UNIVERSIDAD AUTONOMA DE ZACATECAS
FRANCISCO GARCIA SALINAS

ESCUELA DE FISICA

ESTUDIO DE LAS DIFERENTES CONSTRUCCIONES TEORICAS EN EL ESPACIO DE REPRESENTACION $(j,0)\oplus(0,j)$

TESIS

que presenta

JESUS ALBERTO CAZARES MONTES

para obtener el título de

LICENCIADO EN FISICA

asesor de tesis

DR. VALERI V. DVOEGLAZOV

ZACATECAS, ZAC. NOVIEMBRE DE 1998

A LA MEMORIA DE IRIS

AGRADECIMIENTOS

Sin lugar a dudas, la parte más dificil de este trabajo, fue esta página, puesto que por espacio no puedo mencionar a todas aquellas personas que de uno u otro modo me han ayudado para la realización de la tesis. Sin embargo, estoy en gran deuda

- Con mis padres y familiares, por todo el apoyo que me han brindado.
- Con mi asesor de tesis Dr. Valeri V. Dvoeglazov, por toda la paciencia que me ha tenido para poder llevar a cabo la consumación de mi tesis.
- Con todos mis profesores por haberme enseñado los principios básicos de la naturaleza.
- Con los profesores que no sólo se conformaron en enseñarme física.
- Y con todos mis amigos y compañeros por su amistad y apoyo.

INDICE

Capítulo 1

Ecuación relativista de onda: Historia y el armazón general matemático

"Es mejor debatir una cuestión sin concluirla,
que llegar a una conclusión sin debatirla"

J. Joubert

En 1925 Dirac empezó a crear una teoría que fuese tan coherente como la mecánica de Newton; y es hasta después de tres años cuando logra por primera vez la difícil tarea de conciliar la teoría cuántica con la relatividad restringida. En este capítulo, mostraremos las bases de las que partió Dirac, así como dos formas de obtener la ecuación relativista de onda del electrón.

1.1 Teoría relativista de una partícula y notación relativista

Ha sido aceptado que cualquier teoría de la naturaleza fundamental de la materia debe ser consistente tanto con la relatividad como con la teoría cuántica. Brevemente mencionaremos en esta sección la notación relativista y los aspectos más importantes que tengan relación con el presente trabajo.

Cualquier evento está etiquetado por cuatro coordenadas: el tiempo y las coordenadas cartesianas del punto x, y, z, es decir, está en un espacio cuatridimensional. Toda rotación en el espacio cuatridimensional se puede descomponer en seis rotaciones en los planos xy, xz, zy, tx, ty, tz. Consideremos una rotación pseudoeclideana en el plano tx (obsérvese que una rotación de este tipo no cambia las coordenadas y y z). Si ϕ es el ángulo de rotación, entonces las coordenadas nuevas y antiguas se relacionarán por la fórmula

$$x^{'} = x \cosh\phi + ct\,\mathrm{senh}\phi \quad , \quad ct^{'} = x\mathrm{senh}\phi + ct\cosh\phi \tag{1.1}$$

donde ϕ es el ángulo de giro. Estas fórmulas difieren de las fórmulas ordinarias en la substitución de las funciones trigonométricas por funciones hiperbólicas. En esto se manifiesta la diferencia entre la geometría euclídea y la de Minkowski o pseudoeuclídea.

Cuando se pasa entre sistemas de referencia inerciales, de K a otro sistema K$^{'}$ que se mueve respecto de K con una velocidad V en dirección del eje X, es claro de los postulados de la teoría de la relatividad que en esta situación sólo cambian la coordenada x y el tiempo t, por lo tanto la fórmula de transformación debe ser de la forma (1.1). Si consideremos en el sistema K$^{'}$, el movimiento del origen de coordenandas del sistema K, se tendrá que $x = 0$, con lo que las fórmulas (1.1) toman la forma

$$x^{'} = ct\,\mathrm{senh}\phi \quad , \quad ct^{'} = ct\cosh\phi$$

dividiendo y denotando a $x^{'}/t^{'}$ con la velocidad V de K respecto de K$^{'}$ tenemos

$$\frac{V}{c} = \tanh\phi \qquad \text{ó} \qquad \mathrm{senh}\phi = \frac{V}{c}\cosh\phi$$

y haciendo uso de la relación $\cosh^2\alpha - \mathrm{senh}^2\alpha = 1$ se encuentra que

$$\cosh^2\phi = \frac{1}{1-\frac{V^2}{c^2}}$$

resultando

$$\cosh\phi = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \quad , \quad \mathrm{senh}\phi = \beta\gamma = \frac{\frac{V}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \tag{1.2}$$

donde $\beta = V/c$, por lo que sustituyendo en (1.1) y recordando que las coordenadas y y z no cambian, se obtiene finalmente

$$x^{'} = \frac{x+Vt}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \quad , \quad y^{'} = y \quad , \quad z^{'} = z \quad , \quad t^{'} = \frac{t+\frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \tag{1.3}$$

estas fórmulas se llaman fórmulas de transformación de Lorentz.

Como se vio, para definir un suceso necesitamos de las tres cordenadas espaciales (x, y, z) que forman un espacio tridimensional y del tiempo, o más correctamente, de la distancia con que se propaga una señal con velocidad c en un tiempo determinado; al conjunto de las cuatro coordenadas de un suceso (ct, x, y, z) se puede considerar como las componentes de un vector posición en cuatro dimensiones en el espacio cuatridimensional, a este vector también se le llama cuadrivector posición. Designaremos sus componentes por x^μ, donde el superindice toma los valores 0,1,2,3, siendo

$$x^0 = ct \quad , \quad x^1 = x \quad , \quad x^2 = y \quad , \quad x^3 = z$$

a un vector como x^μ se le llama vector contravariante, mientras que a un vector como x_μ se le llama vector covariante, la relación entre ellos está defninida como

$$x^0 = x_0 \quad , \quad x^i = -x_i \tag{1.4}$$

donde i toma los valores de 1,2,3. Tomando esto en consideración, las transformaciones de Lorentz para cualquier cuadrivector en forma contravariante son

$$A^{0\prime} = \frac{A^0 + \frac{V}{c}A^1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \quad , \quad A^{1\prime} = \frac{A^1 + \frac{V}{c}A^0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \quad , \quad A^{2\prime} = A^2 \quad , \quad A^{3\prime} = A^3 \tag{1.5a}$$

y en notación covariante

$$A'_0 = \frac{A_0 - \frac{V}{c}A_1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \quad , \quad A'_1 = \frac{A_1 - \frac{V}{c}A_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \quad , \quad A'_2 = A_2 \quad , \quad A'_3 = A_3 \tag{1.5b}$$

El tensor fundamental $g^{\mu\nu}$ entonces está definido por

$$g^{00} = 1 \quad , \quad g^{11} = g^{22} = g^{33} = -1 \quad , \quad g^{\mu\nu} = 0 \quad \text{para} \quad \mu \neq \nu$$

y lo podemos escribir como una matriz diagonal

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

en el espacio de Minkowski $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$. Si hacemos uso de este tensor, la relación entre vectores covariantes y contravariantes (ec. 1.4) se puede poner

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu \tag{1.6}$$

Dos vectores a_μ y b_μ tienen un producto escalar invariante bajo las transformaciones de Lorentz igual a

$$a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 = a^\mu b_\mu = a_\mu b^\mu$$

donde se ha hecho uso de la notación de Einstein[1].

Consideremos ahora dos eventos en el espacio-tiempo (ct, x, y, z) y ($ct + cdt, x + dx, y + dy, z + dz$). La distancia (o correctamente el *intervalo*) entre dos puntos

[1]Si en una expresión un indice se repite dos veces indica la suma sobre ese índice.

en el espacio -tiempo es ds, y como ds debe ser el mismo para todos los observadores (inerciales), debe de ser invariante bajo las transformaciones de Lorentz y rotaciones ordinarias, es decir

$$ds^2 = dx^\mu dx_\mu = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Con esta definicón, los eventos que están separados por un intervalo temporal tienen $ds^2 > 0$, aquellos que tienen un intervalo espacial tendrán $ds^2 < 0$, si $ds^2 = 0$ se dice que tienen un intervalo nulo.

Un operador diferencial en notación covariante será

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) = (\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla)$$

y en notación contravariante es

$$\partial^\mu = g^{\mu\nu}\partial_\nu = (\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla)$$

con lo que se obtiene el operador diferencial de segundo orden invariante de Lorentz

$$\partial^\mu \partial_\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \equiv \Box$$

llamado operador de d'Alembert o simplemente d'Alembertiano.

El cuadrivector de energía-momentum de una partícula es

$$p^\mu = (\frac{E}{c}, \mathbf{p}) \quad , \quad p_\mu = (\frac{E}{c}, -\mathbf{p}) \tag{1.7}$$

por lo que

$$p^2 = p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}\cdot\mathbf{p} = m^2 c^2$$

es decir

$$E^2 - \mathbf{p}^2 c^2 = m^2 c^4 \tag{1.8}$$

esta cantidad es invariante bajo las transformaciones de Lorentz.

1.2 Grupos de Lorentz y Poincaré

En el lenguaje matemático, un grupo $\langle G, \star \rangle$ es un conjunto G, junto a una operación binaria[2] $\star$ sobre G tal que los siguientes axiomas son satisfechos

[2]Una operación binaria $\star$ en un conjunto G es una regla que asigna a cada par ordenado

- La operación binaria $\star$ es asociativa
- Hay un elemento e en G tal que

$$e \star x = x \star e = x$$

para todo $x \in G$ (El elemento e es un elemento identidad para $\star$ en G).

- Para cada a en G, hay un elemento $a^{'}$ en G con la propiedad que

$$a^{'} \star a = a \star a^{'} = e$$

(El elemento $a^{'}$ es la inversa de a con respecto a la operación $\star$).

Es importante mencionar que algunos autores tienen otro axioma para un grupo, el que G sea cerrado bajo la operación $\star$ es decir $(a \star b) \in G \; \forall \; a, b \in G$, sin embargo, esto es una consecuencia de la definición de operación binaria. Si la operación binaria $\star$ es conmutativa el grupo recibe el nombre de grupo de Abel o Abeliano.

Ya conocida nuestra notación presentaremos ahora las formulaciones de los grupos de Lorentz y Poincaré. De acuerdo con el principio de relatividad, las leyes físicas son invariantes respecto a cambios de sistemas de referencia, matemáticamente lo último corresponde a una transformación lineal de coordenadas[3]

$$x^{\mu} \rightarrow x^{\mu^{'}} = \Lambda_{\nu}{}^{\mu} x^{\nu} + a^{\mu} \equiv \Lambda^{\mu\nu} x_{\nu} + a^{\mu} \quad , \quad \Lambda^{\mu\nu} = -\Lambda^{\nu\mu}$$

con la condición que la longitud cuadrada del intervalo

$$(x-y)^2 = (x_{\mu} - y_{\mu})(x^{\mu} - y^{\mu})$$

se conserve[4].

(a, b) de elementos de G algún elemento que está también en G, es decir, requerimos que G sea cerrado bajo una operación binaria de G.

[3]Asumimos que la traslación es elavorada después de la transformación homogenea.

[4]Las transformaciones lineales contínuas que conservan la longitud cuadrada del intervalo forman el grupo inhomogéneo de Lorentz o grupo de Poincaré, pero aparte se pueden considerar los grupos que contienen reflecciones en el espacio tiempo P, T, y $PT = 1$. Que es el grupo **completo** de Poincaré.

$$\begin{array}{cc} Px^k = -x^k & Px^0 = x^0 \\ Tx^k = x^k & Tx^0 = -x^0 \\ \multicolumn{2}{c}{PTx^{\mu} = -x^{\mu}} \\ (k = 1,2,3) & (\mu = 0,1,2,3) \end{array}$$

El intervalo es invariante si los coeficientes $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ satisfacen la condición

$$\Lambda^{\nu}{}_{\mu} \Lambda^{\mu}{}_{\sigma} = \delta^{\sigma}_{\nu} \quad , \quad \Lambda^{\nu}{}_{\mu} = g_{\mu\rho} \Lambda^{\rho}{}_{\beta} g^{\beta\nu}$$

Para la matriz de transformación Λ con elementos matriciales $\Lambda^{\mu}{}_{\sigma}$ la última relación toma la forma $\Lambda^T g \Lambda = g$. Así, se sigue que el determinante de la matriz Λ en el caso general es

Una rotación general espacial es de la forma

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = (R) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{ó} \qquad r' = Rr$$

donde R es la matriz de rotación. Como en una rotación la distancia al origen se conserva nos da $x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ó $r'^T r' = r^T r$, por lo que:

$$r^T R^T R r = r^T r \qquad \text{ó} \qquad R^T R = 1 \tag{1.9}$$

con lo que R es una matriz ortogonal de 3×3. Estas matrices forman un grupo denotado por O(3); para matrices de dimensión n es O(n), las matrices unitarias

---

$$det\Lambda = \pm 1$$

También, de la misma relación se sigue que los coeficientes $\Lambda^{\mu\nu}$ tienen la siguiente propiedad

$$\left(\Lambda^{00}\right)^2 - \sum \left(\Lambda^{0k}\right)^2 = 1$$

ó $\left(\Lambda^{00}\right)^2 \geq 1$, lo que significa que hay dos posibilidades

$$\Lambda^{00} \geq 1 \qquad \text{ó} \qquad \Lambda^{00} \leq -1$$

Entonces la transformación general puede ser dividida en cuatro clases diferentes con respecto al signo de $det\Lambda$ y Λ^{00}. Estas clases de transformaciones corresponden a las siguientes componentes conectadas del grupo general de Poincaré:

- $\mathcal{D}_+^\uparrow$: $\left(det\Lambda = 1\,,\ \Lambda^{00} \geq 1\right)$: La dirección del tiempo no cambia, y no ocurren reflecciones espaciales. La transformación general describe rotaciones y traslaciones en el espacio pseudoeuclídeo, formando el grupo propio u ortochroneo de Poincaré.
- $\mathcal{D}_+^\downarrow$: $\left(det\Lambda = 1\,,\ \Lambda^{00} \leq -1\right)$: La transformación general incluye reflexión del tiempo. Sin embargo, dado que la transformación es unimodular, debe contener también reflección de las coordenadas espaciales. Puesto de otro modo, cada transformación de esta clase puede ser representada como el producto de dos operaciones: una transformación que pertenezca a la clase $\mathcal{D}_+^\uparrow$ y una reflexión de todas las coordenadas PT. En particular la operación PT está contenida en $\mathcal{D}_+^\downarrow$. Las operaciones P y T en forma separada no están contenidas en $\mathcal{D}_+^\downarrow$ debido a la condición $det\Lambda = 1$. Juntas, las transformaciones de las clases $\mathcal{D}_+^\uparrow$ y $\mathcal{D}_+^\downarrow$ forma el grupo propio de Poincaré $\mathcal{D}_+$.
- $\mathcal{D}_-^\uparrow$: $\left(det\Lambda = -1\,,\ \Lambda^{00} \geq 1\right)$: Transformaciones de este tipo pueden ser escritas como un producto de una transformación de la clase $\mathcal{D}_+^\uparrow$ y una reflexión de las coordenadas espaciales. Junto con las transformaciones de la clase $\mathcal{D}_+^\uparrow$ forman el grupo ortochroneo de Poincaré.
- $\mathcal{D}_-^\downarrow$: $\left(det\Lambda = -1\,,\ \Lambda^{00} \leq -1\right)$: La dirección del tiempo es cambiada. Cada transformación de esta clase puede ser representada como el producto de una transformación de la clase $\mathcal{D}_+^\uparrow$ y una reflexión del tiempo.

El grupo general de Poincaré puede ser expresado en forma de una suma

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_+^\uparrow + PT\mathcal{D}_+^\uparrow + P\mathcal{D}_+^\uparrow + T\mathcal{D}_+^\uparrow$$

Donde los terminos respectivos corresponden a cada uno de los componentes ya mencionados.

forman también un grupo, denotado por U(n); es importante mencionar que las matrices hermitianas no forman un grupo a menos que conmuten.

Como un ejemplo de una rotación , consideremos una rotación de un vector V sobre el eje z. Esta rotación, considerada como una rotación activa (i.e. una rotación de un vector, permaneciendo el eje de coordenada fijo), es de mano izquierda; mientras que se considera como una rotación pasiva (i.e. rotando los ejes, permaneciendo el vector fijo) cuando es de mano derecha. Nosotros tendremos

$$\begin{pmatrix} V'_x \\ V'_y \\ V'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \mathrm{sen}\theta & 0 \\ -\mathrm{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

por lo que podemos denotar esta matriz de rotación como

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \mathrm{sen}\theta & 0 \\ -\mathrm{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.11a}$$

matrices similares para rotaciones sobre los ejes x y y son

$$R_x(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \mathrm{sen}\phi \\ 0 & -\mathrm{sen}\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \tag{1.11b}$$

$$R_y(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & -\mathrm{sen}\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \mathrm{sen}\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix} \tag{1.11c}$$

Nótese que estas matrices no conmutan, el grupo de rotación O(3) es no abeliano. Este es un grupo de Lie, es decir, un grupo continuo con un número infinito de elementos, dado que los parámetros de rotación (ángulos) toman un continuo de valores. Se ve que una rotación general tiene tres parámetros; R tiene nueve elementos, la ecuación (1.9) da seis condiciones sobre ella, y estos tres parámetros pueden, por ejemplo, escogerse como los tres ángulos de Euler.

Correspondientes a los tres parámetros están tres generadores definidos por

$$J_x = \frac{1}{i}\frac{dR_x(\phi)}{d\phi}|_{\phi=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \tag{1.12a}$$

$$J_y = \frac{1}{i}\frac{dR_y(\varphi)}{d\varphi}|_{\varphi=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.12b}$$

$$J_z = \frac{1}{i}\frac{dR_z(\theta)}{d\theta}|_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.12c}$$

Estos generadores son hermitianos, y están dados para rotaciones infinitesimales, por ejemplo

$$R_z(\delta\theta) = 1 + iJ_z\delta\theta \qquad , \qquad R_x(\delta\phi) = 1 + iJ_x\delta\phi \tag{1.13}$$

El conmutador de estas dos rotaciones puede ser calculado fácilmente con la ayuda de las relaciones de conmutación

$$[J_x, J_y] = J_xJ_y - J_yJ_x = iJ_z \qquad \text{y permutaciones cíclicas} \tag{1.14}$$

Para una rotación finita, la matriz correspondiente a una rotación sobre el eje Z a través de un ángulo $\theta = N\delta\theta$ $(N \to \infty)$ es

$$R_z(\theta) = [R_z(\delta\theta)]^N = (1 + iJ_z\delta\theta)^N = (1 + iJ_z\frac{\theta}{N})^N = e^{iJ_z\theta} \tag{1.15}$$

por lo cual, una rotación finita sobre un eje n de un ángulo θ es denotado como

$$R_n(\theta) = e^{i\mathbf{J}\cdot\boldsymbol{\theta}} = e^{i\mathbf{J}\cdot\mathbf{n}\theta} \tag{1.16}$$

donde $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{n}\theta$.

De la sección anterior, haciendo uso de las ecuaciones (1.2) y (1.5a) encontramos que

$$\begin{array}{cc} x^{0\prime} = x^0\cosh\phi + x^1\mathrm{senh}\phi & x^{1\prime} = x^0\mathrm{senh}\phi + x^1\cosh\phi \\ x^{2\prime} = x^2 & x^{3\prime} = x^3 \end{array} \tag{1.17}$$

que se puede poner como

$$\begin{pmatrix} x^{0\prime} \\ x^{1\prime} \\ x^{2\prime} \\ x^{3\prime} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\phi & \mathrm{senh}\phi & 0 & 0 \\ \mathrm{senh}\phi & \cosh\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \tag{1.18}$$

por lo que podemos denotar la matriz de rotación pseudoeuclideana como

$$B_x(\phi) = \begin{pmatrix} \cosh\phi & \mathrm{senh}\phi & 0 & 0 \\ \mathrm{senh}\phi & \cosh\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.19a}$$

para rotaciones en los planos ty y tz las matrices de rotación son

$$B_y(\varphi) = \begin{pmatrix} \cosh\varphi & 0 & \mathrm{senh}\varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \mathrm{senh}\varphi & 0 & \cosh\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.19b}$$

$$B_z(\theta)=\begin{pmatrix}\cosh\theta & 0 & 0 & \mathrm{senh}\theta\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ \mathrm{senh}\theta & 0 & 0 & \cosh\theta\end{pmatrix} \qquad (1.19c)$$

a estas rotaciones se les llama transformaciones de Lorentz puras o "boost", y conectan dos sistemas inerciales moviendose con velocidad relativa V. Los generadores de los boosts son

$$K_x=\frac{1}{i}\frac{dB_x(\phi)}{d\phi}|_{\phi=0}=-i\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} \qquad (1.20a)$$

$$K_y=\frac{1}{i}\frac{dB_x(\varphi)}{d\varphi}|_{\varphi=0}=-i\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} \qquad (1.20b)$$

$$K_z=\frac{1}{i}\frac{dB_z(\theta)}{d\theta}|_{\theta=0}=-i\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix} \qquad (1.20c)$$

En esta notación 4×4, los generadores de rotación J pueden ser escritos como

$$J_x=-i\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix} \qquad (1.21a)$$

$$J_y=-i\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix} \qquad (1.21b)$$

$$J_z=-i\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} \qquad (1.21c)$$

A estas rotaciones se les conoce como generadores del grupo de Lorentz propio (ortochroneo), y se compone de las rotaciones en los planos xy, xz, zy y de los boosts, que son las rotaciones en los planos pseudoeuclideanos tx, ty, tz.

Sus relaciones de conmutación son

$$
\begin{array}{ll}
[K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk} K_k & [J_i, K_i] = 0 \\
[J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk} K_k & [J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k
\end{array}
\tag{1.22}
$$

obsérvese que la última relación es una generalización de (1.14). Finalmente, formando $J_i \pm iK_i$ se puede observar que el grupo de Lorentz propio es isomorfo a SU(2)×SU(2).

El grupo de Poincaré incluye también traslaciones del punto central del sistema de referencia en el espacio-tiempo. Esas transformaciones guardan intervalos entre eventos. El grupo de Lorentz se define por seis parámetros, el grupo de Poincaré por diez (véase pie de página N.4). Se consideran también los grupos extendidos que incluyen reflexiones de los ejes de espacio ($\mathbf{x} \to -\mathbf{x}$) y del tiempo ($x_0 = ct \to -x_0$).

En las teorías cuánticas las partículas se describen por la función de onda (o bien, por la función de campo) que depende de cuatro coordenadas x^μ. La función del campo puede ser, en su turno, la función con unas componentes. Por ejemplo, para la descripción de un electrón se usa una función con cuatro componentes (bispinor), para un fotón también una función con cuatro componentes (el 4-vector potencial) o bien, se puede usar una función con seis componentes que corresponden a los componentes del campo eléctrico y magnético (los observables en electrodinámica clásica). Entonces la diferencia ente electrón y fotón es que sus funciones de campo se transforman de acuerdo a diferentes representaciones del grupo de Poincaré. Matemáticamente, a un cambio de sistema de referencia se puede poner en correspondencia una transformación lineal y uniforme de las funciones de campo (espinorial, escalar, vectorial u otro)

$$
u\,(x) \Rightarrow u'\,(x') = Lu\,(x)
$$

La matriz L se define completamente por la matriz Λ y al producto de dos elementos del grupo de Poincaré ponen en correspondencia el producto de dos transformaciones de las funciones de campo

$$
L_{\Lambda_1 \Lambda_2} = L_{\Lambda_1} L_{\Lambda_2}
$$

Al elemento unidad I del grupo de Poincaré corresponde la transformación idéntica de las funciones, al elemento inverso corresponde la transformación inversa en el espacio de las funciones del campo. Esta es una representación del grupo de Poincaré; las $u\,(x)$ forman las funciones de base de la transformación. Se pueden definir las representaciones $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$, $(0, 0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(1, 0) \oplus (0, 1)$ etc. Los números indicados tienen sentido de los valores propios del operador de momento angular para ambas partes de la función del campo.

1.3 Ecuación de Dirac

La teoría cuántica formulada por Schrödinger y Heisenberg es esencialmente una teoría no relativista. Para poder aplicar la teoría a partículas que posean gran velocidad, es necesario hacer la teoría covariante bajo las transformaciones de Lorentz, pues de este modo, cumple el principio de la relatividad restringida.

Del principio de correspondencia

$$E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \qquad\qquad \mathbf{p} \to -i\hbar\nabla \tag{1.23}$$

y al sustituir en (1.8) obtendremos la ecuación de onda para una partícula sin spin (una partícula escalar que denotaremos por ϕ)

$$\left(-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2} - (-c^2\hbar^2\nabla^2)\right)\phi = m^2c^4\phi$$

que acomodando términos se puede poner como

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\phi + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\phi = \left(\Box + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\phi = 0 \tag{1.24}$$

que es conocida como la ecuación de Klein-Gordon[5].

