The Answer to the Riemann Hypothesis

(The Complex Zeros of the Riemann Zeta Function)

Dr. Tian-Chou Wang

Chapter 4

一、拓扑映射

在文献[1]中我们得到了如下的定理：

定理1.1　若Riemann猜测不真，那末关于α,β,ξ,η的超定超越方程组

$$-\frac{1-3\alpha}{2(1-\alpha)}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{e^{\frac{(1-\beta)\theta}{2[(1-2\beta)\xi-\beta\eta]}}\sin\frac{(1-2\beta)(\xi+\eta)\theta-(1-\beta)\log\cos\theta}{2[(1-2\beta)\xi-\beta\eta]}\right.$$

$$\left.+e^{-\frac{(1-\beta)\theta}{2[(1-2\beta)\xi-\beta\eta]}}\sin\frac{(1-2\beta)(\xi+\eta)\theta+(1-\beta)\log\cos\theta}{2[(1-2\beta)\xi-\beta\eta]}\right\}\cdot$$

$$\cdot\frac{(\cos\theta)^{-\frac{3(1-2\beta)\xi-(1+2\beta)\eta}{2[(1-2\beta)\xi-\beta\eta]}}}{e^{2\pi\tan\theta}-1}\,d\theta=0 \qquad \cdots\cdots 1.1$$

$$-\frac{1}{\xi-\eta}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{e^{\frac{(1-\beta)\theta}{2[(1-2\beta)\xi-\beta\eta]}}\cos\frac{(1-2\beta)(\xi+\eta)\theta-(1-\beta)\log\cos\theta}{2[(1-2\beta)\xi-\beta\eta]}\right.$$

$$\left.-e^{-\frac{(1-\beta)\theta}{2[(1-2\beta)\xi-\beta\eta]}}\cos\frac{(1-2\beta)(\xi+\eta)\theta+(1-\beta)\log\cos\theta}{2[(1-2\beta)\xi-\beta\eta]}\right\}\cdot$$

$$\cdot\frac{(\cos\theta)^{-\frac{3(1-2\beta)\xi-(1+2\beta)\eta}{2[(1-2\beta)\xi-\beta\eta]}}}{e^{2\pi\tan\theta}-1}\,d\theta=0 \qquad \cdots\cdots 1.2$$

$$-\frac{1-3\beta}{2(1-\beta)}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{e^{\frac{(1-\beta)\theta}{2[(1-2\beta)\xi-\beta\eta]}}\sin\frac{[(1-2\beta)\xi-\eta]\theta-(1-\beta)\log\cos\theta}{2[(1-2\beta)\xi-\beta\eta]}\right.$$

$$\left.+e^{-\frac{(1-\beta)\theta}{2[(1-2\beta)\xi-\beta\eta]}}\sin\frac{[(1-2\beta)\xi-\eta]\theta+(1-\beta)\log\cos\theta}{2[(1-2\beta)\xi-\beta\eta]}\right\}\cdot$$

$$\cdot\frac{(\cos\theta)^{-\frac{3(1-2\beta)\xi+(1-4\beta)\eta}{2[(1-2\beta)\xi-\beta\eta]}}}{e^{2\pi\operatorname{tg}\theta}-1}d\theta=0 \quad \cdots\cdots 1.3$$

$$-\frac{1}{\xi+\eta}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{e^{\frac{(1-\beta)\theta}{2[(1-2\beta)\xi-\beta\eta]}}\cos\frac{[(1-2\beta)\xi-\eta]\theta-(1-\beta)\log\cos\theta}{2[(1-2\beta)\xi-\beta\eta]}\right.$$

$$\left.-e^{-\frac{(1-\beta)\theta}{2[(1-2\beta)\xi-\beta\eta]}}\cos\frac{[(1-2\beta)\xi-\eta]\theta+(1-\beta)\log\cos\theta}{2[(1-2\beta)\xi-\beta\eta]}\right\}\cdot$$

$$\cdot\frac{(\cos\theta)^{-\frac{3(1-2\beta)\xi+(1-4\beta)\eta}{2[(1-2\beta)\xi-\beta\eta]}}}{e^{2\pi\operatorname{tg}\theta}-1}d\theta=0 \quad \cdots\cdots 1.4$$

$$(\alpha-\beta)\xi-(\alpha+\beta-2\alpha\beta)\eta=0 \quad \cdots\cdots 1.5$$

$$(1-2\beta)\xi^2-2\beta^2\xi\eta-(1-2\beta+2\beta^2)\eta^2-(1-\beta)^2=0 \quad \cdots\cdots 1.6$$

在四维开实域

$$U=\left\{(\alpha,\beta,\xi,\eta)\ \middle|\ \frac{(1-2\beta)(\xi+\eta)}{(1-2\beta)\xi-\eta}>0,\ \frac{(1-2\beta)\xi-\eta}{1-\beta}>0,\right.$$

$$\alpha\beta\xi\eta\neq0,\ \frac{(1-\beta)\eta}{(1-2\beta)\xi-\eta}\neq0,\ \frac{(1-2\beta)(\xi+\eta)\eta-\beta+1}{1-\beta}\neq0,$$

$$\left.\frac{(1-2\beta)\xi\eta-\eta^2+\beta-1}{1-\beta}\neq0,\ \frac{(1-2\beta)[(1-2\beta)\xi^2-2\beta\xi\eta-\eta^2]-(1-\beta)^2}{(1-\beta)^2}\neq0\right\}$$

上有实数解 $Z=(\alpha,\beta,\xi,\eta)$，且其Z的集合为$M_0$

。

事实上，利用文献[1]中的引理2、引理3

、引理9以及引理10与引理12，那末我们可进一步将四维开实域U写为

$$U=\{(\alpha,\beta,\xi,\eta)\mid \alpha\beta\eta\neq 0,\ \xi>0,\ \alpha-1\neq 0,\ 2\alpha-1\neq 0,$$
$$\beta-1\neq 0,\ 2\beta-1\neq 0,\ \xi+\eta\neq 0,\ \xi-\eta\neq 0,\ (1-2\beta)\xi-\beta\eta\neq 0,$$
$$(1-2\beta)\xi^2-2\beta\xi\eta-(1-2\beta+2\beta^2)\eta^2\neq 0,\ (1-2\beta)(\xi+\eta)\eta-\beta+1\neq 0,$$
$$(1-2\beta)\xi\eta-\eta^2+\beta-1\neq 0,\ (1-2\beta)\left[(1-2\beta)\xi^2-2\beta\xi\eta-\eta^2\right]-(1-\beta)^2\neq 0,$$
$$\frac{(1-2\beta)(\xi+\eta)}{(1-2\beta)\xi-\eta}>0,\ \frac{(1-2\beta)\xi-\eta}{1-\beta}>0\}\quad\cdots\cdots 1.7$$

