

# Relatividade Especial Virtual - Uma Generalização da Relatividade Especial de Einstein

Edigles Guedes

*e-mail: edigles.guedes@gmail.com*

24 de junho de 2012.

## RESUMO

Nós construímos a Teoria da Relatividade Especial Virtual que é uma generalização a Teoria da Relatividade Especial de Einstein. Ademais, esta teoria prevê dilatação e contração do tempo, a qual não é prevista pela TRE de Einstein.

## Parte I. A Generalização da Transformação de Lorentz e Aplicações

### 1. GENERALIZAÇÃO DAS TRANSFORMAÇÕES DE LORENTZ

#### 1.1. Primeira experiência imaginária.

Façamos a seguinte experiência de pensamento envolvendo três observadores  $O$ ,  $O_1$  and  $O_2$ . Suponhamos que  $O_1$  se move relativamente a  $O$ , com uma velocidade de módulo  $v_1$  no sentido positivo dos eixos  $x$  e  $x_1$ ; por sua vez,  $O_2$  se move relativamente a  $O$ , com uma velocidade de módulo  $v_2$  no sentido positivo dos eixos  $x$  e  $x_2$ . Os planos  $xy$ ,  $x_1y_1$  e  $x_2y_2$  são sempre coincidentes e as origens de seus sistemas de referência coincidem no instante  $t = t_1 = t_2 = 0$ . Neste instante  $O_2$  produz uma frente de onda luminosa, que se expande a partir do ponto de emissão com velocidade de módulo  $c$  em todas as direções. Portanto, segundo o observador  $O_2$  a frente de onda em um tempo  $t_2$  será uma esfera, com centro em sua origem, de raio  $r_2 = ct_2$ . As coordenadas de qualquer ponto pertencente à frente de onda, neste instante, vão satisfazer a seguinte equação de uma esfera:

$$x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = c^2 t_2^2. \quad (1.1)$$

Do ponto de vista do observador  $O_1$  a frente de onda em um tempo  $t_1$  também é uma esfera, porém, seu raio é  $r_1 = ct_1$ , e satisfaz à equação:

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = c^2 t_1^2. \quad (1.2)$$

Além disso, do ponto de vista do observador  $O$ , é novamente verdadeiro que a luz se expande de seu ponto de emissão, a origem, com velocidade de módulo  $c$  em todas as direções. Assim sendo, a frente de onda em um tempo  $t$ , também, é uma esfera, cujo raio é  $r = ct$ , e satisfazendo à equação:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2. \quad (1.3)$$

É fácil verificar que a seguinte transformação de Lorentz satisfaz a equação (1.3) de acordo com a equação (1.2):

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} (x_1 - v_1 t_1) \\
 y &= y_1 \\
 z &= z_1 \\
 t &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} \left( t_1 - \frac{v_1 x_1}{c^2} \right)
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

e, por sua vez, a transformação de Lorentz, logo abaixo, satisfaz a equação (1.3) de acordo com a equação (1.1):

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} (x_2 - v_2 t_2) \\
 y &= y_2 \\
 z &= z_2 \\
 t &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} \left( t_2 - \frac{v_2 x_2}{c^2} \right).
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Ao compararmos  $x, y, z$  e  $t$  em cada sistema de equações (1.4) e (1.5), nós achamos

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} (x_1 - v_1 t_1) &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} (x_2 - v_2 t_2) \\
 y_1 &= y_2 \\
 z_1 &= z_2 \\
 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} \left( t_1 - \frac{v_1 x_1}{c^2} \right) &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} \left( t_2 - \frac{v_2 x_2}{c^2} \right),
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \sqrt{\frac{c^2 - v_1^2}{c^2 - v_2^2}} (x_2 - v_2 t_2) + v_1 t_1 \\
 y_1 &= y_2 \\
 z_1 &= z_2
 \end{aligned}$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{c^2 - v_1^2}{c^2 - v_2^2}} \left( t_2 - \frac{v_2 x_2}{c^2} \right) + \frac{v_1 x_1}{c^2}.$$

Por conveniência de notação, fazamos  $x_1 = x, y_1 = y, z_1 = z, t_1 = t, v_1 = v, x_2 = x', y_2 = y', z_2 = z', t_2 = t'$  e  $v_2 = v'$

$$x = \sqrt{\frac{c^2 - v^2}{c^2 - v'^2}} (x' - v' t') + vt$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$t = \sqrt{\frac{c^2 - v^2}{c^2 - v'^2}} \left( t' - \frac{v' x'}{c^2} \right) + \frac{vx}{c^2}.$$

