terms or (8), we should consider greater probability that the localized vector potential which represent a photon selects and passes through arm 1 and the non-localized potentials pass through arm 2. This description can also be applied to (7) and (8).

According to this description, the operator $\hat{E} = \hat{a}_1 \exp(i\theta) + \hat{a}_2$ with $\langle 1|\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1|1\rangle = 1$ and $\langle 1|\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2|1\rangle \neq 1$ instead of $\hat{E} = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{a}_1 \exp(i\theta) + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{a}_2$ should be introduced because the photon passes through only arm 1. Note that \hat{a}_1 is the electric field operator in arm 1 obtained from the traditional quantization as mentioned above using (7) instead of (6). In contrast, \hat{a}_2 is a purely-formal operator in arm 2 obtained from the traditional quantization using (8) instead of (6), which is not the electric field operator but provides some quantity related to the non-localized potentials in arm 2.

Therefore the expectation value can be expressed as follows.

$$\begin{aligned}
\langle \hat{I} \rangle &\propto \langle 1|\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1|1\rangle + \langle 1|\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2|1\rangle \\
&\quad + e^{i\theta} \langle 1|\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2|1\rangle + e^{-i\theta} \langle 1|\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1|1\rangle \\
&= 1 + \langle 1|\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2|1\rangle \\
&\quad + e^{i\theta} \langle 1|\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2|1\rangle + e^{-i\theta} \langle 1|\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1|1\rangle
\end{aligned} \tag{11}$$

If $\langle 1|\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2|1\rangle = -\frac{1}{2}$ and $\langle 1|\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2|1\rangle = \langle 1|\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1|1\rangle^* = \pm\frac{1}{4}e^{i\phi}$, the same interference $\langle \hat{I} \rangle \propto \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \cos(\theta + \phi)$ can be observed. Where * means complex conjugate.

The above calculation is based on Heisenberg picture. We can calculate the same interference based on Schrödinger picture. In Schrödinger picture, the interference can be calculated by using the output state $|1\rangle + |\zeta\rangle$ and the electric field operator $\hat{E} = \hat{a}$ at the output. Because the operator is fixed in Schrödinger picture, the operator is obtained from the traditional quantization using (6). Where $|1\rangle$ and $|\zeta\rangle$ represent the states of a photon passes through arm 1 and non-localized potentials passes through arm 2 respectively. Because nothing is observed in arm 2, we should recognize $\langle \zeta|\zeta\rangle = 0$.

In this picture, the expectation value can be expressed as follows.

$$\begin{aligned}\langle \hat{I} \rangle &\propto (e^{i\theta} \langle 1| + \langle \zeta|) \hat{a}^\dagger \hat{a} (e^{-i\theta} |1\rangle + |\zeta\rangle) \\ &= 1 + \langle \zeta | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \zeta \rangle + e^{i\theta} \langle 1 | \zeta \rangle + e^{-i\theta} \langle \zeta | 1 \rangle\end{aligned}\quad (12)$$

Where $\hat{a}^\dagger \hat{a} |1\rangle = |1\rangle$ and $\langle 1 | \hat{a}^\dagger \hat{a} = \langle 1|$ are used.

If $\langle \zeta | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \zeta \rangle = -\frac{1}{2}$ and $\langle 1 | \zeta \rangle = \langle \zeta | 1 \rangle^* = \pm \frac{1}{4} e^{i\phi}$, the same interference $\langle \hat{I} \rangle \propto \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \cos(\theta + \phi)$ can be observed. From this expression, we can recognize that $|\zeta\rangle$ has the phase difference for the interference without substantial photons.

Note that ϕ is determined by the phase difference of the MZI arms. When there is no phase difference between the MZI arms, ϕ is determined from the normalization of probability, i.e., $(\langle 1| + \langle \zeta|) (|1\rangle + |\zeta\rangle) = \langle 1|1\rangle + \langle 1|\zeta\rangle + \langle \zeta|1\rangle + \langle \zeta|\zeta\rangle = 1 + \langle 1|\zeta\rangle + \langle \zeta|1\rangle + \langle \zeta|\zeta\rangle = 1$, and $\langle \zeta|\zeta\rangle = 0$ then $\langle 1|\zeta\rangle = -\langle \zeta|1\rangle$. Therefore $\phi = \frac{\pi}{2} + N\pi$. Where N is integer.

In the above mathematical formula for the interference by Schrödinger picture, there is no mathematical solution in usual Hilbert space. Therefore the non-localized potentials, which can not be observed alone, must be regarded as a vector in indefinite metric Hilbert space. The same kind of unobservable vector has been introduced as "ghost" in quantum field theory.⁴⁻⁷ We also call $|\zeta\rangle$ "ghost" in this report though this "ghost" has a different definition. The traditional "ghost" was introduced mathematically as an auxiliary field for consistent with relativistic covariance of the theory and had no effect on physical phenomena. However, the above "ghost" is a physical field which causes the interferences or is essential for the interferences instead of the mathematical auxiliary field.

From the equation (11) and (12), the non-localized potentials pass through arm 2 produce the single photon interference as if the photon passes through the both arms in cooperation with a photon field passes through arm 1.

The photon number should be proportional to C_E squared as can be seen in equation (3). However non-localized potentials \mathbf{C} and ϕ or (8), which express "ghost", are not proportional to it as mentioned above. Therefore, the interference effect will be drop off when there are a large number of photons. This will be the reason why quantum effects are hardly observed in macroscopic scale.

In a classical description, we can express the electric field of the interference formed by one side MZI arm, i.e., $\mathbf{E}_{\text{out}} = \frac{1}{2}\mathbf{E}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{E}_2$, as follows by using the potentials

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{\text{out}} &= -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}_1 - \nabla\phi_1 - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}_{\text{nl}} - \nabla\phi_{\text{nl}} \\
&= \mathbf{E}_1 - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}_{\text{nl}} - \nabla\phi_{\text{nl}}
\end{aligned} \tag{13}$$

If the non-localized potentials configure the following electric field, the interference by one side MZI arm can be produced in cooperation with a photon field passes through arm 1.

$$-\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}_{\text{nl}} - \nabla\phi_{\text{nl}} = \frac{1}{2}\mathbf{E}_2 - \frac{1}{2}\mathbf{E}_1 \tag{14}$$

where subscripts 1 and 2 stand for the MZI arm 1 and 2 respectively.

IV. INTERFERENCE OF SINGLE ELECTRON

In a quantum mechanical description, the 2-slits (pinholes) single electron interference is typically explained by the probability of finding the electron on the screen.¹

$$P_{12} = |\phi_1 + \phi_2|^2 \tag{15}$$

Where $\phi_1 = \langle x|1\rangle\langle 1|s\rangle$ and $\phi_2 = \langle x|2\rangle\langle 2|s\rangle$, which are composed of probability amplitudes $\langle 1_{\text{or}2}|s\rangle$: ”electron arrives at pinhole 1 or 2|electron leaves s (electron source)” and $\langle x|1_{\text{or}2}\rangle$: ”electron arrives at screen x |electron leaves pinhole 1 or 2”.