现在我们从九维欧氏空间E^9中任取一八维欧氏空间且記其为E^8。E^8中任一点的位置由数組

$$(\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\xi},\bar{\eta},P_1,P_2,P_3,P_4)$$

所确定。

如果定義一个从四维实域V到E^8的映射T

$$\bar{\alpha}=\alpha,\quad \bar{\beta}=\beta,\quad \bar{\xi}=\xi,\quad \bar{\eta}=\eta,\quad P_1=\frac{1-3\alpha}{2(1-\alpha)},$$
$$P_2=\frac{1}{\xi-\eta},\quad P_3=\frac{1-3\beta}{2(1-\beta)},\quad P_4=\frac{1}{\xi+\eta}\quad\cdots\cdots 1.8$$

而V的定義是

$$V=\{(\alpha,\beta,\xi,\eta)\mid 1-\alpha\neq 0,\ 1-\beta\neq 0,\ \xi-\eta\neq 0,\ \xi+\eta\neq 0\}$$

从V的定義可知映射T是有意義的。

由於四维开实域U与V有如次关係

$$U \subset V$$

所以映射T在事实上将四维开实域U映射到八维歐氏空间中的一个四维开流形上且記其为K。

我们在这里要郑重指出的是超定超越方程組（1.1~1.6）中的α, β, ξ, η四个变元是在四维歐氏空间E_1^4中取值的，停管在以前我们并没有特別强調指出这一点。由於在文献[ ]中我们已经郑重指出过我们所进行的一切研究与討論都是在九维歐氏空间E^9中論証的，所以在我们的研究过程中所引进及談到的各种维数的空间都是歐氏空间。

現在我们转而来研究八维空间中的四维流形K。从1.8式中消去α, β, ξ, η后我们立刻得到流形K的一个参数表示式

$\overline{\alpha}=\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}=\overline{\beta}$, $\overline{\xi}=\overline{\xi}$, $\overline{\eta}=\overline{\eta}$,

$P_1=\frac{1-3\overline{\alpha}}{2(1-\overline{\alpha})}$, $P_2=\frac{1}{\overline{\xi}-\overline{\eta}}$, $P_3=\frac{1-3\overline{\beta}}{2(1-\overline{\beta})}$, $P_4=\frac{1}{\overline{\xi}+\overline{\eta}}$ ……1.9

我们有如下的

定理1.2 映射T是拓扑映射，且有$U\cong K$。

証 我们将分为若干段落来証明。

$1°$ 四维流形U及四维流形K都是拔量空间。

由於$U\subset V\subset E_1^4$及$K\subset E^8$，故知U及K依次是E_1^4及E^8的子空间。由拓扑学中关於拔量空间的定理可知，拔量空间的子空间仍是拔量空间。此外，欧氏空间显然是拔量空间。由此得知四维流形U与四维流形K都是拔量空间。

$2°$ $U\to K$是在T的作用下从E_1^4中U到E^8中K的連续的、一一的满映射。

首先，由映射T的定义可知它的每一个表达式都是关於α,β,ξ,η中某一个的一元連续函数或者是关於ξ,η的二元連续函数，因此映射

T是连续的。

其次，若有一元素 $u_0=(\alpha_0,\beta_0,\xi_0,\eta_0)$ 且有 $u_0\in U$，那末在T的作用下恒有一像元素

$$k_0=(\overline{\alpha}_0,\overline{\beta}_0,\overline{\xi}_0,\overline{\eta}_0,P_{10},P_{20},P_{30},P_{40})$$

此处

$$\overline{\alpha}_0=\alpha_0,\quad \overline{\beta}_0=\beta_0,\quad \overline{\xi}_0=\xi_0,\quad \overline{\eta}_0=\eta_0,$$

$$P_{10}=\frac{1-3\alpha_0}{2(1-\alpha_0)},\quad P_{20}=\frac{1}{\xi_0-\eta_0},\quad P_{30}=\frac{1-3\beta_0}{2(1-\beta_0)},\quad P_{40}=\frac{1}{\xi_0+\eta_0}$$

且由K之定义得知必有 $k_0\in K$。另外，由映射T之单一性得知这样的 k_0 有而且祇有一个。这就证明了2°的结论。

3° T^{-1} 存在且连续，$K\to U$ 是在 T^{-1} 作用下的从 E^8 中K到 E_1^4 中U的连续的、一一的满映射。

首先，若 k_0 是流形K中的任意一个元素；那末经过四次投影后我们能够得到元素 k_0 在 E^8 中的坐标平面

$$P_1=0,\quad P_2=0,\quad P_3=0,\quad P_4=0,$$

上的投影 $\overline{k_0}$，且有 $\overline{k_0}=(\overline{\alpha}_0,\overline{\beta}_0,\overline{\xi}_0,\overline{\eta}_0,0,0,0,0)$

。如果用$\overline{K}$来記由选择的$\overline{\text{点}}$所组成的集合，那末由映射T得知元素$\overline{\text{点}}$的前四个坐标具有与变元α,β,ξ,η相同的性質。由此并根据1.7式我们便立刻得到集合$\overline{K}$的定義應是

$$\overline{K}=\{(\bar\alpha,\bar\beta,\bar\xi,\bar\eta,0,0,0,0)\mid \bar\alpha\bar\beta\bar\eta\neq 0,\ \bar\xi>0,$$

$$\bar\alpha-1\neq 0,\ 2\bar\alpha-1\neq 0,\ \bar\beta-1\neq 0,\ 2\bar\beta-1\neq 0,\ \bar\xi+\bar\eta\neq 0,$$

$$\bar\xi-\bar\eta\neq 0,\ (1-2\bar\beta)\bar\xi-\bar\beta\bar\eta\neq 0,\ (1-2\bar\beta)\bar\xi^2-2\bar\beta^2\bar\xi\bar\eta-(1-2\bar\beta+2\bar\beta^2)\bar\eta^2\neq 0,$$

$$(1-2\bar\beta)(\bar\xi+\bar\eta)\bar\eta-\bar\beta+1\neq 0,\ (1-2\bar\beta)\bar\xi\bar\eta-\bar\eta^2+\bar\beta-1\neq 0,$$

$$(1-2\bar\beta)\left[(1-2\bar\beta)\bar\xi^2-2\bar\beta\bar\xi\bar\eta-\bar\eta^2\right]-(1-\bar\beta)^2\neq 0,\ \frac{(1-2\bar\beta)(\bar\xi+\bar\eta)}{(1-2\bar\beta)\bar\xi-\bar\eta}>0,$$

$$\frac{(1-2\bar\beta)\bar\xi-\bar\eta}{1-\bar\beta}>0\ \} \quad \cdots\cdots 1.10$$