Consequentemente,

$$x' = \sqrt{\frac{c^2 - v'^2}{c^2 - v^2}} (x - vt) + v' t'$$

$$y' = y \tag{1.6}$$

$$z' = z$$

$$t' = \sqrt{\frac{c^2 - v'^2}{c^2 - v^2}} \left( t - \frac{vx}{c^2} \right) + \frac{v' x'}{c^2},$$

isto é,

$$x' = \sqrt{\frac{c^2 - v'^2}{c^2 - v^2}} \left[ \left( \frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2} \right) x - c^2 \left( \frac{v - v'}{c^2 - v'^2} \right) t \right]$$

$$y' = y \tag{1.7}$$

$$z' = z$$

$$t' = \sqrt{\frac{c^2 - v'^2}{c^2 - v^2}} \left[ \left( \frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2} \right) t - \left( \frac{v - v'}{c^2 - v'^2} \right) x \right],$$

É interessante observar que, quando  $\frac{v'}{c}$  tende a zero, as equações tendem à transformação de Lorentz; e que, quando ambos,  $\frac{v}{c}$  e  $\frac{v'}{c}$ , tendem a zero, surgem as equações de transformação de Galileu. Por conseguinte, estamos diante de uma generalização da transformação de Lorentz.

## 2. EQUAÇÕES DE TRANSFORMAÇÃO PARA VELOCIDADE

Medido num referencial  $O$  o vetor velocidade tem componentes:

$$u_x = \frac{dx}{dt}, \quad u_y = \frac{dy}{dt}, \quad u_z = \frac{dz}{dt}.$$

Por outro lado, o vetor velocidade, medido no referencial  $O'$  tem componentes

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'}, \quad u'_y = \frac{dy'}{dt'}, \quad u'_z = \frac{dz'}{dt'}$$

logo, se tomarmos as diferenciais da transformação de coordenadas em (1.6), lembrando que  $v$  e  $v'$  são constantes, segue-se

$$\begin{aligned} dx' &= \sqrt{\frac{c^2 - v'^2}{c^2 - v^2}} (dx - v dt) + v' dt' \\ dy' &= dy \\ dz' &= dz \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$dt' = \sqrt{\frac{c^2 - v'^2}{c^2 - v^2}} \left( dt - \frac{v dx}{c^2} \right) + \frac{v' dx'}{c^2},$$

ou seja,

$$\begin{aligned} dx' &= \sqrt{\frac{c^2 - v'^2}{c^2 - v^2}} \left[ \left( \frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2} \right) dx - c^2 \left( \frac{v - v'}{c^2 - v'^2} \right) dt \right] \\ dy' &= dy \\ dz' &= dz \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$dt' = \sqrt{\frac{c^2 - v'^2}{c^2 - v^2}} \left[ \left( \frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2} \right) dt - \left( \frac{v - v'}{c^2 - v'^2} \right) dx \right].$$

Por conseguinte, nós obtemos

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{dx'}{dt'} = \frac{\sqrt{\frac{c^2 - v'^2}{c^2 - v^2}} \left[ \left( \frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2} \right) dx - c^2 \left( \frac{v - v'}{c^2 - v'^2} \right) dt \right]}{\sqrt{\frac{c^2 - v'^2}{c^2 - v^2}} \left[ \left( \frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2} \right) dt - \left( \frac{v - v'}{c^2 - v'^2} \right) dx \right]} \\ &= \frac{\left( \frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2} \right) dx - c^2 \left( \frac{v - v'}{c^2 - v'^2} \right) dt}{\left( \frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2} \right) dt - \left( \frac{v - v'}{c^2 - v'^2} \right) dx} = \frac{\left( \frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2} \right) \frac{dx}{dt} - c^2 \left( \frac{v - v'}{c^2 - v'^2} \right) \frac{dt}{dt}}{\left( \frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2} \right) \frac{dt}{dt} - \left( \frac{v - v'}{c^2 - v'^2} \right) \frac{dx}{dt}} \\ &= \frac{\left( \frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2} \right) u_x - c^2 \left( \frac{v - v'}{c^2 - v'^2} \right)}{\left( \frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2} \right) - \left( \frac{v - v'}{c^2 - v'^2} \right) u_x}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u'_y = \frac{dy'}{dt'} &= \frac{dy}{\sqrt{\frac{c^2 - v'^2}{c^2 - v^2} \left[ \left( \frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2} \right) dt - \left( \frac{v - v'}{c^2 - v'^2} \right) dx \right]}} \\
&= \frac{\frac{dy}{dt}}{\sqrt{\frac{c^2 - v'^2}{c^2 - v^2} \left[ \left( \frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2} \right) \frac{dt}{dt} - \left( \frac{v - v'}{c^2 - v'^2} \right) \frac{dx}{dt} \right]}} \\
&= \frac{u_y}{\sqrt{\frac{c^2 - v'^2}{c^2 - v^2} \left[ \left( \frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2} \right) - \left( \frac{v - v'}{c^2 - v'^2} \right) u_x \right]}}; \\
u'_z = \frac{dz'}{dt'} &= \frac{dz}{\sqrt{\frac{c^2 - v'^2}{c^2 - v^2} \left[ \left( \frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2} \right) dt - \left( \frac{v - v'}{c^2 - v'^2} \right) dx \right]}} \\
&= \frac{\frac{dz}{dt}}{\sqrt{\frac{c^2 - v'^2}{c^2 - v^2} \left[ \left( \frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2} \right) \frac{dt}{dt} - \left( \frac{v - v'}{c^2 - v'^2} \right) \frac{dx}{dt} \right]}} \\
&= \frac{u_z}{\sqrt{\frac{c^2 - v'^2}{c^2 - v^2} \left[ \left( \frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2} \right) - \left( \frac{v - v'}{c^2 - v'^2} \right) u_x \right]}}.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Note que:

(i) quando  $v'/c$  tende a zero, (2.3) tende às equações que seriam obtidas da transformação de Lorentz:

$$\begin{aligned}
u'_x &= \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} u_x}; \\
u'_y &= \frac{u_y \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - \frac{v}{c^2} u_x}; \\
u'_z &= \frac{u_z \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - \frac{v}{c^2} u_x}.
\end{aligned}$$

(ii) entretanto, quando  $v/c$  tende a zero, (2.3) tende às seguintes equações:

$$\begin{aligned}
u'_x &= \frac{u_x + v'}{1 + \frac{v'}{c^2} u_x}; \\
u'_y &= \frac{u_y \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \frac{v}{c^2} u_x};
\end{aligned}$$

$$u'_z = \frac{u_z \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \frac{v}{c^2} u_x}.$$

Por outro lado, por simples manipulação algébrica em (2.3), nós encontramos

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{dx}{dt} = \frac{\left(\frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2}\right) u'_x + c^2 \left(\frac{v - v'}{c^2 - v'^2}\right)}{\left(\frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2}\right) + \left(\frac{v - v'}{c^2 - v'^2}\right) u'_x}; \\ u_y &= \frac{dy}{dt} = \sqrt{\frac{c^2 - v'^2}{c^2 - v^2}} \left[ \left(\frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2}\right) - \left(\frac{v - v'}{c^2 - v'^2}\right) u'_x \right] u'_y; \\ u_z &= \frac{dz}{dt} = \sqrt{\frac{c^2 - v'^2}{c^2 - v^2}} \left[ \left(\frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2}\right) - \left(\frac{v - v'}{c^2 - v'^2}\right) u'_x \right] u'_z. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{dx}{dt} = \frac{\left(\frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2}\right) u'_x + c^2 \left(\frac{v - v'}{c^2 - v'^2}\right)}{\left(\frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2}\right) + \left(\frac{v - v'}{c^2 - v'^2}\right) u'_x} \\ u_y &= \frac{dy}{dt} = \sqrt{\frac{c^2 - v'^2}{c^2 - v^2}} \left\{ \left(\frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2}\right) - \left(\frac{v - v'}{c^2 - v'^2}\right) \left[ \frac{\left(\frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2}\right) u'_x + c^2 \left(\frac{v - v'}{c^2 - v'^2}\right)}{\left(\frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2}\right) + \left(\frac{v - v'}{c^2 - v'^2}\right) u'_x} \right] \right\} u'_y \quad (2.5) \\ u_z &= \frac{dz}{dt} = \sqrt{\frac{c^2 - v'^2}{c^2 - v^2}} \left\{ \left(\frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2}\right) - \left(\frac{v - v'}{c^2 - v'^2}\right) \left[ \frac{\left(\frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2}\right) u'_x + c^2 \left(\frac{v - v'}{c^2 - v'^2}\right)}{\left(\frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2}\right) + \left(\frac{v - v'}{c^2 - v'^2}\right) u'_x} \right] \right\} u'_z. \end{aligned}$$

O módulo da velocidade é dado por

$$u^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2. \quad (2.6)$$

### 3. A CONTRAÇÃO DO ESPAÇO, DILATAÇÃO E CONTRAÇÃO DO TEMPO

Seja  $dt = 0$  na primeira equação do sistema (2.2), nós temos

$$dx' = \sqrt{\frac{c^2 - v'^2}{c^2 - v^2}} \left(\frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2}\right) dx. \quad (3.1)$$

Aqui, é salutar observarmos que:

(i) quando  $\frac{v'}{c}$  tende a 0 em (3.1), achamos a equação da contração do espaço de Lorentz, isto é,

$$dx' = \frac{dx}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \Leftrightarrow dx = \sqrt{1 - v^2/c^2} dx'; \quad (3.2)$$