When either pinhole 1 or 2 is closed, the each and total probabilities are calculated to be $P_1 = |\phi_1|^2$, $P_2 = |\phi_2|^2$ and $P = P_1 + P_2 \neq P_{12}$. Therefore we must admit the electron passes through both pinholes at the same time despite an electron can not be split off, which forces us to introduces a concept of quantum-superposition states .

However we can examine the states of the localized electron propagation and non-localized potentials instead of the quantum-superposition state as mentioned above.

In such a case, the electron wave functions should be expressed as follows.

$$\begin{aligned}
\psi'_1 &= \psi_1 \cdot \exp \left[i\frac{q}{\hbar} \int_{s \rightarrow \text{Pinhole1} \rightarrow \text{screen}} (\phi_{\text{nl}} dt - \mathbf{A}_{\text{nl}} \cdot d\mathbf{x}) \right] \\
\psi'_2 &= \psi_2 \cdot \exp \left[i\frac{q}{\hbar} \int_{s \rightarrow \text{Pinhole2} \rightarrow \text{screen}} (\phi_{\text{nl}} dt - \mathbf{A}_{\text{nl}} \cdot d\mathbf{x}) \right]
\end{aligned} \tag{16}$$

where, ψ'_1 and ψ'_2 are the electron wave functions on the screen passing through pinhole 1 and 2 with the non-localized potentials respectively. ψ_1 and ψ_2 are the electron wave functions

heading to pinhole 1 and 2 at the electron source without the effects of the non-localized potentials. ϕ_{nl} and \mathbf{A}_{nl} include not only the non-localized potentials expressed as (8) but also the non-localized part of the potentials generated by localized potentials such as (3) and (5).

Then the probability of finding the electron on the screen by using these wave functions can be described as follows,

$$\begin{aligned} P_{12} &\propto |\psi'|^2 = |\psi'_1 + \psi'_2|^2 \\ &= |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 \\ &\quad - 2\text{Re} \left(\exp \left[i \frac{q}{\hbar} \oint_{s \rightarrow 1 \rightarrow \text{screen} \rightarrow 2 \rightarrow s} (\phi_{\text{nl}} dt - \mathbf{A}_{\text{nl}} \cdot d\mathbf{x}) \right] \psi_1^* \psi_2 \right) \end{aligned} \quad (17)$$

where 1 and 2 of the integration path denote pinhole 1 and 2 respectively. In case of single electron interference, we can find the electron at pinhole 1 without fail but not at pinhole 2, i.e., $|\psi_1|^2 = 1$ and $|\psi_2|^2 = 0$. Although $\int |\psi_{1\text{or}2}|^2 d\mathbf{V} = 1$ or 0 should be exact expression, we continue analysis with $|\psi_1|^2 = 1$ and $|\psi_2|^2 = 0$ for simplification.

When we introduce a phase difference θ between ψ_1 and ψ_2 , P_{12} expresses the interference as follows,

$$P_{12} \propto 1 - 2\text{Re} (\exp i [\gamma + \theta] \psi_1^* \psi_2) \quad (18)$$

where $\gamma = \frac{q}{\hbar} \oint_{s \rightarrow 1 \rightarrow \text{screen} \rightarrow 2 \rightarrow s} (\phi_{\text{nl}} dt - \mathbf{A}_{\text{nl}} \cdot d\mathbf{x})$.

Note that when θ is fixed, the interference can be observed on the screen as a function of γ , i.e., position on the screen. When γ is fixed, the interference can be observed on a fixed position of the screen as a function of θ .

However, the wave function ψ_2 must satisfy $\psi_1^* \psi_2 \neq 0$ and $|\psi_2|^2 = 0$.

Then we introduce the states "an electron passes through pinhole 1 with the non-localized potentials" as $e^{i\gamma_1} |\psi_1\rangle$ with $P_1 = \langle \psi_1 | \psi_1 \rangle = 1$ and "no electron passes through pinhole 2 with the non-localized potentials" as $e^{i\gamma_2} |\psi_2\rangle$ with $P_2 = \langle \psi_2 | \psi_2 \rangle = 0$. In these states, γ_1 , γ_2 and $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ correspond to the phase terms of (16) and (17).

After the example of single photon interference as described above,³ we introduce the charge operator $\mathbf{Q} \equiv \int d^3x j_0(x)$ defined by a conserved current $j_\mu = (q, \mathbf{i})$, i.e., $\partial^\mu j_\mu = \frac{\partial q}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{i} = 0$. The charge operator satisfies $\mathbf{Q} |\psi_1\rangle = q |\psi_1\rangle$, which means the electron state incoming from pinhole 1 is the eigenstate of \mathbf{Q} .^{8,9}

The interference can be calculated using the charge operator as follows.

$$\begin{aligned}
\langle I \rangle &= (e^{i(\theta-\gamma_1)} \langle \psi_1 | + e^{-i\gamma_2} \langle \psi_2 |) \mathbf{Q} (e^{-i(\theta-\gamma_1)} |\psi_1\rangle + e^{i\gamma_2} |\psi_2\rangle) \\
&= q + \langle \psi_2 | \mathbf{Q} | \psi_2 \rangle \\
&\quad + q e^{i(\theta-\gamma)} \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle + q e^{-i(\theta-\gamma)} \langle \psi_2 | \psi_1 \rangle
\end{aligned} \tag{19}$$

where $\langle I \rangle$ is the expectation value of charge intensity. If $\langle \psi_2 | \mathbf{Q} | \psi_2 \rangle = -\frac{1}{2}q$ and $\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \langle \psi_2 | \psi_1 \rangle^* = \pm \frac{1}{4} e^{i\delta}$, then the single electron interference $\langle I \rangle = q \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(\theta - \gamma + \delta) \right\}$ can be obtained.

The above discussion suggests that the non-localized potentials produce phase shift of the electron wave functions or electron states and will correspond to gauge fields introduced by gauge transformation of the second kind as can be seen from (16). Hence, we can recognize the state "no electron passes through pinhole 2 with the non-localized potentials" has the phase difference for the interference without electron charges.

In the above expression for $|\psi_2\rangle$, there is no mathematical solution in usual Hilbert space. Therefore the state of "no electron passes through pinhole 2 with the non-localized potentials" must also be regarded as a vector with zero probability amplitude in indefinite metric Hilbert space and we can express the quantum state of the interference without quantum-superposition state.

Note that the calculation using the superposition state of (17) is valid in case of mixed state whose probability is statistical sense.

V. DISCUSSION

A. uncertainty principle and the reduction of the wave packet

By the existence of the non-localized potentials, Heisenberg's uncertainty principle can be explained independently of measurements. In addition, the paradox of the reduction of the wave packet typified by "Schrödinger's cat" and "Einstein, Podolsky and Rosen (EPR)"^{10,11} can be solved, because the origins of both are quantum-superposition state.

Former results insist the states of arm 1 and 2 or pinhole 1 and 2 by Schrödinger picture are defined when the system is prepared expressed as a substantial single photon or electron and the non-localized potentials respectively and each state does not split off such as quantum-superposition state, which means there is no reduction of the wave packet.