Si sustituimos (1.23) en la forma no relativista de (1.8) ($E = p^2/2m$, donde E es sólo la energía cinética) obtenemos la ecuación para una partícula libre de Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial\phi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\phi$$

es decir, la ecuación de Schrödinger es la aproximación no relativista de la ecuación de Klein-Gordon. Para la ecuación de Schrödinger la densidad de probabilidad es

$$\rho = \phi^*\phi$$

y la corriente de probabilidad es

$$\mathbf{J} = -\frac{i\hbar}{2m}(\phi^*\nabla\phi - \phi\nabla\phi^*)$$

lo cual obedece la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{J} = \phi^*\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{i\hbar}{2m}\nabla^2\phi\right) + \phi\left(\frac{\partial\phi^*}{\partial t} + \frac{i\hbar}{2m}\nabla^2\phi^*\right) = 0$$

Para la ecuación de Klein-Gordon, ρ no debe transformarse como un escalar, sino como la componente temporal de un 4-vector en el que la parte espacial este dado por $\mathbf{J}$, es decir

$$\rho = \frac{i\hbar}{2m}\left(\phi^*\frac{\partial\phi}{\partial t} - \phi\frac{\partial\phi^*}{\partial t}\right)$$

[5] Esta ecuación también fue encontrada por E. Schrödinger [27].

así

$$J^\mu = (\rho, \mathbf{J}) = \frac{i\hbar}{m}(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*)$$

lo cual cumple la ecuación de continuidad

$$\partial_\mu J^\mu = \frac{i\hbar}{m}(\phi^* \Box \phi - \phi \Box \phi^*) = 0$$

Sin embargo, ρ no está definido (a diferencia de ρ de la ecuación de Schrödinger) como una cantidad positiva. Dado que la ecuación de Klein-Gordon es de segundo orden, ϕ y $\partial\phi/\partial t$ pueden ser fijados arbitrariamente a un tiempo dado, por lo que ρ puede tomar valores negativos, y su interpretación como una densidad de probabilidad tiene que ser abandonada; existe además otro problema, el que la solución a (1.8) vista como una ecuación para E es

$$E = \pm\sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} \tag{1.8a}$$

es decir, las soluciones contienen términos con energía negativa además de positiva, para una partícula libre con energía constante, si esta dificultad trata de ser evitada, escogiendo la partícula que tenga energía positiva y los estados de energía negativa puedan ser ignorados, sin embargo, una partícula interactuando puede cambiar energía con su ambiente, y luego, nada podría parar una cascada infinita a estados de energía negativa, emitiendo una cantidad infinita de energía en el proceso, lo cual no sucede; con lo cual, la interpretación de la ecuación de Klein-Gordon como una ecuación para *una* partícula simple tiene que ser abandonada. Dirac propuso que la ecuación correcta tiene que satisfacer, al igual que la ecuación de Klein-Gordon, la relación dispersional relativista de Einstein (1.8), y además debe de ser de primer orden en las derivadas en tiempo y en coordenadas espaciales, es decir la ecuación debe ser de la forma

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x^\mu) = \hat{H}\Psi(x^\mu) = \left[c\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p} + \beta mc^2\right]\Psi(x^\mu) \tag{1.25a}$$

ó

$$\left(E - c\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p} - \beta mc^2\right)\Psi\left(x^\mu\right) = 0 \tag{1.25b}$$

Para saber la forma de $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\beta}$ que aparecen en el hamiltoniano[6] podemos requerir que cualquier solución de la ecuación (1.25) también es una solución de la ecuación de Klein-Gordon (1.24), para esto apliquemos por la izquierda $\left(E + c\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p} + \beta mc^2\right)$ a la segunda ecuación (1.25) con lo que se obtiene

[6] El hamiltoniano clásico relativista para una partícula libre es la parte positiva de (1.8a). Sin embargo, si se sustituye en la ecuación (1.25) y se remplaza $\mathbf{p}$ por $-i\hbar\nabla$, la ecuación de onda es asimétrica con respecto a las derivadas de espacio y tiempo, y así, deja de ser local. Dirac modificó el hamiltoniano de tal modo que lo hizo lineal en las derivadas de espacio.

$$\left[-\hbar^2 \tfrac{\partial^2}{\partial t^2} + c^2\hbar^2 {\alpha^i}^2 \tfrac{\partial^2}{\partial {x^i}^2} + c^2\hbar^2 \underbrace{\left\{\alpha^i, \alpha^j\right\}}_{i\neq j} \left(\tfrac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}\right)\right] \Psi\left(x^\mu\right) +$$
$$+ \left[i\hbar mc^3 \left\{\alpha^i, \beta\right\} \tfrac{\partial}{\partial x^i} - \beta^2 m^2 c^4\right] \Psi\left(x^\mu\right) = 0$$

pero como

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \Psi\left(x^\mu\right)}{\partial t^2} = m^2 c^4 \Psi\left(x^\mu\right) - \hbar^2 c^2 \nabla^2 \Psi\left(x^\mu\right)$$

entonces (considerando $\beta = \alpha^0$)

$$\left\{\alpha^\mu, \alpha^\nu\right\} = 2\delta_{\mu\nu}$$

por lo tanto las α tienen que ser matrices. Si $\mu \neq \nu$ entonces $\alpha^\mu \alpha^\nu = -\alpha^\nu \alpha^\mu$, con lo que

$$\det\left|\alpha^\mu \alpha^\nu\right| = \det\left|-\alpha^\nu \alpha^\mu\right| = (-1)^d \det\left|\alpha^\nu \alpha^\mu\right| = (-1)^d \det\left|\alpha^\mu \alpha^\nu\right|$$

por lo tanto $d = 2n$, es decir, es par. Si $d = 2$ las matrices α serían las matrices de Pauli, pero las tres matrices de Pauli no forman un sistema completo y no existe una cuarta matriz que anticonmute con todas las matrices de Pauli, por lo que no pueden ser éstas, y $d \geq 4$, consideremos $d = 4$, entonces

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi\left(x^\mu\right) = \left[-i\hbar c \alpha^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \beta mc^2\right] \Psi\left(x^\mu\right)$$

se puede poner como

$$i\hbar \gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} \Psi\left(x^\mu\right) = \left[-i\hbar c \gamma^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \beta^2 mc^2\right] \Psi\left(x^\mu\right)$$

donde se ha usado[7] $\beta \alpha^i = \gamma^i$ y $\beta = \gamma^0$, y pasando todo al lado izquierdo se obtiene

$$\left(i\hbar \gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i\hbar c \gamma^i \frac{\partial}{\partial x^i} - \mathbf{1} mc^2\right) \Psi\left(x^\mu\right) = 0$$

si hacemos[8] $\hbar = c = 1$, esto se puede acomodar como

---

[7]Las matrices γ son las matrices de Dirac y su forma en la representación standard ó canónica es

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \tag{1.25}$$

donde $\mathbf{1}$ es la matriz unidad de orden 2×2 y las σ son las matrices de Pauli.

[8]Generalmente, en teoría cuántica de campos se utiliza el sistema de unidades en el cual $\hbar = c = 1$ (por conveniencia). Este sistema de unidades lo utilizaremos frecuentemente.

$$(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - \mathbf{1}m)\,\Psi\,(x^{\mu}) = 0 \tag{1.26}$$

que es la ecuación de Dirac para partículas con spin 1/2.

Podemos encontrar la ecuación de Dirac de un modo diferente, para esto hagamos el producto $\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}$

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} = \boldsymbol{\sigma}^{i}\mathbf{p}^{i}$$

donde las σ son las matrices de Pauli

$$\sigma^{1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma^{2} = i\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma^{3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.27}$$

entonces se obtiene

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix} \tag{1.28}$$

por lo cual

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})^{2} = \begin{pmatrix} p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 & 0 \\ 0 & p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \end{pmatrix} = \mathbf{p}^{2} \tag{1.29}$$

por lo que si trabajamos para partículas con spin 1/2, las cuales tienen dos grados de libertad adicionales [9], podemos sustituir $\mathbf{p}^2$ por $(\boldsymbol{\sigma}\ \cdot\mathbf{p})^2$ y obtenemos de la relación (1.8)

$$\left(\frac{i\hbar}{c}\frac{\partial}{\partial t} + i\hbar\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla\right)\left(\frac{i\hbar}{c}\frac{\partial}{\partial t} - i\hbar\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla\right)\phi = (mc)^{2}\phi \tag{1.30}$$

si definimos

$$\phi_R = \frac{1}{mc}\left(\frac{i\hbar}{c}\frac{\partial}{\partial t} - i\hbar\boldsymbol{\sigma}\ \cdot\nabla\right)\phi \qquad , \qquad \phi_L = \phi$$

entonces la ecuación (1.31) nos lleva a

$$\left(\frac{i\hbar}{c}\frac{\partial}{\partial t} - i\hbar\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla\right)\phi_L = mc\phi_R \tag{1.31}$$

$$\left(\frac{i\hbar}{c}\frac{\partial}{\partial t} + i\hbar\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla\right)\phi_R = mc\phi_L \tag{1.32}$$

si sumamos y restamos las ecuaciones (1.33) y (1.32) obtenemos

$$\left(\frac{i\hbar}{c}\frac{\partial}{\partial t} + i\hbar\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla - mc\right)\phi_R + \left(\frac{i\hbar}{c}\frac{\partial}{\partial t} - i\hbar\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla - mc\right)\phi_L = 0$$

[9] Véase por ejemplo los experimentos de Stern-Gerlach, Zeeman, etc.

$$\left(\frac{i\hbar}{c}\frac{\partial}{\partial t} + i\hbar\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla + mc\right)\phi_R - \left(\frac{i\hbar}{c}\frac{\partial}{\partial t} - i\hbar\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla + mc\right)\phi_L = 0$$

y si hacemos $\psi = (\phi_L + \phi_R)/\sqrt{2}$ y $\chi = (\phi_R - \phi_L)/\sqrt{2}$

$$\begin{pmatrix} \frac{i\hbar}{c}\frac{\partial}{\partial t} & i\hbar\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla \\ -i\hbar\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla & \frac{-i\hbar}{c}\frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} = mc \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} \tag{1.33}$$

o bien, haciendo $\hbar = c = 1$ y

$$\Psi\left(x^\mu\right) = \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_R + \phi_L \\ \phi_R - \phi_L \end{pmatrix} \tag{1.34}$$

obtendremos

$$\left[i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right]\Psi(x^\mu) = 0$$

que nuevamente es la ecuación de Dirac en la representación canónica (véase la sec.2.2.1).

Sin embargo, las relaciones de dispersión son

$$E = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$$

por lo que la ecuación de Dirac, al igual que la de Klein-Gordon, tampoco puede ser considerada como ecuación para una partícula. Ante este problema Dirac propuso la existencia de antipartículas, teoría de huecos y el "mar de Dirac". El último, de hecho, expone una estructura complicada del vacío, este es el mar infinito de electrones, protones y otras partículas con energía negativa y con el espin 1/2. Si un electrón de este mar soporta una transición al área de energías positivas (fig.1) por la absorción de energía, una vacante resultante en este mar puede considerarse como una partícula, el positrón, que es la antipartícula del electrón. El proceso inverso (aniquilación) puede ocurrir únicamente cuando tenemos una vacante (un "hueco") en el área de energías negativas. La transición sin hueco es prohibida por el principio de Pauli.

Un tercer modo de encontrar esta ecuación estará dado en base a los postulados de Wigner, lo que se tratará en el siguiente capítulo.

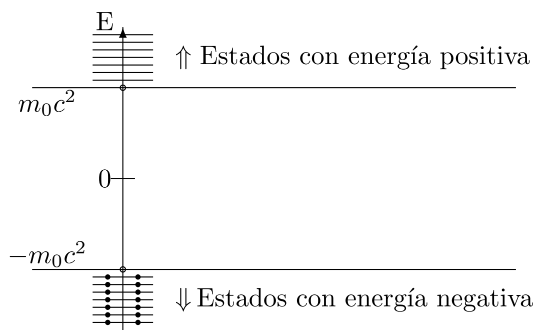

Fig.1 En la teoría de huecos los estados de energía negativa son ocupados con electrones. De acuerdo al principio de Pauli, cada estado (nlm_l) puede contener dos electrones, etiquetados según su espin sea arriba o abajo.

Capítulo 2

Ecuación relativista de onda: Las representaciónes del tipo $(j,0)\oplus(0,j)$

"Las leyes físicas debieran poseer belleza matemática"

P.A.M. Dirac

2.1 Postulados de Wigner: Una ecuación de onda para spin j

Un modo con el que se puede formular una ecuación relativista de onda es usando los postulados de Wigner. Para la construcción de una teoría relativista en cualquier representación vamos a suponer que:

- Las relaciones dispersionales relativistas (con $\hbar = c = 1$) $E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2$, son válidas para estados de partículas libres.
- Para un spin arbitrario j los espinores derechos $(j,0)$ e izquierdos $(0,j)$ se transforman de acuerdo con las reglas de Wigner

$$\phi_R(p^\mu) = \Lambda_R\left(p^\mu \longleftarrow \overset{o}{p}{}^\mu\right)\phi_R(\overset{o}{p}{}^\mu) = \exp\left(+\mathbf{J}\cdot\varphi\right)\phi_R(\overset{o}{p}{}^\mu) \tag{2.1a}$$

$$\phi_L(p^\mu) = \Lambda_L\left(p^\mu \longleftarrow \overset{o}{p}{}^\mu\right)\phi_L(\overset{o}{p}{}^\mu) = \exp\left(-\mathbf{J}\cdot\varphi\right)\phi_L(\overset{o}{p}{}^\mu) \tag{2.1b}$$

$\Lambda_{R,L}$ son las matrices de boost de Lorentz; $\mathbf{J}$ son las matrices de spin; $\boldsymbol{\varphi}$

son parámetros de boost dado. En el caso de bradyones[1] los últimos se definen (en el sistema de unidades $\hbar = c = 1$) como

$$\cosh(\varphi) = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{E}{m} \qquad \operatorname{senh}(\varphi) = v\gamma = \frac{|\mathbf{p}|}{m} \\ \hat{\boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{n} = \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \tag{2.2}$$

- $\phi_{R,L}(p^\mu)$ por transformación unitaria pueden hacer los espinores propios del operador de helicidad

$$(\mathbf{J}\cdot\mathbf{n})\,\phi_{R.L}(p^\mu) = h\phi_{R.L}(p^\mu) \qquad\qquad h = -j, -j+1, ..., j \tag{2.3}$$

- En reposo, exactamente si escogemos el sistema de referencia de tal forma que $\overset{o}{p}{}^{\mu} = (E = m, \mathbf{p} = \mathbf{0})$[2] los espinores derechos e izquierdos se conectan por la relación de Ryder-Burgard

$$\phi_R(\overset{o}{p}{}^{\mu}) = \wp_{u,v}\phi_L(\overset{o}{p}{}^{\mu}) \tag{2.4}$$

donde

$$\wp_{u,v} = \left\{ \begin{array}{ll} +1 & \text{para los } u \text{ espinores} \\ -1 & \text{para los } v \text{ espinores} \end{array} \right\} \tag{2.5}$$

Si aplicamos las ecuaciones (2.1) y (2.4) se obtiene

$$\begin{aligned}\phi_R(p^\mu) &= \Lambda_R\left(p^\mu \longleftarrow \overset{o}{p}{}^{\mu}\right)\phi_R(\overset{o}{p}{}^{\mu}) = \wp_{u,v}\Lambda_R\left(p^\mu \longleftarrow \overset{o}{p}{}^{\mu}\right)\phi_L(\overset{o}{p}{}^{\mu}) = \\ &= \wp_{u,v}\Lambda_R\left(p^\mu \longleftarrow \overset{o}{p}{}^{\mu}\right)\Lambda_L^{-1}\left(p^\mu \longleftarrow \overset{o}{p}{}^{\mu}\right)\phi_L(p^\mu)\end{aligned} \tag{2.6a}$$

$$\begin{aligned}\phi_L(p^\mu) &= \Lambda_L\left(p^\mu \longleftarrow \overset{o}{p}{}^{\mu}\right)\phi_L(\overset{o}{p}{}^{\mu}) = \wp_{u,v}\Lambda_L\left(p^\mu \longleftarrow \overset{o}{p}{}^{\mu}\right)\phi_R(\overset{o}{p}{}^{\mu}) = \\ &= \wp_{u,v}\Lambda_L\left(p^\mu \longleftarrow \overset{o}{p}{}^{\mu}\right)\Lambda_R^{-1}\left(p^\mu \longleftarrow \overset{o}{p}{}^{\mu}\right)\phi_R(p^\mu)\end{aligned} \tag{2.6b}$$

es importante mencionar que para las representaciones del grupo de Lorentz finito-dimensionales

[1]Los bradyones son partículas que se mueven con velocidad menor que la de la luz c≈300,000 km/s. Los taquiones se mueven con velocidad mayor que c. La idea de existencia de taquiones fue desarrollada por el Prof. E. Recami hace mucho teimpo, pero sólo en los últimos años fueron producidos los experimentos que indican la existencia de los paquetes de onda taquiónicos, esperamos que los resultados sean confirmados con la colaboraciones de Nimtz y de Chiao.

[2]No existen partículas sin masa en reposo.

$$\Lambda_{L,R}^{-1}\left(p^\mu \longleftarrow \overset{o\mu}{p}\right) = \Lambda_{R,L}^{\dagger}\left(p^\mu \longleftarrow \overset{o\mu}{p}\right) \tag{2.7}$$

entonces, si consideramos el "bispinor" del tipo Dirac

$$\Psi(p^\mu) = \begin{pmatrix} \phi_R(p^\mu) \\ \phi_L(p^\mu) \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

las ecuaciones (2.6) se pueden abreviar como

$$\Psi(p^\mu) = \begin{pmatrix} 0 & \wp_{u,v}\Lambda_R\left(p^\mu \longleftarrow \overset{o\mu}{p}\right)\Lambda_L^{-1}\left(p^\mu \longleftarrow \overset{o\mu}{p}\right) \\ \wp_{u,v}\Lambda_L\left(p^\mu \longleftarrow \overset{o\mu}{p}\right)\Lambda_R^{-1}\left(p^\mu \longleftarrow \overset{o\mu}{p}\right) & 0 \end{pmatrix}\Psi(p^\mu) \tag{2.9}$$

ó

$$\begin{pmatrix} -1 & \wp_{u,v}\Lambda_R\left(p^\mu \longleftarrow \overset{o\mu}{p}\right)\Lambda_L^{-1}\left(p^\mu \longleftarrow \overset{o\mu}{p}\right) \\ \wp_{u,v}\Lambda_L\left(p^\mu \longleftarrow \overset{o\mu}{p}\right)\Lambda_R^{-1}\left(p^\mu \longleftarrow \overset{o\mu}{p}\right) & -1 \end{pmatrix}\Psi(p^\mu) = 0 \tag{2.10}$$

lo cual se puede poner como[3]

$$\left[\gamma^{\mu_1\cdots\mu_{2j}}p_1\cdots p_{2j} - \wp_{u,v}m^{2j}\right]\Psi(p^\mu) = 0 \tag{2.12}$$

El operador de Wigner de reversión de tiempo para el spin j es

$$\left(\Theta_{[j]}\right)_{\sigma,\sigma'} = (-1)^{j+\sigma}\delta_{\sigma',-\sigma} \tag{2.13}$$

donde σ y σ' son los eigenvalores de $\mathbf{J}$ y por definición $\Theta_{[j]}$ es real, además tiene la propiedad

$$\Theta_{[j]}\mathbf{J}\Theta_{[j]}^{-1} = -\mathbf{J}^*$$

por lo que si $\phi_L(p^\mu)$ se transforma como un spinor $(0,j)$ bajo los boosts de Lorentz, entonces $\Theta_{[j]}\phi_L^*$ se transforma como un spinor $(j,0)$. Similarmente, si $\phi_R(p^\mu)$ se transforma como un spinor $(j,0)$ bajo los boosts de Lorenz, entonces $\Theta_{[j]}\phi_R^*(p^\mu)$ se transforma como un spinor $(0,j)$, por lo cual, aparte de los "bispinores " del tipo Dirac

[3]En el espacio de las coordenadas esta ecuación es

$$\begin{matrix} \left[\gamma^{\mu_1\cdots\mu_{2j}}\partial_{\mu_1}\cdots\partial_{\mu_{2j}} - m^{2j}\right]\Psi(x) = 0 & \text{para fermiones} \\ \left[\gamma^{\mu_1\cdots\mu_{2j}}\partial_{\mu_1}\cdots\partial_{\mu_{2j}} - \rho_{u,v}m^{2j}\right]\Psi(x) = 0 & \text{para bosones} \end{matrix} \tag{2.11}$$

con $\rho_{u,v} = \frac{i\frac{\partial}{\partial t}}{E}$.

$$u(p^\mu) = \begin{pmatrix} \phi_R(p^\mu) \\ \phi_L(p^\mu) \end{pmatrix} \tag{2.14a}$$

$$v(p^\mu) = \begin{pmatrix} \phi_R(p^\mu) \\ -\phi_L(p^\mu) \end{pmatrix} \tag{2.14b}$$

podemos considerar los "bispinores" autoconjugados y contra-autoconjugados de carga,

$$\lambda(p^\mu) = \begin{pmatrix} \left(\zeta_\lambda \Theta_{[j]}\right) \phi_L^*(p^\mu) \\ \phi_L(p^\mu) \end{pmatrix} \tag{2.15a}$$

$$\rho(p^\mu) = \begin{pmatrix} \phi_R(p^\mu) \\ \left(\zeta_\rho \Theta_{[j]}\right)^* \phi_R^*(p^\mu) \end{pmatrix} \tag{2.15b}$$

respectivamente, donde ζ_λ y ζ_ρ son factores de fase. En el capítulo 3 se hará un estudio general sobre sus propiedades.

2.2 Spin $j = 1/2$: Ecuación de Dirac

Consideremos primero el caso de spin $j = 1/2$, en este caso $\mathbf{J} = \boldsymbol{\sigma}/2$, donde las $\boldsymbol{\sigma}$ son las matrices de Pauli, haciendo un desarrollo en serie de Taylor de $e^{(\pm\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\varphi}/2)}$ obtenemos

$$\exp(\pm\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\varphi}/2) = \mathbf{1} \pm \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\varphi}/2 + \frac{(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\varphi}/2)^2}{2!} \pm \frac{(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\varphi}/2)^3}{3!} + \cdots$$

y por la ecuación (1.29) $(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\varphi})^2 = \varphi^2$, por lo tanto se puede poner como

$$\exp(\pm\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\varphi}/2) = \mathbf{1}(1+\frac{(\varphi/2)^2}{2!}+\frac{(\varphi/2)^4}{4!}+\cdots)\pm(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\varphi}/2)(1+\frac{(\varphi/2)^2}{3!}+\frac{(\varphi/2)^4}{5!}+\cdots)$$

y acomodando el segundo término obtenemos

$$\exp(\pm\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\varphi}/2) = \mathbf{1}(1+\frac{(\varphi/2)^2}{2!}+\frac{(\varphi/2)^4}{4!}+\cdots)\pm\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\varphi}/2}{\varphi/2}(\varphi/2+\frac{(\varphi/2)^3}{3!}+\frac{(\varphi/2)^5}{5!}+\cdots)$$

el primer término es el desarrollo del coseno hiperbólico, mientras que el segundo es el desarrollo del seno hiperbólico, por lo que el exponente es

$$\exp(\pm\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\varphi}/2) = \cosh(\varphi/2) \pm (\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}})\mathrm{senh}(\varphi/2) \tag{2.16}$$

pero

$$\cosh\frac{\varphi}{2}=\sqrt{\frac{\cosh\varphi+1}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{E}{m}+1}{2}}=\sqrt{\frac{E+m}{2m}}\sqrt{\frac{E+m}{E+m}}=\frac{E+m}{\sqrt{2m(E+m)}} \tag{2.17}$$

y

$$\operatorname{senh}\frac{\varphi}{2}=\sqrt{\frac{\cosh\varphi-1}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{E}{m}-1}{2}}=\sqrt{\frac{E-m}{2m}}\sqrt{\frac{E+m}{E+m}}=\frac{p}{\sqrt{2m(E+m)}} \tag{2.18}$$

puesto que $E^2-m^2=\mathbf{p}^2$; con lo que la ecuación (2.16) se transforma a

$$\exp(\pm\boldsymbol{\sigma}\ \cdot\boldsymbol{\varphi}\ /2)=\Lambda_{R,L}\left(p^\mu\longleftarrow\overset{o}{p}{}^\mu\right)=\frac{E+m\pm(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})}{\sqrt{2m(E+m)}} \tag{2.19}$$

donde se ha usado $\hat{\boldsymbol{\varphi}}=\mathbf{p}/p$. De la ecuación (2.19) se deduce que $\Lambda_R\left(p^\mu\longleftarrow\overset{o}{p}{}^\mu\right)$ y $\Lambda_L\left(p^\mu\longleftarrow\overset{o}{p}{}^\mu\right)$ son

$$\Lambda_R\left(p^\mu\longleftarrow\overset{o}{p}{}^\mu\right)=\frac{E+m+\boldsymbol{\sigma}\ \cdot\mathbf{p}}{\sqrt{2m(E+m)}} \tag{2.20a}$$

$$\Lambda_L\left(p^\mu\longleftarrow\overset{o}{p}{}^\mu\right)=\frac{E+m-\boldsymbol{\sigma}\ \cdot\mathbf{p}}{\sqrt{2m(E+m)}} \tag{2.20b}$$

entonces, haciendo uso de (1.28) obtenemos

$$\begin{aligned}\Lambda_R\left(p^\mu\longleftarrow\overset{o}{p}{}^\mu\right)&=\tfrac{1}{\sqrt{2m(E+m)}}\begin{pmatrix}E+m+p_z & p_x-ip_y\\ p_x+ip_y & E+m-p_z\end{pmatrix}=\\ &=\tfrac{1}{\sqrt{2m(E+m)}}\begin{pmatrix}p^++m & p_l\\ p_r & p^-+m\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{2.21a}$$

$$\begin{aligned}\Lambda_L\left(p^\mu\longleftarrow\overset{o}{p}{}^\mu\right)&=\tfrac{1}{\sqrt{2m(E+m)}}\begin{pmatrix}E+m-p_z & -p_x+ip_y\\ -(p_x+ip_y) & E+m+p_z\end{pmatrix}=\\ &=\tfrac{1}{\sqrt{2m(E+m)}}\begin{pmatrix}p^-+m & -p_l\\ -p_r & p^++m\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{2.21b}$$

donde hemos llamado

$$E\pm p_z=p^\pm \qquad p_x-ip_y=p_l \qquad p_x+ip_y=p_r$$

usando la ecuación (2.7) y el primer postulado de Wigner ($E^2-\mathbf{p}^2=m^2$) se puede ver que las inversas de las ecuaciones (2.21) son

$$\Lambda_R^{-1}\left(p^\mu \longleftarrow \overset{o\mu}{p}\right) = \frac{1}{\sqrt{2m(E+m)}}\begin{pmatrix} p^- + m & -p_l \\ -p_r & p^+ + m \end{pmatrix} \tag{2.22a}$$

$$\Lambda_L^{-1}\left(p^\mu \longleftarrow \overset{o\mu}{p}\right) = \frac{1}{\sqrt{2m(E+m)}}\begin{pmatrix} p^+ + m & p_l \\ p_r & p^- + m \end{pmatrix} \tag{2.22b}$$

por lo que haciendo los productos (2.21a) (2.22b) y (2.21b) (2.22a) encontramos

$$\Lambda_{R,L}\left(p^\mu \longleftarrow \overset{o\mu}{p}\right)\Lambda_{L,R}^{-1}\left(p^\mu \longleftarrow \overset{o\mu}{p}\right) = \left[\frac{E+m\pm(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})}{\sqrt{2m(E+m)}}\right]^2 = \frac{E\pm(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})}{m}$$

es decir

$$\Lambda_R\left(p^\mu \longleftarrow \overset{o\mu}{p}\right)\Lambda_L^{-1}\left(p^\mu \longleftarrow \overset{o\mu}{p}\right) = \frac{E+\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{m} = \frac{1}{m}\begin{pmatrix} p^+ & p_l \\ p_r & p^- \end{pmatrix} \tag{2.23a}$$

$$\Lambda_L\left(p^\mu \longleftarrow \overset{o\mu}{p}\right)\Lambda_R^{-1}\left(p^\mu \longleftarrow \overset{o\mu}{p}\right) = \frac{E-\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{m} = \frac{1}{m}\begin{pmatrix} p^- & -p_l \\ -p_r & p^+ \end{pmatrix} \tag{2.23b}$$

por lo que la ecuación (2.10) se puede poner, haciendo uso de las ecuaciones (2.23) y (1.7) como

$$\begin{pmatrix} -\wp_{u,v} & \frac{p_0+\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{m} \\ \frac{p_0-\sigma\cdot\mathbf{p}}{m} & -\wp_{u,v} \end{pmatrix}\Psi_\pm(p^\mu) = 0$$

donde $\Psi_+ = u$ y $\Psi_- = v$, esto también se puede poner como

$$\begin{pmatrix} -\wp_{u,v}m & p_0+\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} \\ p_0-\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} & -\wp_{u,v}m \end{pmatrix}\Psi_\pm(p^\mu) = 0 \tag{2.24}$$

en la representación de Weyl

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \tag{2.25}$$

por lo que la ecuación (2.24) queda

$$[\gamma^\mu p_\mu - \wp_{u,v}m]\,\Psi_\pm(p^\mu) = 0 \tag{2.26}$$

que es la forma de la ecuación (2.12) para spin $j = 1/2$; nótese que usando (1.23) la ecuación (2.24) queda

$$[i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m]\,\Psi(x^{\mu}) = 0 \tag{2.27}$$

que es la ecuación de Dirac.

