黎曼猜想的一个推论

费晋华

长岭电子科技公司 宝鸡 721006

E-mail: feijinhuayoujian@msn.com

摘　要　本文使用值分布理论的Nevanlinna第二基本定理，给出了黎曼猜想的一个推论。

关键词　值分布理论，黎曼zeta函数

MR(2000)**主题分类**　30D35　11M06

中图分类　O174

An corollary of Riemann hypothesis

Jin Hua Fei

ChangLing Company of Electronic Technology　Baoji　721006　P.R.China

E-mail: feijinhuayoujian@msn.com

abstract　This paper use Nevanlinna second fundamental theorem of the value distribution theory , give an corollary of Riemann hypothesis

Keyword　value distribution theory ; Riemann zeta function

MR(2000) Subject Classification　**30D35**

Chinese Library Classification　**O174**

首先，给出值分布理论中我们要用到的一些记号、定义和定理，其内容参见文献[1]和[2]

定义：

$$\log^+ x = \begin{cases} \log x & 1 \le x \\ 0 & 0 \le x < 1 \end{cases}$$

易见，$\log x \le \log^+ x$ 。

设$f(z)$ 是区域 $|z| < R,\ 0 < R \le \infty$ 的一个亚纯函数，不恒等于零。$n(r,f)$ 表示$f(z)$ 在圆$|z| \le r\,(0 < r < R)$ 上的极点个数，重级按其重数计，$n(0,f)$ 表示$f(z)$在原点处极点的重级。任意复数$a \neq \infty$，$n(r,\frac{1}{f-a})$ 表示$f(z)-a$ 在圆 $|z| \le r\ (0 < r < R)$ 上的零点个数，重级按其重数计，$n(0,\frac{1}{f-a})$ 表示 $f(z)-a$ 在原点处零点重级。记：

$$m(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \left|f(re^{i\varphi})\right| d\varphi$$

$$N(r,f) = \int_0^r \frac{n(t,f)-n(0,f)}{t}\,dt + n(0,f)\log r$$

定义：$T(r,f) = m(r,f) + N(r,f)$，$T(r,f)$ 称为$f(z)$ 的特征函数。

引理1：若$f(z)$ 在区域 $|z| < R\ (0 < R \le \infty)$ 内解析（即全纯），则有

$$T(r,f) \le \log^+ M(r,f) \le \frac{\rho+r}{\rho-r}\,T(\rho,f) \qquad (0 < r < \rho < R)$$

此处 $M(r,f) = \max_{|z|=r} |f(z)|$

证明见文献[1] 57页。

引理2：设$f(z)$ 为在区域$|z| < R\ (0 < R \le \infty)$ 的一个亚纯函数，不恒等于0，考虑一圆$|z| < \rho\ (0 < \rho < R)$ 和在此圆内$f(z)$ 的零点 $a_\lambda\ (\lambda = 1,2,...,h)$ 及极点 $b_\mu\ (\mu = 1,2,...,k)$ ，其中每一零点或极点出现的次数与其级相同，且$z=0$ 不是函数$f(z)$ 的一个零点或极点，则在圆$|z| < \rho$ 内有下列公式

$$\log |f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log \left|f(\rho e^{i\varphi})\right| d\varphi - \sum_{\lambda=1}^{h} \log \frac{\rho}{|a_\lambda|} + \sum_{\mu=1}^{k} \log \frac{\rho}{|b_\mu|}$$

此公式称为Jensen公式。

证明见文献[1]48页.

引理3：设函数$f(z)$ 于$|z| \leq R$ 为亚纯。并有

$$f(0) \neq 0,\ \infty,\ 1, \quad f'(0) \neq 0$$

则于$0 < r < R$ 有

$$T(r,f) < 2\left\{N(R,\frac{1}{f}) + N(R,f) + N(R,\frac{1}{f-1})\right\}$$

$$+ 4 \log^+ |f(0)| + 2 \log^+ \frac{1}{R|f'(0)|} + 24 \log \frac{R}{R-r} + 2328$$

这就是Nevanlinna 第二基本定理的一种形式。

证明见文献[1] 75页定理3.1

为了后面的需要，我们再作一些准备。

引理4：设$x \geq a$ 时，$f(x)$ 是一非负的递减函数，则极限

$$\lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=a}^{N} f(n) - \int_a^N f(x)\,dx \right) = \alpha$$

存在，且$0 \leq \alpha \leq f(a)$ ，更进一步言之，当$x \to \infty$ 时，若$f(x) \to 0$ ，则

$$\left| \sum_{a \leq n \leq \xi} f(n) - \int_a^{\xi} f(\nu)\,d\nu - \alpha \right| \leq f(\xi - 1), \qquad (\xi \geq a + 1)$$

证明见文献[3] 91页定理2 .