”When the system is prepared” corresponds to immediately after the branching point of the optical MZI or the pinholes. Which arm or pinhole does the photon or electron select is unpredictable but after the selection, the state is fixed instead of quantum-superposition state. The concept of these states is identical with mixed states rather than pure states formed by quantum-superposition, which suggests there is no concept of quantum-superposition state. As for Heisenberg’s uncertainty principle, we should recognize it as trade-offs derived from Fourier transform non-related to measurement, which correspond to the canonical commutation relation.

B. zero-point energy

If we calculate the equation (12) under vacuum instead of single photon, $\langle \zeta | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \zeta \rangle = -\frac{1}{2}$ can eliminate zero-point energy as follows.

$$\begin{aligned}
& (\langle 0 | + \langle \zeta |) \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) (|0\rangle + |\zeta\rangle) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (\langle 0 | \zeta \rangle + \langle \zeta | 0 \rangle + \langle \zeta | \zeta \rangle) \\
&+ \langle 0 | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \zeta \rangle + \langle \zeta | \hat{a}^\dagger \hat{a} | 0 \rangle + \langle \zeta | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \zeta \rangle \\
&= \frac{1}{2} + \langle \zeta | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \zeta \rangle = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0
\end{aligned} \tag{20}$$

where $\hat{a}|0\rangle = (\langle 0 | \hat{a}^\dagger)^\dagger = 0$ and normalization of probability, i.e.,

$$\begin{aligned}
(\langle 0 | + \langle \zeta |) (|0\rangle + |\zeta\rangle) &= \langle 0 | 0 \rangle + \langle 0 | \zeta \rangle + \langle \zeta | 0 \rangle + \langle \zeta | \zeta \rangle \\
&= 1 + \langle 0 | \zeta \rangle + \langle \zeta | 0 \rangle + \langle \zeta | \zeta \rangle = 1
\end{aligned}$$

then $\langle 0 | \zeta \rangle + \langle \zeta | 0 \rangle + \langle \zeta | \zeta \rangle = 0$, are used.

C. spontaneous symmetry breaking

Traditional treatment of the spontaneous symmetry breaking, which explores the possibility of $\mathbf{Q}|0\rangle \neq 0$ or generally ” $|0\rangle$ is not an eigenstate of \mathbf{Q} ”, introduces an artificial intricate boson field such as Goldstone boson or Higgs boson.⁹ Where $|0\rangle$ is vacuum state.

However, the non-localized potentials eternally populate the whole of space as mentioned above and there are no electron at pinhole 2. Therefore the state of pinhole 2, $e^{i\gamma_2}|\psi_2\rangle$, can be identified as vacuum instead of $|0\rangle$. From the relation $\langle \psi_2 | \psi_2 \rangle = 0$ as described

above, if $e^{i\gamma_2}|\psi_2\rangle$ is an eigenstate of \mathbf{Q} , i.e., $\mathbf{Q}e^{i\gamma_2}|\psi_2\rangle = \alpha e^{i\gamma_2}|\psi_2\rangle$, then $\langle\psi_2|e^{-i\gamma_2}\mathbf{Q}e^{i\gamma_2}|\psi_2\rangle = \alpha\langle\psi_2|\psi_2\rangle = 0 \neq -\frac{1}{2}q$, where α is an eigenvalue. Hence the vacuum $e^{i\gamma_2}|\psi_2\rangle$ is not an eigenstate of \mathbf{Q} , which expresses the spontaneous symmetry breaking.

The traditional intricate bosons may correspond to the non-localized potentials.

VI. CONCLUSION

There are some unresolved paradoxes in quantum theory.

If we take advantage of the indefinite metric vectors as described in this report, the paradoxes can be removed. In addition, it can explain the uncertainty principle independently of measurements, eliminate zero-point energy and cause spontaneous symmetry breaking without complexity.

We should consistently introduce indefinite metric vectors because Maxwell equations are wave equations in Minkowski space. When we introduce state vectors in Minkowski space, indefinite metric vectors are absolutely required. The required vector should be recognized not only as an auxiliary field but also as a real physical field which is the root cause of single photon and electron interferences.

The results insist the vacuum space is filled with the non-localized potentials which can eternally exist as waves and correspond to gauge fields introduced by gauge transformation of the second kind.

This idea provides exactly the same calculation and experimental results by using quantum-superposition state because the phase difference between the photon or electron and the non-localized potentials provide the interferences as if the quantum-superposition state exists. In addition, the concept is based on an analogy from the expression of substantial localize electromagnetic fields or an electron flow and the non-localized potentials instead of curious quantum-superposition state that forces us to imagine a photon or an electron passes through the both arms or pinholes despite a photon or an electron can not be split off.

The superposition states are valid in case of mixed states whose probabilities are statistical sense. However, quantum-superposition state is not valid in case of pure state whose probability is fundamental sense. Therefore, there is no concept of quantum-superposition state in nature, which insists Quantum theory is a kind of statistical physics.

I hope that the results will be greatly debated and encourage a reconsideration of the para-

doxes.

REFERENCES

1. Feynman R. P., Leighton R. B. & Sands M. L. *The Feynman Lectures on Physics Vol.II, III* (Addison-Wesley, 1965).
2. Stratton J. A. *Electromagnetic Theory* (McGraw-Hill, 1941).
3. Loudon R. *The quantum theory of light*, 2nd ed. (Oxford University Press, 1983).
4. Dirac P. A. M. The physical interpretation of quantum mechanics, *Proc. Roy. Soc. London A* **180**, 1–39 (1942).
5. Pauli W. & Villars F. On the invariant regularization in relativistic quantum theory, *Rev. Mod. Phys* **21**, 434–444 (1949).
6. Gupta S. N. Quantum electrodynamics with auxiliary fields, *Proc. Phys. Soc. A* **66**, 129–138 (1953).
7. Lee T. D. & Wick G. C. Finite theory of quantum electrodynamics, *Phys. Rev. D* **2**, 1033–1048 (1970).
8. Karlson E. The eigenvalues of the charge operator, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* **230**, 382–389 (1955).
9. Itzykson C. & Zuber J. B. *Quantum Field Theory* (McGraw-Hill, 1985).
10. Trimmer J. D. The present situation in quantum mechanics: A translation of Schrödinger’s ”cat paradox” paper, *Proceedings of the American Philosophical Society* **124**, 323–338 (1980).
11. Einstein A. , Podolsky B. & Rosen N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete’ ? *Phys. Rev* **47**, 777–780 (1935).

