

Nine Dots Puzzle Extended to $n \times n \times \dots \times n$ Points

Marco Ripà¹, Pablo Ramirez² (June 2013)

¹ sPIqr Society, Roma, Italia
Email: marcokrt1984@yahoo.it

² UNLPam, La Pampa, Argentina
Email: pablolrg@yahoo.com.ar

Abstract (En). The classic wit problem, the “Nine Dots Puzzle” is widely used in courses on creativity and appears in a lot of games magazines. One of the earliest appearances is in “Cyclopedia of Puzzles” by Sam Loyd’s in 1914. Here is a review of the generic solution of the problem of the 9 points spread to n^2 points. Basing on a specific pattern, we show that any $n \times n$ (for $n \geq 5$) points puzzle can be also solved Inside the Box, using only $2n-2$ straight lines (connected at their end-points), through the square spiral method. The same pattern is also useful to “bound above” the minimal number of straight lines we need to connect n^k points in a k -dimensional space, while to “bound below” the solution of the $n \times n \times \dots \times n$ puzzle we start from a very basic consideration.

Keywords: dots, straight line, inside the box, outside the box, plane, upper bound, lower bound, graph theory, segment, points.

MSC2010: Primary 91A43; Secondary 05E30, 91A46.

Abstract (It). Il classico puzzle di pensiero divergente, il *Problema dei nove punti* (Nine Dots Puzzle), ha compiuto ormai un secolo (apparì certamente nella “Cyclopedia of Puzzles” di Sam Loyd nel lontano 1914).

Nel presente articolo, ci proponiamo di indagare l’estensione del medesimo problema, in una versione leggermente più rigorosa che non lascia molto spazio a scorciatoie di sorta, al caso di una griglia generica formata da $n \times n$ punti geometrici. Risolto questo problema, passeremo ad analizzare l’ulteriore generalizzazione al caso “ k -dimensionale” con $n \times n \times \dots \times n$ punti (per $k \geq 1$).

Basandoci su uno schema ben delineato, mostreremo che tutte le griglie $n \times n$ (con $n \geq 5$) di punti geometrici distinti possono essere risolte sia restando entro il perimetro “immaginario” della griglia sia uscendo da esso, usando esattamente $2n - 2$ segmenti rettilinei consecutivi, ricorrendo a quello che abbiamo chiamato “metodo della spirale quadrata”. Lo stesso schema risolutivo è altresì utile per delimitare superiormente il minimo numero di segmenti di cui abbiamo bisogno per unire $n \times n \times \dots \times n := n^k$ punti in uno spazio a k -dimensionale, mentre, per limitare inferiormente tale valore, richiameremo un concetto elementare, di per sé evidente.

Chiavi di ricerca: punti, linea, segmenti, inside the box, outside the box, piano, limite superiore, limite inferiore, teoria dei grafi.

MSC2010: Primaria 91A43; Secondaria 05E30, 91A46.

§1. Introduzione

La formulazione classica del “Nine dots puzzle” è la seguente: “Dati i 9 punti geometrici (distinti) mostrati in **Fig. 1**, si uniscano tutti i punti utilizzando il minor numero possibile di segmenti rettilinei continui, senza che questi si sovrappongano più di una volta” [1]. Per risolvere con successo questo problema, è opportuno notare che un segmento dovrà intersecare almeno due punti, cosicché il minimo quantitativo di linee che possa essere usato in questa griglia 3X3 è 4. Ciò è ovvio, giacché sarebbe poco sensato “sprecare” un segmento per intersecare un solo punto, in virtù della considerazione che è impossibile collegare più di 3 punti con il primo segmento e più di 2 punti con ogni segmento successivo al primo: dovendo noi utilizzare soltanto 4 linee, dovremo per forza intersecare almeno 2 punti con ciascun segmento.

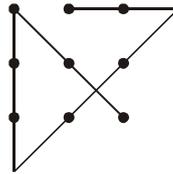


Fig. 1. I nove punti uniti tramite quattro linee.

L’aspetto interessante di questo rompicapo, non è tanto la soluzione in sé, quanto piuttosto la procedura per raggiungerla. Il problema ammette infatti una soluzione “laterale” e necessita di una buona dose di pensiero divergente. È apparso in varie riviste ed articoli, ad esempio nel libro “*The art of creative thinking how to be innovative and develop great ideas*” [2].

Thinking outside the box (letteralmente, pensare fuori dalla scatola) significa pensare in modo differente, non convenzionale... da una prospettiva insolita e nuova. Tale locuzione spesso viene riferita a romanzi, pensiero creativo e idee brillanti [3].

La frase in questione significa qualcosa tipo “pensa in modo creativo” o “sii originale”. La sua origine è comunemente attribuita ai consulenti degli anni Settanta e Ottanta che cercavano di far sentire inadeguati i clienti, disegnando nove punti su di un pezzo di carta e chiedendo poi loro di unirli senza staccare la penna dal foglio, usando soltanto quattro linee [4].

§2. Il problema degli $n \times n$ punti in uno spazio bidimensionale

Prendendo spunto dalla griglia 3X3, è sorto il dilemma di estendere il medesimo problema a $n \times n$ punti e di trovare una soluzione che rispetti le medesime condizioni imposte dal problema originale. La **Fig. 2** mostra una griglia di 4X4 punti.



Fig. 2. Griglia di punti 4X4.

La **Fig. 3** illustra alcune delle possibili soluzioni per una griglia 4X4. Data la simmetria della griglia, è sufficiente determinare / provare la risolubilità per alcune posizioni topiche, dato che i casi rimanenti sono ottenibili semplicemente ruotando le soluzioni suddette. Inoltre, ogni punto iniziale, per qualsivoglia soluzione, potrebbe parimenti essere considerato un punto di arrivo. Queste soluzioni utilizzano il minor numero possibile di segmenti rettilinei consecutivi.

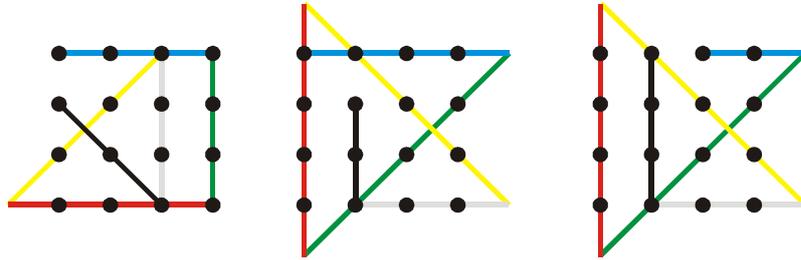


Fig. 3. Griglia di punti 4X4 e soluzioni caratteristiche (è possibile risolvere il puzzle 4X4 con 6 linee partendo da un qualsiasi punto della griglia).

Un'altra curiosità è che, per n maggiore di 4, è possibile costruire soluzioni sia "Outside the box" che "Inside the box". La **Fig. 4** illustra il caso 5X5.

