Oszacowanie złożoności problemu rozgrywki w otwarte karty w brydżu

Piotr Beling
Uniwersytet Łódzki, Wydział Matematyki i Informatyki

22 września 2013

Streszczenie

Artykuł zawiera analizę złożoności problemu rozgrywki w otwarte karty w brydżu, przy użyciu miar zaproponowanych przez Louisa Victora Allisa w [2]. Oszacowane są w nim złożoności przestrzeni stanów i drzewa wspomnianej gry.

Spis treści

1 Miary złożoności gier

Louis Victor Allis w [2] zaproponował i, posługując się przykładami wielu gier, uzasadnił zasadność następujących miar oceny trudności znalezienia rozwiązania dwuosobowych gier z doskonałą informacją, o sumie stałej[1]:

- Złożoność przestrzeni stanów (ang. state-space/search-space complexity) jest to liczba legalnych, różnych pozycji osiągalnych z pozycji początkowej.
- Złożoność drzewa gry (ang. game tree complexity) jest to liczba liści w drzewie poszukiwań rozwiązania początkowej pozycji gry.

  Gdy przez M oznaczymy drzewo poszukiwań algorytmu Minimax o korzeniu w J, to drzewem poszukiwań rozwiązania węzła J (ang. solution

[1] Więcej na temat takich gier i metod ich rozwiązywania można znaleźć w bardzo licznej literaturze, np. [6, 12, 14, 21, 23].

gra	logarytm dziesiętny ze złożoności		źródła
	przestrzeni stanów	drzewa gry	
Kółko i krzyżyk (3x3)	3	5	[2]
Czwórki (Connect Four, 7x6)	13	21	[2, 3]
Rozgrywka w widne w brydżu (średnia dla 13 lew)	17	29	
Warcaby angielskie (amerykańskie)	18	31	[2]
Othello (Reversi, 8x8)	28	58	[2]
Warcaby międzynarodowe (10x10)	30	54	[2]
Szachy	47	123	[2, 25]
Hex (11x11)	57	98	[27]
Gomoku (15x15, freestyle)	105	70	[2]
Go (19x19)	171	360	[2, 26]

Tabela 1: Szacowana złożoność wybranych gier.

search tree of a node J) nazwiemy poddrzewo M składające się ze wszystkich węzłów M aż do głębokości rozwiązania węzła J.

Głębokość rozwiązania węzła J (ang. solution depth of a node J) to minimalna głębokość na jaką trzeba znać M aby móc ustalić ile wynosi wartość minimaksowa pozycji J.

Wyżej opisane miary są dość proste i niezbyt dokładne. Nie uwzględniają one wielu czynników (np. istnienia symetrii, możliwości budowania bazy końcówek, itd.). W pracy [19] można znaleźć analizę dotychczas rozwiązanych gier która wskazuje, że zbiór tych gier różni się nieco od zbioru gier które powinny być rozwiązane wg. miar zaproponowanych przez Allisa. Pomimo to, miary te wciąż są bardzo popularne. Prawdopodobną przyczyną tego stanu rzeczy jest relatywna łatwości oszacowania ich wartości dla poszczególnych gier. Opracowania [1, 2, 19, 27] zawierają szacowane wartości zdefiniowanych miar dla wielu popularnych gier logicznych. Część z nich można znaleźć w tabeli 1.

Dokładniejszą analizę i dodatkowe propozycje związane z szacowaniem trudności gier zawierają m.in. prace [27] i [19]. Autorzy artykułu [27], zwracają m.in. uwagę, że w grach w których podczas trwania rozgrywki maleje liczba dostępnych stanów gry na ogół możliwe jest zbudowanie bazy końcówek[2] (i zapamiętanie jej przy użyciu akceptowalnie małej przestrzeni dyskowej), co znacznie ułatwia znalezienie rozwiązania. Przykładowo, przy intensywnym wykorzystaniu bazy końcówek, udało się znaleźć rozwiązanie dla tak złożonej gry jak warcaby amerykańskie [24]. Grami spełniającymi wspomniany warunek są także poszczególne problemy rozgrywkowe w otwarte karty. Niestety, na ogół zapisanie

[2]Baza końcówek zawiera pozycje które mogą pojawić się w końcowej fazie gry, ich wartości minimaksowe i, opcjonalnie, najlepsze posunięcie jakie można w nich wykonać lub liczbę ruchów do końca gry. Więcej informacji i algorytm budowania bazy końcówek można znaleźć np. w [6].

obszernej bazy końcówek dla wszystkich elementów z rodziny takich problemów (różniących się początkowym rozłożeniem kart) nie jest możliwe.