単一光子、単一電子干渉の考察
Resolution of Single Photon and Electron Interference Enigma

古河電気工業株式会社 ファイナルフォトンクス研究所
森本 政仁

Masahito Morimoto

E-mail: morimoto@ch.furukawa.co.jp

I. はじめに

光マッハツェンダー干渉回路と2スリット（ピンホール）電子干渉計を用いて単一光子および単一電子干渉実験を考察します。

Maxwell 方程式を用いて、単一光子干渉の電磁場を表現すると、導波路内に局在した光子と、局在していないベクトル、スカラーポテンシャルで書き表す事が出来ます。従来、量子力学で単一光子干渉を計算する場合、重ね合わせ状態を考える必要がありました。しかし、この局在した光子と局在しないポテンシャルがマッハツェンダー回路の各アームを別々に通過したとしても単一光子干渉が計算できる事を示します。

同様に、単一電子干渉も局在した電子流と非局在ポテンシャルが2スリット（ピンホール）のどちらかを別々に通過したとして干渉計算が可能です。考察の結果、非局在ポテンシャルは確率振幅0の不定計量ベクトルと看做せ、第二種ゲージ変換によって導入されるゲージ場に相当します。この結果から量子状態を重ね合わせ状態を用いることなく表現可能になり、波束の収縮によるパラドックスが解決され、不確定性原理のより良い理解が得られます。この考えは重ね合わせ状態を使った計算と全く同じ結果を与え、実験結果とも矛盾しません。さらにこの結果はゼロ点エネルギーを消去し、自発的対称性の破れを非常に簡単な考察から導き出します。この考察結果は量子論が統計物理学の一種である事を主張します。

II. 導波路内の古典的電磁場 - ポテンシャルと光子

図1はマッハツェンダー干渉導波路（MZI）と座標系を示します。

まず、入力導波路を考えます。光波はx軸方向に偏向し、角周波数 ω 、伝搬定数 β でz軸方向に進んでいるとします。光電場 \mathbf{E} は入力導波路に、例えばガウシアン分布のように良く閉じ込められていると仮定しましょう。この条件下では光電場は以下の式で表現できます。

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_x \cdot C_E \cdot \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w_0^2}\right) \cdot \cos(\omega t - \beta z) \quad (1)$$

ここで、 \mathbf{e}_x はx軸方向の単位ベクトル、 C_E は電場の大きさに比例する任意定数、 w_0 は光波のモードフィールド半径（光の広がり具合を示す大きさ）です。

電磁場の方程式であるMaxwell方程式から、この式で表される電場 \mathbf{E} と磁場 \mathbf{B} はベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャルを用いて次のように書き表せます。

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} - \nabla \phi \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \end{aligned} \quad (2)$$

式(1)と(2)から、 \mathbf{A} は任意のベクトル関数 \mathbf{C} を用いて次のように書き換えられます。

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= -\frac{1}{\omega} \mathbf{e}_x \cdot C_E \cdot \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w_0^2}\right) \cdot \sin(\omega t - \beta z) + \mathbf{C} \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{C} &= -\nabla \phi \end{aligned} \quad (3)$$

ここで例えば、 \mathbf{C} を渦なしのベクトル関数、すなわち $\nabla \times \mathbf{C} = 0$ とすると \mathbf{C} と ϕ は任意のスカラー関数 λ を用いて $\mathbf{C} = \nabla \lambda$ と $\nabla \left(\frac{\partial}{\partial t} \lambda + \phi\right) = 0$ という関係にまとまります。

よって、磁場 \mathbf{B} は

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \\ &= \frac{\beta}{\omega} \mathbf{e}_y \cdot C_E \cdot \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w_0^2}\right) \cdot \cos(\omega t - \beta z) \\ &\quad - \frac{2y}{\omega \cdot w_0^2} \mathbf{e}_z \cdot C_E \cdot \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w_0^2}\right) \cdot \sin(\omega t - \beta z) \end{aligned} \quad (4)$$

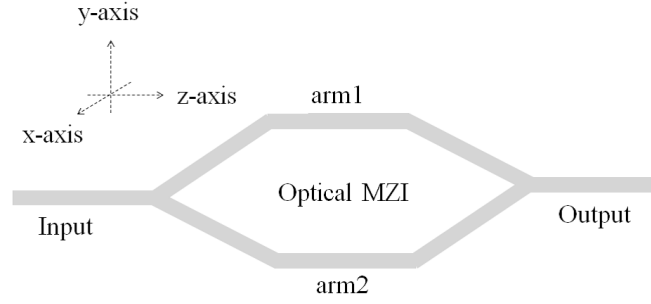


FIG. 1. MZI 干渉計の概略図.

になり、電場 \mathbf{E} と磁場 \mathbf{B} は入力導波路に閉じ込められているということが分かります。しかし、ベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャルは必ずしも閉じ込められていない、という結果になります。もちろん、この閉じ込められなかったポテンシャルはそれ単独で観測は出来ません。ここで取り扱った形状（ガウシアン分布）は単なる一例であり、より一般的な形状については次の電子干渉の場合の章で議論します。

III. ポテンシャルと電子

図 2 は代表的な 2 スリット（ピンホール）による単一電子干渉実験系を示します。[1] 単一電子は電子源から発射され、右方向に進みます。従来の説明では発射された電子が 1 つ、すなわち単一電子であったとしても、電子は 2 つのスリット（ピンホール）を同時に通ったと考えます。ここで電子の運動を考察します。電子の伝搬は空間的な電子ビーム（電子流）と考える事が出来ます。その空間電流密度は $j = Nqv$ で計算できます。ここで N は単位体積あたりの電子数、 q は電子電荷で v は電子速度です。電子ビームの半径が w_0 であれば、空間電流 I は $I = \pi w_0^2 j$ で与えられます。ここで、電子速度が一定で z 軸に平行に伝搬する電子流を考えると、この電子流の道筋の周りには次のベクトルポテンシャルが形成されます。[1, 2]

$$\begin{aligned} A_x &= A_y = 0 \\ A_z &= \frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2} \ln \frac{1}{r} \end{aligned} \quad (5)$$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 、 ϵ_0 は誘電率、 c は光速です。よって、電子流がどちらかのピンホールだけを通るような小さい幅で伝搬していても、ベクトルポテンシャルは広がっているということになります。すなわち反対側のピンホールを電子は通らないがベクトルポテンシャルは通るという結果になります。上記の計算は良く知られているものです。上記までの説明で、光子も電子もその通過する道筋に観測できる光子や電子が存在する、と同時に、反対側の道筋にはポテンシャルが存在する、ということが分かります。以下ではこの議論を、より一般的な次の Maxwell 方程式を用いて考えます。

$$\begin{aligned} \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A} - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) &= -\mu_0 \mathbf{i} \\ \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi + \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad (6)$$

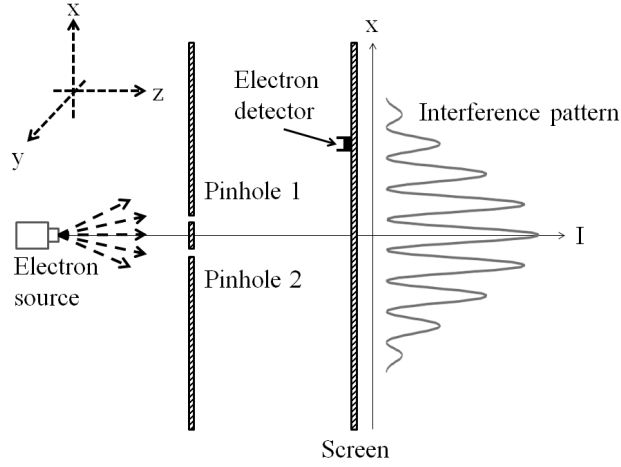


FIG. 2. 代表的な2スリット（ピンホール）による単一電子干渉実験系

μ_0 は透磁率、 ρ は電荷密度です。

ここで、ポテンシャル \mathbf{A} と ϕ を局在する電子流を表現する \mathbf{A}_1 と ϕ_1 で、それ以外の局在しない広がった \mathbf{A}_{nl} と ϕ_{nl} に分解します。この分解は Maxwell 方程式が線形方程式なので何時でも可能です。

$$\begin{aligned} \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{A}_1 - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A}_1 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi_1}{\partial t}\right) &= -\mu_0 \mathbf{i} \\ \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \phi_1 + \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \cdot \mathbf{A}_1 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi_1}{\partial t}\right) &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{aligned} \quad (7)$$