2.2.1 Soluciones a la ecuación de Dirac

Conocemos ya los valores de $\Lambda_R\left(p^{\mu} \longleftarrow \overset{o\mu}{p}\right)$ y $\Lambda_L\left(p^{\mu} \longleftarrow \overset{o\mu}{p}\right)$, por lo cual, el segundo postulado de Wigner (ecs. 2.1) lo podemos abreviar como

$$\begin{pmatrix} \phi_R(p^{\mu}) \\ \phi_L(p^{\mu}) \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} \phi_R(\overset{o\mu}{p}) \\ \phi_L(\overset{o\mu}{p}) \end{pmatrix}$$

o bien de la forma

$$\begin{pmatrix} \phi_R(p^{\mu}) \\ \phi_L(p^{\mu}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda_R\left(p^{\mu} \longleftarrow \overset{o\mu}{p}\right) & 0 \\ 0 & \Lambda_L\left(p^{\mu} \longleftarrow \overset{o\mu}{p}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_R(\overset{o\mu}{p}) \\ \phi_L(\overset{o\mu}{p}) \end{pmatrix} \tag{2.28}$$

En el caso de spin $j = 1/2$, $\Lambda_R\left(p^{\mu} \longleftarrow \overset{o\mu}{p}\right)$ y $\Lambda_L\left(p^{\mu} \longleftarrow \overset{o\mu}{p}\right)$ están dados por las ecuaciones (2.21) así, la ecuación (2.28) se puede poner como

$$u(p^{\mu}) = \frac{1}{\sqrt{2m(E+m)}} \begin{pmatrix} p^{+}+m & p_l & 0 & 0 \\ p_r & p^{-}+m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p^{-}+m & -p_l \\ 0 & 0 & -p_r & p^{+}+m \end{pmatrix} u(\overset{o\mu}{p}) \tag{2.29}$$

donde $u(\overset{o\mu}{p})$ denota los bispinores en reposo [4]

$$u_{\uparrow}(\overrightarrow{0}) = \sqrt{\frac{m}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad u_{\downarrow}(\overrightarrow{0}) = \sqrt{\frac{m}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\tag{2.30}$$
$$v_{\uparrow}(\overrightarrow{0}) = \sqrt{\frac{m}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_{\downarrow}(\overrightarrow{0}) = \sqrt{\frac{m}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

[4] Vamos a normalizar u a la masa, de tal manera que $\overline{u_{\sigma}}(\overrightarrow{p})u_{\sigma}(\overrightarrow{p}) = m$. La razón es que en el limite $m \to 0$ los bispinores tienen que ser igual a cero, gracias al hecho que no existen partículas sin masa en reposo.

por lo que haciendo los productos entre la ecuación (2.29) y cada bispinor en reposo obtendremos

$$u_\uparrow(\overrightarrow{p}) = \frac{1}{2\sqrt{E+m}} \begin{pmatrix} p^+ + m \\ p_r \\ p^- + m \\ -p_r \end{pmatrix} \qquad u_\downarrow(\overrightarrow{p}) = \frac{1}{2\sqrt{E+m}} \begin{pmatrix} p_l \\ p^- + m \\ -p_l \\ p^+ + m \end{pmatrix}$$

$$v_\uparrow(\overrightarrow{p}) = \frac{1}{2\sqrt{E+m}} \begin{pmatrix} p^+ + m \\ p_r \\ -p^- - m \\ p_r \end{pmatrix} \qquad v_\downarrow(\overrightarrow{p}) = \frac{1}{2\sqrt{E+m}} \begin{pmatrix} p_l \\ p^- + m \\ p_l \\ -p^+ - m \end{pmatrix} \tag{2.31}$$

Esta es la solución a la ecuación de Dirac en la representación de Weyl o quiral. La relación que existe entre la representación quiral y standard [5] es

$$u^c = Su^w = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & -\mathbf{1} \end{pmatrix} u^w \tag{2.32}$$

así, la forma standard de los bispinores (2.31) es

$$u_\uparrow(\overrightarrow{p}) = \left(\frac{E+m}{2}\right)^{1/2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_r}{E+m} \end{pmatrix} \qquad u_\downarrow(\overrightarrow{p}) = \left(\frac{E+m}{2}\right)^{1/2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_l}{E+m} \\ -\frac{p_z}{E+m} \end{pmatrix}$$

$$v_\uparrow(\overrightarrow{p}) = \left(\frac{E+m}{2}\right)^{1/2} \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_r}{E+m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_\downarrow(\overrightarrow{p}) = \left(\frac{E+m}{2}\right)^{1/2} \begin{pmatrix} \frac{p_l}{E+m} \\ -\frac{p_z}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.33}$$

Es importante mencionar que este resultado se puede obtener directamente de una relación similar a (2.28), pues en la representación standar el bispinor de Dirac está dado por la ecuación (1.34)

$$\Psi(p^\mu) = S \begin{pmatrix} \phi_R(p^\mu) \\ \phi_L(p^\mu) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_R(p^\mu) + \phi_L(p^\mu) \\ \phi_R(p^\mu) - \phi_L(p^\mu) \end{pmatrix} \tag{2.34}$$

así, para un boost de Lorentz en un sistema en movimiento

[5] También llamada canónica.

$$\Psi(p^\mu) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_R(p^\mu) + \phi_L(p^\mu) \\ \phi_R(p^\mu) - \phi_L(p^\mu) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} M \begin{pmatrix} \phi_R(\overset{o}{p}{}^\mu) + \phi_L(\overset{o}{p}{}^\mu) \\ \phi_R(\overset{o}{p}{}^\mu) - \phi_L(\overset{o}{p}{}^\mu) \end{pmatrix} \tag{2.35}$$

si hacemos productos se encuentra

$$\begin{aligned} \phi_R(p^\mu) &= (M_{11} + M_{12})\phi_R(\overset{o}{p}{}^\mu) = (M_{21} + M_{22})\phi_R(\overset{o}{p}{}^\mu) \\ \phi_L(p^\mu) &= (M_{11} - M_{12})\phi_L(\overset{o}{p}{}^\mu) = (M_{22} - M_{21})\phi_L(\overset{o}{p}{}^\mu) \end{aligned} \tag{2.36}$$

y si se compara con las ecuaciones (2.1) concluimos

$$\begin{aligned} M_{11} = M_{22} &= \tfrac{1}{2}\left(\Lambda_R\left(p^\mu \longleftarrow \overset{o}{p}{}^\mu\right) + \Lambda_L\left(p^\mu \longleftarrow \overset{o}{p}{}^\mu\right)\right) \\ M_{12} = M_{21} &= \tfrac{1}{2}\left(\Lambda_R\left(p^\mu \longleftarrow \overset{o}{p}{}^\mu\right) - \Lambda_L\left(p^\mu \longleftarrow \overset{o}{p}{}^\mu\right)\right) \end{aligned} \tag{2.37}$$

o bien

$$M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Lambda_R\left(p^\mu \longleftarrow \overset{o}{p}{}^\mu\right) + \Lambda_L\left(p^\mu \longleftarrow \overset{o}{p}{}^\mu\right) & \Lambda_R\left(p^\mu \longleftarrow \overset{o}{p}{}^\mu\right) - \Lambda_L\left(p^\mu \longleftarrow \overset{o}{p}{}^\mu\right) \\ \Lambda_R\left(p^\mu \longleftarrow \overset{o}{p}{}^\mu\right) - \Lambda_L\left(p^\mu \longleftarrow \overset{o}{p}{}^\mu\right) & \Lambda_R\left(p^\mu \longleftarrow \overset{o}{p}{}^\mu\right) + \Lambda_L\left(p^\mu \longleftarrow \overset{o}{p}{}^\mu\right) \end{pmatrix} \tag{2.38}$$

Como era de esperarse, esto también se podría haber obtenido de

$$M^C = S M^W S^{-1} \tag{2.39}$$

de (2.1) se encuentra

$$\begin{aligned} \Lambda_R\left(p^\mu \longleftarrow \overset{o}{p}{}^\mu\right) + \Lambda_L\left(p^\mu \longleftarrow \overset{o}{p}{}^\mu\right) &= e^{\mathbf{J}\cdot\boldsymbol{\phi}} + e^{-\mathbf{J}\cdot\boldsymbol{\phi}} = 2\cosh(\mathbf{J}\cdot\boldsymbol{\phi}) \\ \Lambda_R\left(p^\mu \longleftarrow \overset{o}{p}{}^\mu\right) - \Lambda_L\left(p^\mu \longleftarrow \overset{o}{p}{}^\mu\right) &= e^{\mathbf{J}\cdot\boldsymbol{\phi}} - e^{-\mathbf{J}\cdot\boldsymbol{\phi}} = 2\mathrm{senh}(\mathbf{J}\cdot\boldsymbol{\phi}) \end{aligned}$$

con lo que

$$M = \begin{pmatrix} \cosh(\mathbf{J}\cdot\phi) & \mathrm{senh}(\mathbf{J}\cdot\phi) \\ \mathrm{senh}(\mathbf{J}\cdot\phi) & \cosh(\mathbf{J}\cdot\phi) \end{pmatrix} \tag{2.40}$$

Para el caso concreto de spin $j = 1/2$, con ayuda de (2.21) se encuentra

$$\Lambda_R\left(p^\mu \longleftarrow \overset{o}{p}{}^\mu\right) + \Lambda_L\left(p^\mu \longleftarrow \overset{o}{p}{}^\mu\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2m(E+m)}} \begin{pmatrix} p^+ + p^- + 2m & 0 \\ 0 & p^+ + p^- + 2m \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{2(E+m)}{\sqrt{2m(E+m)}} = 2\cosh(\varphi/2) \tag{2.41a}$$

$$\Lambda_R\left(p^\mu \longleftarrow \overset{o\mu}{p}\right) - \Lambda_L\left(p^\mu \longleftarrow \overset{o\mu}{p}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2m(E+m)}} \begin{pmatrix} p^+ - p^- & 2p_l \\ 2p_r & p^- - p^+ \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{2\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{\sqrt{2m(E+m)}} = 2\boldsymbol{\sigma}\ \cdot\hat{\mathbf{p}}\ \mathrm{senh}(\varphi/2) \tag{2.41b}$$

y con ayuda de las ecuaciones (2.41) se puede encontrar la forma de M

$$M = \frac{1}{\sqrt{2m(E+m)}} \begin{pmatrix} E+m & 0 & p_z & p_l \\ 0 & E+m & p_r & -p_z \\ p_z & p_l & E+m & 0 \\ p_r & -p_z & 0 & E+m \end{pmatrix} \tag{2.42}$$

o simplemente

$$\begin{gathered} M = \frac{1}{\sqrt{2m(E+m)}} \begin{pmatrix} E+m & \boldsymbol{\sigma}\ \cdot\mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma}\ \cdot\mathbf{p} & E+m \end{pmatrix} = \\ \begin{pmatrix} \cosh(\varphi/2) & \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}}\ \mathrm{senh}(\varphi/2) \\ \boldsymbol{\sigma}\ \cdot\hat{\mathbf{p}}\ \mathrm{senh}(\varphi/2) & \cosh(\varphi/2) \end{pmatrix} \end{gathered} \tag{2.43}$$

si aplicamos la ecuación (2.34) a los espinores en reposo en la base quirial (ec. 2.30) obtendremos los espinores en reposo en la base standard

$$\begin{gathered} u_\uparrow(\overrightarrow{0}) = \sqrt{m}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad u_\downarrow(\overrightarrow{0}) = \sqrt{m}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ v_\uparrow(\overrightarrow{0}) = \sqrt{m}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_\downarrow(\overrightarrow{0}) = \sqrt{m}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{gathered} \tag{2.44}$$

los cuales, con (2.42) se transforman en (2.33). En el próximo capítulo utilizaremos estos bispinores para mostrar que tienen paridad intrínseca opuesta.

2.2.2 Espinores propios del operador de helicidad

Los espinores propios del operador de helicidad se obtienen haciendo $\mathbf{J} = \boldsymbol{\sigma}/2$ en la ecuación (2.3), con lo que tendremos

$$\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}\right)\xi = h\xi \qquad\qquad h = \pm 1/2 \tag{2.45}$$

donde

$$\begin{array}{c} n_x = \mathrm{sen}\theta\cos\phi \\ n_y = \mathrm{sen}\theta\mathrm{sen}\phi \\ n_z = \cos\theta \end{array} \tag{2.46}$$

y

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \sim \phi_{R,L}(p^\mu)$$

por lo que sustituyendo en la ecuación (2.3) obtenemos

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos\theta & \mathrm{sen}\theta e^{-i\phi} \\ \mathrm{sen}\theta e^{i\phi} & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = h\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \qquad\qquad h = \pm 1/2$$

haciendo el producto se encuentra

$$\begin{aligned} \xi_{h=+1/2} &= \begin{pmatrix} \cot(\theta/2)e^{-i\phi}\xi_2 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \\ \xi_{h=-1/2} &= \begin{pmatrix} -\tan(\theta/2)e^{-i\phi}\xi_2 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

pero

$$\xi_h^\dagger \xi_h = N^2$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \xi_{h=+1/2} &= Ne^{i\Theta^1_{1/2}}\begin{pmatrix} \cos(\theta/2)e^{-i\phi} \\ \mathrm{sen}(\theta/2) \end{pmatrix} \\ \xi_{h=-1/2} &= Ne^{i\Theta^1_{-1/2}}\begin{pmatrix} -\mathrm{sen}(\theta/2)e^{-i\phi} \\ \cos(\theta/2) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.47a}$$

lo cual también se puede poner como

$$\begin{aligned} \xi_{h=+1/2} &= Ne^{i\Theta^2_{1/2}}\begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \mathrm{sen}(\theta/2)e^{i\phi} \end{pmatrix} \\ \xi_{h=-1/2} &= Ne^{i\Theta^2_{-1/2}}\begin{pmatrix} \mathrm{sen}(\theta/2) \\ -\cos(\theta/2)e^{i\phi} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.47b}$$

se puede observar que los espinores de helicidad opuesta están relacionados por

$$\left[\xi_h(\overset{o}{p}{}^{\mu})\right]^* = (-1)^{1/2-h} e^{-i(\Theta_h+\Theta_{-h})}\Theta_{[1/2]}\xi_{-h}(\overset{o}{p}{}^{\mu}) \tag{2.48}$$

donde

$$\Theta_{[1/2]} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.49}$$

con lo cual, se puede obtener una forma generalizada de la relación de Ryder-Burgard

$$\left[\phi_L^h(\overset{o}{p}{}^{\mu})\right]^* = (-1)^{1/2-h} e^{-i(\theta_1+\theta_2)}\Theta_{[1/2]}\phi_L^{-h}(\overset{o}{p}{}^{\mu}) \tag{2.50}$$

Esta forma se uilizará para derivar las ecuaciónes para partículas neutrales en el capítulo 3.

2.3 Spin $j = 1$: Ecuaciones de Maxwell-Weinberg

Consideremos ahora el caso de spin $j = 1$, en este caso [6]

$$\begin{gathered}\mathbf{J}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{J}^2 = \frac{i}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{J}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\end{gathered} \tag{2.51}$$

si usamos los parámetros de boost $\boldsymbol{\varphi}$ (ec.2.2) encontramos

$$\mathbf{J}\cdot\boldsymbol{\varphi} = (\mathbf{J}\cdot\mathbf{p})\frac{\varphi}{|\mathbf{p}|} = \frac{\varphi}{|\mathbf{p}|}\begin{pmatrix} p_z & \frac{p_l}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{p_r}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{p_l}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{p_r}{\sqrt{2}} & -p_z \end{pmatrix} \tag{2.52}$$

y

$$(\mathbf{J}\cdot\boldsymbol{\varphi})^2 = \frac{\varphi^2}{p^2}\begin{pmatrix} p_z^2 + \frac{p_r p_l}{2} & \frac{p_z p_l}{\sqrt{2}} & \frac{p_l^2}{2} \\ \frac{p_z p_r}{\sqrt{2}} & p_r p_l & -\frac{p_z p_l}{\sqrt{2}} \\ \frac{p_r^2}{2} & -\frac{p_z p_r}{\sqrt{2}} & \frac{p_r p_l}{2} + p_z^2 \end{pmatrix} \tag{2.53}$$

[6] Hay diferentes representaciones de matrices de spin, otra forma muy usada es

$$(\mathbf{J}_i)_{jk} = -i\epsilon_{ijk}$$

donde ϵ_{ijk} es el tensor de Levi-Civita, esta forma corresponde a los generadores (1.12).

para encontrar el término cúbico haremos el siguiente desarrollo

$$(\mathbf{J}\cdot\boldsymbol{\varphi}\ )^3 = \tfrac{\varphi^3}{|p|^3}\left(\mathbf{J}\cdot\mathbf{p}\right)^3 = \tfrac{\varphi^3}{|p|^3}\mathbf{J}^i\mathbf{p}^i\mathbf{J}^j\mathbf{p}^j\mathbf{J}^k\mathbf{p}^k = \tfrac{\varphi^3}{|p|^3}\left[\underbrace{\mathbf{J}^i\mathbf{p}^i\mathbf{J}^j\mathbf{p}^j\mathbf{J}^k\mathbf{p}^k}_{i=k}+\underbrace{\mathbf{J}^i\mathbf{p}^i\mathbf{J}^j\mathbf{p}^j\mathbf{J}^k\mathbf{p}^k}_{i\neq k}\right] =$$
$$= \tfrac{\varphi^3}{|p|^3}\left[\mathbf{J}^i\mathbf{J}^j\mathbf{J}^i\mathbf{p}^i\mathbf{p}^j\mathbf{p}^i + \left(\underbrace{\mathbf{J}^i\mathbf{J}^j\mathbf{J}^k+\mathbf{J}^k\mathbf{J}^j\mathbf{J}^i}_{i<k}\right)\mathbf{p}^i\mathbf{p}^j\mathbf{p}^k\right] \tag{2.54}$$

pero

$$\mathbf{J}^i\mathbf{J}^j\mathbf{J}^k+\mathbf{J}^k\mathbf{J}^j\mathbf{J}^i = \mathbf{J}^i\delta^{jk}+\mathbf{J}^k\delta^{ij} \tag{2.55}$$

por lo que sustituyendo (2.55) en (2.54) obtenemos

$$(\mathbf{J}\cdot\boldsymbol{\varphi}\ )^3 = \tfrac{\varphi^3}{|p|^3}\left[J^{i^3}p^{i^3} + \left(\underbrace{\mathbf{J}^i\delta^{jk}+\mathbf{J}^k\delta^{ij}}_{i<k}\right)\mathbf{p}^i\mathbf{p}^j\mathbf{p}^k\right] = \tfrac{\varphi^3}{|p|^3}\left[J^{i^3}p^{i^3} + \underbrace{J^ip^ip^{k^2}+J^kp^{i^2}p^k}_{i<k}\right] =$$
$$= \tfrac{\varphi^3}{|p|^3}\left[\underbrace{\mathbf{J}^i\mathbf{p}^i\mathbf{p}^{k^2}}_{i=k}+\underbrace{\mathbf{J}^i\mathbf{p}^i\mathbf{p}^{k^2}}_{k>i}+\underbrace{\mathbf{J}^i\mathbf{p}^i\mathbf{p}^{k^2}}_{k<i}\right] = \tfrac{\varphi^3}{|p|^3}\left(\mathbf{J}^i\mathbf{p}^i\right)\mathbf{p}^{k^2}$$

es decir

$$(\mathbf{J}\cdot\boldsymbol{\varphi}\ )^3 = \frac{\varphi^3}{|p|^3}\left(\mathbf{J}\cdot\mathbf{p}\right)\mathbf{p}^2 = \frac{\varphi^3}{|p|}\left(\mathbf{J}\cdot\mathbf{p}\right) \tag{2.56}$$

por lo que haciendo el desarrollo de Taylor de $e^{(\pm\mathbf{J}\cdot\boldsymbol{\varphi}\ )}$ y simplificando con ayuda de la ecuación (2.56) obtenemos

$$\exp\left(\pm\mathbf{J}\cdot\boldsymbol{\varphi}\ \right) = \mathbf{1}\pm\frac{\mathbf{J}\cdot\mathbf{p}}{|p|}\left[\varphi+\frac{\varphi^3}{3!}+\frac{\varphi^5}{5!}+\cdots\right]+\frac{\left(\mathbf{J}\cdot\mathbf{p}\right)^2}{p^2}\left[\frac{\varphi^2}{2!}+\frac{\varphi^4}{4!}+\frac{\varphi^6}{6!}+\cdots\right]$$

donde podemos identificar el primer desarrollo como senhφ y el segundo como (cosh$\varphi - 1$); por lo que sustituyendo la ecuación (2.2) en el caso de spin $j=1$ se reduce a

$$\exp\left(\pm\mathbf{J}\cdot\boldsymbol{\varphi}\ \right) = \Lambda_{R,L}\left(p^\mu \longleftarrow \overset{o\mu}{p}\right) = \mathbf{1}\pm\frac{\mathbf{J}\cdot\mathbf{p}}{m}+\frac{\left(\mathbf{J}\cdot\mathbf{p}\right)^2}{m(E+m)} \tag{2.57}$$

por lo que

$$\Lambda_R\left(p^\mu \longleftarrow \overset{o\mu}{p}\right) = \mathbf{1} + \frac{\mathbf{J}\cdot\mathbf{p}}{m} + \frac{(\mathbf{J}\cdot\mathbf{p})^2}{m(E+m)} \tag{2.58a}$$

$$\Lambda_L\left(p^\mu \longleftarrow \overset{o\mu}{p}\right) = \mathbf{1} - \frac{\mathbf{J}\cdot\mathbf{p}}{m} + \frac{(\mathbf{J}\cdot\mathbf{p})^2}{m(E+m)} \tag{2.58b}$$

y haciendo uso de la ecuación (2.7) obtenemos

$$\Lambda_{R,L}\left(p^\mu \longleftarrow \overset{o\mu}{p}\right)\Lambda_{L,R}^{-1}\left(p^\mu \longleftarrow \overset{o\mu}{p}\right) = \left[\mathbf{1} \pm \frac{\mathbf{J}\cdot\mathbf{p}}{m} + \frac{(\mathbf{J}\cdot\mathbf{p})^2}{m(E+m)}\right]^2 =$$

$$= \mathbf{1} \pm \frac{2E\,(\mathbf{J}\cdot\mathbf{p})}{m^2} + \frac{2\,(\mathbf{J}\cdot\mathbf{p})^2}{m^2}$$

de lo que se concluye

$$\Lambda_R(p^\mu \longleftarrow \overset{o\mu}{p})\Lambda_L^{-1}(p^\mu \longleftarrow \overset{o\mu}{p}) = \mathbf{1} + \frac{2E(\mathbf{J}\cdot\mathbf{p})}{m^2} + \frac{2(\mathbf{J}\cdot\mathbf{p})^2}{m^2} \tag{2.59a}$$

$$\Lambda_L(p^\mu \longleftarrow \overset{o\mu}{p})\Lambda_R^{-1}(p^\mu \longleftarrow \overset{o\mu}{p}) = \mathbf{1} - \frac{2E(\mathbf{J}\cdot\mathbf{p})}{m^2} + \frac{2(\mathbf{J}\cdot\mathbf{p})^2}{m^2} \tag{2.59b}$$

sustituyendo en la ecuación (2.10) obtenemos

$$\begin{pmatrix} -\wp_{u,v} & \mathbf{1} + \frac{2p^0(\mathbf{J}\cdot\mathbf{p})}{m^2} + \frac{2(\mathbf{J}\cdot\mathbf{p})^2}{m^2} \\ \mathbf{1} - \frac{2p^0(\mathbf{J}\cdot\mathbf{p})}{m^2} + \frac{2(\mathbf{J}\cdot\mathbf{p})^2}{m^2} & -\wp_{u,v} \end{pmatrix} \Psi_\pm(p^\mu) = 0$$

que acomodando términos se obtiene

$$\begin{pmatrix} -\wp_{u,v}m^2 & m^2 + 2p^0(\mathbf{J}\cdot\mathbf{p}) + 2(\mathbf{J}\cdot\mathbf{p})^2 \\ m^2 - 2p^0(\mathbf{J}\cdot\mathbf{p}) + 2(\mathbf{J}\cdot\mathbf{p})^2 & -\wp_{u,v}m^2 \end{pmatrix} \Psi_\pm(p^\mu) = 0 \tag{2.60a}$$

lo cual, se puede poner como

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & B + 2p^0(\mathbf{J}\cdot\mathbf{p}) \\ B - 2p^0(\mathbf{J}\cdot\mathbf{p}) & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \wp_{u,v}m^2 & 0 \\ 0 & \wp_{u,v}m^2 \end{pmatrix}\right] \Psi_\pm(p^\mu) = 0 \tag{2.60b}$$

donde [7]

$$B = g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu \mathbf{1} + 2(\mathbf{J}\cdot\mathbf{p})(\mathbf{J}\cdot\mathbf{p})$$

[7] Hemos hecho $p_\mu p^\mu = m^2$.

en donde $g_{\mu\nu}$ son los elementos del tensor de métrica; por definición, las matrices de Barut, Mazinich y Wilerams son

$$\gamma^{0i} = \gamma^{i0} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{J}_i \\ \mathbf{J}_i & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma_{0i} = \gamma_{i0} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{J}_i \\ -\mathbf{J}_i & 0 \end{pmatrix} \tag{2.61a}$$

$$\gamma_{00} = \gamma^{00} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \tag{2.61b}$$

$$\gamma_{ij} = \gamma_{ji} = \gamma^{ij} = \gamma^{ji} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} g_{ij} + \begin{pmatrix} 0 & \{\mathbf{J}_i, \mathbf{J}_j\} \\ \{\mathbf{J}_i, \mathbf{J}_j\} & 0 \end{pmatrix} \tag{2.61c}$$

con lo cual la ecuación (2.60a) se puede poner de la forma (2.12) como

$$\left[\gamma^{\mu\nu} p_\mu p_\nu - \wp_{u,v} m^2\right] \Psi(p^\mu) = 0 \tag{2.62}$$

y que en el espacio de coordenadas es

$$\left[\gamma^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu + \wp_{u,v} m^2\right] \Psi(x^\mu) = 0$$

podemos comparar con (2.11) que $\wp_{u,v}$ en el caso de spin $j = 1$ se preserva en el espacio de coordenadas, a diferencia de spin $j = 1/2$.

Esta ecuación (2.62) tiene sentido físico de las soluciones con energía positiva y negativa, lo que implica que el bosón y el antibosón tienen las paridades opuestas, lo cual se verá en el siguiente capítulo.