2 Problemu rozgrywki w otwarte karty (i oznaczenia)

Problem rozgrywki w otwarte karty w brydżu polega na wyznaczeniu optymalnej linii rozgrywki przy założeniu pełnej wiedzy o rozkładzie (wszystkich) kart i bezbłędnej gry wszystkich uczestników.

Problem ten i jego efektywne rozwiązanie są bardzo ważne, zarówno z punktu widzenia (statystycznej) analizy rozdań przez brydżystów (por. np. [16]) jaki i jako część składowa algorytmów wyznaczających sub-optymalne decyzję przy kartach zakrytych (zarówno w rozgrywce jak i licytacji czy wiście – por. m.in. [10, 15, 17, 18, 20]). Przykładowo, w rozgrywce, można rozwiązać szereg problemów rozgrywki w otwarte karty, dla wielu układów kart „pasujących" do znanych kart, licytacji i wcześniejszej gry przeciwników i zagrać kartę która okazała się wygrywająca w największej liczbie przypadków. Proszę zauważyć, że takie postępowanie wymaga, by problemy składowe będące grą w otwarte karty rozwiązywać bardzo szybko. Dlatego wiele osób, włożyło mnóstwo pracy w opracowanie technik to umożliwiających (np. [4, 5, 7–9, 11, 22]).

Kolejne rozdziały zawierają oszacowanie wartości złożoności przestrzeni stanów oraz drzewa gry dla problemu rozgrywki w otwarte karty. Będę w nich posługiwał się następującymi oznaczeniami charakteryzującymi rozpatrywaną grę:

- $\mathbb{S}$ – przestrzeń stanowa (zbiór wszystkich pozycji),
- $N : \mathbb{S} \to 2^{\mathbb{S}}$ — funkcja wyznaczająca następniki danej pozycji, tj. $s' \in N(s)$ oznacza, że s' jest osiągalny z s poprzez wykonanie jednego ruchu;
- SUITS – zbiór kolorów (typowo: trefle, kara, kiery, piki);
- HANDS – zbiór rąk (w brydżu: North, East, South, West);
- $R = |\mathit{HANDS}|$ — liczba rąk (w brydżu: $R = 4$);
- K — liczba kart w posiadaniu każdej z rąk na początku gry (w brydżu: $K = 13$).

3 Złożoność przestrzeni stanów

Wielkość przestrzeni stanowej ($|\mathbb{S}|$) i tym samym jej złożoność, dla problemu rozgrywki w otwarte karty, można oszacować z góry w następujący sposób:

Liczbę rozłożeń kart, takich że jedna z rąk posiada k kart (gdzie $0 < k \leqslant K$), zaś każda z pozostałych ma ich k albo $k - 1$ (w tym drugim przypadku, jedną kartę dołożyła do bieżącej lewy) można oszacować z góry przez:

$$f(k) = \binom{K}{k}^{R} (1 + R \sum_{h=1}^{R-1} k^h) \tag{1}$$

Pierwszy czynnik iloczynu we wzorze (1) wiąże się z liczbą k-elementowych podzbiorów kart każdego z graczy. Drugi szacuje liczbę możliwych wyborów kart (spośród wspomnianych k-elementowych podzbiorów) wchodzących w skład tworzonej lewy. Gdy nie ma kart w lewie, jest jeden możliwy wybór. Gdy jest h kart w lewie (gdzie $h \in \{1, \ldots, R-1\}$), każda spośród co najwyżej R rąk może lewę rozpocząć, zaś z każdej spośród h rąk które dołożyły do lewy mogła być zagrana jedna spośród co najwyżej k kart.

Oznaczę $f(0) = 1$ (liczba rozłożeń pustego zbioru kart).