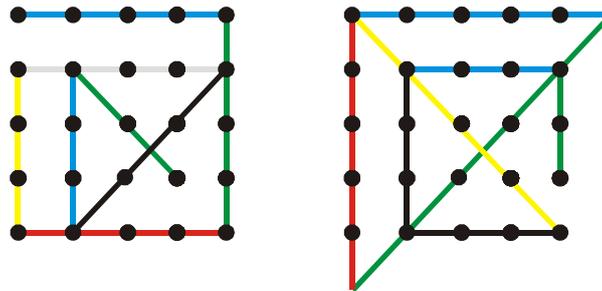


Fig. 4. Soluzioni "Inside / Outside the box" relative alla griglia di punti 5X5.

La **Fig. 5** presenta la soluzione per la griglia con n uguale a 3, 4, 5 e 6 (rispettivamente), usando uno schema a forma di spirale. Nella figura **c** la soluzione è di tipo "Inside the box" e, confrontandola con la figura **b**, essa presenta due linee in più. Allo stesso modo, mettendo a confronto la **b** con la **a**, possiamo notare due linee aggiuntive. Lo stesso si verifica se prendiamo in esame **d** e **c**. In definitiva, quando si incrementa n di un'unità, il numero di segmenti, soluzione del problema, aumenta di due. Ciò accade per ogni schema risolutivo del puzzle in questione, qualsiasi sia il metodo utilizzato. A riprova di ciò, possiamo disegnare una spirale quadrata attorno allo schema riportato in figura **c** (o considerare una soluzione differente), così è banale che debbano essere aggiunte due linee in più per ogni ulteriore riga / colonna inserita. Nella figura appena citata, si può apprezzare la forma vagamente spiralforme della soluzione proposta (su cui si innesta una cornice a forma di spirale quadrata per ogni $n > 5$).

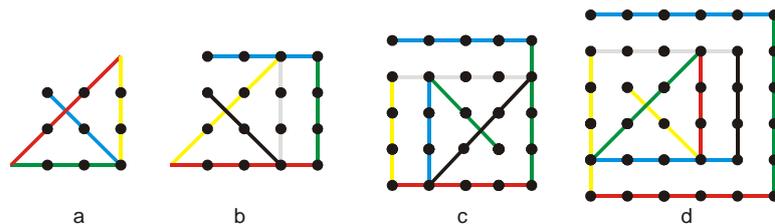


Fig. 5. Alcune delle soluzioni per $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$ e $n = 6$, che mostrano la cornice a forma di spirale quadrata a partire da $n = 5$.

Detto in un altro modo, l'Eq. 1 fornisce il minimo numero di linee necessarie. h rappresenta il numero di segmenti rettilinei che servono per connettere tutti i punti, mentre n è il numero di righe / colonne della nostra griglia. È opportuno notare che questo risultato è indipendente dal particolare schema risolutivo considerato e vale per tutti i valori naturali della variabile n , fatta eccezione per $n = 1$ ed $n = 2$.

$$h = 2 \cdot (n - 1) \quad \forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1, 2\} \quad (1)$$

Un caso speciale è quello di uno spazio monodimensionale, avendosi n punti allineati. In tal caso, $\forall n \geq 2$, $h = 1$, il puzzle in questione può essere risolto sia *Inside the box* che *Outside the box* (a seconda della “lunghezza” – uguale o superiore alla distanza fra i punti estremi del problema - del segmento utilizzato).

§3. Generalizzazione del problema a $n \times n \times \dots \times n$ punti disposti in uno spazio k -dimensionale

Dopo aver mostrato la soluzione generale per il caso degli $n \times n$ distribuiti su un piano, sorge un nuovo problema: estendere il medesimo puzzle ad $n \times n \times \dots \times n$ punti in uno spazio k -dimensionale, dove k corrisponde al numero delle volte che n compare nella precedente (n^k punti in totale, appunto).

Per prima cosa, occupiamoci del problema e della relativa soluzione nel caso di uno spazio a tre dimensioni, dopodiché consideriamo la variante generalizzata e la soluzione concernente uno spazio k -dimensionale.

Distinguiamo a tal proposito due tipi di soluzioni: la prima, detta “limite superiore”, si rifà al già menzionato metodo della spirale, mentre la seconda, detta “limite inferiore”, si basa sulla considerazione che non è possibile unire più di n punti con la prima linea e al massimo connetterne altri $n-1$ usando qualsivoglia linea successiva (nello specifico, è possibile collegare $n-1$ punti con la prima linea, n punti con la seconda linea ed $n-1$ punti usando ogni linea ulteriore, ma questa precisazione non altera in alcun modo il precedente assunto).

Sia h_u il numero di linee relativo al nostro “limite superiore” ed h_l il vincolo scaturente dall’assunto di cui sopra, il numero minimo di segmenti, h , di cui necessitiamo per unire $n \times n \times \dots \times n$ punti, è $h_l \leq h \leq h_u$.

La **Tabella 1** mostra il numero di linee nel caso del limite superiore e di quello inferiore, sia in due che in tre dimensioni (utilizzando il metodo della spirale quadrata applicato allo schema proposto in figura c), quando n assume i valori compresi tra 1 e 20. Inoltre, la colonna dei “Gap” riporta le differenze tra il numero di linee del limite superiore e quello relativo al limite inferiore. L’ultima colonna contiene gli incrementi del numero di linee per il limite superiore in tre dimensioni, in corrispondenza di incrementi unitari di n .

Tabella 1: Limite superiore / inferiore in 2 e 3 dimensioni.

| n | Due dimensioni | | | Tre dimensioni | | | |
|-----|------------------|------------------|---------------------------|------------------|------------------|---------------------------|---|
| | Limite inferiore | Limite superiore | Gap (Superiore-Inferiore) | Limite inferiore | Limite superiore | Gap (Superiore-Inferiore) | Incrementi limite superiore [$n \rightarrow n+1$] |
| 1 | / | / | / | / | / | / | / |
| 2 | 3 | 3 | 0 | 7 | 7 | 0 | 6 |

| | | | | | | | |
|----|----|----|----|-----|-----|-----|----|
| 3 | 4 | 4 | 0 | 13 | 14 | 1 | 7 |
| 4 | 5 | 6 | 1 | 21 | 26 | 5 | 12 |
| 5 | 6 | 8 | 2 | 31 | 43 | 12 | 17 |
| 6 | 7 | 10 | 3 | 43 | 64 | 21 | 21 |
| 7 | 8 | 12 | 4 | 57 | 89 | 32 | 25 |
| 8 | 9 | 14 | 5 | 73 | 118 | 45 | 29 |
| 9 | 10 | 16 | 6 | 91 | 151 | 60 | 33 |
| 10 | 11 | 18 | 7 | 111 | 188 | 77 | 37 |
| 11 | 12 | 20 | 8 | 133 | 229 | 96 | 41 |
| 12 | 13 | 22 | 9 | 157 | 274 | 117 | 45 |
| 13 | 14 | 24 | 10 | 183 | 323 | 140 | 49 |
| 14 | 15 | 26 | 11 | 211 | 376 | 165 | 53 |
| 15 | 16 | 28 | 12 | 241 | 433 | 192 | 57 |
| 16 | 17 | 30 | 13 | 273 | 494 | 221 | 61 |
| 17 | 18 | 32 | 14 | 307 | 559 | 252 | 65 |
| 18 | 19 | 34 | 15 | 343 | 628 | 285 | 69 |
| 19 | 20 | 36 | 16 | 381 | 701 | 320 | 73 |
| 20 | 21 | 38 | 17 | 421 | 778 | 357 | 77 |