2.3.1 Soluciones a la ecuación de Maxwell-Weinberg

De las ecuaciones (2.58) encontramos

$$\Lambda_R(p^\mu \longleftarrow \overset{o}{p}^\mu) = \begin{pmatrix} 1+\frac{p_z}{m}+\frac{2p_z^2+p_rp_l}{2m(E+m)} & \frac{p_l}{\sqrt{2}m}+\frac{p_zp_l}{\sqrt{2}m(E+m)} & \frac{p_l^2}{2m(E+m)} \\ \frac{p_r}{\sqrt{2}m}+\frac{p_zp_r}{\sqrt{2}m(E+m)} & 1+\frac{p_rp_l}{m(E+m)} & \frac{p_l}{\sqrt{2}m}-\frac{p_zp_l}{\sqrt{2}m(E+m)} \\ \frac{p_r^2}{2m(E+m)} & \frac{p_r}{\sqrt{2}m}-\frac{p_zp_r}{\sqrt{2}m(E+m)} & 1-\frac{p_z}{m}+\frac{2p_z^2+p_rp_l}{2m(E+m)} \end{pmatrix} \tag{2.63}$$

$$\Lambda_L(p^\mu \longleftarrow \overset{o}{p}^\mu) = \begin{pmatrix} 1-\frac{p_z}{m}+\frac{2p_z^2+p_rp_l}{2m(E+m)} & -\frac{p_l}{\sqrt{2}m}+\frac{p_zp_l}{\sqrt{2}m(E+m)} & \frac{p_l^2}{2m(E+m)} \\ -\frac{p_r}{\sqrt{2}m}+\frac{p_zp_r}{\sqrt{2}m(E+m)} & 1+\frac{p_rp_l}{m(E+m)} & -\frac{p_l}{\sqrt{2}m}-\frac{p_zp_l}{\sqrt{2}m(E+m)} \\ \frac{p_r^2}{2m(E+m)} & -\frac{p_r}{\sqrt{2}m}-\frac{p_zp_r}{\sqrt{2}m(E+m)} & 1+\frac{p_z}{m}+\frac{2p_z^2+p_rp_l}{2m(E+m)} \end{pmatrix} \tag{2.64}$$

En la representación de Weyl, los "bispinores" en reposo para $j=1$ son [9]

$$u_\uparrow(\overrightarrow{0}) = \frac{m}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad u_\rightarrow(\overrightarrow{0}) = \frac{m}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \qquad u_\downarrow(\overrightarrow{0}) = \frac{m}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$v_\uparrow(\overrightarrow{0}) = \frac{m}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad v_\rightarrow(\overrightarrow{0}) = \frac{m}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\-1\\0\end{pmatrix} \qquad v_\downarrow(\overrightarrow{0}) = \frac{m}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\-1\end{pmatrix} \tag{2.65}$$

Con ayuda de las ecuaciones (2.63), (2.64) y (2.65) se puede obtener una relación similar a (2.28) y (2.29), por lo cual

[9] Al igual que para spin $j=1/2$, normalizamos a masa, en este caso se tiene

$$\overline{u}(\overrightarrow{p})u(\overrightarrow{p}) = m^2$$

y en general, es decir, para spin j se tendrá

$$\overline{u}(\overrightarrow{p})u(\overrightarrow{p}) = m^{2j}$$

.

$$u_{\uparrow}(\overrightarrow{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} m + p_z + \frac{2p_z^2 + p_r p_l}{2(E+m)} \\ \frac{p_r}{\sqrt{2}} + \frac{p_z p_r}{\sqrt{2}(E+m)} \\ \frac{p_r^2}{2(E+m)} \\ m - p_z + \frac{2p_z^2 + p_r p_l}{2(E+m)} \\ -\frac{p_r}{\sqrt{2}} + \frac{p_z p_r}{\sqrt{2}(E+m)} \\ \frac{p_r^2}{2(E+m)} \end{pmatrix} \qquad u_{\rightarrow}(\overrightarrow{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{p_l}{\sqrt{2}} + \frac{p_z p_l}{\sqrt{2}(E+m)} \\ m + \frac{p_r p_l}{(E+m)} \\ \frac{p_r}{\sqrt{2}} - \frac{p_z p_r}{\sqrt{2}(E+m)} \\ -\frac{p_l}{\sqrt{2}} + \frac{p_z p_l}{\sqrt{2}(E+m)} \\ m + \frac{p_r p_l}{(E+m)} \\ -\frac{p_r}{\sqrt{2}} - \frac{p_z p_r}{\sqrt{2}(E+m)} \end{pmatrix} \tag{2.66a}$$

$$u_{\downarrow}(\overrightarrow{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{p_l^2}{2(E+m)} \\ \frac{p_l}{\sqrt{2}} - \frac{p_z p_l}{\sqrt{2}(E+m)} \\ m - p_z + \frac{2p_z^2 + p_r p_l}{2(E+m)} \\ \frac{p_l^2}{2(E+m)} \\ -\frac{p_l}{\sqrt{2}} - \frac{p_z p_l}{\sqrt{2}(E+m)} \\ m + p_z + \frac{2p_z^2 + p_r p_l}{2(E+m)} \end{pmatrix} \qquad v_{\uparrow}(\overrightarrow{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} m + p_z + \frac{2p_z^2 + p_r p_l}{2(E+m)} \\ \frac{p_r}{\sqrt{2}} + \frac{p_z p_r}{\sqrt{2}(E+m)} \\ \frac{p_r^2}{2(E+m)} \\ -m + p_z - \frac{2p_z^2 + p_r p_l}{2(E+m)} \\ \frac{p_r}{\sqrt{2}} - \frac{p_z p_r}{\sqrt{2}(E+m)} \\ -\frac{p_r^2}{2(E+m)} \end{pmatrix} \tag{2.66b}$$

$$v_{\rightarrow}(\overrightarrow{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{p_l}{\sqrt{2}} + \frac{p_z p_l}{\sqrt{2}(E+m)} \\ m + \frac{p_r p_l}{(E+m)} \\ \frac{p_r}{\sqrt{2}} - \frac{p_z p_r}{\sqrt{2}(E+m)} \\ \frac{p_l}{\sqrt{2}} - \frac{p_z p_l}{\sqrt{2}(E+m)} \\ -m - \frac{p_r p_l}{(E+m)} \\ \frac{p_r}{\sqrt{2}} + \frac{p_z p_r}{\sqrt{2}(E+m)} \end{pmatrix} \qquad v_{\downarrow}(\overrightarrow{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{p_l^2}{2(E+m)} \\ \frac{p_l}{\sqrt{2}} - \frac{p_z p_l}{\sqrt{2}(E+m)} \\ m - p_z + \frac{2p_z^2 + p_r p_l}{2(E+m)} \\ -\frac{p_l^2}{2(E+m)} \\ \frac{p_l}{\sqrt{2}} + \frac{p_z p_l}{\sqrt{2}(E+m)} \\ -m - p_z - \frac{2p_z^2 + p_r p_l}{2(E+m)} \end{pmatrix} \tag{2.66c}$$

que en forma canónica[10] son [11]

$$u_{\uparrow}(\overrightarrow{p}) = \begin{pmatrix} m + \frac{2p_z^2 + p_r p_l}{2(E+m)} \\ \frac{p_z p_r}{\sqrt{2}(E+m)} \\ \frac{p_r^2}{2(E+m)} \\ p_z \\ \frac{p_r}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad u_{\rightarrow}(\overrightarrow{p}) = \begin{pmatrix} \frac{p_z p_l}{\sqrt{2}(E+m)} \\ m + \frac{p_r p_l}{(E+m)} \\ -\frac{p_z p_r}{\sqrt{2}(E+m)} \\ \frac{p_l}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{p_r}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{2.68a}$$

$$u_{\downarrow}(\overrightarrow{p}) = \begin{pmatrix} \frac{p_l^2}{2(E+m)} \\ -\frac{p_z p_l}{\sqrt{2}(E+m)} \\ m + \frac{2p_z^2 + p_r p_l}{2(E+m)} \\ 0 \\ \frac{p_l}{\sqrt{2}} \\ -p_z \end{pmatrix} \qquad v_{\uparrow}(\overrightarrow{p}) = \begin{pmatrix} p_z \\ \frac{p_r}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ m + \frac{2p_z^2 + p_r p_l}{2(E+m)} \\ \frac{p_z p_r}{\sqrt{2}(E+m)} \\ \frac{p_r^2}{2(E+m)} \end{pmatrix} \tag{2.68b}$$

---

[10]Adviértase que en forma canónica los "bispinores" en reposo son

$$u_{\uparrow}(\overrightarrow{0}) = m \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad u_{\rightarrow}(\overrightarrow{0}) = m \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad u_{\downarrow}(\overrightarrow{0}) = m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$v_{\uparrow}(\overrightarrow{0}) = m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_{\rightarrow}(\overrightarrow{0}) = m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_{\downarrow}(\overrightarrow{0}) = m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.67}$$

[11]Se pueden obtener estos bispinores con modo muy similar al expuesto en al sección (2.2), es decir usando la matriz

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}$$

sólo que ahora las matrices identidad son de orden 3×3.

$$v_{\rightarrow}(\overrightarrow{p}) = \begin{pmatrix} \frac{p_l}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{p_r}{\sqrt{2}} \\ \frac{p_z p_l}{\sqrt{2}(E+m)} \\ m + \frac{p_r p_l}{(E+m)} \\ -\frac{p_z p_r}{\sqrt{2}(E+m)} \end{pmatrix} \qquad v_{\downarrow}(\overrightarrow{p}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{p_l}{\sqrt{2}} \\ -p_z \\ \frac{p_l^2}{2(E+m)} \\ -\frac{p_z p_l}{\sqrt{2}(E+m)} \\ m + \frac{2p_z^2 + p_r p_l}{2(E+m)} \end{pmatrix} \qquad (2.68c)$$

Se puede observar que

$$v_\sigma(\overrightarrow{p}) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} u_\sigma(\overrightarrow{p}) = (\gamma^5)^c u_\sigma(\overrightarrow{p}) \qquad (2.68d)$$

como en el caso de Dirac para spin $j = 1/2$.

2.3.2 Espinores propios del operador de helicidad

Para conocer los espinores propios del operador de helicidad, tendremos de la ecuación (2.3)

$$(\mathbf{J} \cdot \mathbf{n})\, \xi = h\xi \qquad\qquad h = \pm 1, 0$$

entonces haciendo uso de la ecuación (2.46) y sustituyendo en la ecuación (2.3) obtenemos

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \frac{sen\theta}{\sqrt{2}} e^{-i\phi} & 0 \\ \frac{sen\theta}{\sqrt{2}} e^{i\phi} & 0 & \frac{sen\theta}{\sqrt{2}} e^{-i\phi} \\ 0 & \frac{sen\theta}{\sqrt{2}} e^{i\phi} & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \qquad h = \pm 1, 0$$

haciendo productos y realizando un procedimiento similar al caso de spin $j = 1/2$ obtenemos para spin $j = 1$

$$\begin{aligned} \xi_{h=+1} &= N e^{i\Theta_1^1} \begin{pmatrix} \frac{(1+\cos\theta)}{2} \\ \sqrt{\frac{1}{2}} sen\theta e^{i\phi} \\ \frac{(1-\cos\theta)}{2} e^{i2\phi} \end{pmatrix} \\ \xi_{h=0} &= N e^{i\Theta_0^1} \begin{pmatrix} -\frac{sen\theta}{\sqrt{2}} \\ \cos\theta e^{i\phi} \\ \frac{sen\theta}{\sqrt{2}} e^{i2\phi} \end{pmatrix} \\ \xi_{h=-1} &= N e^{i\Theta_{-1}^1} \begin{pmatrix} \frac{(1-\cos\theta)}{2} \\ -\sqrt{\frac{1}{2}} sen\theta e^{i\phi} \\ \frac{(1+\cos\theta)}{2} e^{i2\phi} \end{pmatrix} \end{aligned} \qquad (2.69a)$$

lo cual haciendo $\Theta_h^2 = \Theta_h^1 + \phi$ se puede poner en su forma más usual

$$\xi_{h=+1} = Ne^{i\Theta_1^2}\begin{pmatrix} \frac{(1+\cos\theta)}{2}e^{-i\phi} \\ \sqrt{\frac{1}{2}}sen\theta \\ \frac{(1-\cos\theta)}{2}e^{i\phi} \end{pmatrix}$$

$$\xi_{h=0} = Ne^{i\Theta_0^2}\begin{pmatrix} -\frac{sen\theta}{\sqrt{2}}e^{-i\phi} \\ \cos\theta \\ \frac{sen\theta}{\sqrt{2}}e^{i\phi} \end{pmatrix} \qquad (2.69b)$$

$$\xi_{h=-1} = Ne^{i\Theta_{-1}^2}\begin{pmatrix} \frac{(1-\cos\theta)}{2}e^{-i\phi} \\ -\sqrt{\frac{1}{2}}sen\theta \\ \frac{(1+\cos\theta)}{2}e^{i\phi} \end{pmatrix}$$

de aquí se puede obtener una relación similar a la (2.48)

$$\left[\xi_h(\overset{o}{p}^{\mu})\right]^* = (-1)^{1-h}e^{-i(\Theta_h+\Theta_{-h})}\Theta_{[1]}\xi_{-h}(\overset{o}{p}^{\mu}) \qquad (2.70)$$

donde

$$\Theta_{[1]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (2.71)$$

con lo cual, la forma generalizada de la relación de Ryder-Burgard es

$$\left[\phi_L^h(\overset{o}{p}^{\mu})\right]^* = (-1)^{1-h}e^{-i(\Theta_h+\Theta_{-h})}\Theta_{[1]}\phi_L^{-h}(\overset{o}{p}^{\mu}) \qquad (2.72)$$

comparando con las ecuaciones (2.48) y (2.50) se puede generalizar para spin j quedando

$$\left[\xi_h(\overset{o}{p}^{\mu})\right]^* = (-1)^{j-h}e^{-i(\Theta_h^1+\Theta_{-h}^2)}\Theta_{[j]}\xi_{-h}(\overset{o}{p}^{\mu}) \qquad (2.73a)$$

$$\left[\phi_L^h(\overset{o}{p}^{\mu})\right]^* = (-1)^{j-h}e^{-i(\Theta_h+\Theta_{-h})}\Theta_{[j]}\phi_L^{-h}(\overset{o}{p}^{\mu}) \qquad (2.73b)$$

estas ecuaciones las usaremos para encontrar una ecuación de onda en el capítulo 3.

2.3.3 Límite sin masa

Consideremos ahora el caso de una partícula de spin $j = 1$ sin masa (un fotón); en este caso la ecuación (2.60a) se reduce a

$$\begin{pmatrix} 0 & 2(\mathbf{J}\cdot\mathbf{p})(\mathbf{J}\cdot\mathbf{p}) + 2p^0(\mathbf{J}\cdot\mathbf{p}) \\ 2(\mathbf{J}\cdot\mathbf{p})(\mathbf{J}\cdot\mathbf{p}) - 2p^0(\mathbf{J}\cdot\mathbf{p}) & 0 \end{pmatrix}\Psi(p^\mu) = 0 \quad (2.74)$$

al hacer los productos correspondientes en la ecuación (2.74) se obtiene

$$2(\mathbf{J}\cdot\mathbf{p})\left[(\mathbf{J}\cdot\mathbf{p})+\mathbf{p}^0\right]\phi_L(p^\mu)=0 \tag{2.75a}$$

$$2(\mathbf{J}\cdot\mathbf{p})\left[(\mathbf{J}\cdot\mathbf{p})-\mathbf{p}^0\right]\phi_R(p^\mu)=0 \tag{2.75b}$$

es importante notar que las ecuaciones (1.12) se pueden poner como

$$(\mathbf{J}^i)_{jk}=-i\varepsilon^{ijk}$$

por lo que usando el principio de correspondencia (ecuación 1.23) obtenemos ($\hbar=1$)

$$(\mathbf{J}\cdot\mathbf{p})_{jk}=-i\varepsilon^{ijk}p^i=-\varepsilon^{ijk}\nabla^i$$

y al aplicarlo (por ejemplo a $\mathbf{X}$) se obtiene

$$(\mathbf{J}\cdot\mathbf{p})_{jk}X_k=(\nabla\times\mathbf{X})^j$$

por lo que $(\mathbf{J}\cdot\mathbf{p})$ es el operador rotacional, sustituyendo en las ecuaciones (2.75) se obtiene

$$\nabla\times\left[\nabla\times\phi_L(p^\mu)+i\frac{\partial}{\partial t}\phi_L(p^\mu)\right]=\mathbf{0} \tag{2.76a}$$

$$\nabla\times\left[\nabla\times\phi_R(p^\mu)-i\frac{\partial}{\partial t}\phi_R(p^\mu)\right]=\mathbf{0} \tag{2.76b}$$

si consideramos lo que está dentro del corchete como un vector $\mathbf{Y}$, tendremos por un teorema vectorial

$$\nabla\times\mathbf{Y}=\mathbf{0} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{Y}=\nabla\chi+cte$$

por lo que de las ecuaciones (2.76) se obtiene

$$\nabla\times\phi_L(p^\mu)+i\frac{\partial}{\partial t}\phi_L(p^\mu)=\nabla\chi_L+cte_1 \tag{2.77a}$$

$$\nabla\times\phi_R(p^\mu)-i\frac{\partial}{\partial t}\phi_R(p^\mu)=\nabla\chi_R+cte_2 \tag{2.77b}$$

si hacemos [12]

$$\phi_R(p^\mu)=\mathbf{E}+i\mathbf{B} \qquad \phi_L(p^\mu)=\mathbf{E}-i\mathbf{B} \qquad \chi_R=\psi+i\zeta \qquad \chi_L=\psi-i\zeta$$

y sustituimos en las ecuaciones (2.77) obtenemos

[12] Con esta selección de ϕ_R y ϕ_L, podemos esperar que $\chi_L=\chi_R^*$ puesto que (2.76b) es el complejo conjugado de (2.76a).

$$\nabla \times (\mathbf{E}{-}i\mathbf{B}) + i\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}{-}i\mathbf{B}) = \nabla(\psi - i\zeta) + cte_1 \tag{2.78a}$$

$$\nabla \times (\mathbf{E}{+}i\mathbf{B}) - i\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}{+}i\mathbf{B}) = \nabla(\psi + i\zeta) + cte_2 \tag{2.78b}$$

sumando y restando se obtiene

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} = \nabla\psi + cte_3$$

$$-\nabla \times \mathbf{B} + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E} = -\nabla\zeta + cte_4$$

o bien

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} + \nabla\psi + cte_3 \tag{2.79a}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E} + \nabla\zeta + cte_4 \tag{2.79b}$$

estas ecuaciones tienen una corriente (gradiente) desconocida, comparando con el caso de Maxwell en el espacio libre se puede encontrar su forma. Si aplicamos el rotacional a las ecuaciones (2.79) se obtiene

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \times (-\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} + \nabla\psi) \tag{2.80a}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla \times (\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E} + \nabla\zeta) \tag{2.80b}$$

pero

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{X}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{X}) - \nabla^2\mathbf{X}$$

por lo que sustituyendo en el lado izquierdo de las ecuaciones (2.80), éstas darán

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B}) + \nabla \times \nabla\psi \tag{2.81a}$$

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2\mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{E}) + \nabla \times \nabla\zeta \tag{2.81b}$$

si recordamos que $\nabla \times \nabla\chi = 0$ y sustituimos las ecuaciones (2.79) entonces las ecuaciones (2.81) dan

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E} + \nabla\zeta)$$

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2\mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial t}(-\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} + \nabla\psi)$$

y reagrupando obtenemos

$$\nabla(\nabla\cdot\mathbf{E})+\nabla\frac{\partial}{\partial t}\zeta=\nabla^2\mathbf{E}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{E}=-\Box\mathbf{E} \tag{2.82a}$$

$$\nabla(\nabla\cdot\mathbf{B})-\nabla\frac{\partial}{\partial t}\psi=\nabla^2\mathbf{B}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{B}=-\Box\mathbf{B} \tag{2.82b}$$

si $\Box\mathbf{E}=\mathbf{0}$ y $\Box\mathbf{B}=\mathbf{0}$, es decir, si se cumplen las ecuaciones de onda, las ecuaciones (2.82) se reducen a

$$\nabla(\nabla\cdot\mathbf{E}+\frac{\partial}{\partial t}\zeta)=\mathbf{0} \tag{2.83a}$$

$$\nabla(\nabla\cdot\mathbf{B}-\frac{\partial}{\partial t}\psi)=\mathbf{0} \tag{2.83b}$$

como el gradiente de una constante es cero, entonces las ecuaciones (2.83) se reducen a

$$\nabla\cdot\mathbf{E}+\frac{\partial}{\partial t}\zeta=cte=a$$
$$\nabla\cdot\mathbf{B}-\frac{\partial}{\partial t}\psi=cte=b$$

o bien

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\zeta+a \tag{2.84a}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=\frac{\partial}{\partial t}\psi+b \tag{2.84b}$$

podemos ahora agrupar las ecuaciones (2.79) y (2.84)

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\zeta+a$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=\frac{\partial}{\partial t}\psi+b$$

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}+\nabla\psi$$

$$\nabla\times\mathbf{B}=\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}+\nabla\zeta$$

las cuales se parecen mucho a las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=4\pi\rho_e \tag{2.85a}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=4\pi\rho_m \tag{2.85b}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} - 4\pi \mathbf{J}_m \tag{2.85c}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E} + 4\pi \mathbf{J}_e \tag{2.85d}$$

por lo cual $a = b = 0$, y

$$\nabla \psi = -4\pi \mathbf{J}_m \qquad \frac{\partial}{\partial t}\psi = 4\pi \rho_m \tag{2.86a}$$

$$\nabla \zeta = 4\pi \mathbf{J}_e \qquad \frac{\partial}{\partial t}\zeta = -4\pi \rho_e \tag{2.86b}$$

entonces las ecuaciones (2.86) dan, para campos escalares ecuaciones adicionales para corrientes, con lo que se obtienen las ecuaciones de Maxwell (2.85), obsérvese además que

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{J}_e = -\nabla \rho_e \qquad \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{J}_m = -\nabla \rho_m$$

es decir, tenemos nuevas ecuaciones adicionales.

Capítulo 3

Generalizaciones y simetrías

"Toda ciencia es, bien física o bien filatelia"

E. Rutherford

3.1 Generalizaciones a la relación de Ryder-Burgard para spin $j = 1/2$

En el capítulo anterior hemos encontrado una ecuación de onda para partículas de spin $j = 1/2$ partiendo de la relación de Ryder-Burgard (ec. 2.4), sin embargo, es importante mencionar que esta relación se puede generalizar, así, podemos suponer que los bispinores en reposo están conectados por una transformación lineal a través de la matriz compleja A

$$\phi_R(\overset{o}{p}{}^{\mu}) = A\phi_L(\overset{o}{p}{}^{\mu}) \tag{3.1}$$

Dado que las matrices de Pauli (ec. 1.28) junto con la matriz identidad forman un sistema completo, podemos desarrollar A en este sistema

$$\begin{aligned}\phi_R^{\pm}(\overset{o}{p}{}^{\mu}) = A\phi_L^{\pm}(\overset{o}{p}{}^{\mu}) = \left[\mathbf{1}c_1^0 + (\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{c}_1)\right]\phi_L^{\pm}(\overset{o}{p}{}^{\mu}) = \\ = \left[c_1^0 \pm (|Rec_1| + i|Imc_1|)\right]\phi_L^{\pm}(\overset{o}{p}{}^{\mu}) = e^{i\alpha_{\pm}}\phi_L^{\pm}(\overset{o}{p}{}^{\mu})\end{aligned} \tag{3.2a}$$

de un modo similar se encuentra

$$\phi_L^{\pm}(\overset{o}{p}{}^{\mu}) = e^{-i\alpha_{\pm}}\phi_R^{\pm}(\overset{o}{p}{}^{\mu}) \tag{3.2b}$$

con ayuda de estas relaciones podemos hacer un desarrollo similar al que se hizo en la sección 2.1 (ecs. 2.6)

$$
\begin{aligned}
\phi_R^{\pm}(p^{\mu}) &= \Lambda_R\left(p^{\mu} \longleftarrow \overset{o}{p}{}^{\mu}\right)\phi_R^{\pm}(\overset{o}{p}{}^{\mu}) = e^{i\alpha_{\pm}}\Lambda_R\left(p^{\mu} \longleftarrow \overset{o}{p}{}^{\mu}\right)\phi_L^{\pm}(\overset{o}{p}{}^{\mu}) = \\
&= e^{i\alpha_{\pm}}\Lambda_R\left(p^{\mu} \longleftarrow \overset{o}{p}{}^{\mu}\right)\Lambda_L^{-1}\left(p^{\mu} \longleftarrow \overset{o}{p}{}^{\mu}\right)\phi_L^{\pm}(p^{\mu})
\end{aligned} \tag{3.3a}
$$

$$
\begin{aligned}
\phi_L^{\pm}(p^{\mu}) &= \Lambda_L\left(p^{\mu} \longleftarrow \overset{o}{p}{}^{\mu}\right)\phi_L^{\pm}(\overset{o}{p}{}^{\mu}) = e^{-i\alpha_{\pm}}\Lambda_L\left(p^{\mu} \longleftarrow \overset{o}{p}{}^{\mu}\right)\phi_R^{\pm}(\overset{o}{p}{}^{\mu}) = \\
&= e^{-i\alpha_{\pm}}\Lambda_L\left(p^{\mu} \longleftarrow \overset{o}{p}{}^{\mu}\right)\Lambda_R^{-1}\left(p^{\mu} \longleftarrow \overset{o}{p}{}^{\mu}\right)\phi_R^{\pm}(p^{\mu})
\end{aligned} \tag{3.3b}
$$

con lo que se puede generalizar la ecuación de onda encontrada (ec. 2.24) en el capítulo 2

$$
\begin{pmatrix} -me^{-i\alpha_{\pm}} & p_0 + \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} \\ p_0 - \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} & -me^{i\alpha_{\pm}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi_R^{\pm}(p^{\mu}) \\ \phi_L^{\pm}(p^{\mu}) \end{pmatrix} = 0 \tag{3.4}
$$

si hacemos [1]

$$
\widetilde{T} = \begin{pmatrix} e^{-i\alpha_{\pm}} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha_{\pm}} \end{pmatrix} \tag{3.5}
$$

la ecuación (3.4) toma la forma

$$
\left(\widetilde{P} - m\widetilde{T}\right)\Psi(p^{\mu}) = 0 \tag{3.6}
$$

Consideremos cuatro casos particulares

$$
\alpha_{\pm} = 0, 2\pi \qquad : \qquad \left(\widetilde{P} - m\right)\Psi(p^{\mu}) = 0 \tag{3.7a}
$$

$$
\alpha_{\pm} = \pm\pi \qquad : \qquad \left(\widetilde{P} + m\right)\Psi(p^{\mu}) = 0 \tag{3.7b}
$$

$$
\alpha_{\pm} = +\pi/2 \qquad : \qquad \left(\widetilde{P} + im\gamma_5\right)\Psi(p^{\mu}) = 0 \tag{3.7c}
$$

$$
\alpha_{\pm} = -\pi/2 \qquad : \qquad \left(\widetilde{P} - im\gamma_5\right)\Psi(p^{\mu}) = 0 \tag{3.7d}
$$

las ecuaciones (3.7a) y (3.7b) son, respectivamente, las ecuaciones de Dirac para bispinores con energía positiva y negativa en el espacio de los momentos. Las ecuaciones (3.7c) y (3.7d) han sido llamadas como ecuaciones de Dirac para los 4-spinores de segundo tipo, y tienen relevancia en la descripción del neutrino. [2]

Dado que los espinores son, en general, cantidades complejas, podemos generalizar la relación de Ryder-Burgard de forma que

[1] Utilizamos

$$
\widetilde{P} = \gamma^{\mu}p_{\mu}
$$

donde γ^{μ} son las matrices de Dirac en la representación de Weyl (ec. 2.25).