と

$$\begin{aligned} \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{A}_{nl} - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A}_{nl} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi_{nl}}{\partial t}\right) &= 0 \\ \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \phi_{nl} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \cdot \mathbf{A}_{nl} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi_{nl}}{\partial t}\right) &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

なお、 \mathbf{A}_1 と ϕ_1 は式 (3) や (5) のような、その局在した光子や電子から発生する非局在ポテンシャルも表すので、局在ポテンシャルという言い方は正確ではありませんが、ここでは局在した光子や電子を表現するという意味でそのように呼ぶこととします。

ここで電子流を局在した、すなわちどちらかのピンホールを通過できるような局在した形状、例えば、上記で取り扱ったと同様のガウシアン型の形状としてみます。

$$\mathbf{i} \propto \mathbf{e}_z \cdot q \cdot C_q \cdot \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w_0^2}\right) \cdot \cos(\omega t - \beta z) \quad (9)$$

\mathbf{e}_z は z 軸方向の単位ベクトル。 C_q は電子数に比例する任意定数です。

この分解において、式 (7) の局在したポテンシャルは (9) を再現するような形として計算できます。この形は、その電子流の形状 \mathbf{i} によって決定されます。もちろん上記の (9) はあくまでも一例に過ぎません。この分解式 (7) において $\mathbf{i} = 0$ 、 $\rho = 0$ とすると前述の MZI 導波路に閉じ込められた（局在した）電磁場を表すこととなります。

一方、式 (8) は式 (7) とは独立で、局在した電磁場や電子の有無に関係なく、全空間に Maxwell 方程式に従った波動が充満しているということを表しています。

(8) は局在した光子や電子を表す (6) や (7) のゲージ不変性を表しており、非局在ポテンシャルは、よく知られた局所ゲージ変換により導入されるゲージ場であることを示しています。

IV. 単一光子干渉

従来の量子力学的記述では、光子干渉は電場演算子 $\hat{E} = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{a}_1 \exp(i\theta) + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{a}_2$ と個数状態 $|n\rangle$ を用いて以下のように計算されます。[3]

ここで、 $\hat{a}_{1\text{or}2}$ はアーム 1 またはアーム 2 内の電場演算子で、 θ はその位相差です。電場演算子は Maxwell 方程式 (6) で $\mathbf{i} = 0$ 、 $\rho = 0$ と置いた式を Coulomb ゲージで変形してフーリエ展開し、その展開係数を演算子に置き換えるという量子力学の数学的手法によって与えられます。

$$\langle \hat{I} \rangle \propto \frac{1}{2} \langle n | \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 | n \rangle + \frac{1}{2} \langle n | \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 | n \rangle + \cos \theta \langle n | \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 | n \rangle \quad (10)$$

$\langle \hat{I} \rangle$ は光子数に比例する電場強度の期待値です。 $\hat{a}_{1\text{or}2}$ と $\hat{a}_{1\text{or}2}^\dagger$ は、入力電場演算子 \hat{a} と \hat{a}^\dagger を用いて $\hat{a} = \frac{\hat{a}_1 + \hat{a}_2}{\sqrt{2}}$ と $\hat{a}^\dagger = \frac{\hat{a}_1^\dagger + \hat{a}_2^\dagger}{\sqrt{2}}$ で定義され、 $\langle n | \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 | n \rangle = \langle n | \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 | n \rangle = \langle n | \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 | n \rangle = \frac{1}{2}n$ の関係を持っています。ここで光子数が 1 ($n = 1$)、すなわち単一光子の場合を考えると、上記の期待値は $\langle \hat{I} \rangle \propto \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos \theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \theta$ となります。この計算では、単一光子の場合にも光子を 2 つのアームに分割して干渉を計算しており、重ね合わせの原理を使っています。

しかし、前述の局在光子、非局在ポテンシャルという考えを使うと、別の計算が可能になります。光子数は式 (3) の C_E の 2 乗に比例しますが、非局在のポテンシャル \mathbf{C} と ϕ は光子数に比例する必用はありません。

光子数が大きい場合には、従来の考え方、すなわち半分の光子がアーム 1 を通り、残りがアーム 2 を通るという考えは、各光子がどちらのアームを選ぶかの確率は $\frac{1}{2}$ であるべきであるという仮定と、大数の法則によって妥当な考えと言えます。これは量子力学では混合状態という概念で、量子力学的な意味の原理的な確率とは異なる統計的な確率を用いた計算です。単一光子干渉の場合も、この混合状態の計算も式 (10) で与えられます。

しかし、光子数が小さく、すなわち式 (3) の第 1 項で与えられる局在ベクトルポテンシャルが、残りの項の非局在ポテンシャルと同程度となると、光子を表現する局在ポテンシャルはアーム 1 を選んで通り、アーム 2 は非局在ポテンシャルだけが通る、という状況が大きな確率を持つと考える必用が出てきます。式 (3) のポテンシャルが 0 の場合でも、一般的な式 (7) と (8) で考えると、光子を表現する式 (7) のポテンシャルだけがアーム 1 を通り、式 (8) の非局在ポテンシャルは全空間に存在するのでアーム 2 を通る、という同様の考えが必要になります。

この考え方に従うと、演算子は $\hat{E} = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{a}_1 \exp(i\theta) + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{a}_2$ の代わりに、 $\langle 1 | \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 | 1 \rangle = 1$ 且つ $\langle 1 | \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 | 1 \rangle \neq 1$ の関係を満たす $\hat{E} = \hat{a}_1 \exp(i\theta) + \hat{a}_2$ を用いるべきと考えられます。何故なら光子はアーム 1 だけを通り、アーム 2 には光子は存在せず、非局在ポテンシャルだけが通過するとしたからです。ここで $\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1$ は従来の計算で導入されるアーム 1 での光子の生成消滅を表す演算子の組み合わせによる光子数を与える数演算子ですが、式 (6) ではなく式 (7) をフーリエ展開して得られる演算子から構成されます。 $\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2$ は形式的には \hat{a}_1 と同様の導入で、式 (8) をフーリエ展開して得られる演算子の組み合わせですが、光子数を与える数演算子ではなく、光子の固有状態で挟んで期待値を計算しても光子数は得られません。

この演算子を用いて出射位置での光子数期待値を計算すると

$$\begin{aligned} \langle \hat{I} \rangle &\propto \langle 1 | \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 | 1 \rangle + \langle 1 | \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 | 1 \rangle + e^{i\theta} \langle 1 | \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 | 1 \rangle + e^{-i\theta} \langle 1 | \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 | 1 \rangle \\ &= 1 + \langle 1 | \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 | 1 \rangle + e^{i\theta} \langle 1 | \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 | 1 \rangle + e^{-i\theta} \langle 1 | \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 | 1 \rangle \end{aligned} \quad (11)$$