Nel caso di uno spazio tridimensionale, usiamo la soluzione “piano per piano”, partendo dallo schema del corrispondente puzzle $n \times n$, collegando ciascuno di tali piani tramite un segmento ulteriore. La colonna “limite superiore” della **Tabella 1** mostra che h , il numero di segmenti necessari, quando n cresce di un’unità, è dato da $h_{n+1} = h_n + 4 \cdot (n - 1) + 5$, per $n \geq 3$.

La **Fig. 6** mostra la soluzione (limite superiore) quando $n = 5$ ($h = 43$).

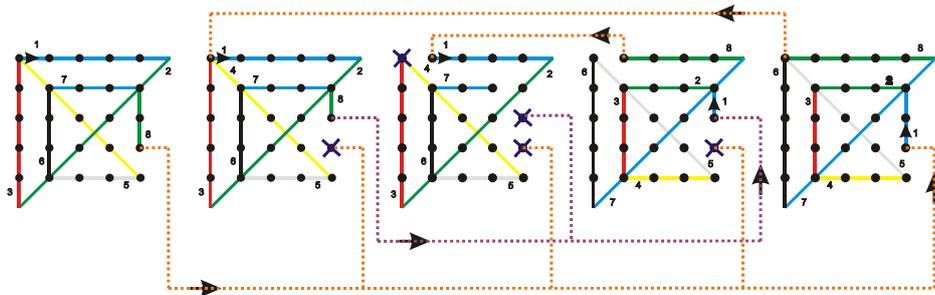


Fig. 6. 5X5X5 punti, 43 segmenti rettilinei.

Sfruttando l'**Eq. 1** ed estendendone il risultato ad uno spazio tridimensionale, ci troviamo a moltiplicare tale valore per il numero di piani definito dal valore di n , aggiungendo poi le $n-1$ linee necessarie per connettere tali piani tra loro. Ciò ci fornisce il numero di segmenti necessari per unire tutti i punti.

Dunque, il limite superiore per un numero arbitrario di dimensioni, k (dove $k \geq 2$), è dato dall'**Eq. 2**, dove h rappresenta il numero di segmenti rettilinei.

$$h = 2 \cdot (n-1) \cdot n^{k-2} + n^{k-2} - 1 = (2 \cdot n - 1) \cdot n^{k-2} - 1 \quad (2)$$

Estendendo a k dimensioni la frontiera del limite inferiore che abbiamo precedentemente introdotto, per $k \geq 2$, otteniamo l'**Eq. 3**. Essa indica il numero di segmenti rettilinei necessari per connettere n^k punti di uno spazio k -dimensionale.

$$n^k = n + (h-1) \cdot (n-1) \quad \text{Dunque} \quad \frac{n^k - n}{n-1} = h-1 \quad \rightarrow \quad h = \frac{n^k - n}{n-1} + 1$$

$$\text{Ne consegue pertanto che} \quad h = \frac{n^k - 1}{n-1} \quad (3)$$

Prendendo unicamente in considerazione le soluzioni "piano per piano", per il limite inferiore del caso tridimensionale, collegando ciascuna "soluzione piana" con un segmento ($n-1$ linee in tutto), il risultato è dato dall'**Eq. 4**.

$$h = (2 \cdot n - 2) \cdot 2 + (2 \cdot n - 3) \cdot 2 + (2 \cdot n - 4) \cdot 4 + (2 \cdot n - 5) \cdot 4 + (2 \cdot n - 6) \cdot 6 + (2 \cdot n - 7) \cdot 6 + \dots + n - 1$$

Pertanto

$$h = n - 1 + \sum_{i=1}^{i_{\max}} 2 \cdot (2 \cdot n - i - 1) \cdot \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor + (2 \cdot n - i_{\max} - 2) \cdot \left(n - \sum_{i=1}^{i_{\max}} 2 \cdot \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor \right)$$

Dove i_{\max} è il massimo valore (intero) di "i" all'interno della sommatoria (il massimo valore i t.c. $n \geq \sum_{i=1}^i 2 \cdot \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor$)

$$\rightarrow n \geq \left\lfloor \frac{1-i}{2} \right\rfloor^2 - 3 \cdot \left\lfloor \frac{1-i}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor^2 + \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor + 2).$$

Si ricava così che

$$h = \begin{cases} \frac{4}{3} \cdot i_{\max}^3 + 7 \cdot i_{\max}^2 + \left(\frac{35}{3} - 2 \cdot n\right) \cdot i_{\max} + 2 \cdot n^2 - 3 \cdot n + 5 \\ \quad \text{se} \quad n \leq 2 \cdot (i_{\max} + 2)^2 \\ \\ \frac{4}{3} \cdot i_{\max}^3 + 9 \cdot i_{\max}^2 + \left(\frac{59}{3} - 2 \cdot n\right) \cdot i_{\max} + 2 \cdot n^2 - 4 \cdot n + 13 \\ \quad \text{se} \quad n > 2 \cdot (i_{\max} + 2)^2 \end{cases} \quad (4)$$

$$\text{Dove } i_{\max} = \left\lfloor \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2 \cdot n + 1} - 3) \right\rfloor.$$

La **Tabella 2** mostra il numero di linee necessarie usando soluzioni “piano per piano”, nel caso di $n \times n \times n$ punti. La colonna dei “Gap” contiene la differenza fra il limite superiore e quello inferiore (riferito allo specifico valore di n).