[2] Véase [10] y [19].

$$\phi_R(\overset{o\mu}{p}) = B\left[\phi_L(\overset{o\mu}{p})\right]^* \tag{3.8}$$

Podemos formar otro sistema completo si multiplicamos la base anterior por σ^2, podemos desarrollar B en este sistema, si introducimos el operador de Wigner para spin $j = 1/2$ (ec. 2.49)

$$\Theta_{[1/2]} = -i\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

encontramos que la conexión entre los spinores en reposo es

$$\begin{aligned} \phi_R^{\pm}(\overset{o\mu}{p}) = B\left[\phi_L^{\pm}(\overset{o\mu}{p})\right]^* = \left[\boldsymbol{\sigma}^2 c_2^0 + (\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{c}_2)\sigma^2\right]\left[\phi_L^{\pm}(\overset{o\mu}{p})\right]^* = \\ = \left[ic_2^0\Theta_{[1/2]} \mp i\left(|Rec_2| + i|Imc_2|\right)\Theta_{[1/2]}\right]\left[\phi_L^{\pm}(\overset{o\mu}{p})\right]^* = \\ = ie^{i\beta_\mp}\Theta_{[1/2]}\left[\phi_L^{\pm}(\overset{o\mu}{p})\right]^* \end{aligned} \tag{3.9a}$$

y

$$\phi_L^{\pm}(\overset{o\mu}{p}) = -ie^{i\beta_\mp}\Theta_{[1/2]}\left[\phi_R^{\pm}(\overset{o\mu}{p})\right]^* \tag{3.9b}$$

y haciendo un desarrollo similar al que se hizo en la sección 2.1 (ecs. 2.6), se encuentra

$$\begin{aligned} \phi_R^{\pm}(p^\mu) = \Lambda_R\left(p^\mu \longleftarrow \overset{o\mu}{p}\right)\phi_R^{\pm}(\overset{o\mu}{p}) = ie^{i\beta_\mp}\Lambda_R\left(p^\mu \longleftarrow \overset{o\mu}{p}\right)\Theta_{[1/2]}\left[\phi_L^{\pm}(\overset{o\mu}{p})\right]^* = \\ = ie^{i\beta_\mp}\Lambda_R\left(p^\mu \longleftarrow \overset{o\mu}{p}\right)\Theta_{[1/2]}\left[\Lambda_L^{-1}\left(p^\mu \longleftarrow \overset{o\mu}{p}\right)\right]^*\left[\phi_L^{\pm}(p^\mu)\right]^* \end{aligned} \tag{3.10a}$$

$$\begin{aligned} \phi_L^{\pm}(p^\mu) = \Lambda_L\left(p^\mu \longleftarrow \overset{o\mu}{p}\right)\phi_L^{\pm}(\overset{o\mu}{p}) = -ie^{i\beta_\mp}\Lambda_L\left(p^\mu \longleftarrow \overset{o\mu}{p}\right)\Theta_{[1/2]}\left[\phi_R^{\pm}(\overset{o\mu}{p})\right]^* = \\ = -ie^{i\beta_\mp}\Lambda_L\left(p^\mu \longleftarrow \overset{o\mu}{p}\right)\Theta_{[1/2]}\left[\Lambda_R^{-1}\left(p^\mu \longleftarrow \overset{o\mu}{p}\right)\right]^*\left[\phi_R^{\pm}(p^\mu)\right]^* \end{aligned} \tag{3.10b}$$

con ayuda de las ecuaciones (2.7) y (2.20) encontramos [3]

[3] De la propiedad del operador de Wigner

$$\Theta_{[1/2]}\boldsymbol{\sigma}\Theta_{[1/2]}^{-1} = -\boldsymbol{\sigma}^*$$

se encuentra que

$$\Theta_{[1/2]}\left(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\right)^* = -\left(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\right)\Theta_{[1/2]}$$

también hemos usado otra propiedad del operador de Wigner

$$\Theta_{[j]}\Theta_{[j]} = (-1)^{2j}$$

$$
\begin{aligned}
\Lambda_{R,L}\left(p^{\mu} \longleftarrow \overset{o\mu}{p}\right)\Theta_{[1/2]}\left[\Lambda^{-1}_{L,R}\left(p^{\mu} \longleftarrow \overset{o\mu}{p}\right)\right]^{*} &= \\
&= \left(\frac{E+m\pm\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{\sqrt{2m(E+m)}}\right)\Theta_{[1/2]}\left(\frac{E+m\pm\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{\sqrt{2m(E+m)}}\right)^{*} \\
&= \frac{1}{2m(E+m)}\left(E+m\pm\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\right)\Theta_{[1/2]}\left(E+m\pm(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})^{*}\right) \\
&= \frac{1}{2m(E+m)}\left(E+m\pm\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\right)\left(E+m\mp\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\right)\Theta_{[1/2]} \\
&= \Theta_{[1/2]}
\end{aligned}
$$

donde nuevamente hemos usado $E^2-\mathbf{p}^2=m^2$; por lo que las ecuaciones (3.10) se reducen a

$$\phi^{\pm}_{R}(p^{\mu}) = ie^{i\beta_{\mp}}\Theta_{[1/2]}\left[\phi^{\pm}_{L}(p^{\mu})\right]^{*} \tag{3.11a}$$

$$\phi^{\pm}_{L}(p^{\mu}) = -ie^{i\beta_{\mp}}\Theta_{[1/2]}\left[\phi^{\pm}_{R}(p^{\mu})\right]^{*} \tag{3.11b}$$

es decir

$$\begin{pmatrix} \phi_R(p^{\mu}) \\ \phi_L(p^{\mu}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ie^{i\beta_{\mp}}\Theta_{[1/2]} \\ -ie^{i\beta_{\mp}}\Theta_{[1/2]} & 0 \end{pmatrix}\mathcal{K}\begin{pmatrix} \phi^{\pm}_R(p^{\mu}) \\ \phi^{\pm}_L(p^{\mu}) \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

donde $\mathcal{K}$ es la operación de complejo conjugado, esta ecuación puede tomar la forma

$$\begin{pmatrix} \phi^{\pm}_R(p^{\mu}) \\ \phi^{\pm}_L(p^{\mu}) \end{pmatrix} = \mathcal{S}^{c}_{[1/2]}\begin{pmatrix} \phi^{\pm}_R(p^{\mu}) \\ \phi^{\pm}_L(p^{\mu}) \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

donde

$$\mathcal{S}^{c}_{[1/2]} = e^{i\beta_{\mp}}\begin{pmatrix} 0 & i\Theta_{[1/2]} \\ -i\Theta_{[1/2]} & 0 \end{pmatrix}\mathcal{K} \tag{3.14}$$

es el operador de conjugación de carga eléctrica en la representación $(1/2,0)\oplus(0,1/2)$. Así, obtenemos condiciones de conjugación de carga

$$\Psi(p^{\mu}) = \pm\Psi^{c}(p^{\mu}) \tag{3.15}$$

El caso particular $\Psi(p^{\mu}) = +\Psi^{c}(p^{\mu})$ nos esta dando una ecuación para fermiones neutrales de spin $j=1/2$, es decir, para neutrinos. De hecho, esta definición de la relación de Ryder-Burgard nos lleva a los spinores de Majorana-McLennan-Case, por lo que realmente hemos encontrado que los bispinores autoconjugados y contra-autoconjugados (ecs. 2.15) bajo el operador de conjugación de carga deben satisfacer

$$\mathcal{S}^c_{[1/2]}\lambda(p^\mu) = \pm\lambda(p^\mu) \qquad \mathcal{S}^c_{[1/2]}\rho(p^\mu) = \pm\rho(p^\mu) \tag{3.16}$$

donde el signo "+" corresponde al caso de los bispinores autoconjugados $\lambda^S(p^\mu)$ y $\rho^S(p^\mu)$, mientras que el signo "$-$" al caso de los bispinores contra-autoconjugados $\lambda^A(p^\mu)$ y $\rho^A(p^\mu)$.

La forma más general de la relación de Ryder-Burgard es [4]

$$\phi_R(\overset{o}{p}{}^\mu) = A\phi_L(\overset{o}{p}{}^\mu) + B\left[\phi_L(\overset{o}{p}{}^\mu)\right]^* \tag{3.17}$$

donde $A^2 + B^2 = 1$, con ayuda de (3.2) y (3.9) se obtiene

$$\phi_R(\overset{o}{p}{}^\mu) = Ae^{i\alpha_\pm}\phi_L(\overset{o}{p}{}^\mu) + iBe^{i\beta_\mp}\Theta_{[1/2]}\left[\phi_L(\overset{o}{p}{}^\mu)\right]^* \tag{3.18a}$$

$$\phi_L(\overset{o}{p}{}^\mu) = Ae^{-i\alpha_\pm}\phi_R(\overset{o}{p}{}^\mu) - iBe^{i\beta_\mp}\Theta_{[1/2]}\left[\phi_R(\overset{o}{p}{}^\mu)\right]^* \tag{3.18b}$$

en forma matricial es [5]

$$\begin{pmatrix} -\mathbf{1}_{2\times2} & Ae^{i\alpha_\pm}\Lambda_R\Lambda_L^{-1} + iBe^{i\beta_\mp}\Theta_{[1/2]}\mathcal{K} \\ Ae^{-i\alpha_\pm}\Lambda_R\Lambda_L^{-1} - iBe^{i\beta_\mp}\Theta_{[1/2]}\mathcal{K} & -\mathbf{1}_{2\times2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_R(p^\mu) \\ \phi_L(p^\mu) \end{pmatrix} = 0 \tag{3.19}$$

lo cual se puede reescribir como

$$\left[A\frac{\widetilde{P}}{m} + B\mathcal{T}\mathcal{S}^c_{[1/2]} - \mathcal{T}\right]\Psi(p^\mu) = 0 \tag{3.20}$$

que puede ser considerada como una generalización de la ecuación de Dirac.

3.2 Generalizaciones a la relación de Ryder-Burgard para spin $j = 1$

En la sección anterior se ha hecho una generalización a la relación de Ryder-Burgard para partículas de spin $j = 1/2$, de un modo muy similar haremos ahora

[4] Hemos conectado spinores con la misma helicidad, *i.e.* $\phi^\pm_R = A\phi^\pm_L$ ó $\phi^\pm_R = B\left[\phi^\pm_L\right]^*$

[5] Dado el espacio utilizaremos Λ_R y Λ_L para denotar $\Lambda_R\left(p^\mu \longleftarrow \overset{o}{p}{}^\mu\right)$ y $\Lambda_L\left(p^\mu \longleftarrow \overset{o}{p}{}^\mu\right)$ respectivamente.

la generalización correspondiente para partículas de spin $j = 1$. La primera generalización fue el suponer que los bispinores en reposo están relacionados por una transformación lineal

$$\phi_R(\overset{o}{p}^{\mu}) = A\phi_L(\overset{o}{p}^{\mu})$$

en el caso $j = 1$ hemos dado ya los operadores de spin en la representación de la base isotrópica (ec. 2.51), por lo cual, necesitamos formar una base que tenga 9 matrices linealmente independientes; esta base puede ser seleccionada con ayuda de las 10 matrices simétricas de la siguiente forma

$$J_{00} = \mathbf{1} \qquad J_{0i} = J_{i0} = \mathbf{J}_i \qquad J_{ij} = \mathbf{J}_i\mathbf{J}_j + \mathbf{J}_j\mathbf{J}_i - \delta_{ij} \tag{3.21}$$

la condición $J_{\mu\mu} = 0$ elimina una de las matrices $J_{\mu\nu}$ (por ejemplo J_{00}, siguiendo el desarrollo hecho en la sección anterior se encuentra

$$\phi_R^{\pm,0}(\overset{o}{p}^{\mu}) = e^{i\alpha_{\pm,0}}\phi_L^{\pm,0}(\overset{o}{p}^{\mu}) \tag{3.22a}$$

$$\phi_L^{\pm,0}(\overset{o}{p}^{\mu}) = e^{-i\alpha_{\pm,0}}\phi_R^{\pm,0}(\overset{o}{p}^{\mu}) \tag{3.22b}$$

con la ecuación

$$\left[\gamma_{\mu\nu}p^{\mu}p^{\nu} - m^2\mathcal{T}\right]\Psi(p^{\mu}) = 0 \tag{3.23}$$

como era de esperarse, si $\alpha_{\pm,0} = 0$ se tendrá la ecuación de Weinberg (soluciones con energía positiva), si $\alpha_{\pm,0} = \pm\pi$ se tendrán energías negativas, que es la ecuación modificada de Weinberg obtenida por Ahluwalia (Véase [5] y [6].) en el marco de la teoría cuántica de campo del tipo Foldy-Nigam-Bargmann-Wightman-Wigner [6] (FNBWW).

Nos podemos atrever a generalizar la ecuación correspondiente para esta relación de Ryder-Burgard para spin j, obteniendo

$$\left[\gamma^{\mu_1\cdots\mu_{2j}}p_1\cdots p_{2j} - m^{2j}\mathcal{T}\right]\Psi(p^{\mu}) = 0 \tag{3.24}$$

Para la segunda generalización

$$\phi_R(\overset{o}{p}^{\mu}) = B\left[\phi_L(\overset{o}{p}^{\mu})\right]^*$$

utilizaremos el operador de Wigner para spin $j = 1$ (ec. 2.71)

$$\Theta_{[1]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[6] Véase [24] y [28].

para expandir la matriz B en la base completa $J_{\mu\nu}\Theta_{[1]}$, por lo que la relación entre bispinores en reposo es

$$\phi_R^{\pm,0}(\overset{o}{p}{}^{\mu}) = e^{i\beta_{\mp,0}}\Theta_{[1]}\left[\phi_L^{\pm,0}(\overset{o}{p}{}^{\mu})\right]^* \tag{3.25a}$$

$$\phi_L^{\pm,0}(\overset{o}{p}{}^{\mu}) = e^{i\beta_{\mp,0}}\Theta_{[1]}\left[\phi_R^{\pm,0}(\overset{o}{p}{}^{\mu})\right]^* \tag{3.25b}$$

por lo que, haciendo el desarrollo correspondiente se encuentra

$$\begin{pmatrix} \phi_R^{\pm,0}(p^\mu) \\ \phi_L^{\pm,0}(p^\mu) \end{pmatrix} = e^{i\beta_{\mp,0}} \begin{pmatrix} 0 & \Theta_{[1]} \\ \Theta_{[1]} & 0 \end{pmatrix} \mathcal{K} \begin{pmatrix} \phi_R^{\pm,0}(p^\mu) \\ \phi_L^{\pm,0}(p^\mu) \end{pmatrix} \tag{3.26}$$

esta ecuación no satisface el requisito de autoconjugación y contra-autoconjugación de carga (ec. 3.16), es decir, no existe un ζ que satisfaga las ecs. (2.15) y (3.16), sin embargo, el requisito de autoconjugación y contra-autoconjugación puede ser remplazado por la autoconjugación y contra-autoconjugación bajo la operación $\Gamma^5\mathcal{S}^c_{[1]}$ donde Γ^5 es el operador de quiralidad para la representación $(1,0)\oplus(0,1)$ [7]

$$\Gamma^5 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \tag{3.27}$$

y tiene expresiones similares para otros spines. Por lo que se tiene

$$\left[\Gamma^5\mathcal{S}^c_{[1]}\right]\lambda(p^\mu) = \pm\lambda(p^\mu) \qquad\qquad \left[\Gamma^5\mathcal{S}^c_{[1]}\right]\rho(p^\mu) = \pm\rho(p^\mu) \tag{3.28}$$

así, la ecuación (3.26) tomará forma

$$\begin{pmatrix} \phi_R(p^\mu) \\ \phi_L(p^\mu) \end{pmatrix} = \Gamma^5\mathcal{S}^c_{[1]} \begin{pmatrix} \phi_R(p^\mu) \\ \phi_L(p^\mu) \end{pmatrix} \tag{3.26a}$$

Para finalizar esta sección, encontraremos ahora la ecuación correspondiente a la tercer generalización

$$\phi_R(\overset{o}{p}{}^{\mu}) = A\phi_L(\overset{o}{p}{}^{\mu}) + B\left[\phi_L(\overset{o}{p}{}^{\mu})\right]^*$$

de (3.22) y (3.25) encontramos [8]

[7] La expresión explicita de las matrices Γ de orden $2(2j+1)\times 2(2j+1)$ están dadas en la representación generalizada de Weyl (W) o quiral. estas matrices estan relacionadas a la representación generalizada de Dirac (D) o canónica, y están relacionadas por

$$\Gamma_D = S\Gamma_w S^{-1} \qquad \text{d}\mathit{onde} \qquad S = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}$$

donde $\mathbf{1}$ es la matriz identidad de orden $(2j+1)\times(2j+1)$ (Véase sección 2.2.1.).

[8] Nuevamente omitiremos el argumento de las matrices $\Lambda_{R,L}\left(p^\mu \longleftarrow \overset{o}{p}{}^{\mu}\right)$ por razones de espacio.

$$\left(\begin{array}{cc} -1_{3\times3} & Ae^{i\alpha_{\pm,0}}\Lambda_R\Lambda_L^{-1}+Be^{i\beta_{\mp,0}}\Theta_{[1]}\mathcal{K} \\ Ae^{-i\alpha_{\pm,0}}\Lambda_L\Lambda_R^{-1}+Be^{i\beta_{\mp,0}}\Theta_{[1]}\mathcal{K} & -1_{3\times3} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} \phi_R(p^\mu) \\ \phi_L(p^\mu) \end{array}\right)=0 \tag{3.29}$$

lo que se puede expresar como

$$\left[A\frac{\gamma^{\mu\nu}p_\mu p_\nu}{m^2}+B\mathcal{T}\Gamma^5\mathcal{S}^c_{[1]}-\mathcal{T}\right]\Psi(p^\mu)=0 \tag{3.30}$$

que es una nueva generalización a la ecuación de Weinberg.

3.3 Bispinores de Majorana

En el capítulo 2 hemos introducido los bispinores de Majorana (ecs. 2.15) y sabemos que satisfacen la autoconjugación y contra-autoconjugación de carga (ecs. 3.16) para partículas de spin $j = 1/2$ y la autoconjugación y contra-autoconjugación bajo la operación $\Gamma^5\mathcal{S}^c_{[1]}$ (ecs. 3.28) para partículas de spin $j = 1$, por lo que ya estamos en condiciones de encontrar la forma de estos bispinores.

3.3.1 Bispinores para spin $j = 1/2$

De las ecuaciones (2.15) y (3.16) tendremos [9], para $\lambda(p^\mu)$

$$e^{i\alpha}\left(\begin{array}{cc} 0 & i\Theta_{[1/2]} \\ -i\Theta_{[1/2]} & 0 \end{array}\right)\mathcal{K}\left(\begin{array}{c} \zeta_\lambda^{S,A}\Theta_{[1/2]}\left(\phi_L(p^\mu)\right)^* \\ \phi_L(p^\mu) \end{array}\right)=\pm\left(\begin{array}{c} \zeta_\lambda^{S,A}\Theta_{[1/2]}\left(\phi_L(p^\mu)\right)^* \\ \phi_L(p^\mu) \end{array}\right) \tag{3.31a}$$

es decir (con $\alpha = 0$)

$$i\Theta_{[1/2]}\mathcal{K}\phi_L(p^\mu)=\pm\zeta_\lambda^{S,A}\Theta_{[1/2]}\left(\phi_L(p^\mu)\right)^*$$
$$-i\Theta_{[1/2]}\mathcal{K}\zeta_\lambda^{S,A}\Theta_{[1/2]}\left(\phi_L(p^\mu)\right)^*=\pm\phi_L(p^\mu)$$

de donde se encuenra que $\zeta_\lambda^{S,A}=\pm i$ en el caso $\alpha = 0$, por lo cual

$$\lambda^{S,A}(p^\mu)=\left(\begin{array}{c} \pm i\Theta_{[1/2]}\left(\phi_L(p^\mu)\right)^* \\ \phi_L(p^\mu) \end{array}\right) \tag{3.32a}$$

de un modo similar, encontramos que para $\rho(p^\mu)$, las ecuaciones (2.15) y (3.16) se pueden escribir

[9] Utilizaremos S, A para denotar autoconjugado y contra-autoconjugado, respectivamente.

$$e^{i\alpha}\begin{pmatrix} 0 & i\Theta_{[1/2]} \\ -i\Theta_{[1/2]} & 0 \end{pmatrix}\mathcal{K}\begin{pmatrix} \phi_R(p^\mu) \\ \left(\zeta_\rho^{S,A}\Theta_{[1/2]}\right)^*(\phi_R(p^\mu))^* \end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix} \phi_R(p^\mu) \\ \left(\zeta_\rho^{S,A}\Theta_{[1/2]}\right)^*(\phi_L(p^\mu))^* \end{pmatrix} \tag{3.31b}$$

de donde resulta que $\zeta_\rho^{S,A} = \pm i$, por lo que

$$\rho^{S,A}(p^\mu) = \begin{pmatrix} \phi_R(p^\mu) \\ \left(\pm i\Theta_{[1/2]}\right)^*(\phi_R(p^\mu))^* \end{pmatrix} \tag{3.32b}$$

la conexión entre los bispinores en reposo y los bispinores con momento p^μ está dada de una forma muy similar a (2.1), es decir

$$\lambda^{S,A}(p^\mu) = W\left(1/2, p^\mu \longleftarrow \overset{o}{p}{}^{\mu}\right)\lambda^{S,A}(\overset{o}{p}{}^{\mu}) \tag{3.33a}$$

$$\rho^{S,A}(p^\mu) = W\left(1/2, p^\mu \longleftarrow \overset{o}{p}{}^{\mu}\right)\rho^{S,A}(\overset{o}{p}{}^{\mu}) \tag{3.33b}$$

y haciendo las expansiones apropiadas encontramos que

$$W\left(1/2, p^\mu \longleftarrow \overset{o}{p}{}^{\mu}\right) = \frac{1}{\sqrt{2m(E+m)}}\begin{pmatrix} E+m+\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} & 0 \\ 0 & E+m-\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} \end{pmatrix} \tag{3.34}$$

por lo cual, la forma explícita para $\lambda^{S,A}(p^\mu)$ y $\rho^{S,A}(p^\mu)$ es

$$\lambda^{S,A}(p^\mu) = \frac{1}{\sqrt{2m(E+m)}}\begin{pmatrix} E+m+\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} & 0 \\ 0 & E+m-\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \pm i\Theta_{[1/2]}\left(\phi_L(\overset{o}{p}{}^{\mu})\right)^* \\ \phi_L(\overset{o}{p}{}^{\mu}) \end{pmatrix} \tag{3.35a}$$

$$\rho^{S,A}(p^\mu) = \frac{1}{\sqrt{2m(E+m)}}\begin{pmatrix} E+m+\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} & 0 \\ 0 & E+m-\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi_R(\overset{o}{p}{}^{\mu}) \\ \left(\pm i\Theta_{[1/2]}\right)^*\left(\phi_L(\overset{o}{p}{}^{\mu})\right)^* \end{pmatrix} \tag{3.35b}$$

Para poder transformar las ecuaciones (3.35) es necesario dar primero los bispinores en reposo [10]; de las ecuaciones (3.32) y (2.30) se encuentra para los bispinores $\lambda^{S,A}(\overset{o}{p}{}^{\mu})$

[10] Si intentamos normalizar λ y ρ a la masa, al igual que en el capítulo 2 de modo que $\overline{\lambda}(\overrightarrow{p})\lambda(\overrightarrow{p}) = m$ y $\overline{\rho}(\overrightarrow{p})\rho(\overrightarrow{p}) = m$, encontramos que la normalización depende del factor de fase en la definición de $\mathcal{S}^c_{[1/2]}$. Si utilizamos la fase anterior encontramos que λ y ρ son bi-ortonormales, es decir

$$\begin{array}{ccc} \overline{\lambda}^S_\uparrow(\overrightarrow{p})\lambda^S_\downarrow(\overrightarrow{p}) = -im & ; & \overline{\lambda}^A_\uparrow(\overrightarrow{p})\lambda^A_\downarrow(\overrightarrow{p}) = im \\ \overline{\lambda}^S_\downarrow(\overrightarrow{p})\lambda^S_\uparrow(\overrightarrow{p}) = im & ; & \overline{\lambda}^A_\downarrow(\overrightarrow{p})\lambda^A_\uparrow(\overrightarrow{p}) = -im \end{array}$$

con relaciones similares para ρ.

$$\phi_L^{\uparrow}(\overset{o}{p}^{\mu}) = \sqrt{\frac{m}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad i\Theta_{[1/2]} \left[\phi_L^{\uparrow}(\overset{o}{p}^{\mu}) \right]^* = \sqrt{\frac{m}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}$$

por lo que

$$\lambda^{S\uparrow}(\overset{o}{p}^{\mu}) = \sqrt{\frac{m}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.36a}$$

y de un modo similar se encuentra

$$\lambda^{A\uparrow}(\overset{o}{p}^{\mu}) = \sqrt{\frac{m}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \lambda^{S\downarrow}(\overset{o}{p}^{\mu}) = \sqrt{\frac{m}{2}} \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \lambda^{A\downarrow}(\overset{o}{p}^{\mu}) = \sqrt{\frac{m}{2}} \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.36b}$$

La forma explícita de la ecuación (3.35a) es

$$\lambda^{S,A}(p^{\mu}) = \frac{1}{\sqrt{2m(E+m)}} \begin{pmatrix} p^+ + m & p_l & 0 & 0 \\ p_r & p^- + m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p^- + m & -p_l \\ 0 & 0 & -p_r & p^+ + m \end{pmatrix} \lambda^{S,A}(\overset{o}{p}^{\mu}) \tag{3.37a}$$

donde hemos denotado a los bispinores en reposo (ecs. 3.36) con $\lambda^{S,A}(\overset{o}{p}^{\mu})$, por lo cual, realizando las operaciones encontramos

$$\lambda^{S\uparrow}(p^{\mu}) = \frac{1}{2\sqrt{E+m}} \begin{pmatrix} ip_l \\ i(p^- + m) \\ p^- + m \\ -p_r \end{pmatrix} \qquad \lambda^{A\uparrow}(p^{\mu}) = \frac{1}{2\sqrt{E+m}} \begin{pmatrix} -ip_l \\ -i(p^- + m) \\ p^- + m \\ -p_r \end{pmatrix} \tag{3.38a}$$

$$\lambda^{S\downarrow}(p^{\mu}) = \frac{1}{2\sqrt{E+m}} \begin{pmatrix} -i(p^+ + m) \\ -ip_r \\ -p_l \\ p^+ + m \end{pmatrix} \qquad \lambda^{A\downarrow}(p^{\mu}) = \frac{1}{2\sqrt{E+m}} \begin{pmatrix} i(p^+ + m) \\ ip_r \\ -p_l \\ p^+ + m \end{pmatrix} \tag{3.38b}$$

donde los índices $\uparrow$ y $\downarrow$ corresponden a la helicidad quiral ($\gamma^5 h$). Obsérvese que

$$\lambda^{A\uparrow,\downarrow}(p^{\mu}) = -\gamma^5 \lambda^{S\uparrow,\downarrow}(p^{\mu}) \tag{3.39}$$

Los bispinores en reposo para $\rho(p^\mu)$ son

$$\rho^{S\uparrow}(\overset{o}{p}{}^{\mu}) = \sqrt{\frac{m}{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix} \qquad \rho^{A\uparrow}(\overset{o}{p}{}^{\mu}) = \sqrt{\frac{m}{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} \tag{3.40a}$$

$$\rho^{S\downarrow}(\overset{o}{p}{}^{\mu}) = \sqrt{\frac{m}{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \rho^{A\downarrow}(\overset{o}{p}{}^{\mu}) = \sqrt{\frac{m}{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.40b}$$

La ecuación (3.35b) en forma explícita es

$$\rho^{S,A}(p^\mu) = \frac{1}{\sqrt{2m(E+m)}}\begin{pmatrix} p^+ + m & p_l & 0 & 0 \\ p_r & p^- + m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p^- + m & -p_l \\ 0 & 0 & -p_r & p^+ + m \end{pmatrix}\rho^{S,A}(\overset{o}{p}{}^{\mu}) \tag{3.37b}$$

donde los bispinores en reposo (ecs. 3.39) los denotamos con $\rho^{S,A}(\overset{o}{p}{}^{\mu})$, por lo cual encontramos

$$\rho^{S\uparrow}(p^\mu) = \frac{1}{2\sqrt{E+m}}\begin{pmatrix} p^+ + m \\ p_r \\ ip_l \\ -i(p^+ + m) \end{pmatrix} \qquad \rho^{A\uparrow}(p^\mu) = \frac{1}{2\sqrt{E+m}}\begin{pmatrix} p^+ + m \\ p_r \\ -ip_l \\ i(p^+ + m) \end{pmatrix} \tag{3.41a}$$

$$\rho^{S\downarrow}(p^\mu) = \frac{1}{2\sqrt{E+m}}\begin{pmatrix} p_l \\ p^- + m \\ i(p^- + m) \\ -ip_r \end{pmatrix} \qquad \rho^{A\downarrow}(p^\mu) = \frac{1}{2\sqrt{E+m}}\begin{pmatrix} p_l \\ p^- + m \\ -i(p^- + m) \\ ip_r \end{pmatrix} \tag{3.41b}$$

obsérvese que

$$\rho^{A\uparrow,\downarrow}(p^\mu) = \gamma^5\rho^{S\uparrow,\downarrow}(p^\mu) \tag{3.42}$$

obsérvese también que los bispinores $\rho(p^\mu)$ y $\lambda(p^\mu)$ están conectados por

$$\begin{aligned} \rho^{S\uparrow}(p^\mu) &= -i\lambda^{A\downarrow}(p^\mu) \\ \rho^{S\downarrow}(p^\mu) &= +i\lambda^{A\uparrow}(p^\mu) \\ \rho^{A\uparrow}(p^\mu) &= +i\lambda^{S\downarrow}(p^\mu) \\ \rho^{A\downarrow}(p^\mu) &= -i\lambda^{S\uparrow}(p^\mu) \end{aligned} \tag{3.43}$$

En la siguiente subsección estudiaremos el caso de spin $j = 1$.