となります。

この期待値計算結果において、 $\langle 1|\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2|1\rangle = -\frac{1}{2}$ 、 $\langle 1|\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2|1\rangle = \langle 1|\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1|1\rangle^* = \pm\frac{1}{4}e^{i\phi}$ とすると、従来の計算と同等の干渉 $\langle \hat{I} \rangle \propto \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \cos(\theta + \phi)$ が得られます。ここで*は複素共役を示します。上記の計算は状態を固定した Heisenberg 描像ですが、同じ計算は演算子を固定した Schrödinger 描像でも可能です。Schrödinger 描像においては、出射位置での電場演算子 $\hat{E} = \hat{a}$ と状態ベクトル $|1\rangle + |\zeta\rangle$ を用いて計算できます。演算子を固定していますので、この演算子は従来計算と同様にポテンシャルを分割していない式 (6) をフーリエ展開して得られたものです。 $|1\rangle$ はアーム 1 の 1 光子状態の状態ベクトル、 $|\zeta\rangle$ はアーム 2 の非局在ポテンシャルを表す状態ベクトルです。アーム 2 では何も観測されないので、 $\langle \zeta|\zeta\rangle = 0$ という関係が満たされているべきでしょう。この演算子と状態ベクトルを用いて同じく期待値計算すると

$$\begin{aligned} \langle \hat{I} \rangle &\propto (e^{i\theta}\langle 1| + \langle \zeta|) \hat{a}^\dagger \hat{a} (e^{-i\theta}|1\rangle + |\zeta\rangle) \\ &= 1 + \langle \zeta|\hat{a}^\dagger\hat{a}|\zeta\rangle + e^{i\theta}\langle 1|\zeta\rangle + e^{-i\theta}\langle \zeta|1\rangle \end{aligned} \quad (12)$$

となります。ここで $\hat{a}^\dagger\hat{a}|1\rangle = |1\rangle$ 、 $\langle 1|\hat{a}^\dagger\hat{a} = \langle 1|$ を用いています。この期待値計算結果においても、 $\langle \zeta|\hat{a}^\dagger\hat{a}|\zeta\rangle = -\frac{1}{2}$ 、 $\langle 1|\zeta\rangle = \langle \zeta|1\rangle^* = \pm\frac{1}{4}e^{i\phi}$ なら前記同様の干渉 $\langle \hat{I} \rangle \propto \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \cos(\theta + \phi)$ が得られます。

$|\zeta\rangle$ は非局在ポテンシャルを表す状態ですが、これは式 (8) の Maxwell 方程式に従う波動を表現しています。この波動は光子としては観測されませんが、波動なので位相を持っており、この位相が実際に観測される光子と干渉することで、たった 1 つの光子しかなくても干渉が生じると解釈できます。

なお、 ϕ は MZI の位相差で決定されますが、MZI が全く対称に作られて位相差が無いとすると ϕ は確率の規格化、すなわち、 $(\langle 1| + \langle \zeta|)(|1\rangle + |\zeta\rangle) = \langle 1|1\rangle + \langle 1|\zeta\rangle + \langle \zeta|1\rangle + \langle \zeta|\zeta\rangle = 1 + \langle 1|\zeta\rangle + \langle \zeta|1\rangle + \langle \zeta|\zeta\rangle = 1$ と $\langle \zeta|\zeta\rangle = 0$ より $\langle 1|\zeta\rangle = -\langle \zeta|1\rangle$ と計算でき、 $\phi = \frac{\pi}{2} + N\pi$ となります。ここで N は整数です。

この Schrödinger 描像の単一光子干渉計算において、非局在ポテンシャルを表す状態ベクトルは通常のヒルベルト空間での解はありません。この状態ベクトルは不定計量のヒルベルト空間のベクトルと考えることが必要になります。このような観測できない不定計量ベクトルの状態は、場の量子論で”ghost”として、相対性理論との整合性のために必要なものとして取り扱われています。[4-7] ここで出てきた不定計量ベクトルも”ghost”と呼ぶことにします。従来の”ghost”の取り扱いでは、物理現象に影響を与えないように定式化されていますが、ここで導入した”ghost”は単一光子干渉に実際に影響を与える（その本質である）という意味において全く定義が異なります。

式 (11) と (12) より、アーム 2 を通った非局在ポテンシャルはアーム 1 を通った光子と協力して（位相差によって）、あたかも光子が両方のアームに分かれて通過したような干渉を与える、という考えが可能です。

光子数は式 (3) の C_E の 2 乗に比例しますが、”ghost”を表す非局在ポテンシャルは比例しないと前述しましたが、このことが光子数が大きいときには不思議な量子効果が観測されない理由と考えることが出来ます。

量子力学的な考えを用いなくても、局在、非局在ポテンシャルという考えを使うと、この片側だけに観測可能な電磁場がある場合の干渉を古典的に定性的に説明できます。MZI の出射位置での干渉 $\mathbf{E}_{\text{out}} = \frac{1}{2}\mathbf{E}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{E}_2$ は、

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{out}} &= -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}_1 - \nabla\phi_1 - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}_{\text{nl}} - \nabla\phi_{\text{nl}} \\ &= \mathbf{E}_1 - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}_{\text{nl}} - \nabla\phi_{\text{nl}} \end{aligned} \quad (13)$$

と計算できますが、非局在ポテンシャルが

$$-\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}_{\text{nl}} - \nabla\phi_{\text{nl}} = \frac{1}{2}\mathbf{E}_2 - \frac{1}{2}\mathbf{E}_1 \quad (14)$$

であれば、片側だけの観測可能な電磁場による干渉を形成します。下付き添え字 1、2 は MZI アーム 1 と 2 を表します。

V. 単一電子干渉

2スリット（ピンホール）の単一電子干渉の代表的な量子力学の取り扱いでは、電子をスクリーン上に発見する確率を用いて説明されています。[1]

$$P_{12} = |\phi_1 + \phi_2|^2 \quad (15)$$

$\phi_1 = \langle x|1\rangle\langle 1|s\rangle$ と $\phi_2 = \langle x|2\rangle\langle 2|s\rangle$ は、
 $\langle 1$ または $2|s\rangle \equiv \langle$ 電子がピンホール 1 または 2 に到達する | 電子が s (電子源) を出る \rangle 及び、
 $\langle x|1$ または $2\rangle \equiv \langle$ 電子がスクリーン x に到達する | 電子がピンホール 1 または 2 を出る \rangle
 という確率振幅から構成されています。

ピンホール 1 または 2 が閉じられていると、発見確率は $P_1 = |\phi_1|^2$ または $P_2 = |\phi_2|^2$ となり、結合確率は $P = P_1 + P_2 \neq P_{12}$ となりますので、電子は両方のピンホールを通ったと考えなければ干渉を計算出来ません。しかし、単一電子はそれ以上分割できず、両方のピンホールを通ることは出来ないはずで