Tabella 2: Limite superiore / inferiore in 3 dimensioni.

| n | Limite inferiore | Limite superiore | Gap Superiore-Inferiore | Incrementi limite superiore $[n \rightarrow n+1]$ | Limite ipotetico |
|-----|------------------|------------------|-------------------------|---|------------------|
| 1 | / | / | / | / | / |
| 2 | 7 | 7 | 0 | 6 | 7 |
| 3 | 13 | 14 | 1 | 7 | 14 |
| 4 | 21 | 26 | 5 | 12 | 26 |
| 5 | 31 | 43 | 12 | 17 | 40 |
| 6 | 43 | 64 | 21 | 21 | 59 |
| 7 | 57 | 89 | 32 | 25 | 82 |
| 8 | 73 | 117 | 44 | 28 | 109 |
| 9 | 91 | 148 | 57 | 31 | 139 |
| 10 | 111 | 183 | 72 | 35 | 173 |

| n | Limite inferiore | Limite superiore | Gap Superiore-Inferiore | Incrementi limite superiore $[n \rightarrow n+1]$ | Limite ipotetico |
|-----|------------------|------------------|-------------------------|---|------------------|
| 11 | 133 | 222 | 89 | 39 | 211 |
| 12 | 157 | 265 | 108 | 43 | 253 |
| 13 | 183 | 311 | 128 | 46 | 298 |
| 14 | 211 | 361 | 150 | 50 | 347 |
| 15 | 241 | 415 | 174 | 54 | 400 |
| 16 | 273 | 473 | 200 | 58 | 457 |
| 17 | 307 | 535 | 228 | 62 | 518 |
| 18 | 343 | 601 | 258 | 66 | 583 |
| 19 | 381 | 670 | 289 | 69 | 651 |
| 20 | 421 | 743 | 322 | 73 | 723 |

La **Fig. 7** mostra i punti di connessione “schiacciando” il percorso risolutivo su un diagramma bidimensionale. Definiamo il seguente schema come quello della spirale quadrata “pura”. Spirale quadrata non solo come cornice che racchiude un differente schema interno: risolvere il problema *Inside the box*, connettendo tutti i punti senza visitarne alcuno più di una volta e senza incrociare alcuna linea.

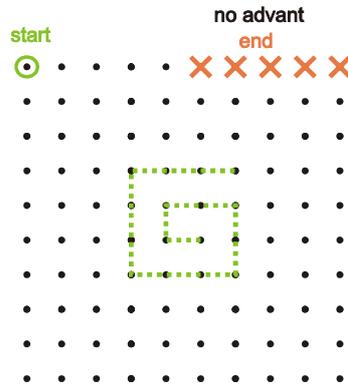


Fig. 7. Lo schema della spirale quadrata “pura” in tre dimensioni.

$$h = (2 \cdot n - 1) \cdot 2 + (2 \cdot n - 2) \cdot 2 + (2 \cdot n - 3) \cdot 4 + (2 \cdot n - 4) \cdot 4 + (2 \cdot n - 5) \cdot 6 + (2 \cdot n - 6) \cdot 6 + (2 \cdot n - 7) \cdot 8 + \dots + n - 1$$

Dunque,

$$h = n - 1 + \sum_{i=1}^{i_{\max}} 2 \cdot (2 \cdot n - i) \cdot \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor + (2 \cdot n - i_{\max} - 1) \cdot \left(n - \sum_{i=1}^{i_{\max}} 2 \cdot \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor \right)$$

E quindi (per $n \geq 4$)

$$h = \begin{cases} \frac{4}{3} \cdot i_{max}^3 + 7 \cdot i_{max}^2 + \left(\frac{35}{3} - 2 \cdot n\right) \cdot i_{max} + 2 \cdot n^2 - 2 \cdot n + 5 \\ \quad \text{se } n \leq 2 \cdot (i_{max} + 2)^2 \\ \\ \frac{4}{3} \cdot i_{max}^3 + 9 \cdot i_{max}^2 + \left(\frac{59}{3} - 2 \cdot n\right) \cdot i_{max} + 2 \cdot n^2 - 3 \cdot n + 13 \\ \quad \text{se } n > 2 \cdot (i_{max} + 2)^2 \end{cases} \quad (5)$$

Dove $i_{max} = \left\lfloor \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2 \cdot n + 1} - 3) \right\rfloor$.

Un metodo per ridurre la discrepanza tra il limite superiore e quello inferiore è quello di combinare lo schema [5] della **Fig. 8** con quello della spirale quadrata.

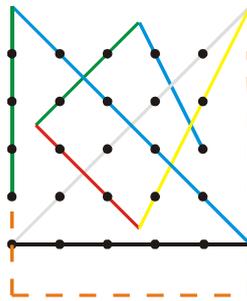


Fig. 8. 5X5 punti, schema base a 8 linee.

Non si tratta del miglior limite superiore che è astrattamente possibile definire sotto il vincolo aggiuntivo di ricercare unicamente soluzioni di tipo “piano per piano”; infatti, esistono sono altri schemi che possono affinare la soluzione. È il caso della **Fig. 9**, della **Fig. 10** e della **Fig. 11**. Lo schema della **Fig. 11** è estendibile a tutti i valori pari di n , per $n \geq 6$, mentre esso migliora il limite superiore “standard”, ricavato dallo schema in **Fig. 8**, per $n = 6, 8, 10, 12$ e 14 .

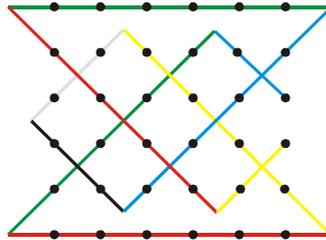


Fig. 9. 6X6X6 punti, 62 segmenti rettilinei.

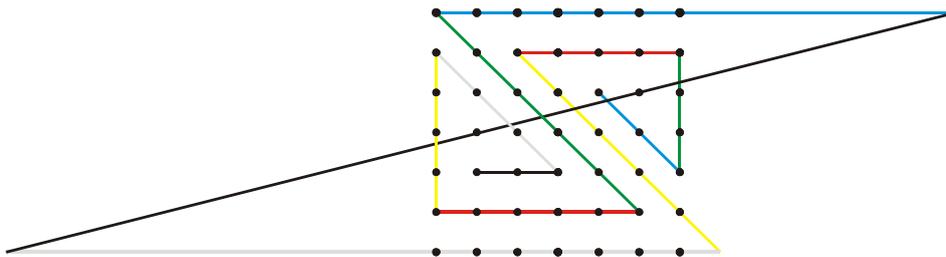


Fig. 10. 7X7X7 punti, 85 segmenti rettilinei.

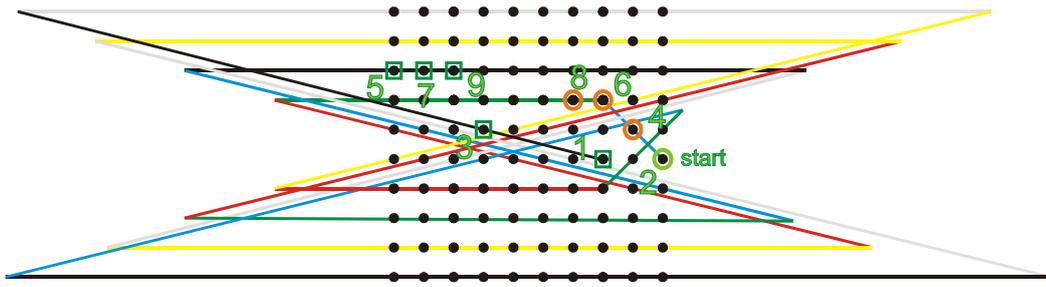


Fig. 11. 10X10X10 punti, 178 segmenti rettilinei.

Analizzando i differenti schemi, il miglior limite superiore, per $n \geq 15$, è quello desumibile dallo schema riportato in **Fig. 8**. La **Tabella 3** mostra il limite superiore relativo al caso tridimensionale, basandosi sulla soluzione “standard” della **Fig. 8**.