由投影定理得知，若有一个元素$\text{点}\in K$那末必有它的投影元素$\overline{\text{点}}$与其对應。而且选择的$\overline{\text{点}}$对点来說有而且祗有一个。另外，由集合$\overline{K}$的引进与定義可知必有$\overline{\text{点}}\in\overline{K}$。

将四维流形U的定義1.7式与集合$\overline{K}$的定義1.10式相比較，我们立刻得知流形U与流形$\overline{K}$是同構的。

因此，若有一元素$\bar{k}_0 \in \bar{K}$ 那末根据上述的流形U与流形$\bar{K}$的同胚性获知，必有一元素

$$u_0=(\alpha_0, \beta_0, \xi_0, \eta_0) \quad 且\ u_0 \in U$$

与其对应，这里

$$\alpha_0=\bar{\alpha}_0 \quad , \quad \beta_0=\bar{\beta}_0 \quad , \quad \xi_0=\bar{\xi}_0 \quad , \quad \eta_0=\bar{\eta}_0$$

而且选择的u_0是唯一的。

综上所述，若有一元素$k_0 \in K$ 则在U中有而且祇有一个元素u_0与它对应。由于元素k_0可以是在K中任选的，所以对于K中任意一个元素都可以在U中找到它的唯一的像。由此我们得知映射T的逆T^{-1}的确存在。

另外，上述的两个映射$K \to \bar{K}$及$\bar{K} \to U$都是连续的。若定义投影映射及恒同映射φ及ψ依次是$\varphi: K \to \bar{K}$及$\psi: \bar{K} \to U$，那末我们显然有

$$T^{-1}=\psi \circ \varphi$$

故知T^{-1}是一个复合映射。由于φ及ψ都是连续

的，故由复合映射的有关性質得知T^{-1}也是連續的。

现在逆映射T^{-1}不但存在及連續，而且根据上面的証明过程还可得知逆映射$T^{-1}: K \to U$是一一的满映射。这就証明了3°的结论。

由1°、2°、3°以及拓扑学中关於拓扑映射的定義可知：映射T確实是一个拓扑映射，而且四维流形U与四维流形K是同胚的或記为$U \cong K$。这就証明了定理1.2。

由於超定超越方程組（1.1～1.6）的几何意義是：在Riemann猜測不真的假定下，它確定了一个在四维流形U上的非空子集合M_0。因此，由於$M_0 \subset U$故映射T将M_0映射到K的一个子流形上且記其为S_0。由於M_0是非空的，因此S_0也是非空的。

在拓扑映射T的作用下，超定超越方程組（1.1～1.6）变为

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{ e^{\frac{(1-\bar\beta)\theta}{2[(1-2\bar\beta)\bar\xi-\bar\beta\bar\eta]}}\sin\frac{(1-2\bar\beta)(\bar\xi+\bar\eta)\theta-(1-\bar\beta)\log\cos\theta}{2[(1-2\bar\beta)\bar\xi-\bar\beta\bar\eta]}+\right.$$

$$\left.+\,e^{-\frac{(1-\bar\beta)\theta}{2[(1-2\bar\beta)\bar\xi-\bar\beta\bar\eta]}}\sin\frac{(1-2\bar\beta)(\bar\xi+\bar\eta)\theta+(1-\bar\beta)\log\cos\theta}{2[(1-2\bar\beta)\bar\xi-\bar\beta\bar\eta]}\right\}\cdot$$

$$\cdot\frac{(\cos\theta)^{-\frac{3(1-2\bar\beta)\bar\xi-(1+2\bar\beta)\bar\eta}{2[(1-2\bar\beta)\bar\xi-\bar\beta\bar\eta]}}}{e^{2\pi\,tg\theta}-1}\,d\theta-P_1=0 \qquad \text{......1.11}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{ e^{\frac{(1-\bar\beta)\theta}{2[(1-2\bar\beta)\bar\xi-\bar\beta\bar\eta]}}\cos\frac{(1-2\bar\beta)(\bar\xi+\bar\eta)\theta-(1-\bar\beta)\log\cos\theta}{2[(1-2\bar\beta)\bar\xi-\bar\beta\bar\eta]}-\right.$$

$$\left.-\,e^{-\frac{(1-\bar\beta)\theta}{2[(1-2\bar\beta)\bar\xi-\bar\beta\bar\eta]}}\cos\frac{(1-2\bar\beta)(\bar\xi+\bar\eta)\theta+(1-\bar\beta)\log\cos\theta}{2[(1-2\bar\beta)\bar\xi-\bar\beta\bar\eta]}\right\}\cdot$$

$$\cdot\frac{(\cos\theta)^{-\frac{3(1-2\bar\beta)\bar\xi-(1+2\bar\beta)\bar\eta}{2[(1-2\bar\beta)\bar\xi-\bar\beta\bar\eta]}}}{e^{2\pi\,tg\theta}-1}\,d\theta-P_2=0 \qquad \text{......1.12}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{ e^{\frac{(1-\bar\beta)\theta}{2[(1-2\bar\beta)\bar\xi-\bar\beta\bar\eta]}}\sin\frac{[(1-2\bar\beta)\bar\xi-\bar\eta]\theta-(1-\bar\beta)\log\cos\theta}{2[(1-2\bar\beta)\bar\xi-\bar\beta\bar\eta]}+\right.$$

$$\left.+\,e^{-\frac{(1-\bar\beta)\theta}{2[(1-2\bar\beta)\bar\xi-\bar\beta\bar\eta]}}\sin\frac{[(1-2\bar\beta)\bar\xi-\bar\eta]\theta+(1-\bar\beta)\log\cos\theta}{2[(1-2\bar\beta)\bar\xi-\bar\beta\bar\eta]}\right\}\cdot$$