Liczbę stanów w których jedna z rąk posiada k kart, zaś każda z pozostałych ma ich k albo $k-1$ jest nie większa niż:

$$f_p(k) = (K - k + 1) f(k) \tag{2}$$

Czynnik $(K-k+1)$ związany jest z lewami wcześniej zdobytymi przez poszczególne pary. Po zagraniu $K-k$ pełnych lew, każda z nich mógła, potencjalnie, zgromadzić od 0 do $K-k$ lew, co daje $K-k+1$ możliwości.

Ostatecznie, liczba wszystkich stanów można oszacować, z góry, następująco:

$$|\mathbb{S}| \leqslant \sum_{k=0}^{K} f_p(k) \tag{3}$$

Dla brydża ($R = 4$, $K = 13$) szacowanie to wynosi około $2 \cdot 10^{17}$.

Ponieważ przy obliczeniach często można nie rozróżniać pozycji różniących się jedynie liczbą wcześniej wziętych lew, to dla oceny złożoności problemu, ważna jest też wartość:

$$\sum_{k=0}^{K} f(k) \tag{4}$$

która dla brydża ($R = 4$, $K = 13$) jest liczbą równą około $3 \cdot 10^{16}$.

4 Złożoności drzewa gry

Ponieważ rozgrywka w otwarte karty ma stałą długość (zawsze kończy się po zagraniu wszystkich $R \cdot K$, w brydżu 52, kart), to złożoność drzewa gry jest równa wielkość drzewa gry (ang. game tree size) zdefiniowanej jako liczba wszystkich możliwych sposobów rozegrania gry [1], lub równoważnie jako liczba liści w drzewie minimaksowym o korzeniu w pozycji początkowej s_I.

W zależności od początkowego układu kart wielkość ta, może wynieść nawet:

$$K!^R \tag{5}$$

Typ gry:	bezatutowa	w kolor
Średnia szacowana wielkość drzewa gry	$2,4 \cdot 10^{29}$	$6,8 \cdot 10^{28}$
Średni błąd kwadratowy wartości średniej	$0,2 \cdot 10^{29}$	$0,6 \cdot 10^{28}$
Odchylenie standardowe	$7,4 \cdot 10^{33}$	$3,5 \cdot 10^{33}$
Minimalna wartość w próbie	$8,9 \cdot 10^{18}$	$8,9 \cdot 10^{18}$
Maksymalna wartość w próbie	$1,5 \cdot 10^{39}$	$1,5 \cdot 10^{39}$
Wielkość próby	$4 \cdot 10^{11}$	$4 \cdot 10^{11}$

Tabela 2: Znaleziona numerycznie, szacowana wielkość drzewa gry.

Taka wielkość drzewa gry wystąpi w rozdaniach w których każdy z graczy, będzie mógł za każdym razem zagrać dowolną z posiadanych kart. Przykładowo: wistujący będzie posiadał wszystkie karty w jednym kolorze i będzie to kolor atutowy lub gra będzie w bezatu (wszyscy dokładający do kolejnych lew nie będą mieli żadnej karty w kolorze wistu).

Dla brydża liczba opisana wzorem (5) wynosi około $1,5 \cdot 10^{39}$.

Dolne ograniczenie na wielkość drzewa gry, można uzyskać np. zakładając, że każdy z dokładających do lewy graczy będzie miał tylko jedną możliwość:

$$K! \tag{6}$$

Dla brydża liczba ta jest równa $13! \approx 6,2 \cdot 10^9$.

Następujące, dokładniejsze szacowanie dolnego ograniczenia wielkości drzewa problemu rozgrywki w otwarte karty w brydżu, zawarł w swojej rozprawie doktorskiej [13] Ian Frank: Niech s_{rk} będzie liczbą kart posiadaną przez r-tą rękę w k-tym kolorze (dla dowolnej ręki $r \in HANDS$ i koloru $k \in SUITS$). Naturalnie $\sum_{k \in SUITS} s_{rk} = K$. Najmniejsza liczba możliwych do wyboru, w trakcie całego rozdania, zagrań z ręki r związana jest z takim przebiegiem gry, że r nigdy nie będzie wistowała i równocześnie zawsze będzie dokładała do koloru. Liczba ta wynosi:

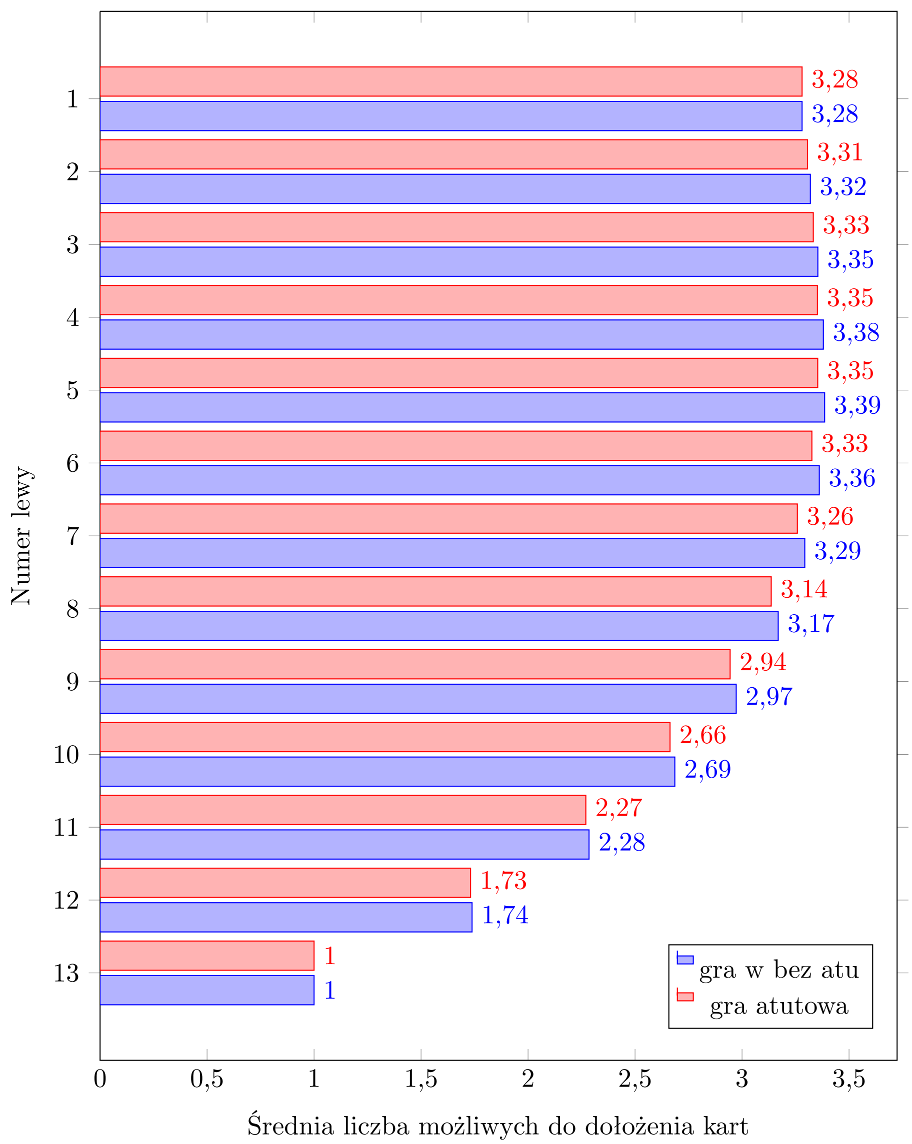
$$\prod_{k \in SUITS} s_{rk}! \tag{7}$$

Stąd, liczba możliwych, różnych przebiegów całej gry nie może być mniejsza niż:

$$\prod_{r \in HANDS} \prod_{k \in SUITS} s_{rk}! \tag{8}$$

Liczba opisana wzorem (8) jest najmniejsza dla rozdań w których wszystkie ręce będą możliwie najbardziej zrównoważone. W brydżu jest ona najmniejsza gdy każda z rąk ma układ 4-3-3-3 i wtedy, wynosi ona około $7,2 \cdot 10^{14}$. Ian Frank policzył także, że dla losowego rozdania, oczekiwana wartość dolnego ograniczenia wielkości drzewa gry opisanego wzorem (8) wynosi dla brydża $1,05 \cdot 10^{18}$.