Tabella 3: Limite superiore per il puzzle degli $n \times n \times n$ punti considerando unicamente il pattern della **Fig. 8**.

| n | Limite superiore ($n \times n \times n$) | n | Limite superiore ($n \times n \times n$) | n | Limite superiore ($n \times n \times n$) | n | Limite superiore ($n \times n \times n$) |
|-----|--|-----|--|-----|--|-----|--|
| 1 | / | 16 | 471 | 31 | 1799 | 46 | 4003 |
| 2 | <u>7</u> | 17 | 532 | 32 | 1919 | 47 | 4181 |
| 3 | <u>14</u> | 18 | 597 | 33 | 2043 | 48 | 4363 |
| 4 | <u>26</u> | 19 | 666 | 34 | 2171 | 49 | 4549 |
| 5 | <u>43</u> | 20 | 739 | 35 | 2302 | 50 | 4739 |
| 6 | 63 | 21 | 816 | 36 | 2437 | 51 | 4932 |
| 7 | 87 | 22 | 897 | 37 | 2576 | 52 | 5129 |
| 8 | 115 | 23 | 982 | 38 | 2719 | 53 | 5330 |
| 9 | 146 | 24 | 1071 | 39 | 2866 | 54 | 5535 |
| 10 | 181 | 25 | 1163 | 40 | 3017 | 55 | 5744 |
| 11 | 220 | 26 | 1259 | 41 | 3172 | 56 | 5957 |
| 12 | 263 | 27 | 1359 | 42 | 3331 | 57 | 6174 |
| 13 | 309 | 28 | 1463 | 43 | 3493 | 58 | 6395 |
| 14 | 359 | 29 | 1571 | 44 | 3659 | 59 | 6620 |
| 15 | 413 | 30 | 1683 | 45 | 3829 | 60 | 6849 |

La **Tabella 4** mostra il limite superiore per il caso a tre dimensioni, affidandosi al metodo della spirale quadrata. Questo è il miglior limite superiore che siamo attualmente stati in grado di definire per un valore arbitrario di n (nello specifico, $n \geq 51$).

Tabella 4: Limite superiore per puzzle degli $n \times n \times n$ punti seguendo lo schema della spirale quadrata “pura” e quello basato sullo schema della **Fig. 8**: se $n \geq 42$, otteniamo lo stesso risultato.

| n | Spirale quadrata | Miglior limite superiore attualmente individuato | Gap | n | Spirale quadrata | Miglior limite superiore attualmente individuato | Gap | n | Spirale quadrata | Miglior limite superiore attualmente individuato | Gap |
|-----|------------------|--|-----|-----|------------------|--|-----|-----|------------------|--|-----|
| 1 | / | / | / | 18 | 601 | 597 | 4 | 35 | 2304 | 2302 | 2 |
| 2 | 7 | 7 | 0 | 19 | 670 | 666 | 4 | 36 | 2439 | 2437 | 2 |
| 3 | 16 | 14 | 2 | 20 | 743 | 739 | 4 | 37 | 2578 | 2576 | 2 |
| 4 | 29 | 26 | 3 | 21 | 820 | 816 | 4 | 38 | 2721 | 2719 | 2 |
| 5 | 45 | 43 | 2 | 22 | 901 | 897 | 4 | 39 | 2868 | 2866 | 2 |
| 6 | 65 | 63→ 62 | 2→3 | 23 | 986 | 982 | 4 | 40 | 3019 | 3017 | 2 |
| 7 | 89 | 87→ 85 | 2→4 | 24 | 1075 | 1071 | 4 | 41 | 3173 | 3172 | 1 |
| 8 | 117 | 115→ 112 | 2→5 | 25 | 1167 | 1163 | 4 | 42 | 3331 | 3331 | 0 |
| 9 | 148 | 146 | 2 | 26 | 1263 | 1259 | 4 | 43 | 3493 | 3493 | 0 |
| 10 | 183 | 181→ 178 | 2→5 | 27 | 1363 | 1359 | 4 | 44 | 3659 | 3659 | 0 |
| 11 | 222 | 220 | 2 | 28 | 1467 | 1463 | 4 | 45 | 3829 | 3829 | 0 |
| 12 | 265 | 263→ 260 | 2→5 | 29 | 1575 | 1571 | 4 | 46 | 4003 | 4003 | 0 |
| 13 | 311 | 309 | 2 | 30 | 1687 | 1683 | 4 | 47 | 4181 | 4181 | 0 |
| 14 | 361 | 359→ 358 | 2→3 | 31 | 1803 | 1799 | 4 | 48 | 4363 | 4363 | 0 |
| 15 | 415 | 413 | 2 | 32 | 1923 | 1919 | 4 | 49 | 4549 | 4549 | 0 |
| 16 | 473 | 471 | 2 | 33 | 2046 | 2043 | 3 | 50 | 4739 | 4739 | 0 |
| 17 | 535 | 532 | 3 | 34 | 2173 | 2171 | 2 | 51 | 4932 | 4932 | 0 |

Come già abbiamo avuto occasione di anticipare, per $n = 6, 8, 10, 12$ o 14 il miglior limite superiore basato su una soluzione “piano per piano” è dato da $h = 2 \cdot (n-1) \cdot n + n - 1 - (1 + 2 \cdot (n-5)) = 2 \cdot n^2 - 3 \cdot n + 8$, sfruttando lo schema proposto da Roger Phillips [6].

Per ogni $n \geq 42$, il numero di linee è definito dalla (5).

§4. Conclusione

Quando n diventa molto grande ($n \geq 42$), lo schema della spirale quadrata pura si rivela essere il miglior modello tridimensionale di tipo “piano per piano”, consentendoci di pervenire ad un’ottima soluzione. Essa è altrettanto buona di quella ricavata dallo schema di cui alla **Fig. 8** per tutti gli $n \geq 42$ (per $n \geq 51$, se consideriamo la totalità dei possibili schemi 5X5, l’ultima / la più esterna porzione dei due schemi si sovrappone – si tratta di una cornice a forma di spirale quadrata). In aggiunta, lo schema della spirale quadrata consente una soluzione *Inside the box*, senza bisogno di incrociare alcuna linea o attraversare un punto più volte. Si tratta anche del migliore schema possibile senza incrociare alcuna linea per un numero di dimensioni arbitrario, da 1 a k .

Definendo t come il più piccolo limite superiore trovato per il caso tridimensionale, cfr. **Tabella 3**, $\forall n \geq 42$, perveniamo all’**Eq. (6)**.

$$t = \begin{cases} \frac{4}{3} \cdot i_{max}^3 + 7 \cdot i_{max}^2 + \left(\frac{35}{3} - 2 \cdot n\right) \cdot i_{max} + 2 \cdot n^2 - 2 \cdot n + 5 \\ \quad \text{se } n \leq 2 \cdot (i_{max} + 2)^2 \\ \\ \frac{4}{3} \cdot i_{max}^3 + 9 \cdot i_{max}^2 + \left(\frac{59}{3} - 2 \cdot n\right) \cdot i_{max} + 2 \cdot n^2 - 3 \cdot n + 13 \\ \quad \text{se } n > 2 \cdot (i_{max} + 2)^2 \end{cases} \quad (6)$$

Dove $i_{max} = \left\lfloor \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2 \cdot n + 1} - 3) \right\rfloor$.