$$\cdot\frac{(\cos\theta)^{-\frac{3(1-2\bar\beta)\bar\xi+(1-4\bar\beta)\bar\eta}{2[(1-2\bar\beta)\bar\xi-\bar\beta\bar\eta]}}}{e^{2\pi\,tg\theta}-1}\,d\theta-P_3=0 \qquad \text{......1.13}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{ e^{\frac{(1-\bar\beta)\theta}{2[(1-2\bar\beta)\bar\xi-\bar\beta\bar\eta]}}\cos\frac{[(1-2\bar\beta)\bar\xi-\bar\eta]\theta-(1-\bar\beta)\log\cos\theta}{2[(1-2\bar\beta)\bar\xi-\bar\beta\bar\eta]}-\right.$$

$$\left.-\,e^{-\frac{(1-\bar\beta)\theta}{2[(1-2\bar\beta)\bar\xi-\bar\beta\bar\eta]}}\cos\frac{[(1-2\bar\beta)\bar\xi-\bar\eta]\theta+(1-\bar\beta)\log\cos\theta}{2[(1-2\bar\beta)\bar\xi-\bar\beta\bar\eta]}\right\}\cdot$$

$$\cdot\frac{\left(\cos\theta\right)^{-\frac{3(1-2\bar{\beta})\bar{\xi}+(1-4\bar{\beta})\bar{\eta}}{2[(1-2\bar{\beta})\bar{\xi}-\bar{\beta}\bar{\eta}]}}}{e^{2\pi\, tg\theta}-1}d\theta-p_4=0 \quad \cdots\cdots 1.14$$

$$(\bar{\alpha}-\bar{\beta})\bar{\xi}-(\bar{\alpha}+\bar{\beta}-2\bar{\alpha}\bar{\beta})\bar{\eta}=0 \quad \cdots\cdots 1.15$$

$$(1-2\bar{\beta})\bar{\xi}^2-2\bar{\beta}^2\bar{\xi}\bar{\eta}-(1-2\bar{\beta}+2\bar{\beta}^2)\bar{\eta}^2-(1-\bar{\beta})^2=0 \quad \cdots\cdots 1.16$$

而且，若 $k=(\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\xi},\bar{\eta},p_1,p_2,p_3,p_4)$ 是 S_0 中的一个元素的話，由於有 $S_0\subset K$ 故必有 $k\in K$。现在将映射 T 的表达式 1.8 式中的 α,β,ξ,η 消去，我们立刻得到四维流形 K 的一个隐式

$$(3-2p_1)\bar{\alpha}+2p_1-1=0 \quad \cdots\cdots 1.17$$

$$p_2\bar{\xi}-p_2\bar{\eta}-1=0 \quad \cdots\cdots 1.18$$

$$(3-2p_3)\bar{\beta}+2p_3-1=0 \quad \cdots\cdots 1.19$$

$$p_4\bar{\xi}+p_4\bar{\eta}-1=0 \quad \cdots\cdots 1.20$$

在事实上我们有如下的

定理 1.3 若 $m_0=(\alpha_0,\beta_0,\xi_0,\eta_0)$ 且 $m_0\in M_0$ 是超定超越方程组（1.1~1.6）在四维流形 U 上的一个解，同時 $s_0=(\bar{\alpha}_0,\bar{\beta}_0,\bar{\xi}_0,\bar{\eta}_0,p_{10},p_{20},p_{30},p_{40})$ 且 $s_0\in S_0$ 是超定超越方程组（1.11~1.20）的一个解而且 $\bar{s}_0\in\bar{K}$

。此処有

$$\bar{s}_0 = (\bar{\alpha}_0, \bar{\beta}_0, \bar{\xi}_0, \bar{\eta}_0, 0, 0, 0, 0)$$

那末，在上述意義下超定超越方程組（1.1~1.6）與超定超越方程組（1.11~1.20）是等價的。

証　今設 $m_0 = (\alpha_0, \beta_0, \xi_0, \eta_0)$ 且 $m_0 \in M_0$ 是超定超越方程組（1.1~1.6）的一个解。故據 M_0 中元素 m_0 在拓扑映射 T 作用下於 K 中的像 k，若記

$$k = (\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\xi}, \bar{\eta}, p_1, p_2, p_3, p_4)$$

那末，由於有 $k \in S_0$ 故知它的諸坐標分量必須滿足超定超越方程組（1.11~1.20）。利用拓扑映射 T 的表示式 1.8 式，我們立刻可以得知解 k 可用解 m_0 表出。且有

$$\bar{\alpha} = \alpha_0, \quad \bar{\beta} = \beta_0, \quad \bar{\xi} = \xi_0, \quad \bar{\eta} = \eta_0,$$

$$p_1 = \frac{1-3\alpha_0}{2(1-\alpha_0)}, \quad p_2 = \frac{1}{\xi_0 - \eta_0}, \quad p_3 = \frac{1-3\beta_0}{2(1-\beta_0)},$$

$$p_4 = \frac{1}{\xi_0 + \eta_0}$$

所以我們可取 $s_0 = k$ 。由 $\bar{K}$ 之定義知有 $\bar{s}_0 \in \bar{K}$。

反之，若 $k \in S_0$ 是方程組（1.11~1.20）的一

个解且 $\bar{k}\in\bar{K}$。由於 $k\in S_0$ 以及 $S_0\subset K$，故必有 $k\in K$。今设為 K 中元素 k 在拓扑映射 T 的逆映射 T^{-1} 的作用下在 U 中的像 u，且记为

$$u=(\alpha,\beta,\zeta,\eta),\quad u\in M_0$$

若我们记 $k=(\bar{\alpha}_0,\bar{\beta}_0,\bar{\zeta}_0,\bar{\eta}_0,P_{10},P_{20},P_{30},P_{40})$，那末由拓扑映射 T 的表示式 1.8 式可知必有

$$\alpha=\bar{\alpha}_0,\quad \beta=\bar{\beta}_0,\quad \zeta=\bar{\zeta}_0,\quad \eta=\bar{\eta}_0$$

此外，因 $u\in M_0$ 故它的四个坐标分量必须满足超定超越方程组（1.1~1.6）。这就是说解 u 可用解 k 表出，所以我们可取 $m_0=u$ 而且由於 $M_0\subset U$ 故必有 $m_0\in U$。

综上所述，方程组（1.1~1.6）与方程组（1.11~1.20）是完全等价的。这就证明了定理 1.3。

二、超定代数方程组

有了定理1.3我们转而来研究超定超越方程组(1.11~1.20)。这组方程式共有八个未知数$\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, P_1, P_2, P_3, P_4以及十个方程式，其中包括四个超越方程式与六个代数方程式。下面我们来研究六个代数方程式(1.15~1.20)。