(ii) quando  $\frac{v}{c}$  tende a 0 em (3.1), achamos outra contração do espaço, antes não prevista pela relatividade especial de Einstein, isto é,

$$dx' = \frac{dx}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}} \Leftrightarrow dx = \sqrt{1 - v'^2/c^2} dx'. \quad (3.3)$$

Seja  $dx' = 0$  na primeira equação do sistema (2.2), então,

$$dx' = \sqrt{\frac{c^2 - v'^2}{c^2 - v^2}} \left[ \left( \frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2} \right) dx - c^2 \left( \frac{v - v'}{c^2 - v'^2} \right) dt \right] = 0 \Rightarrow$$

$$dx = c^2 \left( \frac{v - v'}{c^2 - v'v} \right) dt.$$

e substituindo esta na quarta equação do sistema (2.2), achamos

$$dt' = \sqrt{\frac{c^2 - v'^2}{c^2 - v^2}} \left[ \left( \frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2} \right) - c^2 \left( \frac{v - v'}{c^2 - v'^2} \right) \left( \frac{v - v'}{c^2 - v'v} \right) \right] dt \Rightarrow$$

$$dt' = \sqrt{\frac{c^2 - v'^2}{c^2 - v^2}} \left( \frac{c^2 - v^2}{c^2 - v'v} \right) dt. \quad (3.4)$$

Logo, é de bom alvitre observar que:

(i) quando  $\frac{v'}{c}$  tende a 0 em (3.4), achamos a equação da dilatação do tempo, ou seja,

$$dt' = \sqrt{1 - v^2/c^2} dt \Leftrightarrow dt = \frac{dt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \quad (3.5)$$

(ii) quando  $\frac{v}{c}$  tende a 0 em (3.4), deparamo-nos com uma dilatação do tempo, antes não prevista pela relatividade especial de Einstein, ou seja,

$$dt' = \sqrt{1 - v'^2/c^2} dt \Leftrightarrow dt = \frac{dt'}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}}. \quad (3.6)$$

Por outro lado, percebemos que, ao dividirmos a quarta equação de (2.2) por  $dt$ , nós podemos escrever

$$\frac{dt'}{dt} = \sqrt{\frac{c^2 - v'^2}{c^2 - v^2}} \left[ \left( \frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2} \right) - \left( \frac{v - v'}{c^2 - v'^2} \right) \frac{dx}{dt} \right]$$

$$= \sqrt{\frac{c^2 - v'^2}{c^2 - v^2}} \left[ \left( \frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2} \right) - \left( \frac{v - v'}{c^2 - v'^2} \right) u_x \right]. \quad (3.7)$$

Note que:

(i) quando  $\frac{v'}{c}$  tende a 0 em (3.7), achamos

$$\frac{dt'}{dt} = \frac{1 - \frac{v}{c^2} u_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}};$$

(ii) contudo, quando  $\frac{v}{c}$  tende a 0 em (3.7), encontramos

$$\frac{dt'}{dt} = \frac{1 + \frac{v'}{c^2} u_x}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}}$$

Haja vista estas duas contrações do espaço e dilatação e contração do tempo, praticamente iguais, distintas apenas por  $v$  ou  $v'$ , e a troca de sinais, nessas duas últimas equações, houvemos por bem de nomear essa teoria de relatividade especial virtual.

## Parte II. A Dinâmica de Uma Partícula

### 4. A MASSA RELATIVÍSTICA VIRTUAL

Para calcularmos a massa relativística virtual, consideremos a seguinte experiência de pensamento, já clássica em mecânica relativística [1, Apêndice A]: Quando medidos pelo referencial  $x, y, z, t$  indicado pelas equações de (1.7), os observadores  $O_1$  e  $O_2$  estão se movendo em direções paralelas ao eixo  $x$  com velocidades iguais em módulos e com sentidos opostos. Esses observadores carregam consigo partículas idênticas, podemos imaginar duas bolas de bilhar  $B_1$  e  $B_2$ , cada qual com massa  $m_0$  medidas quando elas estão em repouso. Na iminência de passarem um pelo outro, cada qual atira sua bola de maneira tal que ela atinja a outra bola com uma velocidade que, de seu próprio ponto de vista, seja perpendicular ao eixo  $x$  e tenha módulo  $u$ .