Pertanto h , il limite superiore per il problema k -dimensionale, può essere ulteriormente ridotto:

$\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$, sia t il miglior limite superiore che è stato precedentemente individuato (dimostrato) per il problema standard degli $n \times n \times n$ punti (cfr. **Eq. (6)** e **Tabella 3** - ad esempio, $n = 6 \rightarrow t = 62$),

$$h = t \cdot n^{k-3} + n^{k-3} - 1 \rightarrow h = (t+1) \cdot n^{k-3} - 1 \quad (7)$$

Sia l il numero minimo di segmenti rettilinei necessari per risolvere il problema degli $n \times n \times \dots \times n = n^k$ punti ($k, n \in \mathbb{N} - \{0, 1, 2\}$), abbiamo appena dimostrato che:

$$\frac{n^k - 1}{n - 1} \leq l \leq (2 \cdot n - 1) \cdot n^{k-2} - 1 \quad (8)$$

L’**Eq. (8)** può essere ulteriormente perfezionata combinando l’**Eq. (6)** con la **Tabella 3**, nel modo seguente:

$$\frac{n^k - 1}{n - 1} \leq l \leq (t+1) \cdot n^{k-3} - 1 \quad (9)$$

§5. Appendice [Marco Ripà]: il problema degli $n_1 \times n_2 \times n_3$ punti

Consideriamo una variante del problema precedente: siano $n_1 \leq n_2 \leq n_3$ le quantità di punti che contraddistinguono ciascuna delle tre dimensioni del nostro box a forma di parallelepipedo.

Ci si propone di unire $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3$ punti utilizzando il minor numero possibile di segmenti rettilinei consecutivi (l'origine del secondo dovrà coincidere con uno degli estremi del primo e l'origine del terzo coinciderà con l'altro estremo del secondo).

Affrontiamo il problema sotto i vincoli accessori che non sia possibile passare per un dato punto più di una volta, non si possano incrociare linee, non sia possibile utilizzare segmenti che escano dal box / parallelepipedo.

Volendo, potremmo imporre il vincolo alternativo di dover tornare al punto di partenza, costruendo un cammino chiuso in uno spazio 3D, ma è facilmente intuibile che qualsiasi soluzione aperta del tipo che andrò a fornire consente di far ciò utilizzando una sola linea in più (qualsiasi sia il numero di dimensioni considerato, $k \geq 2$).

La mia proposta è di “riciclare” il metodo della spirale quadrata pura (nei casi in cui non si disponga già di una soluzione migliore – come ad esempio se $3 \leq n_1 = n_2 = n_3 \leq 41$).

La tecnica operativa è la seguente:

- 1) Si individui uno dei due piani “esterni” del box definiti da $[n_2; n_3]$;
- 2) Partendo da uno degli spigoli, si tracci come prima linea quella che unisce n_3 punti, interrompendola in corrispondenza dell'ultimo punto della fila;
- 3) Il segmento successivo giacerà sul piano $[n_2; n_3]$, sarà ortogonale al precedente ed unirà $n_2 - 1$ punti;
- 4) Si proceda con il metodo della spirale quadrata (rettangolare, in questo caso) fino all'esaurimento degli $n_2 \cdot n_3$ punti della faccia in oggetto;
- 5) Si tracci la linea ortogonale al piano in questione e si replichi il medesimo procedimento con la faccia opposta. Si ripeta il tutto per altre $n_1 - 2$ volte.

Il numero di linee impiegate è dunque sempre minore o uguale a

$$h = 2 \cdot n_1 \cdot n_2 - 1 \quad (10)$$

Infatti, $h = (2 \cdot n_2 - 1) \cdot n_1 + n_1 - 1$.

Tuttavia, $(2 \cdot n_2 - 1) \cdot n_1 + n_1 - 1 = 2 \cdot n_1 \cdot n_2 - n_1 + n_1 - 1 = 2 \cdot n_1 \cdot n_2 - 1 = 2 \cdot n_1 \cdot n_2 - n_2 + n_2 - 1 = (2 \cdot n_1 - 1) \cdot n_2 + n_2 - 1$ (Q.E.D.).

Il “risparmio”, in termini di segmenti non utilizzati, è nullo se (e solo se)

$$n_1 < 2 \cdot (n_3 - n_2) + 3 \quad (11)$$

Generalizzando, (anche se $n_1 \geq 2 \cdot (n_3 - n_2) + 3$), la (10) può essere così riscritta:

$$h = 2 \cdot n_1 \cdot n_2 - c \quad (12)$$

Dove $c = 1$ se il “risparmio” è nullo, mentre $c \geq 2$ nei casi restanti.

A titolo esemplificativo, si considerino i seguenti casi:

a) $n_1 = 5$; $n_2 = 6$; $n_3 = 9$.

b) $n_1 = 11$; $n_2 = 12$; $n_3 = 13$.

Mentre nella prima ipotesi $c = 1$ (infatti $5 < 2 \cdot (9 - 3) + 3$), $h = 2 \cdot 5 \cdot 6 - 1 = 59$, nel caso b) risulta $c = 13$, $h = 2 \cdot 11 \cdot 12 - 13 = 251$. Ciò in virtù del fatto che le linee di collegamento 5 e 6 permettono di “risparmiare” una linea per tutti i piani successivi e i piani “affrontati” dopo il sesto possono essere risolti utilizzando due linee in meno ciascuno (rispetto ai primi quattro considerati).

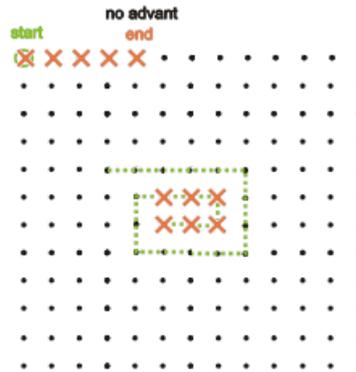


Fig. 12. La spirale quadrata / rettangolare adattata al caso dell'esempio b): $n_1 = 11$, $n_2 = 12$, $n_3 = 13$.