记 $s = \sigma + it$ 是复变数，$\zeta(s)$ 是Riemann Zeta 函数，当 $\sigma > 1$ 时，定义为

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

根据文献[4] 90页，当 $\sigma > 1$ 时

$$\log \zeta(s) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s \log n}$$

其中 $\Lambda(n)$ 是Mangoldt 函数。

引理5：对任意实数 t ，有

（一）

$$0.0426 \le |\log \zeta(4+it)| \le 0.0824$$

（二）

$$|\zeta(4+it) - 1| \ge 0.0426$$

（三）

$$0.917 \le |\zeta(4+it)| \le 1.0824$$

（四）

$$|\zeta'(4+it)| \ge 0.012$$

证明：

（一）

$$|\log \zeta(4+it)| \le \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^4 \log n} \le \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} - 1 \le 0.0824$$

$$|\log \zeta(4+it)| \ge \frac{1}{2^4} - \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^4} = 1 + \frac{2}{2^4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{9}{8} - \frac{\pi^4}{90} \ge 0.0426$$

（二）

$$|\ \zeta(4+it)-1\ | = \left|\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{4+it}}\right| \ge \frac{1}{2^4} - \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$

$$= 1+\frac{2}{2^4} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{9}{8} - \frac{\pi^4}{90} \ge 0.0426$$

(三)

$$|\ \zeta(4+it)\ | = \left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{4+it}}\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \le 1.0824$$

$$|\ \zeta(4+it)\ | = \left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{4+it}}\right| \ge 1 - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^4} = 2 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = 2 - \frac{\pi^4}{90} \ge 0.917$$

（四）

$$|\ \zeta'(4+it)\ | = \left|\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\log n}{n^{4+it}}\right| \ge \frac{\log 2}{2^4} - \sum_{n=3}^{\infty}\frac{\log n}{n^4}$$

由引理4

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\log n}{n^4} = \int_3^{\infty}\frac{\log x}{x^4}\,dx + \alpha$$

其中$0 \le \alpha \le \frac{\log 3}{3^4}$

$$\int_3^{\infty}\frac{\log x}{x^4}\,d\,x = -\frac{1}{3}\int_3^{\infty}\log x\ d\,x^{-3} = \frac{\log 3}{3^4} + \frac{1}{3}\int_3^{\infty}x^{-4}\,d\,x$$

$$= \frac{\log 3}{3^4} - \frac{1}{3^2}\int_3^{\infty}d\,x^{-3} = \frac{\log 3}{3^4} + \frac{1}{3^5}$$

所以

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\log n}{n^4} \le \frac{\log 3}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \frac{\log 3}{3^4}$$

因此，

$$| \zeta'(4+it) | \geq \frac{\log 2}{2^4} - \frac{2\log 3}{3^4} - \frac{1}{3^5} \geq 0.012$$