そこで、前述のように、空間には非局在ポテンシャルが存在する、ことを考慮すると干渉が計算できます。この考えでは電子の波動関数は非局在ポテンシャル中の波動関数

$$\begin{aligned} \psi'_1 &= \psi_1 \cdot \exp \left[i \frac{q}{\hbar} \int_{s \rightarrow \text{Pinhole1} \rightarrow \text{screen}} (\phi_{nl} dt - \mathbf{A}_{nl} \cdot d\mathbf{x}) \right] \\ \psi'_2 &= \psi_2 \cdot \exp \left[i \frac{q}{\hbar} \int_{s \rightarrow \text{Pinhole2} \rightarrow \text{screen}} (\phi_{nl} dt - \mathbf{A}_{nl} \cdot d\mathbf{x}) \right] \end{aligned} \quad (16)$$

で記述されます。ここで、 ψ'_1 、 ψ'_2 は非局在ポテンシャル中をピンホール 1 または 2 を通過してきた電子のスクリーン上での波動関数、 ψ_1 、 ψ_2 は非局在ポテンシャルの影響を受けていない電子源の波動関数です。 ϕ_{nl} と \mathbf{A}_{nl} は式 (8) で与えられる非局在ポテンシャルだけでなく、式 (3) や (5) のような局在電磁場や電子流から発生した非局在ポテンシャル部分をも含むと考えて計算しても以後の結論に影響はありません。

この波動関数でスクリーン上に電子を発見する確率を計算すると

$$\begin{aligned} P_{12} \propto |\psi'|^2 &= |\psi'_1 + \psi'_2|^2 = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 \\ &\quad - 2\text{Re} \left(\exp \left[i \frac{q}{\hbar} \oint_{s \rightarrow 1 \rightarrow \text{screen} \rightarrow 2 \rightarrow s} (\phi_{nl} dt - \mathbf{A}_{nl} \cdot d\mathbf{x}) \right] \psi_1^* \psi_2 \right) \end{aligned} \quad (17)$$

積分路の 1 と 2 はピンホール 1 と 2 を表します。

この式で単一電子の場合を考えると、電子は必ずピンホール 1 を通過し、ピンホール 2 を全く通過しませんので $|\psi_1|^2 = 1$ および $|\psi_2|^2 = 0$ となります。なお、正確には $\int |\psi_{1or2}|^2 d\mathbf{V} = 1$ および 0 という考える体積において確率を規格化して計算するのが正しいですが、計算の本質に変わりはないので、このまま進めます。

ここで、位相差 θ を ψ_1 と ψ_2 に与えると、 P_{12} は

$$P_{12} \propto 1 - 2\text{Re}(\exp i[\gamma + \theta] \psi_1^* \psi_2) \quad (18)$$

という干渉を与えることとなります。ここで $\gamma = \frac{q}{\hbar} \oint_{s \rightarrow 1 \rightarrow \text{screen} \rightarrow 2 \rightarrow s} (\phi_{nl} dt - \mathbf{A}_{nl} \cdot d\mathbf{x})$ です。

なお、 θ を固定すると干渉はスクリーン上で γ の関数として、すなわちスクリーン位置の関数として、逆に γ を固定すると、干渉はスクリーンの固定位置で θ の関数として観測される事になります。しかし、この計算では波動関数 ψ_2 は $\psi_1^* \psi_2 \neq 0$ と $|\psi_2|^2 = 0$ を満たさなければならなりません。そこで、次のような状態ベクトルを導入します。”非局在ポテンシャル中を電子が伝搬しピンホール 1 を通る”という状態 $e^{i\gamma_1} |\psi_1\rangle$ これは $P_1 = \langle \psi_1 | \psi_1 \rangle = 1$ を満たします。また、”非局在ポテンシャルだけがピンホール 2 を通る”という状態 $e^{i\gamma_2} |\psi_2\rangle$ 、これは電子が通らないので $P_2 = \langle \psi_2 | \psi_2 \rangle = 0$ を満たさなければなりません。

この状態では γ_1 、 γ_2 と $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ は式 (16) と式 (17) の位相項に対応します。

ここで単一光子干渉の計算に倣い、電荷演算子を導入して干渉を計算します。電荷演算子 $\mathbf{Q} \equiv \int d^3x j_0(x)$ は電流保存則 $j_\mu = (q, \mathbf{i})$ 、 $\partial^\mu j_\mu = \frac{\partial q}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{i} = 0$ により定義されます。この電荷演算子は $\mathbf{Q}|\psi_1\rangle = q|\psi_1\rangle$ の関係を満たします。すなわちピンホール 1 の電子状態は \mathbf{Q} の固有状態になっています。[8, 9]

この電荷演算子を用いると単一電子干渉は以下で計算出来ます。

$$\begin{aligned} \langle I \rangle &= \left(e^{i(\theta-\gamma_1)} \langle \psi_1 | + e^{-i\gamma_2} \langle \psi_2 | \right) \mathbf{Q} \left(e^{-i(\theta-\gamma_1)} |\psi_1\rangle + e^{i\gamma_2} |\psi_2\rangle \right) \\ &= q + \langle \psi_2 | \mathbf{Q} | \psi_2 \rangle + q e^{i(\theta-\gamma)} \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle + q e^{-i(\theta-\gamma)} \langle \psi_2 | \psi_1 \rangle \end{aligned} \quad (19)$$

$\langle I \rangle$ は電荷の期待値です。ここで $\langle \psi_2 | \mathbf{Q} | \psi_2 \rangle = -\frac{1}{2}q$ で $\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \langle \psi_2 | \psi_1 \rangle^* = \pm \frac{1}{4}e^{i\delta}$ とすると、単一電子干渉 $\langle I \rangle = q \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(\theta - \gamma + \delta) \right\}$ が得られます。

この計算から、非局在ポテンシャルは電子波動関数または電子状態の位相シフトを生じると理解できます。なお、式 (16) は第二種ゲージ変換の関係式になっており、非局在ポテンシャルはこの変換から導入されるゲージ場と理解することが出来ます。この計算結果は”非局在ポテンシャルだけがピンホール 2 を通る”という状態は電子として観測できないが、電子と干渉する為の位相を持つ、と理解でき単一光子干渉の場合と同様の結果となります。

この計算において $|\psi_2\rangle$ の解はやはり通常のコヒーレント空間にはありません。よって確率振幅が 0 の不定計量ベクトルとして認識する必要があります。これで単一電子干渉も重ね合わせ状態を用いることなく計算できることになりました。なお、式 (17) を混合状態の計算において重ね合わせ状態として考えることは、光子干渉の項でも述べたとおり妥当な考えです。

VI. 不確定性原理及び波束の収縮

非局在ポテンシャルの存在によって、Heisenberg の不確定性原理の認識が改められ、”シュレディンガーの猫”や EPR (Einstein, Podolsky and Rosen) [10, 11] といったパラドックスは解消できます。これらの問題は重ね合わせ状態を考えることに起因する為です。

前記の結果は、アーム 1 や 2、またピンホール 1 や 2 の状態は系が準備された時点で、どちらかに光子や電子がある状態と、反対側には非局在ポテンシャルがあるという状態に決定しており、分割できないにも関わらず干渉が計算が出来ないからと言って思考上で分割したような重ね合わせ状態ではない、ということですので重ね合わせ状態に起因する波束の収縮は生じず、上記パラドックスは解消できます。