从几何上来看，代数方程组(1.15~1.20)确定了一个在八维欧氏空间E^8中的流形，并且我们用Q来记这个流形。现在，若考虑超定超越方程组(1.11~1.20)的解的集合S_0；现设k是S_0中的任一元素，则有

$$k=(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\xi}, \bar{\eta}, P_1, P_2, P_3, P_4)$$

那末元素k的诸坐标分量显然满足代数方程组(1.15~1.20)。由此得知集合S_0中的元素必是集合Q中的元素，故定有

$$S_0 \subset Q \qquad \cdots\cdots 2.1$$

换言之，集合Q是集合S_0的一个扩集。

以后我们将能够看到，2.1式对于Riemann猜测的证明来说是极为重要的。为了研究流形Q的具体代数结构并且进一步去确定流形Q的确切维数，我们必须对代数方程组(1.15~1.20)作进一步的研究。

极为自然地，我们不妨可将1.17、1.18、1.19、1.20四式中的P_1, P_2, P_3, P_4看为实参数而将$\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\xi}, \bar{\eta}$看作为未知数。这样，方程组(1.17~1.20)是一组关于$\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\xi}, \bar{\eta}$的线性方程组而1.15及1.16两式显然是两个未知数$\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\xi}, \bar{\eta}$应该满足的非线性关係。因此，代数方程组(1.15~1.20)是一组线性内涵与非线性内涵已经分离开的关于$\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\xi}, \bar{\eta}$的超定非线性代数方程。我们在文献[ ]及文献[ ]中已经处理过一些超定多元非线性代数方程组了。

仅仅是为了书写上的方便起见，我们在研究方程组(1.15~1.20)时暂将$\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\xi}, \bar{\eta}$简记为$\alpha, \beta, \xi, \eta$，这并不会使我们的概念发生混淆。

因此，我们可将方程组（1.15～1.20）改写为

$$(3-2p_1)\alpha=1-2p_1 \quad \cdots\cdots 2.2$$

$$(3-2p_3)\beta=1-2p_3 \quad \cdots\cdots 2.3$$

$$p_2\xi-p_2\eta=1 \quad \cdots\cdots 2.4$$

$$p_4\xi+p_4\eta=1 \quad \cdots\cdots 2.5$$

$$(\alpha-\beta)\xi-(\alpha+\beta-2\alpha\beta)\eta=0 \quad \cdots\cdots 2.6$$

$$(1-2\beta)\xi^2-2\beta^2\xi\eta-(1-2\beta+2\beta^2)\eta^2-(1-\beta)^2=0 \quad \cdots\cdots 2.7$$

如果 $z=(\alpha,\beta,\xi,\eta)$ 是线性方程组（2.2～2.5）的一个解，$\bar{z}=(\alpha,\beta,\xi,\eta)$ 是代数方程组（2.2～2.7）的一个解；那末一般说来，解 z 不一定就是解 $\bar{z}$ 但是解 $\bar{z}$ 肯定是一个解 z。换言之，解 $\bar{z}$ 能而且只能从解 z 中找到。

在事实上我们有如下的若干引理

引理 1　关於 α,β,ξ,η 的线性方程组（2.2～2.5）有解的充分而必要条件是它的係数行列式不等於零。

証　线性方程组（2.2～2.5）它的係数行列式是

$$D=\begin{vmatrix} 3-2p_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3-2p_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & -p_2 \\ 0 & 0 & p_4 & p_4 \end{vmatrix}$$

用行列式計算中的Laplace展开定理极易得到

$$D=2p_2p_4(3-2p_1)(3-2p_3) \qquad \cdots\cdots 2.8$$

充分性。

若$D\neq 0$，那末由线性方程组理论中的Cramer法则立刻可以得出线性方程组(2.2~2.5)的唯一的一组解(α,β,ξ,η)来。

必要性。

必要性的証明稍为要复杂一些。我们将分为若干个階段来証明

1° 若$(\sigma,t)\in D$且$D=\{(\sigma,t)\mid 0<\sigma<1,\ \sigma-\frac{1}{2}\neq 0,\ t>0,\ \sigma^2+t^2-\sigma>0\}$，那末恒有$0<\alpha<\frac{1}{2}$，$0<\beta<\frac{1}{2}$。

証 由文献[ ]得知有

$$\alpha=\frac{\sigma^2+t^2-\sigma}{2\sigma^2+2t^2-3\sigma+1} \qquad \beta=\frac{\sigma^2+t^2-\sigma}{2\sigma^2+2t^2-\sigma}$$

由於当 $(\sigma,t)\in D$ 時恒有

$$\sigma^2+t^2-\sigma>0,\quad 2\sigma^2+2t^2-3\sigma+1=2(\sigma^2+t^2-\sigma)-\sigma+1>0,$$

$$2\sigma^2+2t^2-\sigma=2(\sigma^2+t^2-\sigma)+\sigma>0.$$

由此得知必有 $\alpha>0$ 及 $\beta>0$。

另一方面，我们显然有

$$\alpha-\frac{1}{2}=\frac{\sigma-1}{2(2\sigma^2+2t^2-3\sigma+1)}<0,\quad \beta-\frac{1}{2}=\frac{-\sigma}{2(2\sigma^2+2t^2-\sigma)}<0$$

故知必有 $\alpha<\frac{1}{2}$ 及 $\beta<\frac{1}{2}$。这就证明了 1° 的结论。

2° 若 $(\sigma,t)\in D$ 且 $D=\{(\sigma,t)\mid 0<\sigma<1,\ \sigma-\frac{1}{2}\neq 0,$ $t>0,\ \sigma^2+t^2-\sigma>0\}$，那末恒有 $0<\xi+\eta<+\infty$, $0<\xi-\eta<+\infty$。

证 由文献[ ]得知有

$$\xi=\frac{(\sigma-1)^2+\sigma^2+2t^2}{2t},\quad \eta=\frac{\sigma-\frac{1}{2}}{t}$$