Quando observados no referencial  $x, y, z, t, B_1$  e  $B_2$  se aproximam ao longo da trajetórias paralelas que fazem o ângulo  $\theta_{1i} = \theta_{2i}$  com o eixo  $x$ , e retornam sobre trajetórias fazendo ângulos  $\theta_{1f}$  e  $\theta_{2f}$  em relação a este eixo. Supondo que o movimento se conserva e a colisão é elástica, é fácil demonstrar que  $\theta_{1f} = \theta_{2f}$ , e que os módulos das velocidades das bolas são os mesmos, tanto antes quanto depois da colisão. O valor real de  $\theta_{1f}$  e  $\theta_{2f}$  depende do parâmetro de impacto  $d$ , que supomos ser tal que  $\theta_{1f} = \theta_{1i}$ .

Consideremos, portanto, o processo como ele é visto do ponto de vista de  $O_1$ . Portanto,  $O_1$  atira  $B_1$  ao longo de uma linha paralela a seu eixo  $y$  com a velocidade de módulo  $u$ , que suporemos muito pequena em comparação com  $c$ . Ela retorna ao longo da mesma linha com velocidade de mesmo módulo e com sentido oposto. Ele vê  $B_2$  manter uma componente  $x$  da velocidade constante e igual a  $v - v'$ , a velocidade de  $O_2$  em relação ao  $O_1$ , que vamos supor ser comparável a  $c$ . De  $O_1$  observa-se que a componente da velocidade de  $B_2$  ao longo do eixo  $y$  muda de sinal durante a colisão, permanecendo, contudo, um módulo constante. Para calcularmos este módulo, percebemos que a componente  $y$  da velocidade de  $B_2$ , quando medida por  $O_2$ , é  $u$ . Por conseguinte, transformamos isto para o referencial  $O_1$  com auxílio da segunda

expressão de (2.3) e obtemos  $\frac{u}{\sqrt{\frac{c^2-v'^2}{c^2-v^2} \left( \frac{c^2-v'v}{c^2-v'^2} \right)}}$  para o valor da componente  $y$  da velocidade de  $B_2$ ,

quando medida por  $O_1$ .

Os momentos na direção  $y$ , tanto de  $B_1$  quanto de  $B_2$ , medidos no referencial  $O_1$ , simplesmente mudam de sinal durante a colisão. Em consequência, o momento total na direção  $y$  do sistema isolado de duas bolas que colidem muda de sinal. Se a lei de conservação do momento for válida, ou seja,

$$\left[ \sum_{\text{todas as partículas}} \mathbf{p} \right]_{\text{inicial}} = \left[ \sum_{\text{todas as partículas}} \mathbf{p} \right]_{\text{final}},$$

o momento total na direção de  $y$  antes da colisão dever ser igual ao momento na direção  $y$  depois. Isto pode ser verdade apenas se a componente  $y$  total do momento do sistema, medido por  $O_1$  for zero antes da colisão. Calculando as componentes  $y$  da velocidade, conforme a definição clássica de momento de uma partícula

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}, \quad (4.1)$$

e igualando sua soma a zero, obtemos uma equação que é obviamente inconsistente, se insistirmos que as duas massas têm o valor  $m_0$ , a mesma que elas têm quando as massas são medidas em referenciais nos quais estão em repouso. A razão disto é que segundo  $O_1$  o módulo da componente da velocidade de  $B_1$  na direção  $y$  é  $u$ , enquanto que o módulo da componente da velocidade de  $B_2$  na direção  $y$  é  $\frac{u}{\sqrt{\frac{c^2-v'^2}{c^2-v^2} \left( \frac{c^2-v'v}{c^2-v'^2} \right)}}$ .

Entretanto, caso façamos com que a massa de uma partícula seja função do módulo de seu vetor velocidade total, podemos satisfazer à lei da conservação do momento. Como  $u$  é muito pequeno, quando comparado a  $v - v'$ , o módulo do vetor velocidade de  $B_2$  medido por  $O_1$  é basicamente  $v - v'$ . O módulo do vetor velocidade de  $B_1$  visto por  $O_1$  é exatamente  $u$ . Por conseguinte, em  $O_1$  escreveríamos a lei da conservação do momento para as componentes  $y$  como

$$m(u)u - m(v, v') \frac{u}{\sqrt{\frac{c^2 - v'^2}{c^2 - v^2} \left( \frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2} \right)}} = 0$$

ou

$$m(u) = \frac{m(v, v')}{\sqrt{\frac{c^2 - v'^2}{c^2 - v^2} \left( \frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2} \right)}}.$$

Visto que  $u$  é muito pequeno em comparação a  $c$ , podemos fazer  $m(u) = m_0$  e obter

$$m(v, v') = \sqrt{\frac{c^2 - v'^2}{c^2 - v^2} \left( \frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2} \right)} m_0. \quad (4.2)$$

A massa  $m(v, v')$  é chamada massas relativística virtual da partícula, e  $m_0$  é denotada por massa de repouso.