证毕。

设$0 < \delta \leq \frac{1}{100}$,本文以下， $c_1, c_2, ...,$ 均表示仅与δ 有关的正常数。

引理6： 当 $\sigma \geq \frac{1}{2}, \ |t| \geq 2$ 时，有

$$|\zeta(\sigma+it)| \leq c_1 |t|^{\frac{1}{2}}$$

证明见文献[4] 140 页定理2 及142页定理4 。

引理7： 设 $f(z)$ 在圆 $|z-z_0| \leq R$ 上解析，则对任意的 $0 < r < R$, 在圆 $|z-z_0| \leq r$ 上有

$$| f(z) - f(z_0) | \leq \frac{2r}{R-r} \left(A(R) - Ref(z_0) \right)$$

其中

$$A(R) = \max_{|z-z_0| \leq R} Ref(z)$$

证明见文献[4] 61 页定理2 。

现假定黎曼假设成立，简称RH 成立，即当$\sigma > \frac{1}{2}$ 时，$\zeta(\sigma+it)$ 没有零点。记区域$\sigma \geq \frac{1}{2}+\delta, |t| > 1$ 和区域$\sigma > 2, |t| \leq 1$ 的并集为区域D 。因而在区域D内，$\zeta(\sigma+it)$ 既无零点，也无极点，此时，在区域D内，$\log\zeta(\sigma+it)$ 是一个有定义的多值解析函数，其每个单值分支相差$2\pi i$ 的整数倍。假定在区域D内，存在点 s_0 ，使 $\zeta(s_0) = 1$ （如果不存在这样的点，那么引理9的结果变为 $N(\rho, \frac{1}{\zeta-1}) = 0$ ，从而就可以直接得到本文定理的结果)，对于不同的单值解析分支，$\log\zeta(s_0) = \log 1$ 的取值也不同，可取 $0, \ 2\pi ki, (k = \pm 1, \pm 2, ...)$

，我们选取$\log\zeta(s_0) = \log 1 = 0$ 的单值解析分支。因为区域D是单连通区域，所以由解析开拓的单值性定理（参见文献[5] 276页定理2和文献[6]155页定理1），在区域D内，$\log\zeta(\sigma+it)$ 是一个单值解析函数，以下均指该单值解析分支。易见，函数$\zeta(\sigma+it)=1$ 则必有 $\log\zeta(\sigma+it)=0$ ，即函数 $\zeta(\sigma+it)$ 的1 - 值点必是函数$\log\zeta(\sigma+it)$ 的零点。

引理8： 若RH 成立，$0<\delta\le\frac{1}{100}$ ，则当$\sigma\ \ge\ \frac{1}{2}+2\delta$, $|t|\ge 16$ 时，有

$$|\ \log\zeta(\sigma+it)\ |\ \le\ c_2\log|t|+c_3$$

证明：在引理7中，取$z_0 = 0,\ f(z) = \log\zeta(z+4+it),\ |t| \ge 16,\ R = \frac{7}{2}-\delta,\ r = \frac{7}{2}-2\delta,$ ，$\log\zeta(z+4+it)$ 在圆$|z-z_0| \le R$ 上解析，因此在圆$|z-z_0|\le r$ 上有

$$|\ \log\zeta(z+4+it)\ -\log\zeta(4+it)\ |\ \le\ \frac{7}{\delta}\ (\ A(R)-Re\log\zeta(4+it)\ )$$

即：

$$|\ \log\zeta(z+4+it)\ |\le\ \frac{7}{\delta}\ (\ A(R)+|\ \log\zeta(4+it)\ |\ )+|\ \log\zeta(4+it)\ |$$

由引理6

$$A(R)=\max_{|z-z_0|\le R}\log|\ \zeta(z+4+it)\ |\le\ \frac{1}{2}\ \log|t|\ +\ \log c_1$$

再由引理5，

$$|\ \log\zeta(z+4+it)\ |\ \le\ c_2\ \log|t|\ +\ c_3$$

由于$|t|\ge 16$ 的任意性，可得到当$\sigma\ge\frac{1}{2}+2\delta$ 时

$$|\ \log\zeta(\sigma+it)\ |\ \le\ c_2\ \log|t|\ +\ c_3$$

证毕。

引理9： 若RH 成立，$0<\delta\le\frac{1}{100}$ ，则当$|t|\ge 16$, $\rho=\frac{7}{2}-2\delta$ 时，在圆$|z|\le\rho$ 上，有

$$N\left(\rho,\ \frac{1}{\zeta(z+4+it)\ -1}\right)\ \le\ \log\log|t|\ +\ c_4$$

证明：在引理2中，取$f(z)\ =\ \log\zeta(z+4+it)$, $R\ =\ \frac{7}{2}-\delta$, $\rho\ =\ \frac{7}{2}-2\delta$, a_λ $(\lambda=1,2,...,h)$ 是$\log\zeta(z+4+it)$ 在圆$|z|<\rho$ 内的零点，重级按其重数计算，$\log\zeta(z+4+it)$ 在此圆内无极点，且$\log\zeta(4+it)$ 不为零，因而有

$$\log|\log\,\zeta(4+it)\,|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\,\left|\log\,\zeta(4+it+\rho e^{i\varphi})\right|\,d\varphi-\sum_{\lambda=1}^{h}\log\,\frac{\rho}{|a_\lambda|}$$