系が準備された時点というのは、MZI アームやピンホールの分岐部直後を意味します。光子や電子がどちらのアームやピンホールを選ぶかは予測できませんが、選ばれた後は状態は決定してしまい決して重ね合わせのような不思議な状態ではない、ということです。こういう考え方からすると、今まで使ってきた”確率”という言葉は、単一光子、単一電子干渉の状態においても、量子力学的な意味の原理的な確率とは異なる統計的な確率、すなわち混合状態の確率と同じであると考えた方が良いという結果になります。これは、量子力学的な意味の原理的な確率、という考えは存在しない可能性があることを示唆します。

Heisenberg の不確定性原理についても、測定誤差とは無縁のフーリエ変換によるトレードオフの関係、すなわち数学的な正準交換関係であるという認識が得られます。

VII. ゼロ点エネルギー

式 (12) を単一光子状態の代わりに真空状態として計算します。そうすると $\langle \zeta | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \zeta \rangle = -\frac{1}{2}$ は以下のようにゼロ点エネルギーを消去するという役目をします。

$$\begin{aligned} & (\langle 0 | + \langle \zeta |) \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) (|0\rangle + |\zeta\rangle) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (\langle 0 | \zeta \rangle + \langle \zeta | 0 \rangle + \langle \zeta | \zeta \rangle) + \langle 0 | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \zeta \rangle + \langle \zeta | \hat{a}^\dagger \hat{a} | 0 \rangle + \langle \zeta | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \zeta \rangle \\ &= \frac{1}{2} + \langle \zeta | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \zeta \rangle = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

$\hat{a}|0\rangle = (\langle 0|\hat{a}^\dagger)^\dagger = 0$ と”確率”の規格化、すなわち、

$$\begin{aligned} (\langle 0 | + \langle \zeta |) (|0\rangle + |\zeta\rangle) &= \langle 0|0\rangle + \langle 0|\zeta\rangle + \langle \zeta|0\rangle + \langle \zeta|\zeta\rangle \\ &= 1 + \langle 0|\zeta\rangle + \langle \zeta|0\rangle + \langle \zeta|\zeta\rangle = 1 \end{aligned}$$

よって $\langle 0|\zeta\rangle + \langle \zeta|0\rangle + \langle \zeta|\zeta\rangle = 0$ の関係を用いました。

VIII. 自発的対称性の破れ

従来、自発的対称性の破れは、真空の電荷固有値が 0 の場合は $\mathbf{Q}|0\rangle \neq 0$ 、一般的には ” $|0\rangle$ が \mathbf{Q} の固有状態ではない” という関係を示しています。この関係を仮定して現実の対称性の破れを説明する為に Goldstone ボソンや Higgs ボソンといった複雑なボソン場が導入されました。

しかし、単一電子干渉で考えたピンホール 2 の状況は、ピンホール 2 には電子はなく、全空間にいつでも存在している非局在ポテンシャルだけがある状況なので、真空状態と同等と考えられます。すなわち従来計算で用いていた $|0\rangle$ という状態は現実の真空ではなく、ピンホール 2 の状態 $e^{i\gamma_2}|\psi_2\rangle$ が現実の真空だと考えます。この考えでは $\langle \psi_2 | \psi_2 \rangle = 0$ の関係から現実の真空は電荷演算子の固有状態ではないという結論が得られます。すなわち複雑なボソン場など考えなくても、簡単に自発的対称性の破れが導かれます。

証明は簡単で、もし $e^{i\gamma_2}|\psi_2\rangle$ が \mathbf{Q} の固有状態ならば、すなわち、 α を固有値として $\mathbf{Q}e^{i\gamma_2}|\psi_2\rangle = \alpha e^{i\gamma_2}|\psi_2\rangle$ ならば、 $\langle \psi_2 | e^{-i\gamma_2} \mathbf{Q} e^{i\gamma_2} | \psi_2 \rangle = \alpha \langle \psi_2 | \psi_2 \rangle = 0 \neq -\frac{1}{2}q$ となり、式 (19) の直後の仮定と矛盾しますので証明出来ました。従来検討された複雑なボソン場は非局在ポテンシャルに相当すると考えることが出来ます。

IX. 結言

量子論には解決できていないパラドックスが存在します。その簡単な代表的現象が単一光子、単一電子干渉です。

もし、ここで取り扱ったような不定計量ベクトルを用いると、これらのパラドックスは解決できます。さらに、この考えを用いることで不確定性原理を測定とは切り離して説明可能になり、ゼロ点エネルギーの除去も可能になり、且つ、自発的対称性の破れまで自然に導かれます。

Maxwell 方程式は不定計量空間である Minkowski 空間の波動方程式ですので、この空間で状態ベクトルを考えると不定計量ベクトルの導入は不可避となります。この不定計量ベクトルは従来の理論的整合性のための数学的補助場という導入ではなく、実際の干渉結果に寄与する物理的な場、として導入すべきことを示唆しています。このベクトルは確かな物理量である光子や電子を表現しませんが、それらと干渉する為の位相を持つ波動を表現するという解釈が可能です。

この位相を持った非局在ポテンシャルは、第二種ゲージ変換で導入されるゲージ場に相当しているという描像も得られました。

この考え方をを用いても、従来の重ね合わせ状態を使って計算される干渉と全く同じ結果を与えます。それは非局在ポテンシャルが、まるで重ね合わせ状態のように干渉を生じる位相差を担っている為です。

なお、本文中で述べましたが、混合状態において重ね合わせ状態を考えることは妥当な考えです。しかし、これは状態が確定できず、統計的な確率で系を表すものであり、量子力学的な意味の原理的確率という概念とは異なります。このことから量子力学も統計物理学の一種であると考えることが可能です。

この考察結果が大いに議論され、量子論の基礎及びパラドックスの再考を促す事を期待します。

-
- [1] R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. L. Sands (砂川重信 訳). *ファインマン物理学 V(量子力学)*. 岩波書店, 1979.
 - [2] J. A. Stratton *Electromagnetic Theory* McGraw-Hill, 1941.
 - [3] R. Loudon (小島忠宣・小島和子 共訳). *光の量子論 第2版*. 内田老鶴圃, 1983.
 - [4] P. A. M. Dirac The physical interpretation of quantum mechanics. *Proc. Roy. Soc. London A*, 180 1–39, 1942.
 - [5] W. Pauli and F. Villars. On the invariant regularization in relativistic quantum theory. *Rev. Mod. Phys.*, 21(3):434–444, July 1949.
 - [6] S. N. Gupta. Quantum electrodynamics with auxiliary fields. *Proc. Phys. Soc. A*, 66(2):129–138, Feb 1953.
 - [7] T. D. Lee and G. C. Wick. Finite theory of quantum electrodynamics. *Phys. Rev. D*, 2(6):1033–1048, Sep 1970.
 - [8] E. Karlson. The eigenvalues of the charge operator. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 230:382–389, Jun 1955.
 - [9] C. Itzykson and J. B. Zuber. *Quantum Field Theory*. McGraw-Hill, 1985.
 - [10] J. D. Trimmer The present situation in quantum mechanics: A translation of Schrödinger’s ”cat paradox” paper. *Proceedings of the American Philosophical Society*, 124, 323–338, 1980.
 - [11] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, 47:777–780, May 1935.