Note que:

(i) quando  $\frac{v'}{c}$  tende a 0 em (4.2), achamos

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}};$$

(ii) quando  $\frac{v}{c}$  tende a 0 em (4.2), encontramos

$$m(v') = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}}.$$

## 5. A EQUAÇÃO DE TRANSFORMAÇÃO PARA MASSA

De acordo com a equação (4.2) a massa de uma dada partícula será medida diferentemente em diferentes conjuntos de coordenadas, visto que a velocidade é diferente. Nós, facilmente, obtemos para a transformação de massa

$$m = \frac{m'}{\sqrt{\frac{c^2 - v'^2}{c^2 - v^2} \left\{ \left( \frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2} \right) - \left( \frac{v - v'}{c^2 - v'^2} \right) \left[ \left( \frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2} \right) u'_x + c^2 \left( \frac{v - v'}{c^2 - v'^2} \right) \right] \right\}}}. \quad (5.1)$$

## 6. UMA EQUAÇÃO ÚTIL PARA $v'$

Nós elevamos ao quadrado a equação da massa relativística virtual (8.2), encontrando

$$m^2(v, v') = \frac{c^2 - v'^2}{c^2 - v^2} \left( \frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2} \right)^2 m_0^2,$$

$$\frac{m^2(v, v')}{m_0^2} = \frac{(c^2 - v'v)^2}{(c^2 - v^2)(c^2 - v'^2)},$$

$$m^2(v, v')[c^2 - v^2](c^2 - v'^2) = m_0^2(c^2 - v'v)^2,$$

$$m^2(v, v')(c^2 - v^2)c^2 - m^2(v, v')(c^2 - v^2)v'^2 = m_0^2c^4 - 2m_0^2c^2vv' + m_0^2v^2v'^2,$$

$$[m_0^2v^2 + m^2(v, v')(c^2 - v^2)]v'^2 - 2m_0^2c^2vv' + [m_0^2c^2 - m^2(v, v')(c^2 - v^2)]c^2 = 0. \quad (6.1)$$

Usando a fórmula de Bháskara para equação quadrática em (6.1), achamos

$$\begin{aligned} v' &= \frac{m_0^2c^2v \pm c\sqrt{m_0^4c^2v^2 - [m_0^2v^2 + m^2(v, v')(c^2 - v^2)][m_0^2c^2 - m^2(v, v')(c^2 - v^2)]}}{m_0^2v^2 + m^2(v, v')(c^2 - v^2)} \\ &= \frac{m_0^2c^2v \pm c\sqrt{[m^2(v, v') - m_0^2]m^2(v, v')(c^2 - v^2)^2}}{m_0^2v^2 + m^2(v, v')(c^2 - v^2)} \end{aligned}$$

$$= \frac{m_0^2 c^2 v \pm c(c^2 - v^2) m(v, v') \sqrt{m^2(v, v') - m_0^2}}{m_0^2 v^2 + m^2(v, v')(c^2 - v^2)}. \quad (6.2)$$

## 7. GENERALIZAÇÃO DO EFEITO DOPPLER LONGITUDINAL

7.1. Do ponto de vista da Relatividade Especial de Einstein, suponha um processo de aniquilação em um sistema de referência  $\mathcal{S}$  no qual o par elétron-pósitron esteja em repouso e os dois fótons resultantes da aniquilação se movam ao longo do eixo  $x$ . Agora, considere a mesma aniquilação sendo observada no referencial  $\mathcal{S}'$ , que se move com velocidade  $\mathbf{v}$  para a esquerda em relação a  $\mathcal{S}$ . A questão é: que comprimento de onda este observador (em movimento) mede para os fótons?

O par tem energia total relativística inicial  $2mc^2$ , onde  $m$  é a massa relativística, em vez da energia de repouso  $2m_0c^2$ , de modo que a conservação de energia no processo de aniquilação nos dá

$$2mc^2 = p'_1 c + p'_2 c \quad (7.1)$$

Ademais, visto que o par se move ao longo do eixo  $x'$  com velocidade  $\mathbf{v}$ , de tal maneira que seu momento inicial é  $2mv$ , a lei de conservação do momento nos dá

$$2mv = p'_1 - p'_2, \quad (7.2)$$

uma vez que os fótons se movem em sentidos opostos do eixo  $x'$ . Combinamos essas duas expressões, multiplicando a segunda equação por  $c$  e somando-a à primeira, obtemos

$$p'_1 = m(c + v), \quad (7.3)$$

Por outro lado, sabemos que

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (7.4)$$

que substituímos na equação (7.3), encontrando

$$p'_1 = \frac{m_0(c + v)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m_0 c \sqrt{\frac{c + v}{c - v}}, \quad (7.5)$$

contudo,  $p'_1 = h/\lambda'_1$ , de tal modo que

$$\lambda'_1 = \frac{h}{p'_1} = \frac{h}{m_0 c} \sqrt{\frac{c - v}{c + v}} = \lambda \sqrt{\frac{c - v}{c + v}}, \quad (7.6)$$