3.3.2 Bispinores para spin $j = 1$

Repitiendo el procedimiento hecho para spin $j = 1/2$ encontramos[11] que los bispinores de segundo tipo en reposo[12] son

$$\lambda^{S\uparrow}(\overset{o}{p}{}^{\mu}) = \frac{m}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda^{S\rightarrow}(\overset{o}{p}{}^{\mu}) = \frac{m}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda^{S\downarrow}(\overset{o}{p}{}^{\mu}) = \frac{m}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.44a}$$

[11] Para spin $j = 1$ utilizaremos las ecuaciones (2.15) y (3.28), de donde se obtiene que $\zeta^S_\lambda = \zeta^S_\rho = +1$ y $\zeta^A_\lambda = \zeta^A_\rho = -1$.

[12] También hemos normalizado λ y ρ a la masa, de modo que $\overline{\lambda}(\overrightarrow{p})\lambda(\overrightarrow{p}) = m^2$ y $\overline{\rho}(\overrightarrow{p})\rho(\overrightarrow{p}) = m^2$.

$$\lambda^{A\uparrow}(\overset{o}{p}{}^{\mu}) = \frac{m}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \lambda^{A\rightarrow}(\overset{o}{p}{}^{\mu}) = \frac{m}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \lambda^{A\downarrow}(\overset{o}{p}{}^{\mu}) = \frac{m}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.44b}$$

La relación que existe entre los bispinores autoconjugados y contra-autoconjugados con momento p^{μ} y los bispinores en reposo es [13]

$$\lambda(p^{\mu}) = W\left(1, p^{\mu} \longleftarrow \overset{o}{p}{}^{\mu}\right)\lambda(\overset{o}{p}{}^{\mu}) \tag{3.48a}$$

$$\rho(p^{\mu}) = W\left(1, p^{\mu} \longleftarrow \overset{o}{p}{}^{\mu}\right)\rho(\overset{o}{p}{}^{\mu}) \tag{3.48b}$$

donde hemos denotado nuevamente a los bispinores en reposo (3.44) y (3.50) con $\lambda(\overset{o}{p}{}^{\mu})$ y $\rho(\overset{o}{p}{}^{\mu})$ respectivamente.

Con ayuda de las ecuaciones (2.63) y (2.64) se puede encontrar la forma explícita de $W\left(1, p^{\mu} \longleftarrow \overset{o}{p}{}^{\mu}\right)$, por lo que haciendo las operaciones correspondientes (ec. 3.48a) se encuentra

$$\lambda^{S\uparrow}(p^{\mu}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \frac{p_l^2}{2(E+m)} \\ \frac{p_l}{\sqrt{2}} - \frac{p_z p_l}{\sqrt{2}(E+m)} \\ m - p_z + \frac{2p_z^2 + p_r p_l}{2(E+m)} \\ m - p_z + \frac{2p_z^2 + p_r p_l}{2(E+m)} \\ -\frac{p_r}{\sqrt{2}} + \frac{p_z p_r}{\sqrt{2}(E+m)} \\ \frac{p_r^2}{2(E+m)} \end{pmatrix} \quad \lambda^{S\rightarrow}(p^{\mu}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -\left(\frac{p_l}{\sqrt{2}} + \frac{p_z p_l}{\sqrt{2}(E+m)}\right) \\ -\left(m + \frac{p_r p_l}{E+m}\right) \\ -\left(\frac{p_r}{\sqrt{2}} - \frac{p_z p_r}{\sqrt{2}(E+m)}\right) \\ -\frac{p_l}{\sqrt{2}} + \frac{p_z p_l}{\sqrt{2}(E+m)} \\ m + \frac{p_r p_l}{E+m} \\ -\frac{p_r}{\sqrt{2}} - \frac{p_z p_r}{\sqrt{2}(E+m)} \end{pmatrix} \tag{3.49a}$$

[13] En general, las relaciones que existen entre los bispinores con momento p^{μ} y los bispinores en reposo, tanto para bispinores autoconjugados y contra-autoconjugados, son

$$\lambda(p^{\mu}) = W\left(j, p^{\mu} \longleftarrow \overset{o}{p}{}^{\mu}\right)\lambda(\overset{o}{p}{}^{\mu}) \tag{3.45}$$

y

$$\rho(p^{\mu}) = W\left(j, p^{\mu} \longleftarrow \overset{o}{p}{}^{\mu}\right)\rho(\overset{o}{p}{}^{\mu}) \tag{3.46}$$

donde

$$W\left(j, p^{\mu} \longleftarrow \overset{o}{p}{}^{\mu}\right) = \begin{pmatrix} \Lambda_R\left(j, p^{\mu} \longleftarrow \overset{o}{p}{}^{\mu}\right) & 0 \\ 0 & \Lambda_L\left(j, p^{\mu} \longleftarrow \overset{o}{p}{}^{\mu}\right) \end{pmatrix} \tag{3.47}$$

y $\Lambda_{R,L}\left(j, p^{\mu} \longleftarrow \overset{o}{p}{}^{\mu}\right)$ es la matriz $\Lambda_{R,L}\left(p^{\mu} \longleftarrow \overset{o}{p}{}^{\mu}\right)$ para spin j.

$$\lambda^{S\downarrow}(p^\mu) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} m + p_z + \frac{2p_z^2 + p_r p_l}{2(E+m)} \\ \frac{p_r}{\sqrt{2}} + \frac{p_z p_r}{\sqrt{2}(E+m)} \\ \frac{p_r^2}{2(E+m)} \\ \frac{p_l^2}{2(E+m)} \\ -\frac{p_l}{\sqrt{2}} - \frac{p_z p_l}{\sqrt{2}(E+m)} \\ m + p_z + \frac{2p_z^2 + p_r p_l}{2(E+m)} \end{pmatrix} \quad \lambda^{A\uparrow}(p^\mu) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\frac{p_l^2}{2(E+m)} \\ -\left(\frac{p_l}{\sqrt{2}} - \frac{p_z p_l}{\sqrt{2}(E+m)}\right) \\ -\left(m - p_z + \frac{2p_z^2 + p_r p_l}{2(E+m)}\right) \\ m - p_z + \frac{2p_z^2 + p_r p_l}{2(E+m)} \\ -\frac{p_r}{\sqrt{2}} + \frac{p_z p_r}{\sqrt{2}(E+m)} \\ \frac{p_r^2}{2(E+m)} \end{pmatrix} \tag{3.49b}$$

$$\lambda^{A\rightarrow}(p^\mu) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{p_l}{\sqrt{2}} + \frac{p_z p_l}{\sqrt{2}(E+m)} \\ m + \frac{p_r p_l}{E+m} \\ \frac{p_r}{\sqrt{2}} - \frac{p_z p_r}{\sqrt{2}(E+m)} \\ -\frac{p_l}{\sqrt{2}} + \frac{p_z p_l}{\sqrt{2}(E+m)} \\ m + \frac{p_r p_l}{E+m} \\ -\frac{p_r}{\sqrt{2}} - \frac{p_z p_r}{\sqrt{2}(E+m)} \end{pmatrix} \quad \lambda^{A\downarrow}(p^\mu) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\left(m + p_z + \frac{2p_z^2 + p_r p_l}{2(E+m)}\right) \\ -\left(\frac{p_r}{\sqrt{2}} + \frac{p_z p_r}{\sqrt{2}(E+m)}\right) \\ -\frac{p_r^2}{2(E+m)} \\ \frac{p_l^2}{2(E+m)} \\ -\frac{p_l}{\sqrt{2}} - \frac{p_z p_l}{\sqrt{2}(E+m)} \\ m + p_z + \frac{2p_z^2 + p_r p_l}{2(E+m)} \end{pmatrix} \tag{3.49c}$$

es importante notar que también se cumple la ec. (3.39)

$$\lambda^{A\uparrow,\rightarrow,\downarrow} = -\gamma^5 \lambda^{S\uparrow,\rightarrow,\downarrow}$$

Los bispinores de segundo tipo $\rho(p^\mu)$ autoconjugados y contra-autoconjugados en reposo se construyen en base de ϕ_R (ver ec. 2.15) y son

$$\rho^{S\uparrow}(\overset{o}{p}{}^{\mu}) = \frac{m}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \rho^{S\rightarrow}(\overset{o}{p}{}^{\mu}) = \frac{m}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rho^{S\downarrow}(\overset{o}{p}{}^{\mu}) = \frac{m}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.50a}$$

$$\rho^{A\uparrow}(\overset{o}{p}{}^{\mu}) = \frac{m}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \rho^{A\rightarrow}(\overset{o}{p}{}^{\mu}) = \frac{m}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rho^{A\downarrow}(\overset{o}{p}{}^{\mu}) = \frac{m}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.50b}$$

por lo que los bispinores con momento p^μ, $\rho(p^\mu)$ son

$$\rho^{S\uparrow}(p^\mu) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} m + p_z + \frac{2p_z^2 + p_r p_l}{2(E+m)} \\ \frac{p_r}{\sqrt{2}} + \frac{p_z p_r}{\sqrt{2}(E+m)} \\ \frac{p_r^2}{2(E+m)} \\ \frac{p_l^2}{2(E+m)} \\ -\left(\frac{p_l}{\sqrt{2}} + \frac{p_z p_l}{\sqrt{2}(E+m)}\right) \\ m + p_z + \frac{2p_z^2 + p_r p_l}{2(E+m)} \end{pmatrix} \quad \rho^{S\rightarrow}(p^\mu) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{p_l}{\sqrt{2}} + \frac{p_z p_l}{\sqrt{2}(E+m)} \\ m + \frac{p_r p_l}{E+m} \\ \frac{p_r}{\sqrt{2}} - \frac{p_z p_r}{\sqrt{2}(E+m)} \\ \left(\frac{p_l}{\sqrt{2}} - \frac{p_z p_l}{\sqrt{2}(E+m)}\right) \\ -\left(m + \frac{p_r p_l}{E+m}\right) \\ \frac{p_r}{\sqrt{2}} + \frac{p_z p_r}{\sqrt{2}(E+m)} \end{pmatrix} \tag{3.51a}$$

$$\rho^{S\downarrow}(p^\mu) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{p_l^2}{2(E+m)} \\ \frac{p_l}{\sqrt{2}} - \frac{p_z p_l}{\sqrt{2}(E+m)} \\ m - p_z + \frac{2p_z^2 + p_r p_l}{2(E+m)} \\ m - p_z + \frac{2p_z^2 + p_r p_l}{2(E+m)} \\ -\frac{p_r}{\sqrt{2}} + \frac{p_z p_r}{\sqrt{2}(E+m)} \\ \frac{p_r^2}{2(E+m)} \end{pmatrix} \quad \rho^{A\uparrow}(p^\mu) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} m + p_z + \frac{2p_z^2 + p_r p_l}{2(E+m)} \\ \frac{p_r}{\sqrt{2}} + \frac{p_z p_r}{\sqrt{2}(E+m)} \\ \frac{p_r^2}{2(E+m)} \\ -\frac{p_l^2}{2(E+m)} \\ \frac{p_l}{\sqrt{2}} + \frac{p_z p_l}{\sqrt{2}(E+m)} \\ -\left(m + p_z + \frac{2p_z^2 + p_r p_l}{2(E+m)}\right) \end{pmatrix} \tag{3.51b}$$

$$\rho^{A\rightarrow}(p^\mu) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{p_l}{\sqrt{2}} + \frac{p_z p_l}{\sqrt{2}(E+m)} \\ m + \frac{p_r p_l}{E+m} \\ \frac{p_r}{\sqrt{2}} - \frac{p_z p_r}{\sqrt{2}(E+m)} \\ -\frac{p_l}{\sqrt{2}} + \frac{p_z p_l}{\sqrt{2}(E+m)} \\ m + \frac{p_r p_l}{E+m} \\ -\left(\frac{p_r}{\sqrt{2}} + \frac{p_z p_r}{\sqrt{2}(E+m)}\right) \end{pmatrix} \quad \rho^{A\downarrow}(p^\mu) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{p_l^2}{2(E+m)} \\ \frac{p_l}{\sqrt{2}} - \frac{p_z p_l}{\sqrt{2}(E+m)} \\ m - p_z + \frac{2p_z^2 + p_r p_l}{2(E+m)} \\ -\left(m - p_z + \frac{2p_z^2 + p_r p_l}{2(E+m)}\right) \\ \left(\frac{p_r}{\sqrt{2}} - \frac{p_z p_r}{\sqrt{2}(E+m)}\right) \\ -\frac{p_r^2}{2(E+m)} \end{pmatrix} \tag{3.51c}$$

obsérvese que la ec. (3.42) sigue siendo válida, y que los bispinores $\rho(p^\mu)$ y $\lambda(p^\mu)$ están conectados por

$$\begin{aligned} \rho^{S\uparrow,\downarrow} &= \lambda^{S\downarrow,\uparrow} \\ \rho^{A\uparrow,\downarrow} &= -\lambda^{A\downarrow,\uparrow} \\ \rho^{S,A\rightarrow} &= \mp\lambda^{S,A\rightarrow} \end{aligned} \tag{3.52}$$

Las ecuaciones (3.39) y (3.42) son ecuaciones generales, es decir, se cumplen para cualquier spin.

3.4 Ecuaciones en base de las relaciones entre bispinores de helicidad opuesta

En el capítulo 2 se encontraron las relaciones (2.50), (2.72) y (2.73b), que nos relacionan bispinores con helicidad opuesta para partículas de spin $j = 1/2$, $j = 1$ y spin j respectivamente. Consideremos primero el caso de spin $j = 1/2$, habíamos encontrado (ec. 2.50)

$$\left[\phi_L^h(\overset{o}{p}{}^{\mu})\right]^* = (-1)^{1/2-h} e^{-i(\theta_1+\theta_2)} \Theta_{[1/2]} \phi_L^{-h}(\overset{o}{p}{}^{\mu})$$

podemos nosostros escoger las fases de tal forma que $\theta_1 + \theta_2 = \pi$, con lo que la ec. (2.50) se transforma

$$\left[\phi_L^h(\overset{o}{p}{}^{\mu})\right]^* = (-1)^{1/2+h} \Theta_{[1/2]} \phi_L^{-h}(\overset{o}{p}{}^{\mu}) \tag{3.53a}$$

de forma similar encontramos

$$\phi_L^h(\overset{o}{p}{}^{\mu}) = (-1)^{1/2+h} \Theta_{[1/2]} \left[\phi_L^{-h}(\overset{o}{p}{}^{\mu})\right]^* \tag{3.53b}$$

por lo cual podemos encontrar una ecuación para esta relación de Ryder-Burgard, así

$$\begin{aligned}
\phi_L^h(p^\mu) = \Lambda_L\left(p^\mu \longleftarrow \overset{o}{p}{}^{\mu}\right)\phi_L^h(\overset{o}{p}{}^{\mu}) = (-1)^{1/2+h}\Lambda_L\left(p^\mu \longleftarrow \overset{o}{p}{}^{\mu}\right)\Theta_{[1/2]}\left[\phi_L^{-h}(\overset{o}{p}{}^{\mu})\right]^* = \\
= (-1)^{1/2+h}\Lambda_L\left(p^\mu \longleftarrow \overset{o}{p}{}^{\mu}\right)\Theta_{[1/2]}\left[\Lambda_L^{-1}\left(p^\mu \longleftarrow \overset{o}{p}{}^{\mu}\right)\right]^*\left[\phi_L^{-h}(p^\mu)\right]^* = \\
= \tfrac{1}{\zeta}(-1)^{1/2+h}\Lambda_L\left(p^\mu \longleftarrow \overset{o}{p}{}^{\mu}\right)\Theta_{[1/2]}\left[\Lambda_L^{-1}\left(p^\mu \longleftarrow \overset{o}{p}{}^{\mu}\right)\right]^*\Theta_{[1/2]}^{-1}\zeta\Theta[1/2]\left[\phi_L^{-h}(p^\mu)\right]^* = \\
= \tfrac{1}{\zeta}(-1)^{1/2+h}\Lambda_L\left(p^\mu \longleftarrow \overset{o}{p}{}^{\mu}\right)\Lambda_R^{-1}\left(p^\mu \longleftarrow \overset{o}{p}{}^{\mu}\right)\chi_R^h(p^\mu)
\end{aligned} \tag{3.54}$$

donde hemos llamado

$$\chi_R^h(p^\mu) = \zeta\Theta[1/2]\left[\phi_L^{-h}(p^\mu)\right]^*$$

y utilizado

$$\Theta_{[j]}\left[\Lambda_L^{-1}\left(p^\mu \longleftarrow \overset{o}{p}{}^{\mu}\right)\right]^* = \Lambda_L\left(p^\mu \longleftarrow \overset{o}{p}{}^{\mu}\right)\Theta_{[j]} \tag{3.55}$$

Podemos ahora formar el bispinor

$$\Psi_+^S(p^\mu) = \begin{pmatrix} \chi_R^{+1/2}(p^\mu) \\ \phi_L^{+1/2}(p^\mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\Theta_{[1/2]}\left[\phi_L^{-1/2}(p^\mu)\right]^* \\ \phi_L^{+1/2}(p^\mu) \end{pmatrix} \tag{3.56a}$$

por lo que las relaciones (3.53) se puede representar como

$$\Psi_{+}^{S}(p^{\mu}) = \begin{pmatrix} 0 & -i\Lambda_R\left(p^{\mu} \longleftarrow \overset{o\mu}{p}\right)\Lambda_L^{-1}\left(p^{\mu} \longleftarrow \overset{o\mu}{p}\right) \\ i\Lambda_L\left(p^{\mu} \longleftarrow \overset{o\mu}{p}\right)\Lambda_R^{-1}\left(p^{\mu} \longleftarrow \overset{o\mu}{p}\right) & 0 \end{pmatrix} \Psi_{+}^{S}(p^{\mu})$$

o en forma más compacta como [14]

$$\left[\frac{i}{m}\gamma^{5}\widetilde{P} + 1\right]\Psi_{+}^{S}(p^{\mu}) = 0 \qquad (3.57a)$$

que es un caso particular de la generalización (3.6). Del mismo modo se puede encontrar

$$\Psi_{-}^{S}(p^{\mu}) = \begin{pmatrix} \chi_R^{-1/2}(p^{\mu}) \\ \phi_L^{-1/2}(p^{\mu}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\Theta_{[1/2]}\left[\phi_L^{+1/2}(p^{\mu})\right]^{*} \\ \phi_L^{-1/2}(p^{\mu}) \end{pmatrix} \qquad (3.56b)$$

$$\Psi_{+}^{A}(p^{\mu}) = \begin{pmatrix} -\chi_R^{+1/2}(p^{\mu}) \\ \phi_L^{+1/2}(p^{\mu}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\Theta_{[1/2]}\left[\phi_L^{-1/2}(p^{\mu})\right]^{*} \\ \phi_L^{+1/2}(p^{\mu}) \end{pmatrix} \qquad (3.56c)$$

$$\Psi_{-}^{A}(p^{\mu}) = \begin{pmatrix} -\chi_R^{-1/2}(p^{\mu}) \\ \phi_L^{-1/2}(p^{\mu}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\Theta_{[1/2]}\left[\phi_L^{+1/2}(p^{\mu})\right]^{*} \\ \phi_L^{-1/2}(p^{\mu}) \end{pmatrix} \qquad (3.56d)$$

con sus respectivas ecuaciones

$$\left[\frac{i}{m}\gamma^{5}\widetilde{P} - 1\right]\Psi_{-}^{S}(p^{\mu}) = 0 \qquad (3.58b)$$

$$\left[\frac{i}{m}\gamma^{5}\widetilde{P} - 1\right]\Psi_{+}^{A}(p^{\mu}) = 0 \qquad (3.58c)$$

$$\left[\frac{i}{m}\gamma^{5}\widetilde{P} + 1\right]\Psi_{-}^{A}(p^{\mu}) = 0 \qquad (3.58d)$$

a este mismo resultado se llega utilizando la relación (2.50) para los spinores derechos, es decir [15]

[14] Recordemos que

$$\widetilde{P} = \gamma^{\mu}p_{\mu}$$

.

[15] En este caso, los bispinores serán

$$\Psi_{+}^{S}(p^{\mu}) = i\begin{pmatrix} \phi_R^{+1/2}(p^{\mu}) \\ \chi_L^{+1/2}(p^{\mu}) \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} \phi_R^{+1/2}(p^{\mu}) \\ -i\Theta_{[1/2]}\left[\phi_R^{-1/2}(p^{\mu})\right]^{*} \end{pmatrix} \qquad (3.56a)$$

$$\left[\phi_R^h(\overset{o}{p}{}^{\mu})\right]^* = (-1)^{1/2-h} e^{-i(\theta_1+\theta_2)}\Theta_{[1/2]}\phi_R^{-h}(\overset{o}{p}{}^{\mu})$$

Estos bispinores (ecs. 3.56) son las eigenfunciones del operador de helicidad en el espacio de representación $(1/2,0)\oplus(0,1/2)$ pero no son los bispinores autoconjugados y contra-autoconjugados. Podemos reagrupar los bispinores $\Psi_\pm$ en sus partes derechas e izquierdas, conectándolos de esta forma con los bispinores autoconjugados y contra-autoconjugados, la relaciones que existe entre ambos tipos de bispinores es

$$\begin{aligned}
\Psi_+^{S,A}(p^\mu) &= \tfrac{1-\gamma^5}{2}\lambda^{S,A\uparrow}(p^\mu) + \tfrac{1+\gamma^5}{2}\lambda^{S,A\downarrow}(p^\mu)\\
\Psi_-^{S,A}(p^\mu) &= \tfrac{1-\gamma^5}{2}\lambda^{S,A\downarrow}(p^\mu) + \tfrac{1+\gamma^5}{2}\lambda^{S,A\uparrow}(p^\mu)
\end{aligned} \tag{3.58}$$

y sustituyendo estas relaciones en (3.57) se obtiene (por ejemplo para $\Psi_+^S(p^\mu)$ y $\Psi_-^S(p^\mu)$)

$$\begin{aligned}
\tfrac{i}{m}\left(p_0 + \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\right)\left(1-\gamma^5\right)\lambda^{S\uparrow}(p^\mu) &= \left(1+\gamma^5\right)\lambda^{S\downarrow}(p^\mu)\\
-\tfrac{i}{m}\left(p_0 - \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\right)\left(1+\gamma^5\right)\lambda^{S\downarrow}(p^\mu) &= \left(1-\gamma^5\right)\lambda^{S\uparrow}(p^\mu)\\
\tfrac{i}{m}\left(p_0 + \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\right)\left(1-\gamma^5\right)\lambda^{S\downarrow}(p^\mu) &= -\left(1+\gamma^5\right)\lambda^{S\uparrow}(p^\mu)\\
-\tfrac{i}{m}\left(p_0 - \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\right)\left(1+\gamma^5\right)\lambda^{S\uparrow}(p^\mu) &= -\left(1-\gamma^5\right)\lambda^{S\downarrow}(p^\mu)
\end{aligned}$$

y tratando $\lambda^S(p^\mu)$ (y a $\rho^A(p^\mu)$) como solución con energía positiva y $\lambda^A(p^\mu)$ (y a $\rho^S(p^\mu)$) como solución con energía negativa se encuentra

$$\widetilde{P}\lambda^{S\uparrow}(p^\mu) - im\lambda^{S\downarrow}(p^\mu) = 0 \quad ; \quad \widetilde{P}\lambda^{S\downarrow}(p^\mu) + im\lambda^{S\uparrow}(p^\mu) = 0 \tag{3.59a}$$

$$\widetilde{P}\lambda^{A\uparrow}(p^\mu) + im\lambda^{A\downarrow}(p^\mu) = 0 \quad ; \quad \widetilde{P}\lambda^{A\downarrow}(p^\mu) - im\lambda^{A\uparrow}(p^\mu) = 0 \tag{3.59b}$$

$$\Psi_-^S(p^\mu) = -i\begin{pmatrix}\phi_R^{-1/2}(p^\mu)\\ \chi_L^{-1/2}(p^\mu)\end{pmatrix} = -i\begin{pmatrix}\phi_R^{-1/2}(p^\mu)\\ -i\Theta_{[1/2]}\left[\phi_R^{+1/2}(p^\mu)\right]^*\end{pmatrix} \tag{3.56b}$$

$$\Psi_+^A(p^\mu) = -i\begin{pmatrix}\phi_R^{+1/2}(p^\mu)\\ -\chi_L^{+1/2}(p^\mu)\end{pmatrix} = -i\begin{pmatrix}\phi_R^{+1/2}(p^\mu)\\ i\Theta_{[1/2]}\left[\phi_R^{-1/2}(p^\mu)\right]^*\end{pmatrix} \tag{3.56c}$$

$$\Psi_-^A(p^\mu) = i\begin{pmatrix}\phi_R^{-1/2}(p^\mu)\\ -\chi_L^{-1/2}(p^\mu)\end{pmatrix} = i\begin{pmatrix}\phi_R^{-1/2}(p^\mu)\\ i\Theta_{[1/2]}\left[\phi_R^{+1/2}(p^\mu)\right]^*\end{pmatrix} \tag{3.56d}$$

del mismo modo, utilizando $\Psi_+^A(p^\mu)$ y $\Psi_-^A(p^\mu)$ construidos en base de $\phi_R(p^\mu)$ encontramos

$$\widetilde{P}\rho^{S\uparrow}(p^\mu) + im\rho^{S\downarrow}(p^\mu) = 0 \quad ; \quad \widetilde{P}\rho^{S\downarrow}(p^\mu) - im\rho^{S\uparrow}(p^\mu) = 0 \qquad (3.59c)$$

$$\widetilde{P}\rho^{A\uparrow}(p^\mu) - im\rho^{A\downarrow}(p^\mu) = 0 \quad ; \quad \widetilde{P}\rho^{A\downarrow}(p^\mu) + im\rho^{A\uparrow}(p^\mu) = 0 \qquad (3.59b)$$

si utilizamos (3.43), podemos poner las ecuaciones (3.59) con la misma helicidad quiral, es decir

$$\widetilde{P}\lambda^{S\uparrow,\downarrow}(p^\mu) - m\rho^{A\uparrow,\downarrow}(p^\mu) = 0 \quad ; \quad \widetilde{P}\lambda^{A\uparrow,\downarrow}(p^\mu) - m\rho^{S\uparrow,\downarrow}(p^\mu) = 0 \qquad (3.60a)$$

$$\widetilde{P}\rho^{S\uparrow,\downarrow}(p^\mu) - m\lambda^{A\uparrow,\downarrow}(p^\mu) = 0 \quad ; \quad \widetilde{P}\rho^{A\uparrow,\downarrow}(p^\mu) - m\lambda^{S\uparrow,\downarrow}(p^\mu) = 0 \qquad (3.60b)$$

que en el espacio de coordenadas son

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\lambda^S(x^\mu) - m\rho^A(x^\mu) = 0 \quad ; \quad i\gamma^\mu\partial_\mu\lambda^A(x^\mu) + m\rho^S(x^\mu) = 0 \qquad (3.61a)$$