Se $n_1 \geq 2 \cdot (n_3 - n_2) + 4$, il metodo della spirale rettangolare (pura), riferita al problema tridimensionale, può essere così sintetizzato:

$$h = n_1 - 1 + [2 \cdot (n_3 - n_2) + 2] \cdot (2 \cdot n_2 - 1) + 2 \cdot (2 \cdot n_2 - 2) + [2 \cdot (n_3 - n_2) + 4] \cdot (2 \cdot n_2 - 3) + 4 \cdot (2 \cdot n_2 - 4) + \\ + [2 \cdot (n_3 - n_2) + 6] \cdot (2 \cdot n_2 - 5) + 6 \cdot (2 \cdot n_2 - 6) + \dots + d$$

Dove d è il prodotto tra il numero di segmenti rettilinei impiegati per risolvere il piano che ne contiene di meno (l'ultimo piano affrontato, quello che taglia approssimativamente a metà il nostro *box* immaginario) ed “ $n_1 - \{[2 \cdot (n_3 - n_2) + 2] + 2 + [2 \cdot (n_3 - n_2) + 4] + 4 + \dots\}$ ”.

La precedente può dunque essere riscritta più compattamente come

$$h = n_1 - 1 + \sum_{j=0}^{j_{max}} [(2 \cdot n_2 - 2 \cdot j - 1) \cdot (2 \cdot (n_3 - n_2) + 2 \cdot (j + 1)) + 2 \cdot (j + 1) \cdot (2 \cdot n_2 - 2 \cdot (j + 1))] + b$$

Per cui

$$h = -\frac{8 \cdot j_{max}^3}{3} + 6 \cdot j_{max}^2 \cdot n_2 - 2 \cdot j_{max}^2 \cdot n_3 - 11 \cdot j_{max}^2 - 4 \cdot j_{max} \cdot n_2^2 + 4 \cdot j_{max} \cdot n_2 \cdot n_3 + 16 \cdot j_{max} \cdot n_2 - 4 \\ \cdot j_{max} \cdot n_3 - \frac{43 \cdot j_{max}}{3} - 4 \cdot n_2^2 + 4 \cdot n_2 \cdot n_3 + 10 \cdot n_2 - 2 \cdot n_3 - 7 + n_1 + b$$

j_{max} rappresenta il massimo valore del limite superiore della sommatoria, \tilde{j} , tale che

$$n_1 \geq \sum_{j=0}^{\tilde{j}} [2 \cdot (n_3 - n_2) + 2 \cdot (j + 1) + 2 \cdot (j + 1)] \rightarrow n_1 \geq 2 \cdot (\tilde{j} + 1) \cdot (n_3 - n_2 + \tilde{j} + 2), \text{ mentre}$$

$$b := \begin{cases} \text{se } [n_1 - 2 \cdot (j_{\max} + 1) \cdot (n_3 - n_2 + j_{\max} + 2)] \cdot (2 \cdot n_2 - 2 \cdot j_{\max} - 3) \\ \quad n_1 - 2 \cdot (j_{\max} + 1) \cdot (n_3 - n_2 + j_{\max} + 2) \leq 2 \cdot (n_3 - n_2) + 2 \cdot (j_{\max} + 2) \\ \\ \{ [2 \cdot (n_3 - n_2) + 2 \cdot (j_{\max} + 2)] \cdot (2 \cdot n_2 - 2 \cdot j_{\max} - 3) + \\ \quad n_1 - 2 \cdot (j_{\max} + 1) \cdot (n_3 - n_2 + j_{\max} + 2) - [2 \cdot (n_3 - n_2) + 2 \cdot (j_{\max} + 2)] \} \cdot (2 \cdot n_2 - 2 \cdot j_{\max} - 4) \\ \text{se } n_1 - 2 \cdot (j_{\max} + 1) \cdot (n_3 - n_2 + j_{\max} + 2) > 2 \cdot (n_3 - n_2) + 2 \cdot (j_{\max} + 2) \end{cases}$$

Svolgendo i calcoli, si ricava che

$$b := \begin{cases} 4 \cdot j_{\max}^3 - 8 \cdot j_{\max}^2 \cdot n_2 + 4 \cdot j_{\max}^2 \cdot n_3 + 18 \cdot j_{\max}^2 - 2 \cdot j_{\max} \cdot n_1 + 4 \cdot j_{\max} \cdot n_2^2 - 4 \cdot j_{\max} \cdot n_2 \cdot n_3 - 22 \cdot j_{\max} \cdot n_2 + \\ \quad 10 \cdot j_{\max} \cdot n_3 + 26 \cdot j_{\max} + 2 \cdot n_1 \cdot n_2 - 3 \cdot n_1 + 4 \cdot n_2^2 - 4 \cdot n_2 \cdot n_3 - 14 \cdot n_2 + 6 \cdot n_3 + 12 \\ \text{se } n_1 \leq 2 \cdot (j_{\max} + 2) \cdot (j_{\max} - n_2 + n_3 + 2) \\ \\ 4 \cdot j_{\max}^3 - 8 \cdot j_{\max}^2 \cdot n_2 + 4 \cdot j_{\max}^2 \cdot n_3 + 20 \cdot j_{\max}^2 - 2 \cdot j_{\max} \cdot n_1 + 4 \cdot j_{\max} \cdot n_2^2 - 4 \cdot j_{\max} \cdot n_2 \cdot n_3 - 24 \cdot j_{\max} \cdot n_2 + 12 \cdot j_{\max} \cdot n_3 + \\ \quad 34 \cdot j_{\max} + 2 \cdot n_1 \cdot n_2 - 4 \cdot n_1 + 4 \cdot n_2^2 - 4 \cdot n_2 \cdot n_3 - 18 \cdot n_2 + 10 \cdot n_3 + 20 \\ \text{se } n_1 > 2 \cdot (j_{\max} + 2) \cdot (j_{\max} - n_2 + n_3 + 2) \end{cases}$$

Così, la soluzione generale risulta essere la seguente:

$$h = \begin{cases} \frac{4 \cdot j_{\max}^3}{3} - 2 \cdot j_{\max}^2 \cdot n_2 + 2 \cdot j_{\max}^2 \cdot n_3 + 7 \cdot j_{\max}^2 - 2 \cdot j_{\max} \cdot n_1 - 6 \cdot j_{\max} \cdot n_2 + 6 \cdot j_{\max} \cdot n_3 + \frac{35 \cdot j_{\max}}{3} + \\ \quad 2 \cdot n_1 \cdot n_2 - 2 \cdot n_1 - 4 \cdot n_2 + 4 \cdot n_3 + 5 \\ \text{se } n_1 \leq 2 \cdot (j_{\max}^2 - j_{\max} \cdot n_2 + j_{\max} \cdot n_3 + 4 \cdot j_{\max} - 2 \cdot n_2 + 2 \cdot n_3 + 4) \\ \\ \frac{4 \cdot j_{\max}^3}{3} - 2 \cdot j_{\max}^2 \cdot n_2 + 2 \cdot j_{\max}^2 \cdot n_3 + 9 \cdot j_{\max}^2 - 2 \cdot j_{\max} \cdot n_1 - 8 \cdot j_{\max} \cdot n_2 + 8 \cdot j_{\max} \cdot n_3 + \frac{59 \cdot j_{\max}}{3} + \\ \quad 2 \cdot n_1 \cdot n_2 - 3 \cdot n_1 - 8 \cdot n_2 + 8 \cdot n_3 + 13 \\ \text{se } n_1 > 2 \cdot (j_{\max}^2 - j_{\max} \cdot n_2 + j_{\max} \cdot n_3 + 4 \cdot j_{\max} - 2 \cdot n_2 + 2 \cdot n_3 + 4) \end{cases} \quad (13)$$