由此我们立刻得到

$$\xi+\eta=\frac{\sigma^2+t^2}{t},\quad \xi-\eta=\frac{(\sigma-1)^2+t^2}{t}$$

故知必有 $0<\xi+\eta<+\infty$ 及 $0<\xi-\eta<+\infty$。这就证明了 2° 的结论。

现在我们转而来证明 $D\neq 0$ 的必要性。我们

有下述的结论

3° 若 $D=0$ 那末关于 $\alpha, \beta, \gamma, \eta$ 的线性方程组 (2.2~2.5) 无解。

证 今设 $D=0$ 并且分数种情况进行研究

$P_2=0$。

此时由结论 2° 得知 2.4 式恒不能成立，故线性方程组不可能有解。

$P_4=0$。

此时由结论 2° 得知 2.5 式恒不能成立，故线性方程组不可能有解。

$3-2P_1=0$。

此时由结论 1° 得知 2.2 式恒不能成立，故线性方程组不可能有解。

$3-2P_3=0$。

此时由结论 1° 得知 2.3 式恒不能成立，故线性方程组不可能有解。

综上所述，$D=0$ 时线性方程组 (2.2~2.5) 不

可能有解，这就证明了结论 3°

由结论 3° 得知，若关于 α, β, ξ, η 的线性方程组（2.2~2.5）有解的话它的必要条件是 $D \neq 0$。这就证明了必要性。

这样，我们就证明了引理 1。

我们在这里要指出的是，尽管为了书写上的方便起见，我们在方程组（1.15~1.20）中依次用 α, β, ξ, η 去代替 $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\xi}, \bar{\eta}$ 而得到了方程组（2.2~2.7）。但是，从拓扑映射 T 的表示式 1.8 式可明显地看出这种替换是合法的。由此得知，我们的各种结论并不会受到这种替换所带来的影响。

引理 2　关于 $\alpha, \beta, \xi, \eta, P_1, P_2, P_3, P_4$ 的代数方程组（2.2~2.7）有解的必要条件是 P_1, P_2, P_3, P_4 满足下列两个非线性关系

$$(P_1-P_3)(P_2+P_4)+(1-P_1-P_3)(P_2-P_4)=0 \quad \cdots\cdots 2.9$$

$$4P_2^2P_4^2+P_2^2(2P_3-1)^2-4P_2P_4=0 \quad \cdots\cdots 2.10$$

证　由假定知代数方程组（2.2～2.7）有解。今将α, β, ξ, η看作为未知数而将p_1, p_2, p_3, p_4看作为实参数。这样，方程组（2.2～2.7）显然可以看作为一组线性内涵与非线性内涵已经分离开来了的超定非线性代数方程。

根据引理1，我们得知关于α, β, ξ, η的线性方程组（2.2～2.5）有解的充分而必要条件是它的系数行列式D不等于零。今设$D \neq 0$故可用线性方程组理论中的Cramer法则解得其解为

$$Z = (\alpha, \beta, \xi, \eta)$$

这里

$$\alpha = \frac{2p_1 - 1}{2p_1 - 3}, \quad \beta = \frac{2p_3 - 1}{2p_3 - 3}, \quad \xi = \frac{p_2 + p_4}{2p_2 p_4},$$

$$\eta = \frac{p_2 - p_4}{2p_2 p_4} \qquad \cdots\cdots 2.11$$

但是，这样得到的解Z一般说来并不恰好满足关于α, β, ξ, η的两个非线性关系式2.6式及2.7式。如果$\bar{Z} = (\alpha, \beta, \xi, \eta)$是代数方程组（2.2～2.7）的解，那末我们得到的解Z未必恰好也是解$\bar{Z}$

。然而，由於代数方程组（2.2～2.7）的解Ξ一定也是线性方程组（2.2～2.5）的解；所以，解Ξ必然可从解Z中找到。

为了寻找解Ξ，我们可去寻找又满足α，β，γ，η的两个非线性关係式2.6式及2.7式的线性方程组（2.2～2.5）的解Z。为此，可将解Z代入到2.6式及2.7式两个式子中去。将2.11式依次代入到2.6式及2.7式中后，经过一些整理我们立刻得到P_1、P_2、P_3、P_4间的两个关係式

$$(P_1-P_3)(P_2+P_4)+(1-P_1-P_3)(P_2-P_4)=0$$

$$4P_2^2P_4^2+P_2^2(2P_3-1)^2-4P_2P_4=0$$

这正是2.9式及2.10式，这就证明了引理2。

从引理2得知，四个实变数P_1、P_2、P_3、P_4中只有两个是独立的。事实上，2.9式还可进一步简化为

$$2P_1P_4-2P_2P_3+P_2-P_4=0 \quad \cdots\cdots 2.12$$

如果我们将2.10式及2.12式中的P_2与P_4看作为变数

而将 P_1 与 P_3 看作为实参数，那末这两个式子在几何上依次代表一条四次曲线和一条直线。在传统上，三次及三次以上的曲线与曲面的分类理论以及多条曲线与多个曲面确定它们有无交点的理论均属於代数几何的范畴。由於不使我们离题太远，我们不打算在这里对2.10式所代表的四次代数曲线作具体的深入的研究。

一般说来，一条四次代数曲线与一条直线在实平面上最多可以有四个交点。事实上，2.10式所代表的是一条退化的四次曲线。它包括一条直线

$$P_2 = 0 \qquad \cdots\cdots 2.13$$

与一条三次曲线

$$4P_2P_4^2 + (2P_3-1)^2P_2 - 4P_4 = 0 \qquad \cdots\cdots 2.14$$

显然，三次曲线2.14经过坐标原点。

因此，退化四次曲线2.10式与直线2.12式有一个二重交点 $(0,0)$。如果它们之间还有交点的话

，那末至多只能有两个交点。而且，我们称此点为退化四次曲线2.10式与直线2.12式的"无聊交点"。为了寻找它们的非无聊交点，我们in事实上有如下的

引理3　退化四次曲线2.10式与直线2.12式有非无聊交点的充分而必要条件是实参数P_1与P_3满足高次不等式

$$(2P_1-1)(2P_3-1)(4P_1P_3-2P_1-2P_3-3)<0 \quad \cdots\cdots 2.15$$

且有

$$P_2=\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(2P_1-1)(4P_1P_3-2P_1-2P_3-3)}{2P_3-1}} \quad \cdots\cdots 2.16$$

$$P_4=\pm\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{(2P_3-1)(4P_1P_3-2P_1-2P_3-3)}{2P_1-1}} \quad \cdots\cdots 2.17$$