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\rho^S(x^\mu) + m\lambda^A(x^\mu) = 0 \quad ; \quad i\gamma^\mu\partial_\mu\rho^A(x^\mu) - m\lambda^S(x^\mu) = 0 \qquad (3.61b)$$

que son ecuaciones dinámicas, la parte dinámica de las ecuaciones para los bispinores $\lambda^{S,A}(p^\mu)$ y $\rho^{S,A}(p^\mu)$ están conectadas con la parte masiva de los bispinores $\rho^{S,A}(p^\mu)$ y $\lambda^{S,A}(p^\mu)$ respectivamente. Las ecuaciones (3.61) se pueden compactar en una forma dibispinorial, tomando la forma

$$[i\Gamma^\mu\partial_\mu \mp m]\,\Upsilon_\pm(x^\mu) = 0 \qquad (3.62)$$

con

$$\Upsilon_\pm(x^\mu) = \begin{pmatrix} \rho^{A,S}(x^\mu) \\ \lambda^{S,A}(x^\mu) \end{pmatrix} \qquad (3.63)$$

donde

$$\Gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \gamma^\mu \\ \gamma^\mu & 0 \end{pmatrix} \qquad \Gamma^5 = \begin{pmatrix} \gamma^5 & 0 \\ 0 & \gamma^5 \end{pmatrix} \qquad L^5 = \begin{pmatrix} \gamma^5 & 0 \\ 0 & -\gamma^5 \end{pmatrix} \qquad (3.64)$$

con la propiedad de *conmutación*

$$L^5\Gamma^\mu - \Gamma^\mu L^5 = 0 \tag{3.65}$$

Podemos hacer el mismo desarrollo para spin $j = 1$, sólo que ahora utilizaremos la relación (2.72), repitiendo el proceso hecho para spin $j = 1/2$ se encuentra

$$\begin{array}{c} \left[\gamma^{\mu\nu}p_\mu p_\nu - m\right]\Psi_\pm^S(p^\mu) = 0 \\ \left[\gamma^{\mu\nu}p_\mu p_\nu + m\right]\Psi_\pm^A(p^\mu) = 0 \\ \left[\gamma^{\mu\nu}p_\mu p_\nu \pm m\right]\Psi_0^{S,A}(p^\mu) = 0 \end{array} \tag{3.66}$$

donde $\Psi_{\pm,0}^{S,A}(p^\mu)$ tiene la forma

$$\Psi_+^{S,A}(p^\mu) = \begin{pmatrix} \pm\xi_R^{+1}(p^\mu) \\ \phi_L^{+1}(p^\mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm\Theta_{[1]}\left[\phi_L^{-1}(p^\mu)\right]^* \\ \phi_L^{+1}(p^\mu) \end{pmatrix} \tag{3.67a}$$

$$\Psi_0^{S,A}(p^\mu) = \begin{pmatrix} \pm\xi_R^{0}(p^\mu) \\ \phi_L^{0}(p^\mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm\Theta_{[1]}\left[\phi_L^{0}(p^\mu)\right]^* \\ \phi_L^{0}(p^\mu) \end{pmatrix} \tag{3.67b}$$

$$\Psi_-^{S,A}(p^\mu) = \begin{pmatrix} \pm\xi_R^{-1}(p^\mu) \\ \phi_L^{-1}(p^\mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm\Theta_{[1]}\left[\phi_L^{+1}(p^\mu)\right]^* \\ \phi_L^{-1}(p^\mu) \end{pmatrix} \tag{3.67c}$$

sustituyendo las ecuaciones (3.67) en (3.66) obtenemos

$$\gamma^{\mu\nu}p_\mu p_\nu\lambda^{S\uparrow}(p^\mu) - m^2\lambda^{S\downarrow}(p^\mu) = 0 \quad ; \quad \gamma^{\mu\nu}p_\mu p_\nu\rho^{S\uparrow}(p^\mu) - m^2\rho^{S\downarrow}(p^\mu) = 0 \tag{3.68a}$$

$$\gamma^{\mu\nu}p_\mu p_\nu\lambda^{S\downarrow}(p^\mu) - m^2\lambda^{S\uparrow}(p^\mu) = 0 \quad ; \quad \gamma^{\mu\nu}p_\mu p_\nu\rho^{S\downarrow}(p^\mu) - m^2\rho^{S\uparrow}(p^\mu) = 0 \tag{3.68b}$$

$$\gamma^{\mu\nu}p_\mu p_\nu\lambda^{S\rightarrow}(p^\mu) + m^2\lambda^{S\rightarrow}(p^\mu) = 0 \quad ; \quad \gamma^{\mu\nu}p_\mu p_\nu\rho^{S\rightarrow}(p^\mu) + m^2\rho^{S\rightarrow}(p^\mu) = 0 \tag{3.68c}$$

$$\gamma^{\mu\nu}p_\mu p_\nu\lambda^{A\uparrow}(p^\mu) + m^2\lambda^{A\downarrow}(p^\mu) = 0 \quad ; \quad \gamma^{\mu\nu}p_\mu p_\nu\rho^{A\uparrow}(p^\mu) + m^2\rho^{A\downarrow}(p^\mu) = 0 \tag{3.68d}$$

$$\gamma^{\mu\nu}p_\mu p_\nu\lambda^{A\downarrow}(p^\mu) + m^2\lambda^{A\uparrow}(p^\mu) = 0 \quad ; \quad \gamma^{\mu\nu}p_\mu p_\nu\rho^{A\downarrow}(p^\mu) + m^2\rho^{A\uparrow}(p^\mu) = 0 \tag{3.68e}$$

$$\gamma^{\mu\nu}p_\mu p_\nu\lambda^{A\rightarrow}(p^\mu) - m^2\lambda^{A\rightarrow}(p^\mu) = 0 \quad ; \quad \gamma^{\mu\nu}p_\mu p_\nu\rho^{A\rightarrow}(p^\mu) - m^2\rho^{A\rightarrow}(p^\mu) = 0 \tag{3.68f}$$

y utilizando las ecuaciones (3.52) podemos poner las ecuaciones (3.68) con la misma helicidad, resultando

$$\gamma^{\mu\nu} p_\mu p_\nu \lambda^{S\uparrow,\downarrow,\rightarrow}(p^\mu) - m^2 \rho^{S\uparrow,\downarrow,\rightarrow}(p^\mu) = 0 \tag{3.69a}$$

$$\gamma^{\mu\nu} p_\mu p_\nu \lambda^{A\uparrow,\downarrow,\rightarrow}(p^\mu) - m^2 \rho^{A\uparrow,\downarrow,\rightarrow}(p^\mu) = 0 \tag{3.69b}$$

$$\gamma^{\mu\nu} p_\mu p_\nu \rho^{S\uparrow,\downarrow,\rightarrow}(p^\mu) - m^2 \lambda^{S\uparrow,\downarrow,\rightarrow}(p^\mu) = 0 \tag{3.69c}$$

$$\gamma^{\mu\nu} p_\mu p_\nu \rho^{A\uparrow,\downarrow,\rightarrow}(p^\mu) - m^2 \lambda^{A\uparrow,\downarrow,\rightarrow}(p^\mu) = 0 \tag{3.69d}$$

Estas ecuaciones en el espacio de coordenadas también se pueden poner en forma "dibispinorial", resultando

$$\left[\Gamma^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + m^2\right] \Upsilon_\pm(x^\mu) = 0 \tag{3.70}$$

con

$$\Upsilon_\pm(x^\mu) = \begin{pmatrix} \rho^{S,A}(x^\mu) \\ \lambda^{S,A}(x^\mu) \end{pmatrix} \tag{3.71}$$

donde

$$\Gamma^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma^{\mu\nu} \\ \gamma^{\mu\nu} & 0 \end{pmatrix} \tag{3.72}$$

Obsérvese que las ecuaciones (3.62) y (3.70) tienen forma muy parecida a las ecuaciones de Dirac y de Weinberg, respectivamente, sin embargo la función es para 8 y 12 componentes, respectivamente. Para spines más altos se puede realizar un procedimiento similar al que se hizo en esta sección, sólo que tiene que utilizarse la relación (2.73b) con el spin apropiado.

3.5 Paridad

En el formalismo expuesto, las partículas cargadas de spin $j = 1$ tienen paridad opuesta (Véase [5].). Partículas neutrales con spin $j = 1/2$ y $j = 1$ tienen propiedades con respecto a la inversión del espacio muy extrañas (Véase [4,14,15].). Ahora, para cimentar el formalismo expuesto compararemos las formulaciones en las partículas neutrales con la que se conoce de los libros de texto (Véase, por ejemplo [23].).

Como la partícula y la antipartícula son idénticas en el caso de un neutrino de Majorana, podríamos suponer que $\psi(x)$ debe estar de algún modo relacionada a $\psi^*(x)$. Si tratásemos que esta relación fuera

$$\psi(x) = \psi^*(x) \tag{3.73}$$

encontraríamos que esta ecuación es insuficiente, puesto que una ecuación de significado físico debe ser un covariante de Lorentz, lo que no sucede con la ecuación (3.73), en efecto, bajo una transformación de Lorentz que cambie las coordenadas

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \omega^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \tag{3.74}$$

el campo espinoreal será [16]

$$\psi'(x') = \exp\left(\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}\right)\psi(x) \tag{3.76}$$

donde

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}\left[\gamma_\mu,\gamma_\nu\right] \tag{3.77}$$

La ecuación (3.76) da

$$\psi'^*(x') = exp\left(-\frac{i}{4}\sigma^*_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}\right)\psi^*(x) \tag{3.78}$$

la cual, en general, no es la misma ley de transformación de (3.76) puesto que las matrices $\sigma_{\mu\nu}$ no son puramente imaginarias. por lo cual, si imponemos (3.73) en un sistema de referencia, no será válido en otro sistema. Así, podemos definir un campo conjugado

$$\widehat{\psi}(x) = \mathcal{C}\gamma_0\psi^*(x) \tag{3.79}$$

donde $\mathcal{C}$ es una matriz aún indefenida tal que $\widehat{\psi}$ se transforme del mismo modo bajo la transformación de Lorentz como $\psi(x)$, es decir

$$\widehat{\psi}'(x') = \exp\left(\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}\right)\widehat{\psi}(x) = \exp\left(\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}\right)\mathcal{C}\gamma_0\psi^*(x) \tag{3.80}$$

usando (3.76) directamente sobre (3.79) obtenemos

[16] El operador de campo de Dirac $\psi(x)$ es

$$\psi(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}}\sum_{s=\pm}\left(f_s(\mathbf{p})u_s(\mathbf{p})e^{-ip\cdot x} + \widehat{f_s^\dagger}(\mathbf{p})v_s(\mathbf{p})e^{ip\cdot x}\right) \tag{3.75}$$

$$\widehat{\psi}'(x') = \mathcal{C}\gamma_0\psi'^*(x') = \mathcal{C}\gamma_0 \exp\left(-\frac{i}{4}\sigma^*_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}\right)\psi^*(x) = \tag{3.81}$$

igualando (3.80) y (3.81) exigimos que $\mathcal{C}$ satisfaga la relación

$$\mathcal{C}\gamma_0 \exp\left(-\frac{i}{4}\sigma^*_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}\right) = \exp\left(\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}\right)\mathcal{C}\gamma_0 \tag{3.82}$$

para cualquier $\omega^{\mu\nu}$ arbitraria, lo que implica

$$-\mathcal{C}\gamma_0\sigma^*_{\mu\nu} = \sigma_{\mu\nu}\mathcal{C}\gamma_0 \tag{3.83}$$

la forma específica de la matriz $\mathcal{C}$ depende de la representación de las matrices γ. Podemos cambiar la ecuación (3.73) remplazando $\psi^*(x)$ por $\widehat{\psi}(x)$ en el lado derecho, lo cual será una relación covariante de Lorentz que nos definirá un campo de Majorana. Dado que $\widehat{\psi}(x)$ incluye $\psi^*(x)$, entonces debe incluir $f_s^\dagger(\mathbf{p})$ y $\widehat{f_s}(\mathbf{p})$, esta identificación con $\psi(x)$ sirve para el proposito de indentificar partículas con antipartículas. La definición del campo de Majorana se hace un poco más general si pedimos

$$\psi(x) = e^{i\theta}\widehat{\psi}(x) \tag{3.84}$$

puesto que la fase siempre puede ser absorbida en la definición del campo de fermiones $\psi(x)$. Se escoge $\theta = 0$ definiendo convenientemente el campo de fermiones, pero la libertad de la fase es algunas veces conveniente. Así, el operador del campo de Majorana es

$$\psi(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{s=\pm} \left(f_s(\mathbf{p})u_s(\mathbf{p})e^{-ip\cdot x} + \lambda f_s^\dagger(\mathbf{p})v_s(\mathbf{p})e^{ip\cdot x}\right) \tag{3.85}$$

esto significa que la antipartícula es la misma que la partícula excepto por una fase λ, es decir, λ está relacionada al ángulo de fase θ que aparece en la ecuación (3.84).

Sin embargo, las cuestiones de los valores que puede tomar λ (ec. 3.85) en la helicidad no fueron analizadas en los libros de texto. Esto ha dado origen de las posibilidades de generalizar las construcciones para las partículas neutrales, precisamente es lo que hemos hecho en las secciones anteriores.

Apéndice
Teoría simétrica del electrón y del positrón

CONCILIO DE LA INVESTIGACION NACIONAL DE CANADA
TRADUCCIÓN TÉCNICA TT-542
TITULO: **TEORIA SIMMETRICA DELL'ELETTRONE E DEL POSITRONE**
AUTOR: Ettore Majorana.
REFERENCIA: Il Nuovo Cimento, 14: 171-184, 1937.
TRADUCTOR (del italiano al inglés): D. A. Sinclair, Sección de las Traducciones, N.R.C. Biblioteca. (Traducción con permiso).

Resumen

Se demuestra la posibilidad de alcanzar formalmente una simetría completa en la teoría del electrón y el positrón, haciendo uso de un nuevo proceso de cuantización. Se modifica un poco el sentido de las ecuaciones de Dirac como consecuencia de ésto, y no hay razón para hablar de estados negativos de energía; ni la hay para asumir la existencia de "antiparticulas" para otros tipos de partículas, correspondientes a los "agujeros" de energía negativa.

Teoría simétrica del electrón y del positrón

La interpretación de los llamados estados negativos de energía propuestos por Dirac, lleva como es bien sabido, a una descripción substancialmente simétrica de los electrones y positrones. La simetría substancial del formalismo consiste precisemente en el hecho de que hasta este punto es posible aplicar la teoría evadiendo la dificultad de convergencia, esto realmente suministra resultados completamente simétricos. Sin embargo, los artificios sugeridos para prestar una forma simétrica a la teoría la cual estará en acuerdo con su contenido, no son completamente satisfactorios, ya sea porque el punto de comienzo es una posición asimétrica, o porque la simetría viene como un resultado de procedimientos (tal como la cancelación de constantes infinitas), los cuales se deben evitar. Por eso hemos probado un nuevo método que lleva más directamente a la meta.

En lo que repecta a electrones y positrones, realmente esperaríamos sólo un progreso formal, pero esto parece importante a causa de las posibles extensiones análogas, que la idea de estados negativos de energía debe quitar eventualmente. De hecho, veremos que es perfectamente posible construir, de la manera más lógica, una teoría de partículas neutras sin estados negativos de energía.

1. La electrodinámica cuántica se puede deducir, como se sabe, por medio de un proceso de cuantización de un sistema de ecuaciones, comprendiendo por un lado, la ecuación de onda del electrón de Dirac, y por el otro, las ecuaciones de Maxwell en que las densidades de carga y de corriente se representan por ecuaciones formadas por medio de la función de onda del electrón. La forma que se da a estas expresiones en realidad agrega algo nuevo a las ecuaciones de Dirac, y sólo de esas podemos derivar cualquier asimetría con respecto al signo de la carga la cual no existe en las ecuaciones de Dirac. Pero como tales expresiones resultan automáticamente de la aplicación de un principio variacional del cual tanto las ecuaciones de Maxwell como la de Dirac son deducidas, nuestro problema será entonces examinar la base de este principio y sustituirlo por uno más apropiado.

Se sabe que las cantidades que aparecen en las ecuaciones de Maxwell y de Dirac son de dos tipos. Por un lado están los potenciales electromagnéticos, susceptibles a una interpretación clásica según el principio de la correspondencia, y por el otro las ondas de materia, que representa partículas que obedecen la ley estadística de Fermi y que tiene significado sólo en la mecánica cuántica. Bajo estas circunstancias parece ofrecer poca satisfacción que las ecuaciones y todos los procesos de cuantización deban depender de un principio variacional que es susceptible sólo a una interpretación clásica. Parece más natural buscar una generalización de los métodos variacionales tal que las variables que aparecen en la función de Lagrange tengan, como es deseable, su significado final desde el mismo inicio, y representen cantidades que no son necesariamente conmutables. Ésto es precisamente lo que haremos. Es de especial importancia para los campos que obedecen la estadística de Fermi aunque, hasta donde le concierne al campo electromagnético, consideraciones de simplicidad nos llevarían a asumir que esto no agrega nada a los antiguos métodos. De cualquier modo, no emprenderemos el estudio sistemático de la posibilidad lógica ofrecida por el nuevo punto de vista que adoptamos, pero nos limitaremos a describir un proceso de cuantización de las ondas de materia que sólo tienen importancia real en aplicación. Se presenta como una generalización natural del método de Jordan-Wigner [1] y nos habilita no sólo para darle una forma simétrica a la teoría de electrones y positrones sino también para construir substancialmente una nueva teoría para las partículas sin carga eléctrica (neutrones e hipotéticos neutrinos). Como no es posible aún afianzar una decisión empírica sobre los relativos méritos de esta nueva teoría y que es meramente la extensión de las ecuaciones de Dirac a las partículas neutras, daremos en mente que lo anterior introduce un número más pequeño de entidades hipotéticas en este campo comparativamente inexplorado.

Sale al lector la extensión obvia de la fórmula según los sistemas continuos con que iniciamos abajo, ponemos adelante, para mayor claridad, el método de cuantización con referencia a los sistemas discretos. Esto, permite ser un sistema físico descrito por variables reales (matrices simétricas hermitianas) $q_1, q_2, ..., q_n$. Definimos un Lagrangiano

$$L = i\sum_{r,s}(A_{rs}q_r \dot{q}_s + B_{rs}q_rq_s) \tag{A.1}$$

y tomamos

$$\delta \int Ldt = 0 \tag{A.2}$$

En estas fórmulas A_{rs} y B_{rs}, son números ordinarios, reales, el primero es constante mientras el segundo puede depender del tiempo.

Ellas satisfacen la relación:

$$A_{rs} = A_{sr} \qquad ; \qquad B_{rs} = -B_{sr} \tag{A.3}$$

donde, además, $\det \|A_{rs}\| \neq 0$.

Si las q fueran variables conmutables, el principio variacional (A.2) no tendría significado dado que desaparecería. Para variables no conmutables la ecuación (A.2) implica la auto cancelación en cada momento de la matriz hermitiana

$$i\sum_r \left[\delta q_r \left(\sum_s A_{rs}\dot{q}_s + B_{rs}q_s\right) - \sum_s \left(A_{rs}\dot{q}_s + B_{rs}q_s\right)\delta q_r\right] = 0$$

no importa como las variaciones δq_r son escogidas. Esto es posible sólo si las expresiones

$$\sum_s \left(A_{rs} \dot{q}_s + B_{rs}q_s\right)$$

son múltiplos de la matriz unidad, para que con cualquier adjunto satisfactorio al principio variacional (A.2) (en consecuencia de esto se impone la auto cancelación de la suma de los términos diagonales[1] en estas expresiones) las siguientes pueden ser consideradas como ecuaciones de movimiento:

$$\sum_s (A_{rs}\dot{q}_s + B_{rs}q_s) = 0 \qquad r = 1, 2, ..., n \tag{A.4}$$

Ahora queremos mostrar que estas ecuaciones pueden ser derivadas de:

[1] La aplicación física que se explica un poco más allá sugiere una restricción más rigurosa que en cada combinación lineal de q_r y $\dot{q}_r$ con cada autovalor una alternativa igual y opuesta debe presentar la misma.

$$\dot{q}_r = -\frac{2\pi i}{h}\left(q_r H - H q_r\right)$$

con el Hamiltoniano

$$H = -i\sum_{r,s} B_{rs} q_r q_s \tag{A.5}$$

la forma exacta, la cual será confirmada con mayor totalidad abajo, si las realizaciones satisfactorias de "anticonmutabilidad " son establecidas para las variables q_r. Sustituyendo en la ecuación (A.4) las últimas dos relaciones, entonces hallamos

$$\sum_s B_{rs} q_s = \frac{2\pi}{h}\sum_{s,l,m} A_{rs} B_{l,m}(q_s q_l q_m - q_l q_m q_s) =$$

$$= \frac{2\pi}{h}\sum_{s,l,m} A_{rs} B_{lm}\left[\left(q_s q_l + q_l q_s\right) q_m - q_l\left(q_s q_m + q_m q_s\right)\right] =$$

$$= \frac{2\pi}{h}\sum_{l,m} B_{lm}\left\{q_m\left[\sum_s A_{rs}\left(q_s q_l + q_l q_s\right)\right] + \left[\sum_s A_{rs}\left(q_s q_l + q_l q_s\right)\right] q_m\right\}$$

y es suficiente poner

$$\sum_s A_{rs}\left(q_s q_l + q_l q_s\right) = \frac{h}{4\pi}\delta_{rl} \tag{A.6}$$

para satisfacer la ecuación (A.4). Denotando la matriz inversa de $\|A_{rs}\|$ por $\left\|A_{rs}^{-1}\right\|$ la ecuación (A.6) puede ser escrita

$$q_r q_s + q_s q_r = \frac{h}{4\pi} A_{rs}^{-1} \tag{A.6'}$$

En el caso especial donde A se reduce a la forma diagonal

$$A_{rs} = a_r \delta_{rs}$$

nosotros tenemos entonces:

$$q_r q_s + q_s q_r = \frac{h}{4\pi a_r}\delta_{rs} \tag{A.7}$$

Ahora pasamos a la aplicación de este sistema a las ecuaciones de Dirac.

2. Para las ecuaciones de Dirac sin campos externos

$$\left[\frac{W}{c} + (\alpha, p) + \beta mc\right] = 0 \tag{A.8}$$

se sabe que se puede eliminar la unidad imaginaria (y en un modo relativísticamente invariante) por un cambio satisfactorio de los operadores α y β. Referimos esto precisamente a un sistema de coordenadas intrínsecas que son tales que hacen las ecuaciones (A.8) reales, con la advertencia expresa que las fórmulas a las cuales llegamos no son válidas sin una adaptación satisfactoria a coordenadas generales. Indicando, como es costumbre, dos series independientes de las tres matrices de Pauli $\sigma_x,\ \sigma_y,\ \sigma_z$ y $\rho_1,\ \rho_2,\ \rho_3$ nosotros ponemos

$$\alpha_x = \rho_1\sigma_x \qquad \alpha_y = \rho_3 \qquad \alpha_z = \rho_1\sigma_z \qquad \beta = -\rho_1\sigma_y \tag{A.9}$$

y dividiendo esto por $-\frac{h}{2\pi i}$ y poniendo $\beta' = -i\beta,\ \mu = \frac{2\pi mc}{h}$ tenemos las ecuaciones reales:

$$\left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - (\alpha, \nabla) + \beta'\mu\right]\Psi = 0 \tag{$A.8'$}$$

Así las ecuaciones (A.8) se separan en dos grupos distintos uno de los cuales actúa en la parte real y el otro en la parte imaginaria de Ψ. Poniendo $\Psi = U + iV$ y considerando las ecuaciones reales (A.8') que en extensión actúan sobre U, entonces

$$\left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - (\alpha, \nabla) + \beta'\mu\right]U = 0 \tag{A.10}$$

Estas ecuaciones solas[2], i.e., sin considerar las ecuaciones idénticas que fijan los valores de V, se devuelve al principio variacional previamente establecido y sujeto al proceso de cuantización ya descrito, mientras que nada puede ser hecho con los métodos elementales.

Como un principio variacional por el que dedujimos las ecuaciones (A.lO) nos permitimos asumir lo siguiente:

$$\delta\int i\frac{hc}{2\pi}U^*\left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - (\alpha, \nabla) + \beta'\mu\right]U dqdt = 0 \tag{A.11}$$

Es fácil darse cuenta que las condiciones (A.3) en su extensión natural a los sistemas continuos se verifican. En base de las ecuaciones (A.7) las realizaciones de anticonmutabilidad son atendidas

[2]El comportamiento de los valores de U por reflexión a un punto en espacio se define convenientemente por presión en mente que para otras razones también, un cambio simultáneo del signo de U_r no tienen significado físico. En nuestro esquema $U'(q) = RU(-q)$ con $R = i\rho_1\sigma_y$ y de aquí $R^2 = -1$. Similarmente, si el eje de tiempo se invierte, entonces $U'(q,t) = i\rho_2 U(q, -t)$.

$$U_i(q)U_k(q') + U_k(q')U_i(q) = \frac{1}{2}\delta_{ik}\delta\left(q - q'\right) \tag{A.12}$$

mientras que por la ecuación (A.5) la energía llega a ser

$$H = \int U^* \left[-c\left(\alpha, \rho\right) - \beta mc^2\right] Udq \tag{A.13}$$

La invariancia relativista de las ecuaciones (A.12) y (A.13) no requiere demostración especial, porque después de completar estas ecuaciones por los análogos que refieren a V no sólo con las relaciones de anticonmutabilidad entre el U y el V: $U_r(q)V_s(q\prime) + V_s(q\prime)U_r(q) = 0$, llegamos simplemente al esquema de Jordan-Wigner aplicado a las ecuaciones de Dirac sin campos externos. Pero debe ser notado que la parte de este formalismo que refiere a U (o a V) puede ser considerado por él mismo como una descripción teórica de algunos sistemas materiales, en conformidad con los métodos generales de la mecánica cuántica. El hecho que este formalismo restringido no sea satisfactorio para la descripción de electrones positivos y negativos podrían bien ser debidos a la presencia de la carga eléctrica y no nos previenen de declarar que en el presente estado de nuestro conocimiento, las ecuaciones (A.12) y (A.13) constituyen la representación teórica más simple de un sistema de partículas neutras. La ventaja de usar este método por la interpretación elemental de las ecuaciones de Dirac es (como veremos en breve) que no hay razón para asumir la existencia de antineutrones o antineutrinos. Ésto está, en verdad, usado en la teoría de emisión positiva β [2] pero esta teoría, obviamente, puede ser modificada para que la emisión β, ya sea negativa o positiva, siempre esté acompañada por la emisión de un neutrino.