Dove j_{\max} è il massimo valore $j \in \mathbb{N}_0$ tale che $n_1 \geq 2 \cdot [j^2 + (n_3 - n_2 + 3) \cdot j + n_3 - n_2 + 2]$

$$\rightarrow j_{\max} = \left\lfloor \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{n_3^2 + n_2^2 - 2 \cdot n_2 \cdot n_3 + 2 \cdot n_3 - 2 \cdot n_2 + 2 \cdot n_1 + 1} + n_2 - n_3 - 3 \right) \right\rfloor.$$

La (13) può dunque essere più elegantemente riscritta come

$$h = \begin{cases} \frac{4}{3} \cdot j_{\max}^3 + [2 \cdot (n_3 - n_2) + 7] \cdot j_{\max}^2 + \left[6 \cdot (n_3 - n_2) - 2 \cdot n_1 + \frac{35}{3} \right] \cdot j_{\max} + 4 \cdot (n_3 - n_2) + 2 \cdot n_1 \cdot (n_2 - 1) + 5 \\ \text{se } n_1 \leq 2 \cdot [j_{\max}^2 + (n_3 - n_2 + 4) \cdot j_{\max} + 2 \cdot (n_3 - n_2) + 4] \\ \\ \frac{4}{3} \cdot j_{\max}^3 + [2 \cdot (n_3 - n_2) + 9] \cdot j_{\max}^2 + \left[8 \cdot (n_3 - n_2) - 2 \cdot n_1 + \frac{59}{3} \right] \cdot j_{\max} + 8 \cdot (n_3 - n_2) + n_1 \cdot (2 \cdot n_2 - 3) + 13 \\ \text{se } n_1 > 2 \cdot [j_{\max}^2 + (n_3 - n_2 + 4) \cdot j_{\max} + 2 \cdot (n_3 - n_2) + 4] \end{cases} \quad (14)$$

$$\text{Dove } j_{\max} = \left\lfloor \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{n_3^2 + n_2^2 - 2 \cdot n_2 \cdot n_3 + 2 \cdot (n_3 - n_2 + n_1) + 1} + n_2 - n_3 - 3 \right) \right\rfloor.$$

N.B.

Per ovvie ragioni, la (14) è sempre applicabile, purché risulti $n_1 \geq 2 \cdot (n_3 - n_2) + 4$. In caso contrario, la soluzione discende immediatamente dalla (12), potendo c assumere unicamente i valori 1 e 2 ($c = 1$ se la (11) è verificata, $c = 2$ se la condizione (11) non è soddisfatta, ma la (14) non risulta applicabile – è dunque il caso $n_1 = 2 \cdot (n_3 - n_2) + 3$).

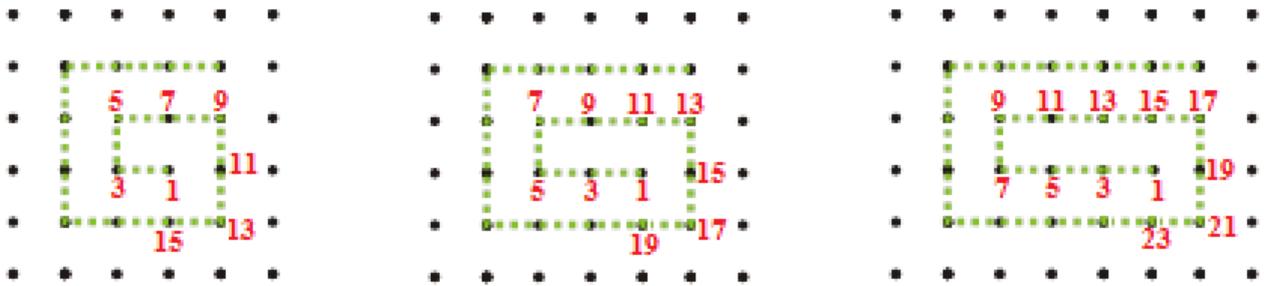


Fig. 13. La spirale rettangolare e il suo sviluppo nei casi, rispettivamente (da sinistra a destra), di $n_3 - n_2 = 0$, $n_3 - n_2 = 1$ ed $n_3 - n_2 = 2$.

Alla luce di quanto visto, è possibile estendere il risultato al caso k -dimensionale: $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$, il meccanismo per determinare un discreto limite superiore della soluzione ottimale resta il medesimo del caso $n_1 = n_2 = \dots = n_k$:

$$h = (t + 1) \cdot \prod_{j=1}^{k-3} n_j - 1 \quad (15)$$

Dove t , il miglior limite superiore per il problema $n_1 \times n_2 \times n_3$ (eccettuati i casi particolarissimi ricordati), è il risultato della (12), esplicitato dalla (10)-(14).

In concreto, si partirà ricercando il piano individuato da $[n_{k-1}; n_k]$, si conetteranno i relativi punti utilizzando $2 \cdot n_{k-1} - 1$ linee, si tratterà il segmento ortogonale secondo la dimensione contraddistinta da n_{k-2} punti, e così via.

Ringraziamenti

Un grazie sincero a Giulio Francot per il sostegno e per i numerosi consigli.

Bibliografia

- [1] Loyd, S., *Cyclopedia of Puzzles*. The Lamb Publishing Company. 1914.
- [2] Adair, J., *The art of creative thinking how to be innovative and develop great ideas*. London Philadelphia: Kogan Page. p. 127. 2007.
- [3] http://en.wikibooks.org/wiki/Creativity_-_An_Overview/Thinking_outside_the_box
- [4]. ‘Outside the Box’: the Inside Story. *FastCompany*. 1995.
- [5] <http://justpuzzles.wordpress.com/about/hints/solutions-to-puzzles/#224>
- [6] Pegg, E. Jr., *Connect the dots – Lines*, Mathpuzzle. <http://www.mathpuzzle.com/dots10x10.gif>
- [7] Spaans, T., *Lines through 5x5 dots*, Justpuzzles. <http://justpuzzles.wordpress.com/about/hints/solutions-to-puzzles/#224> (7 December 2012).
- [8] Lung, C. T. & Dominowski, R. L., ‘Effects of strategy instructions and practice on nine-dot problem solving.’. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition* 11 (4): 804–811. 1 January 1985.
- [9] Sloane, N. J. A., The Online Encyclopedia of Integer Sequences, <http://oeis.org/A225227>, 2013.
- [10] Cassels, J. W. S., ‘An introduction to Diophantine approximation, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics’. 1957.
- [11] Hardy, G. H. & Wright, E. M., ‘An Introduction to the Theory of Numbers (Fifth edition)’, Oxford: Oxford University Press. 1980.