Similarmente, se multiplicarmos a equação (7.2) por  $c$  e subtraindo-a à (7.1), obtemos

$$\lambda'_2 = \frac{h}{p'_2} = \frac{h}{m_0 c} \sqrt{\frac{c + v}{c - v}} = \lambda \sqrt{\frac{c + v}{c - v}}, \quad (7.7)$$

Sendo assim, os fótons não têm o mesmo comprimento de onda, pois estes são alterados pelo efeito Doppler em relação ao valor  $\lambda$  que possuíam no referencial de repouso. Não é

demais dizer que se um observador está no eixo  $x'$  de tal forma que a fonte se aproxima dele, ele detectará o fóton 1 com uma frequência maior do que a frequência de repouso. Mas, se o observador está situado no eixo  $x'$  de tal forma que a fonte se afasta dele, ele detectará o fóton 2 com uma frequência menor do que a frequência de repouso. Essa é a dedução do efeito Doppler longitudinal da teoria da Relatividade Especial de Einstein.

7.2. Agora, sob o ponto de vista da Relatividade Especial Virtual, façamos a seguinte experiência imaginária: suponha um processo de aniquilação em um sistema de referência  $\mathcal{S}$  no qual o par elétron-pósitron esteja em repouso e os dois fótons resultantes da aniquilação se movam ao longo do eixo  $x$ . Considere a mesma aniquilação sendo observada por um observador  $\mathcal{O}'$  no referencial  $\mathcal{S}'$ , que se move com velocidade  $v$  para a esquerda em relação a  $\mathcal{S}$ ; bem como a mesma aniquilação sendo observada por um observador  $\mathcal{O}''$  no referencial  $\mathcal{S}''$ , que se move com velocidade  $v'$ , com módulo distinto de  $v$ , para a esquerda em relação a  $\mathcal{S}$ ; vale ressaltar que tanto  $\mathcal{O}'$  quanto  $\mathcal{O}''$  movem-se ao longo do eixo  $x$ . Duas questões são: qual o comprimento de onda do observador  $\mathcal{O}''$  em relação ao observador  $\mathcal{O}'$  (ambos em movimentos) mede para os fótons? E qual o comprimento de onda do observador  $\mathcal{O}'$  em relação ao observador  $\mathcal{O}''$  (ambos em movimentos) mede para os fótons?

7.2.1. Para o referencial  $\mathcal{S}'$ , o observador  $\mathcal{O}'$  observa o seguinte fenômeno:

O par tem energia total relativística inicial  $2mc^2$ , onde  $m$  é a massa relativística, em vez da energia de repouso  $2m_0c^2$ , de modo que a conservação de energia no processo de aniquilação nos dá

$$2mc^2 = p'_1c + p'_2c \quad (7.8)$$

Ademais, visto que o par se move ao longo do eixo  $x'$  com velocidade  $v$ , de tal maneira que seu momento inicial é  $2mv$ , a lei de conservação do momento nos dá

$$2mv = p'_1 - p'_2, \quad (7.9)$$

uma vez que os fótons se movem em sentidos opostos do eixo  $x'$ . Combinamos essas duas expressões, multiplicando a segunda equação por  $c$  e somando-a à primeira, obtemos

$$p'_1 = m(c + v), \quad (7.10)$$

Por outro lado, sabemos que

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (7.11)$$

que substituímos na equação (7.10), encontrando

$$p'_1 = \frac{m_0(c + v)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m_0c \sqrt{\frac{c + v}{c - v}}, \quad (7.12)$$

contudo,  $p'_1 = h/\lambda'_1$ , de tal modo que

$$\lambda'_1 = \frac{h}{p'_1} = \frac{h}{m_0c} \sqrt{\frac{c - v}{c + v}} = \lambda \sqrt{\frac{c - v}{c + v}}, \quad (7.13)$$

Similarmente, se multiplicarmos a equação (7.9) por  $c$  e subtraindo-a à (7.8), obtemos

$$\lambda'_2 = \frac{h}{p'_2} = \frac{h}{m_0 c} \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} = \lambda \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}, \quad (7.14)$$