由引理5 及引理8 ，

$$\sum_{\lambda=1}^{h}\log\,\frac{\rho}{|a_\lambda|}\ \le\ \log\log|t|\ +\ c_4$$

因为$z=0$ 既不是$\log\zeta(z+4+it)$ 的零点，也不是极点，所以，若r_0 为一适当小的正数，则

$$\sum_{\lambda=1}^{h}\log\,\frac{\rho}{|a_\lambda|}\ =\ \int_{r_0}^{\rho}\left(\log\frac{\rho}{t}\right)\,d\,n(t,\frac{1}{f})\ =\ \left[\left(\log\frac{\rho}{t}\right)\,n(t,\frac{1}{f})\right]\Big|_{r_0}^{\rho}$$

$$+\int_{r_0}^{\rho}\frac{n(t,\frac{1}{f})}{t}\,d\,t\ =\ \int_0^{\rho}\frac{n(t,\frac{1}{f})}{t}\,d\,t\ =\ N\left(\rho\,,\frac{1}{f}\right)$$

$$=\ N\left(\rho,\ \frac{1}{\log\zeta(z+4+it)}\right)\ \ge\ N\left(\rho,\ \frac{1}{\zeta(z+4+it)-1}\right)$$

证毕。

定理： 若RH 成立，则当$\sigma \ \geq \ \frac{1}{2} \ + \ 4\delta$, $0 < \delta \leq \frac{1}{100}$, $|t| \geq 16$ 时，有

$$|\,\zeta(\sigma + it)\,| \ \leq \ c_8\,(\log|t|)^{c_9}$$

证明：在引理3中，取$f(z) \ = \ \zeta(z + 4 + it)$, $|t| \geq 16$ ，由引理5，$f(0) \ = \ \zeta(4 + it) \ \neq \ 0, \infty, 1,$ $\ f'(0) \ = \ \zeta'(4 + it) \ \neq \ 0$ ，且$f'(0) \ = \ \zeta'(4 + it) \ \geq \ 0.012$，$|\,f(0)\,| = |\,\zeta(4 + it)\,| \ \leq \ 1.0824$, 取$R \ = \ \frac{7}{2} - 2\delta$, $r \ = \ \frac{7}{2} - 3\delta$ ，因$\zeta(z + 4 + it)$ 在圆$|z| \leq R$ 内全纯，既无零点，也无极点，所以

$$N\left(R\,,\,\frac{1}{f}\right) \ = \ 0\ , \qquad N\,(\,R,\,f) = 0$$

再由引理9，则有

$$T\ (\,r\,,\zeta(z + 4 + it)\,) \ \leq \ 2\log\log|t| \ + \ c_5$$

在引理1 中，取$R = \frac{7}{2} - 2\delta$, $\rho \ = \ \frac{7}{2} \ - \ 3\delta,$ $r \ = \ \frac{7}{2} \ - \ 4\delta$ 及最大值原理，在圆$|z| \leq r$ 上，有

$$\log^{+}|\,\zeta(z + 4 + it)\,| \ \leq \ c_6\ \log\log|t| \ + \ c_7$$

由于$|t| \geq 16$ 是任意的，所以当$\sigma \geq \frac{1}{2} \ + \ 4\delta$ 时有

$$\log^{+}|\,\zeta(\sigma + it)\,| \ \leq \ c_6\ \log\log|t| \ + \ c_7$$

则

$$\log\,|\,\zeta(\sigma + it)\,| \ \leq \ c_6\ \log\log|t| \ + \ c_7$$

即

$$|\zeta(\sigma+it)| \le c_8 (\log|t|)^{c_9}$$

证毕。

参考文献

[1] Zhuang Q.T, Singular direction of meromorphic function , BeiJing: Science Press,1982.

[2] Yang L , Value distribution theory and new research , BeiJing: Science Press,1982.

[3] Hua L.G , Introduction of number theory , BeiJing: Science Press,1979.

[4] Pan C.D, Pan C.B, Fundamentals of analytic number theory, BeiJing: Science Press, 1999

[5] Zhuang Q.T , Zhang N.Y , Complex variables functions , BeiJing: Peking University press , 1984

[6] Hua L.G , Introduction of advanced mathematics (Book One of second volume) BeiJing: Science Press, 1981