A causa del interés conferido por la hipótesis precedente en las ecuaciones (A.12) y (A.13), creemos que será útil examinar su significado estrechamente. Por eso desarrollamos U con respecto al sistema de funciones periódicas dentro de un cubo de lado L

$$f_\gamma(q) = \frac{1}{L^{3/2}}e^{2\pi i(\gamma, q)} \tag{A.14}$$

$$\gamma = (\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z); \qquad \gamma_x = \tfrac{n_1}{L}, \qquad \gamma_y = \tfrac{n_2}{L}, \qquad \gamma_z = \tfrac{n_3}{L}$$
$$n_1, n_2, n_3 = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

poniendo

$$U_r(q) = \sum_\gamma a_r(\gamma) f_\gamma(q) \tag{A.15}$$

y como U es real , se sigue que:

$$a_r(\gamma) = \overline{a}_r(-\gamma) \tag{A.16}$$

en el caso general, poniendo $\gamma \neq 0$, se sigue de las ecuaciones (A.12) que:

$$
\begin{aligned}
a_r(\gamma)\overline{a}_s(\gamma) + \overline{a}_s(\gamma)a_r(\gamma) &= \tfrac{1}{2}\delta_{rs} \\
a_r(\gamma)a_s(\gamma) + a_s(\gamma)a_r(\gamma) &= 0 \\
\overline{a}_r(\gamma)\overline{a}_s(\gamma) + \overline{a}_s(\gamma)\overline{a}_r(\gamma) &= 0
\end{aligned}
\tag{A.17}
$$

Todas estas cantidades también anticonmutan con los valores $a(\gamma')$ y $\overline{a}(\gamma')$ para γ' diferentes tanto de γ como de $-\gamma$.

Se obtiene la energía de la ecuación (A.13):

$$
H = \sum_{\gamma}\sum_{r,s=1}^{4}\left[-hc\left(\gamma,\alpha^{rs}\right) - mc^2\beta^{rs}\right]\overline{a}_r(\gamma)a_s(\gamma) \tag{A.18}
$$

El momento adquirido según x corresponde, como de costumbre, sin el factor $hi/2\pi$ al desplazamiento unitario en esa dirección

$$
M_x = \int U^* p_x U dq = \sum_{\gamma}\sum_{r=1} h\gamma_x \overline{a}_r(\gamma)a_k(\gamma) \tag{A.19}
$$

y similarmente para M_y y M_z. Por cada valor de γ en (A.18) hay una forma Hermitiana que, como es sabido, tiene dos eigenvalores positivos y dos eigenvalores negativos, todos iguales en valor absoluto a

$$
c\sqrt{m^2c^2 + h^2\gamma^2}
$$

Por eso, en lugar de la ecuación (A.18) podríamos poner

$$
H = \sum_{\gamma} c\sqrt{m^2c^2 + h^2\gamma^2}\left[\overline{b}_1(\gamma)b_1(\gamma) + \overline{b}_2(\gamma)b_2(\gamma) - \overline{b}_3(\gamma)b_3(\gamma) - \overline{b}_4(\gamma)b_4(\gamma)\right] \tag{A.18$'$}
$$

donde b_r son combinaciones lineales apropiadas de a_r obtenidas por transformación unitaria. También, de (A.16) se encuentra que $b_r(\gamma)$ se puede expresar por medio de $\overline{b}_r(-\gamma)$.

Del hecho que la forma Hermitiana que aparece en (A.18) para un valor dado de γ es inalterado en virtud de (A.16) y (A.17) cuando γ se cambia por -γ, se sigue, teniendo en cuenta la ecuación (A. 17), que podríamos poner

$$
b_3(\gamma) = \overline{b}_1(-\gamma) \qquad\qquad b_4(\gamma) = \overline{b}_2(-\gamma) \tag{A.20}
$$

Por simplicidad introduzcamos las nuevas variables

$$
B_1(\gamma) = \sqrt{2}b_1(\gamma) \qquad\qquad B_2(\gamma) = \sqrt{2}b_2(\gamma) \tag{A.21}
$$

por lo que obtenemos:

$$H = \sum_{\gamma} c\sqrt{m^2c^2 + h^2\gamma^2} \sum_{r=1}^{2} \left[n_r(\gamma) - \frac{1}{2} \right] \tag{A.22}$$

$$M_x = \sum_{\gamma} h\gamma_x \sum_{r=1}^{2} \left[n_r(\gamma) - \frac{1}{2} \right] \tag{A.23}$$

donde

$$n_r(\gamma) = \overline{B}_r(\gamma) B_r(\gamma) = \begin{array}{l} \nearrow \; 0 \\ \searrow \; 1 \end{array}$$

y también:

$$\begin{aligned} B_r(\gamma)\overline{B}_s(\gamma') + \overline{B}_s(\gamma')B_r(\gamma) &= \delta_{\gamma\gamma'}\delta_{rs} \\ B_r(\gamma)B_s(\gamma') + B_s(\gamma')B_r(\gamma) &= 0 \\ \overline{B}_r(\gamma)\overline{B}_s(\gamma') + \overline{B}_s(\gamma')\overline{B}_r(\gamma) &= 0 \end{aligned} \tag{A.24}$$

como se obtendría formalmente para los coeficientes de desarrollo de una onda de materia bicomponente según el esquema de Jordan-Wigner.

Estas fórmulas son completamente análogas, excepto para la estadística diferente, a las que son obtenidas por la cuantización de las ecuaciones de Maxwell. En lugar del cuanto de luz hay partículas con una masa en reposo finita y éstos tienen dos posibilidades de polarización. Aquí también, como en el caso de la radiación, los valores de la energía y del momentum en el punto cero estan presentes, sólo que su signo es opuesto en clara relación con las diferentes estadísticas. De cualquier modo, no introducen una dificultad específica y en el estado presente de la teoría deben ser considerados como simples constantes aditivas de ninguna importancia.

La descripción por medio de eigenfunciones de estas partículas, también como del cuanto de luz, no es un conveniente, pero en nuestro caso la existencia de una masa en reposo nos habilita a considerar las aproximaciones no relativistas en las que, por supuesto, todas las ideas de la mecánica cuántica elemental son válidas. Esta aproximación puede ser de interés práctico, sobre todo en el caso de las partículas pesadas (neutrones).

Los medios más simples de transición a las configuraciones espaciales consisten en asociar, con un oscilador armónico simple, la onda plana

$$\frac{1}{L^{3/2}} e^{2\pi i(\gamma,q)} \delta_{\sigma\sigma_r} \qquad (r = 1, 2)$$

correspondiente al mismo valor para la cantidad de movimiento y con dos posibilidades de polarización para tener en cuenta la multiplicidad de los osciladores. Podemos ir más allá y representamos, con la eigenfunción compleja bivaluada $\Phi = (\phi_1, \phi_2)$, no sólo una partícula simple, pero un sistema que no contiene un número indeterminado según el método de Jordan-Wigner. Será suficiente poner entonces

$$\Phi_1(q) = \sum_{\gamma} \frac{1}{L^{3/2}} e^{2\pi i(\gamma,q)} B_1(\gamma)$$

$$\Phi_2(q) = \sum_{\gamma} \frac{1}{L^{3/2}} e^{2\pi i(\gamma,q)} B_2(\gamma) \tag{A.25}$$

En la aproximación no relativista

$$\left(|\gamma| \ll \frac{mc}{h}\right)$$

las constantes $b_r(\gamma)$ que aparecen en (A.18') son combinaciones lineales de $a_r(\gamma)$ con coeficientes que son independientes de γ. Estos coeficientes dependen sólo de los elementos de β y en virtud de (A.9) podemos poner

$$b_1(\gamma) = \tfrac{a_3(\gamma)-ia_2(\gamma)}{\sqrt{2}} \qquad b_3(\gamma) = \tfrac{a_3(\gamma)+ia_2(\gamma)}{\sqrt{2}}$$
$$b_2(\gamma) = \tfrac{a_4(\gamma)+ia_1(\gamma)}{\sqrt{2}} \qquad b_4(\gamma) = \tfrac{a_4(\gamma)-ia_1(\gamma)}{\sqrt{2}}$$

con lo que se satisfacen las ecuaciones (A.20) a causa de las ecuaciones (A.16). De (A.15) y (A.25) entonces se sigue, por la aproximación no relativista que

$$\begin{aligned} \Phi_1(q) &= U_3(q) - iU_2(q) \\ \Phi_2(q) &= U_4(q) + iU_1(q) \end{aligned} \tag{A.26}$$

Permitámonos notar el hecho, el cual es de interés puramente formal, que $\Phi = (\phi_1, \phi_2)$ coincide, excepto por el factor $\sqrt{2}$, con el par de componentes grandes de las eigenfunciones pertenecientes a las ecuaciones (A.10), interpretada en la manera usual, que está sin restricción de realidad. Para demostrar esto es suficiente verificar el hecho que la transformación

$$\Psi = \frac{1 - \rho_2\sigma_y}{\sqrt{2}} U$$

nos habilita a pasar de la representación de la ecuación (A.9) a la representación de costumbre de Dirac ($\alpha = \rho_1\sigma; \qquad \beta = \rho_3$) lo cual da

$$\Psi_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\Phi_1 \qquad \Psi_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\Phi_2$$

En esta representación, verdaderamente, Ψ_3 y Ψ_4 son las componentes grandes. Esta proximidad, mientras expresa la ley de transformaciones de Φ con respecto a las rotaciones en el espacio, deja de ser importante con respecto a las transformaciones generales de Lorentz.

La existencia de fórmulas simples como (A.26), puede dar que la expansión de la onda plana es innecesaria, por lo menos hasta una cierta aproximación. A decir verdad, en realidad, este pasaje es siempre necesario conceptualmente para obtener cancelación de los valores del punto cero. Verdaderamente, después de esta cancelación la expresión por la energía, en primer aproximación, es

$$H = \int \widetilde{\Phi}(mc^2 + \frac{1}{2m}p^2)\Phi dq \tag{A.27}$$

y esto difiere esencialmente de la ecuación (A.13).

3. Como ya hemos dicho, la representación de la ecuación (A.12) es insuficiente para la descripción de las partículas cargadas; pero la suma de una segunda serie de cuatro valores reales V_r, análogos a los valores U_r nos habilita para volver a la electrodinámica convencional en una forma simétrica con respecto al electrón y al positrón. Nos permitimos ahora considerar dos series de valores reales representando, respectivamente, las partículas materiales y el campo electromagnético. Las cantidades del primer tipo son interpretadas según la representación puesta en la Parte 1, mientras que los de la segunda serie, i.e., los potenciales electromagnéticos ϕ y $A = (A_x, A_y, A_z)$, pueden ser entendidos como cantidades clásicas que han sido cuantizadas según el principio de Heisenberg basado en el principio de correspondencia. La combinación de las ecuaciones de Maxwell y de Dirac pueden ser obtenidas (con restricción indicada con respecto a la segunda serie de cantidades) por un principio variacional

$$\delta \int L dq dt$$

donde L se obtiene como la suma de tres términos

$$L = L' + L'' + L'''$$

el primero de estos está relacionado a la onda material

$$L' = i\frac{hc}{2\pi}\left\{U^*\left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - (\alpha, grad) + \beta'\mu\right]U + V^*\left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - (\alpha, grad) + \beta'\mu\right]V\right\} \tag{A.28}$$

y el segundo de estos se refiere al campo de radiación, que asumimos estar cuantizado según el método de Fermi [3].

$$L'' = \frac{1}{8\pi}(E^2 - H^2) - \frac{1}{8\pi}\left(\frac{1}{c}\cdot\phi + divA\right)^2 \tag{A.29}$$

Es así necesario imponer la condición adicional

$$\frac{1}{c}\dot{\phi} + divA = 0 \tag{A.30}$$

La expresión (A.29) difiere en realidad de la que originalmente usó Fermi, pero sólo por términos que pueden ser integrados. Esto lleva a una definición del momentum P_0 conjugado a ϕ, para permitir la eliminación inmediata de una de las dos ondas longitudinales sin pasar por el desarrollo de acuerdo a la onda plana; en esta conexión no importa que el segundo término en la ecuación (A.29) para L'' es multiplicado por una constante arbitraria diferente de cero.

En cuanto al término L''', se escoge éste de tal manera que $\Psi = U + iV$ satisface las ecuaciones de Dirac (A.8) completada por la introducción del campo externo, i.e., las ecuaciones:

$$\left[\frac{W}{c} + \frac{e}{c}\phi + \left(\alpha, p + \frac{e}{c}A\right) + \beta mc\right]\Psi = 0$$

En la práctica, esto hace necesario poner

$$L''' = ieU^* \left[\phi + (\alpha, A)\right] V - ieV^* \left[\phi + (\alpha, A)\right] U \tag{A.31}$$

De la variación de los potenciales electromagnéticos entonces deducimos las expresiones siguientes por la densidad de carga y corriente

$$\begin{aligned} \rho &= -ie\left(U^*V - V^*U\right) = -e\tfrac{\widetilde{\Psi}\Psi - \Psi^*\overline{\Psi}}{2} \\ I &= ie\left(U^*\alpha V - V^*\alpha U\right) = e\tfrac{\widetilde{\Psi}\alpha\Psi - \Psi^*\alpha\overline{\Psi}}{2} \end{aligned} \tag{A.32}$$

Esta expresión difiere de la usual sólo por "constantes infinitas". La cancelación de estas constantes infinitas es requerida por la simetría de la teoría, que ya está implícita en la forma escogida del principio variacional. De hecho, el cambio de U_r y V_r, que son simétricamente contenidas en L', es exactamente equivalente a un cambio de signo en la carga eléctrica.

Los valores U y V obedecen todas las ecuaciones de anticonmutabilidad

$$U_r(q)U_s(q') + U_s(q')U_r(q) = \frac{1}{2}\delta(q - q')\delta_{rs}$$

$$V_r(q)V_s(q') + V_s(q')V_r(q) = \frac{1}{2}\delta(q - q')\delta_{rs}$$

$$U_r(q)V_s(q') + V_s(q')U_r(q) = 0$$

equivalente al sistema convencional de Jordan-Wigner, cuando hacemos $\Psi = U + iV$. Los potenciales electromagnéticos ϕ, A_x, A_y, A_z y su momento conjugado en cambio satisfacen todas las relaciones ordinarias de conmutabilidad, i.e.,

$$P_0(q)\phi(q') - \phi(q')P_0(q) = \frac{h}{2\pi i}\delta(q - q')$$

de donde

$$\begin{gathered} P_0 = -\tfrac{1}{4\pi c}\left(\tfrac{1}{c}\cdot\phi + divA\right) \\ P_x = -\tfrac{1}{4\pi c}E_x \qquad P_y = -\tfrac{1}{4\pi c}E_y \quad , \quad P_z = -\tfrac{1}{4\pi c}E_z \end{gathered} \tag{A.33}$$

La energía está hecha de tres partes: $H = H' + H'' + H'''$. El primer término H' es deducido de L' según la regla ya fija. El segundo es obtenido de acuerdo a la ley clásica

$$H'' = \int \left[P_0 \, \dot{\phi} + \left(P, \dot{A} \right) - L'' \right] dq$$

poniendo $P = (P_x, P_y, P_z)$. En cuanto al término H''' se puede deducir éste de L''' siguiendo cualquiera de los métodos (en nuestro caso $H''' = -\int L''' dq$) y así debe ser verdadero que L''' es una función del producto de los campos material y electromagnético. Por otro lado, esto prueba que la posición (A.5) es necesaria. La ecuación de continuidad (A.30) siempre es válida cuando al mismo tiempo se satisface totalmente por la ecuación de divergencia $divE = 4\pi\rho$. Para (A.33) se sigue que la cinemática definida por la realización de cambio se debe ser reducido por medio de la ecuación

$$\begin{aligned} P_0(q) &= 0 \\ divP + \tfrac{1}{c}\rho &= 0 \end{aligned} \tag{A.34}$$

y de aquí por la determinación de dos cantidades del campo y la indeterminación consecuente del conjugado. La primera de las ecuaciones (A.34) trae entonces la eliminación de P_0 y de ϕ de la expresión para H. Esta eliminación se obtiene fácilmente por hacer uso de la ecuación (A.33) y por eso junto con la fórmula

$$H = \int \left\{ \widetilde{\Psi} \left[-c\,(\alpha, p) - \beta mc^2 \right] \Psi - (A, I) + 2\pi c P^2 + \frac{1}{8\pi} \left| rotA \right|^2 \right\} dq \tag{A.35}$$

Acerca de la pregunta de invariancia relativista, observaríamos que las expresiones $\Psi = U + iV$ satisfacen las ecuaciones de Dirac, mientras que las ecuaciones de Maxwell todavía son válidas con expresiones de la densidad de carga y la densidad de corriente, la cual obedece la ley de transformación relativista. A causa de estos dos hechos la demostración completa de la invariancia de la teoría ya es evidente de los resultados de Heisenberg y de Pauli [4]. Ahora nos permitimos continuar en la interpretación del formalismo.

4. Desarrollando el valor para U y análogamente el de V, según el sistema de funciones periódicas ya consideradas, hallamos, como una extensión obvia de la ecuación (A.22), después de la cancelación de los valores del punto cero

$$H' = \sum_{\gamma} c\sqrt{m^2c^2 + h^2\gamma^2} \sum_{r=1}^{2} \left[\overline{B_r}(\gamma) B_r(\gamma) + \overline{B'_r}(\gamma) B'_r(\gamma) \right] \tag{A.36}$$

donde B_r y B'_r, respectivamente, se refieren a los coeficientes del desarrollo de U y V; los B_r y B'_r y sus conjugados obedecen todas las relaciones ordinarias de anticonmutación. Introduciendo, por cada valor de γ, cuatro funciones satisfactorias del spin $\xi_s(\gamma)$ $(s = 1, 2, 3, 4)$ con cuatro valores complejos y formando un sistema unitario, pondríamos

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\gamma} \left\{ B_1(\gamma)\xi_1(\gamma) + B_2(\gamma)\xi_2(\gamma) + \overline{B_1}(-\gamma)\xi_3(\gamma) + \overline{B_2}(-\gamma)\xi_4(\gamma) \right\} f_\gamma(q)$$

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\gamma} \left\{ B'_1(\gamma)\xi_1(\gamma) + B'_2(\gamma)\xi_2(\gamma) + \overline{B'_1}(-\gamma)\xi_3(\gamma) + \overline{B'_2}(-\gamma)\xi_4(\gamma) \right\} f_\gamma(q) \tag{A.37}$$

donde las relaciones

$$\begin{aligned} \xi_3(\gamma) &= \overline{\xi_1}(-\gamma) \\ \xi_4(\gamma) &= \overline{\xi_2}(-\gamma) \end{aligned} \tag{A.38}$$

se satisfacen también.

De la expresión (A.32) para la densidad eléctrica se sigue, para la carga total, que

$$Q = -\frac{ie}{2} \int \left[U^*(q)V(q) - V^*(q)U(Q) \right] dq =$$

$$= -\frac{ie}{2} \sum_{\gamma} \sum_{r=1}^{2} \left[B_r(\gamma)\overline{B'_r}(\gamma) + \overline{B_r}(\gamma)B'_r(\gamma) - \overline{B'_r}(\gamma)B_r(\gamma) - B'_r(\gamma)\overline{B_r}(\gamma) \right] \tag{A.39}$$

$$C_r^{el} = \frac{B_r + iB'_r}{\sqrt{2}} \qquad C_r^{pos} = \frac{B_r - iB'_r}{\sqrt{2}} \tag{A.40}$$

Las expresiones (A.36) y (A.39) para la energía y la carga puede ser escrita en la forma

$$H' = \sum_{\gamma} c\sqrt{m^2c^2 + h^2\gamma^2} \sum_{r=1}^{2} \left(\overline{C_r^{el}} C_r^{el} + \overline{C_r^{pos}} C_r^{pos} \right) \tag{A.41}$$

$$Q = e \sum_{\gamma} \sum_{r=1}^{2} \left[-\left(\overline{C_r^{el}} C_r^{el} - \frac{1}{2} \right) + \overline{C_r^{pos}} C_r^{pos} - \frac{1}{2} \right] =$$

$$= e \sum_{\gamma} \sum_{r=1}^{2} \left[-\overline{C_r^{el}} C_r^{el} + \overline{C_r^{pos}} C_r^{pos} \right] \tag{A.42}$$

La eliminación del "valor del punto cero de la electricidad" así pasa automáticamente, proveyendo, por supuesto, que se lleva a cabo la suma interior primero. Las ecuaciones (A.41) y (A.42) juntas representan osciladores equivalentes a un sistema doble de partículas que obedecen la estadística de Fermi con la masa en reposo m y carga ±e; las variables C_r^{pos} se refieren a los positrones y C_r^{el} a los electrones.

La eliminación del campo longitudinal eléctrico por medio de la segunda de las ecuaciones (A.34) levanta una dificultad en una teoría simétrica debiéndose a la imposibilidad de poner ρ, que se obtiene, según (A.32), en la forma diagonal. El resultado de la eliminación es bien sabido (aunque algo ilusorio, debido a la dificultad de convergencia) en electrodinámica ordinaria donde $\rho = -e\widetilde{\Psi}\Psi$; pero se sabe éste también si comenzamos de $\rho = e\Psi^*\overline{\Psi}$, cuando la última posición es totalmente equivalente a invertir las funciones del electrón y del positrón, considerando la última como una partícula real y el electrón como una ausencia de un positrón. Parece razonable asumir que esos elementos de matriz, que darían por resultado en la misma forma en las teorías opuestas, debe ser mantenido en la teoría simétrica. Permita que asumimos, por eso, que hemos actuado así para eliminar la parte irrotacional de A y P.

La expresión (A.35) para H será modificada en dos modos: en primer lugar por indicar que A y P en esta expresión representan sólo la parte de estos vectores que se privan de divergencia; en segundo lugar por agregar un término que representa el energía electrostática. Este término tiene una forma diferente en la teoría convencional (electrones - ausencia de electrones) y en una opuesta a ella. En la primera la interacción de cada partícula con ella misma se ha retenido

$$H_{els} = \frac{e^2}{2}\int\int \frac{1}{|q-q'|}\widetilde{\Psi}(q)\Psi(q)\widetilde{\Psi}(q')\Psi(q')dqdq'$$

y en la segunda

$$H_{els} = \frac{e^2}{2}\int\int \frac{1}{|q-q'|}\Psi^*(q)\overline{\Psi}(q)\Psi^*(q')\overline{\Psi}(q')dqdq'$$

Por medio de (A.37) y (A.40) la energía electrostática puede ser expresada como una función de C. Los únicos términos que han recibido aplicación física, sin embargo, son idénticos en ambas teorías. Estos son los que, del punto de vista corpuscular, pueden ser interpretados como repulsiones o atracciones entre partículas diferentes del mismo o de diferente tipo.

Finalmente, con respecto a la interacción con el campo de radiación, la única diferencia entre las teorías simétricas y convencionales tiene que hacer con la cancelación de las constantes de los resultantes indeterminados, relativos a los osciladores armónicos simples, en la expresión de densidad presente. Aquí también, las fórmulas aplicables que son de interés quedan inalteradas.

Referencias

1. Jordan, P. y Wigner, E. Z. Physik, 47: 631, 1928.
2. Wick, G. Rend. Accad. Lincei, 21: 170, 1935.
3. Fermi, E. Rend. Accad. Lincei, 9: 881, 1929.
4. Heisenberg, W. y Pauli, W. Z. Physik, 56: 1, 1929; 59: 168, 1930.

BIBLIOGRAFIA

[1] D.V. Ahluwalia, en *Proceedings of the present status of quantum theory of light: A symposium to honour Jean-Pierre Vigiér* York University, Toronto, agosto 27-30, 1995. eds. G. Hunter et. al. Kluwer Academic (1996).

[2] D.V. Ahluwalia, Phys. Lett. B. **316** (1993), 102.

[3] D.V. Ahluwalia, Mod. Phys. Lett. A **8** (1993), 2623.

[4] D.V. Ahluwalia, Int. J.Mod.Phys.A **11** (1996), 1855.

[5] D.V. Ahluwalia, M.B. Johnson, M.B. y Goldman, T., Phys.Lett.B **316** (1993), 102.

[6] D.V. Ahluwalia y Goldman T., Mod. Phys. Lett. A **8** (1993) 2623.

[7] H. Bacry, *Le spin et la relativité restreinte.* Preprint CPT-90/P.2469. Marseille, diciembre 1990.

[8] A.O. Barut y Ziino, G. Mod. Phys. Lett. A **8** (1993), 1011.

[9] J.D. Bjorken y Drell, S.D., *Relativistic quantum mechanics.* Mc.Graw-Hill 1964.

[10] E. Cartan, *Leçons sur le Théorie des spineurs* Hermann. Paris, 1938.

[11] V.V. Dvoeglazov, Fizika B **6** (1997), 111.

[12] V.V. Dvoeglazov, Inv. Científica **10** (1997), 23.

[13] V.V. Dvoeglazov, *Las construcciones de Dirac y de Majorana (Agenda para estudiantes).* Preprint EFUAZ FT-96-27. Universidad Autónoma de Zacatecas, julio 1996.

[14] V.V. Dvoeglazov, Nuovo Cim. A **108** (1995), 1467.

[15] V.V. Dvoeglazov, Int. J. Theor. Phys. **34** (1995), 2467.

[16] V.V. Dvoeglazov, Int. J. Theor. Phys. **36** (1997), 635.

[17] V.V. Dvoeglazov, Adv. Appl. Clif. Alg. **7 (S)** (1997) 303.

[18] J.B.Fraleigh, *A first course in abstract algebra.* 4^a ed. Addison-Wesley (1994).

[19] I.M.Gelfand y Tsetlin, M.L., ZhETF **31** (1956) 1107 [Traducción al inglés: Sov. Phys. JETP **4** (1957) 947]; B. Sokolik, ZhETF **33** (1957) 1515 [Traducción al inglés: Sov. Phys. JETP **6** (1958) 1170].

[20] W. Greiner, *Relativistic quantum mechanics.* Springer-Verlag (1990).

[21] L.D. Landau y Lifshitz, E.M., *Teoría clásica de los campos.* Ed. Reverté S.A.

[22] A. Messiah, *Quantum mechanics V.II.* John Wiley & Sons.

[23] R.N. Mohapatra y Pal, P.B., *Massive neutrinos in physics and astrophysics.* World Scientific (1991).

[24] B.P. Nigam y Foldy, L.L., Phys. Rev. **102** (1956) 1410.

[25] Yu.V. Novozhilov, *Introduction to elementary particle theory.* Pergamon Press (1975).

[26] L.H. Ryder, *Quantum Field Theory.* Cambridge University Press (1984).

[27] E. Schrödinger, Ann. Physik **81** (1926), 109.

[28] E.P. Wigner, en *Group theoretical concepts and methods in elementary particle physics - Lectures of the Istambul Summer School of Theoretical physics*, 1962 Ed. F. Gürsey.