7.2.2. Para o Referencial  $S''$ , o observador  $O''$  observa o seguinte fenômeno:

O par tem energia total relativística inicial  $2mc^2$ , onde  $m$  é a massa relativística, em vez da energia de repouso  $2m_0c^2$ , de modo que a conservação de energia no processo de aniquilação nos dá

$$2mc^2 = p''_1 c + p''_2 c \quad (7.15)$$

Ademais, visto que o par se move ao longo do eixo  $x''$  com velocidade  $v'$ , de tal maneira que seu momento inicial é  $2mv'$ , a lei de conservação do momento nos dá

$$2mv' = p''_1 - p''_2, \quad (7.16)$$

uma vez que os fótons se movem em sentidos opostos do eixo  $x''$ . Combinamos essas duas expressões, multiplicando a segunda equação por  $c$  e somando-a à primeira, obtemos

$$p''_1 = m(c + v'), \quad (7.17)$$

Por outro lado, sabemos que

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}}, \quad (7.18)$$

que substituímos na equação (7.17), encontrando

$$p''_1 = \frac{m_0(c + v')}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}} = m_0 c \sqrt{\frac{c + v'}{c - v'}}, \quad (7.19)$$

contudo,  $p''_1 = h/\lambda''_1$ , de tal modo que

$$\lambda''_1 = \frac{h}{p''_1} = \frac{h}{m_0 c} \sqrt{\frac{c - v'}{c + v'}} = \lambda \sqrt{\frac{c - v'}{c + v'}}, \quad (7.20)$$

Similarmente, se multiplicarmos a equação (7.16) por  $c$  e subtraindo-a à (7.15), obtemos

$$\lambda''_2 = \frac{h}{p''_2} = \frac{h}{m_0 c} \sqrt{\frac{c + v'}{c - v'}} = \lambda \sqrt{\frac{c + v'}{c - v'}}. \quad (7.21)$$

7.2.3. Ao compararmos o fenômeno observado por ambos os observadores,  $O'$  e  $O''$ , achamos as seguintes proporções entre os comprimentos de onda:

$$\frac{\lambda'_1}{\lambda''_1} = \frac{\lambda \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}}{\lambda \sqrt{\frac{c-v'}{c+v'}}} = \sqrt{\frac{(c-v)(c+v')}{(c+v)(c-v')}} \Leftrightarrow \lambda'_1 = \sqrt{\frac{(c-v)(c+v')}{(c+v)(c-v')}} \lambda''_1 \quad (7.22)$$

e

$$\frac{\lambda'_2}{\lambda''_2} = \frac{\lambda \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}}{\lambda \sqrt{\frac{c+v'}{c-v'}}} = \frac{\sqrt{(c+v)(c-v')}}{\sqrt{(c-v)(c+v')}} \Leftrightarrow \lambda'_2 = \sqrt{\frac{(c+v)(c-v')}{(c-v)(c+v')}} \lambda''_2. \quad (7.23)$$

7.2.4. O comprimento de onda do observador  $\mathcal{O}''$  em relação ao observador  $\mathcal{O}'$  (ambos em movimentos) mede para os fótons e o comprimento de onda do observador  $\mathcal{O}'$  em relação ao observador  $\mathcal{O}''$  (ambos em movimentos) mede para os fótons:

As equações (7.22) e (7.23) são os argumentos que utilizamos para construir o efeito Doppler longitudinal da Teoria da Relatividade Especial Virtual.

Agora, se substituirmos a massa relativística de (7.4) pela massa relativística virtual de (4.2) em (7.5), obtemos

$$p'_1 = (c+v) \sqrt{\frac{c^2 - v'^2}{c^2 - v^2}} \left( \frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2} \right) m_0, \quad (7.24)$$

contudo,  $p'_1 = h/\lambda'_1$ , de tal modo que

$$\lambda'_1 = \frac{h}{p'_1} = \frac{h}{m_0 c \left(1 + \frac{v}{c}\right) \sqrt{\frac{c^2 - v'^2}{c^2 - v^2}} \left( \frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2} \right)} = \frac{\lambda}{\left(1 + \frac{v}{c}\right) \sqrt{\frac{c^2 - v'^2}{c^2 - v^2}} \left( \frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2} \right)}, \quad (7.25)$$

De maneira análoga, obtemos facilmente

$$\lambda'_2 = \frac{h}{p'_2} = \frac{h}{m_0 c \left(1 - \frac{v}{c}\right) \sqrt{\frac{c^2 - v'^2}{c^2 - v^2}} \left( \frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2} \right)} = \frac{\lambda}{\left(1 - \frac{v}{c}\right) \sqrt{\frac{c^2 - v'^2}{c^2 - v^2}} \left( \frac{c^2 - v'v}{c^2 - v'^2} \right)}. \quad (7.26)$$

Esta é a dedução do efeito Doppler longitudinal da Teoria da Relatividade Especial Virtual. Quando  $\frac{v'}{c}$  tende a 0 em (7.25) e (7.26), achamos (7.6) e (7.7).

## REFERÊNCIAS

[1] Eisberg, Robert e Resnick, Robert, *Física Quântica, Átomos, Moléculas, Núcleos e Partículas*, 1979, Elsevier Editora Ltda.