Rozpiętość pomiędzy dolną ($7,2 \cdot 10^{14}$), a górną ($1,5 \cdot 10^{39}$) szacowaną wielkością drzewa gry dla problemu rozgrywki w otwarte karty w brydżu jest bardzo



Rysunek 1: Średnia liczba kart możliwa do dołożenia przez graczy do kolejnych lew w brydżu. Wartości zostały obliczone doświadczalnie, przy założeniu losowych przebiegów rozgrywek.

duża. Prawdopodobnie, znaczne są też różnice wielkości samych drzew uzyskanych dla różnych, początkowych układów kart.

Jaka jest jednak oczekiwana wielkością drzewa dla tej gry? I jaki jest jego oczekiwany kształt? Wiadomo, że co czwarta pozycja jest wistowa. Z ręki wistującej można zagrać dowolną z posiadanych kart i w związku z tym stopnie rozgałęzienia kolejnych pozycji wistowych wynoszą odpowiednio $13, 12, \ldots, 1$. Jaka jest jednak średnia liczba kart możliwa do dołożenia przez graczy do kolejnych lew?

By oszacować jaka jest odpowiedź na wyżej postawione pytania, wykonano następujący eksperyment (niezależnie dla gier atutowych i w bez atu):

1. Wylosowano próbę P rozdań (gier).

2. Dla każdego z wylosowanych rozdań $p \in P$ przeprowadzono losową rozgrywkę (kolejne zagrania były wybierane z jednostajnym prawdopodobieństwem) uzyskując ciąg pozycji $s_0(p), \ldots, s_{51}(p)$ określających jej przebieg.

3. Oszacowano liczbę kart możliwą do dołożenia przez graczy do n-tej lewy ($n = 1, \ldots, 13$) w grze $p \in P$ jako:

$$deg_p(n) = \sum_{i=1}^{3} |N(s_{4(n-1)+i}(p))|/3$$

   Uzyskane dla kolejnych rozdań z próby P wyniki uśredniono:

$$deg(n) = \sum_{p \in P} deg(n)/|P|$$

   Rezultat przedstawiono na wykresie 1.

4. Oszacowano wielkość drzewa gry $p \in P$ jako: $\prod_{i=0}^{51} |N(s_i(p))|$. Wielkość tą uśredniono dla całej próby P, wyniki zebrano w tabeli 2.

Wykres 1 przedstawia średnią liczba kart możliwą do dołożenia przez graczy do kolejnych lew w brydżu. Nieco większe wartości uzyskane dla rozgrywek w bez atu niż gier atutowych wynikają prawdopodobnie z faktu, że w grach bez atutowych często łatwiej jest wyrobić i wziąć na forty (do których gracze mogą dokładać dowolne z posiadanych kart), gdyż nie trzeba w tym celu pozbawiać przeciwników atutów.

Poniższe twierdzenie uzasadnia poprawność metody szacowania wielkości drzewa użytej w powyższym eksperymencie:

Twierdzenie 1. *Niech $D = (S, s_I, N)$ będzie drzewem o skończonym zbiorze węzłów S, z wyróżnionym korzeniem $s_I \in S$, o funkcji następników $N : S \to 2^S$ ($N(s)$ to zbiór dzieci węzła $s \in \mathbb{S}$). Przez L oznaczmy zbiór liści drzewa D.*

Rozważmy eksperyment polegający na przejściu drzewa, od korzenia do liścia poprzez losowe wybieranie kolejnych następników (z jednostajnym rozkładem *prawdopodobieństwa). Przez $P(l)$, gdzie $l \in L$, oznaczmy prawdopodobieństwo dojścia do liścia l, tj.*

$$P(l) = \prod_{s \in W(l)} |N(s)|^{-1}$$

gdzie $W(l)$ to zbiór wszystkich węzłów leżących na ścieżce od s_I do l, zawierający s_I i nie zawierający l.

Ponadto, z powyższym eksperymentem zwiążemy zmienną losową $X : L \to \mathbb{N}$ zdefiniowaną, dla dowolnego $l \in L$, równością:

$$X(l) = \prod_{s \in W(l)} |N(s)|$$

Wtedy:

$$EX = |L|$$

Dowód.

$$EX = \sum_{l \in L} P(l)X(l) = \sum_{l \in L} 1 = |L| \qquad \square$$

Literatura

[1] Wikipedia, the free encyclopedia: Game complexity. `http://en.wikipedia.org/wiki/Game_complexity`. [dostęp: 2012-05-03].