证　先将2.12式改写为

$$(2P_3-1)P_2-(2P_1-1)P_4=0 \quad \cdots\cdots 2.18$$

由引理1中的γ得知恒有$0<\alpha<\frac{1}{2}$及$0<\beta<\frac{1}{2}$，由此及2.11式我们立刻得知定有

$$2P_1-1\neq 0,\quad 2P_3-1\neq 0$$

因此我们可将2.18式改写为

$$P_4=\frac{2P_3-1}{2P_1-1}P_2 \quad \cdots\cdots 2.19$$

这是一条过原点的直线。

如果将直线方程2.19式与退化四次曲线的一个分支直线方程2.13式相联立，那末我们立刻得知这两条直线的唯一交点就是原点。

若将直线方程2.19式与退化四次曲线的另一个分支三次曲线方程2.14式相联立，那末我们可用2.19式来消去未知数P_4。事实上，将2.19式代入到2.14式中后并注意到上述的结果

$$(2P_1-1)(2P_3-1)\neq 0$$

那末，我们立刻得到一个关於P_2的退化的三次方程式

$$4(2P_3-1)P_2^3+(2P_1-1)(4P_1P_3-2P_1-2P_3-3)P_2=0 \quad \cdots\cdots 2.20$$

从三次方程2.20式得知$P_2=0$是它的一个根，由此及2.19式我们立刻得知原点是直线2.19式与三次曲线2.14式的一个交点。如果三次方程2.20式有三个实根的话，那末它的充分而必要条件是退

化的二次方程

$$4(2P_3-1)P_2^2+(2P_1-1)(4P_1P_3-2P_1-2P_3-3)=0 \quad \cdots\cdots 2.21$$

要有实根。而且，我们可以断言

$$4P_1P_3-2P_1-2P_3-3 \neq 0 \quad \cdots\cdots 2.22$$

因为我们有如下的

1° 若 $(\alpha,\beta)\in F$ 且 $F=\{(\alpha,\beta)\mid 0<\alpha<\frac{1}{2},0<\beta<\frac{1}{2},\alpha-\beta\neq 0\}$

那末恒有 $4P_1P_3-2P_1-2P_3-3<0$。

证 定义一个两元多项式

$$g(P_1,P_3)=4P_1P_3-2P_1-2P_3-3 \quad \cdots\cdots 2.23$$

显然，这是一个缺项的两元二次多项式。由拓扑映射T的定义1.8式得知有

$$P_1=\frac{1-3\alpha}{2(1-\alpha)}, \quad P_3=\frac{1-3\beta}{2(1-\beta)}$$

将这两个关係式代入到2.23式中后我们就能得到复合函数 $g[P_1(\alpha,\beta),P_3(\alpha,\beta)]$ 的表达式应是

$$G(\alpha,\beta)=\frac{4(\alpha+\beta-1)}{(1-\alpha)(1-\beta)} \quad \cdots\cdots 2.24$$

由2.24式得知若 $(\alpha,\beta)\in F$ 则恒有 $G(\alpha,\beta)<0$，故知有

$$g(P_1,P_3)<0$$

。另一方面，由引理1中的1°知道，若$(\sigma,t)\in D$且$D=\{(\sigma,t)\mid 0<\sigma<1,\ \sigma-\frac{1}{2}\neq 0,\ t>0,\ \sigma^2+t^2-\sigma>0\}$那末恒有$(\alpha,\beta)\in F$。这就证明了上述的结论1°。

由1°显然可推得2.22式是成立的。现在我们转而来看2.21式，显然P_2有实根的充分而必要条件是它的判别式

$$\Delta=-16(2P_1-1)(2P_3-1)(4P_1P_3-2P_1-2P_3-3) \quad \cdots\cdots 2.25$$

非负。现在又因为判别式Δ的三个因子中无一能为零者，故知必有

$$(2P_1-1)(2P_3-1)(4P_1P_3-2P_1-2P_3-3)<0$$

这正是2.15式，引理3的前半部分就这样证完了。

若2.15式成立，那末由2.21式我们立刻得到P_2的两个实根是

$$P_2=\pm\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{(2P_1-1)(4P_1P_3-2P_1-2P_3-3)}{2P_3-1}}$$

由此及2.19式我们立刻得到

$$p_4 = \pm\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{(2p_3-1)(4p_1p_3-2p_1-2p_3-3)}{2p_1-1}}$$

这正是2.16式及2.17式，引理3证完。

引理4　若$(\alpha,\beta)\in F$　且$F=\{(\alpha,\beta)\mid 0<\alpha<\frac{1}{2},\ 0<\beta<\frac{1}{2},\ \alpha-\beta\neq 0\}$　那末恒有　$2p_1-1<0$，$2p_3-1<0$　而且引理3中的2.15式恒成立。

证　由拓扑映射T的定义可知有

$$p_1=\frac{1-3\alpha}{2(1-\alpha)},\qquad p_3=\frac{1-3\beta}{2(1-\beta)}$$

故得

$$2p_1-1=-\frac{2\alpha}{1-\alpha},\qquad 2p_3-1=-\frac{2\beta}{1-\beta}$$

由於$(\alpha,\beta)\in F$　立得　$2p_1-1<0$　及　$2p_3-1<0$　。

此外，根据引理3中$1°$的结论以及上面的推断我们立即得知引理3中的2.15式一定成立。引理4证完。

现在我们在事实上可有如下的

定理2.1　如果将代数方程组(2.15~2.20)的解看作为八维欧氏空间E^8中的一个流形且用Q来表示这个解，那末流形Q有如下的参数表达式

$\bar{\alpha}=\frac{\sqrt{m(4-n)}}{\sqrt{m(4-n)}+2}$, $\bar{\beta}=\frac{\sqrt{4-n}}{\sqrt{4-n}+2\sqrt{m}}$, $\bar{\zeta}=\frac{m+1}{\sqrt{mn}}$,

$\bar{\eta}=\frac{m-1}{\sqrt{mn}}$, $P_1=\frac{1}{2}[1-\sqrt{m(4-n)}]$, $P_2=\frac{1}{2}\sqrt{mn}$,

$P_3=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{\frac{4-n}{m}}\right)$, $P_4=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{m}}$

式中 $(m,n)\in R$ 且 $R=\{(m,n)\mid m>0, m-1\neq 0,$
$0<n<4, mn-4m+4>0, 4m+n-4>0\}$

証 为了証明本定理，我们先来証明如下的若干引理。我们有

引理5 若 P_2 与 P_4 依次是退化四次曲线2.10式与直线2.12式的两个非无聊交点的坐标。那末，引理3中的2.16及2.17两式还可写作

$P_2=\pm\frac{1}{2}\sqrt{mn}$, $P_4=\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{m}}$

$P_1=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{-m(n-4)})$, $P_3=\frac{1}{2}\left(1\pm\sqrt{-\frac{n-4}{m}}\right)$

且有 $(m,n)\in R_0$，$R_0=\{(m,n)\mid m>0, m-1\neq 0,$
$0<n<4\}$。而 P_1 与 P_3 以及 P_2 与 P_4 根式前取相同的符号。