[2] Louis Victor Allis. *Searching for Solutions in Games and Artificial Intelligence*. Praca doktorska, University of Limburg, 1994.

[3] Victor Allis. A knowledge-based approach of connect-four - the game is solved: White wins. Praca magisterska, Vrije Universiteit, Department of Mathematics and Computer Science, Amsterdam, The Netherlands, 1988.

[4] Piotr Beling. Partition search revisited. W przygotowaniu.

[5] Piotr Beling. Szybkie algorytmy decyzyjne w grach z doskonałą informacją i ich wykorzystanie w grach jej pozbawionych. Rozprawa doktorska, w przygotowaniu.

[6] Piotr Beling. Praktyczne aspekty programowania gier logicznych. Praca magisterska, Politechnika Łódzka, Łódź, 2006.

[7] Piotr Beling. Efektywne rozwiązanie problemu rozgrywki w otwarte karty w brydżu. *Metody Informatyki Stosowanej*, 3:5–18, 2011.

[8] Elwyn Ralph Berlekamp. Machine solution of no-trump double-dummy bridge problems. Praca magisterska, Massachusetts Institute of Technology, Department of Electrical Engineering, 1962.

[9] Elwyn Ralph Berlekamp. Program for double-dummy bridge problems – a new strategy for mechanical game playing. *Journal of the ACM*, 10(3):357–364, 1963.

[10] Paul M. Bethe. The state of automated bridge play, 2010.

[11] Ming-Sheng Chang. Building a fast double-dummy bridge solver. Raport instytutowy TR1996-725, New York University, Sierpie/n, 1996.

[12] Martin Fierz. Strategy game programming. `http://www.fierz.ch/strategy.htm`. [dostęp: 2011-10-01].

[13] Ian Frank. *Search and Planning under Incomplete Information - A Study using Bridge Card Play.* Praca doktorska, The University of Edinburgh, 1996.

[14] Chess programming wiki. `http://chessprogramming.wikispaces.com/`. [dostęp: 2011-10-01].

[15] M. L. Ginsberg. GIB: Steps toward an expert-level bridge-playing program. *Proceedings of the Sixteenth International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI-99)*, strony 584–589, 1999.

[16] Matthew L. Ginsberg. An analysis of the law of total tricks.

[17] Matthew L. Ginsberg. How computers will play bridge. *The Bridge World*, 1996.

[18] Matthew L. Ginsberg. GIB: Imperfect information in a computationally challenging game. *J. Artif. Intell. Res. (JAIR)*, 14:303–358, 2001.

[19] Marijn Heule, L.J.M. Rothkrantz. Solving games and dependence of applicable solving procedures. *Science of Computer Programming*, 67(1):105–124, jun 2007.

[20] D.N.L. Levy. The million pound bridge program. D.N.L. Levy, D.F. Beal, redaktorzy, *Heuristic Programming in Artificial Intelligence: The First Computer Olympiad*, Artificial Intelligence Series, strony 95–103. Ellis Horwood, 1989.

[21] T. Anthony Marsland. A review of game-tree pruning. *International Computer Chess Association Journal*, 9(1):3–19, 1986.

[22] Krzysztof Mossakowski, Jacek Mandziuk. Learning without human expertise: a case study of the double dummy bridge problem. *Trans. Neur. Netw.*, 20:278–299, February 2009.

[23] Aske Plaat. *Research, Re: Search & RE-SEARCH.* Praca doktorska, Erasmus Univ., Rotterdam, 1996.

[24] Jonathan Schaeffer. *One Jump Ahead: Computer Perfection at Checkers*, wolumen 978-0-387-76575-4. Springer, 2009.

[25] John Tromp. John's chess playground. `http://homepages.cwi.nl/~tromp/chess/chess.html`. [dostęp: 2013-03-15].

[26] John Tromp, Gunnar Farnebäck. Combinatorics of go. `http://www.cwi.nl/~tromp/go/gostate.ps`, 2007. [dostęp: 2013-03-15].

[27] H. Jaap van den Herik, Jos W. H. M. Uiterwijk, Jack van Rijswijck. Games solved: Now and in the future. *Artificial Intelligence*, 134(1-2):277–311, 2002.