証 我们引进两个正的实参数 m 与 n 满足

$m>0$, $n>0$ ······2.26

如果我们置

$$\frac{2p_1-1}{2p_3-1}=m \qquad \cdots\cdots 2.27$$

$$-(4p_1p_3-2p_1-2p_3-3)=n \qquad \cdots\cdots 2.28$$

这两个式子整然可改写为

$$2p_1-2mp_3+m-1=0 \qquad \cdots\cdots 2.29$$

$$4p_1p_3-2p_1-2p_3+n-3=0 \qquad \cdots\cdots 2.30$$

从解析几何知道，2.29式与2.30式在几何上依次代表实平面上的一条直线与一对双曲线。如果它们有交点的话，那末至多只有两个交点。利用2.29式我们有

$$p_1=mp_3-\frac{m-1}{2} \qquad \cdots\cdots 2.31$$

代入到2.30式中右立刻得到关於p_3的一个二次方程

$$4mp_3^2-4mp_3+m+n-4=0 \qquad \cdots\cdots 2.32$$

这个二次方程有实根的充分而必要条件是它的判别式

$$\Delta=-16m(n-4)\geq 0 \qquad \cdots\cdots 2.33$$

从2.26式及2.33式我们得知判别式Δ当且仅当$n=4$時为零，下面将要証明$n\neq 4$。

如若不然，我们設$n=4$。那末此時2.30式变为

$$(2P_1-1)(2P_3-1)=0 \qquad \cdots\cdots 2.34$$

但是这与引理4相違从而产生矛盾，故必有

$$n\neq 4 \qquad \cdots\cdots 2.35$$

根据2.26、2.33、2.35三个式子，我们立刻得到两个实参数m及n的取值范圍是

$$m>0 \quad , \quad 0<n<4 \qquad \cdots\cdots 2.36$$

现在，由二次方程2.32式我们立刻得到

$$P_3=\frac{1}{2}\left(1\pm\sqrt{-\frac{n-4}{m}}\right) \qquad \cdots\cdots 2.37$$

将2.37式代入到2.31式中后又得

$$P_1=\frac{1}{2}\left(1\pm\sqrt{-m(n-4)}\right) \qquad \cdots\cdots 2.38$$

这里，P_1与P_3的根式前取相同的符号。而2.16及2.17两式显然可以写作

$$P_2=\pm\frac{1}{2}\sqrt{mn} \quad , \quad P_4=\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{m}} \qquad \cdots\cdots 2.39$$

从2.16、2.17、2.27 及2.28 四个式子立刻可以得到2.39式。这里P_2与P_4的根式前面取相同的符号。引理5至此证完。关于$m-1\neq 0$的问题下面会谈到它的范围。

由引理5得知，若用两个实参数m与n来表示P_1, P_2, P_3, P_4那末一共有四组解答。如果将每一组解答代入到引理2中的2.11式中去，我们就能够用m与n来表示α, β, ξ, η了。最后，我们可得如下的表

	P_1	P_2	P_3	P_4	
Q_1	$\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{-m(n-4)}\right)$	$\frac{1}{2}\sqrt{mn}$	$\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{-\frac{n-4}{m}}\right)$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{m}}$	
Q_2	$\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{-m(n-4)}\right)$	$-\frac{1}{2}\sqrt{mn}$	$\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{-\frac{n-4}{m}}\right)$	$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{m}}$	
Q_3	$\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{-m(n-4)}\right)$	$\frac{1}{2}\sqrt{mn}$	$\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{-\frac{n-4}{m}}\right)$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{m}}$	
Q_4	$\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{-m(n-4)}\right)$	$-\frac{1}{2}\sqrt{mn}$	$\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{-\frac{n-4}{m}}\right)$	$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{m}}$	

	$\bar\alpha$	$\bar\xi$	$\bar\beta$	$\bar\eta$
	$\dfrac{\sqrt{-m(n-4)}}{\sqrt{-m(n-4)}-2}$	$\dfrac{m+1}{\sqrt{mn}}$	$\dfrac{\sqrt{-(n-4)}}{\sqrt{-(n-4)}-2\sqrt{m}}$	$\dfrac{m-1}{\sqrt{mn}}$
	$\dfrac{\sqrt{-m(n-4)}}{\sqrt{-m(n-4)}-2}$	$-\dfrac{m+1}{\sqrt{mn}}$	$\dfrac{\sqrt{-(n-4)}}{\sqrt{-(n-4)}-2\sqrt{m}}$	$-\dfrac{m-1}{\sqrt{mn}}$
	$\dfrac{\sqrt{-m(n-4)}}{\sqrt{-m(n-4)}+2}$	$\dfrac{m+1}{\sqrt{mn}}$	$\dfrac{\sqrt{-(n-4)}}{\sqrt{-(n-4)}+2\sqrt{m}}$	$\dfrac{m-1}{\sqrt{mn}}$
	$\dfrac{\sqrt{-m(n-4)}}{\sqrt{-m(n-4)}+2}$	$-\dfrac{m+1}{\sqrt{mn}}$	$\dfrac{\sqrt{-(n-4)}}{\sqrt{-(n-4)}+2\sqrt{m}}$	$-\dfrac{m-1}{\sqrt{mn}}$

在上面的表中每一项对应於一个八维欧氏空间E^8中的流形，我们将相应於每一项的流形依次记为Q_1, Q_2, Q_3, Q_4。在事实上我们有下述的

引理 6　如果八维欧氏空间E^8中的流形Q是代数方程组(1.15~1.20)的解，那末恒有$Q=Q_3$。

证　为了方便与清晰起见，我们分为几个段落来证明：

1° $Q\cap Q_2=\phi$，$Q\cap Q_4=\phi$。这里符号ϕ应理解为空流形。

证　如若不然，设$Q\cap Q_2=Q_0$ 且Q_0为一非空集合。今设g是集合Q_0中的任意一个元素，且有

$$q=(\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\xi},\bar{\eta},p_1,p_2,p_3,p_4)$$

由於 $Q_0\subset Q$ 与 $Q_0\subset Q_2$ 以及 $q\in Q_0$，我们得知有 $q\in Q$ 及 $q\in Q_2$。

从 $q\in Q$ 及引理 1 中的 2° 得知，当 $(\sigma,t)\in D$ 且 $q\in Q$ 時恒有 $\bar{\xi}=\xi=\frac{(\sigma-1)^2+\sigma^2+2t^2}{2t}>0$。另一方面，由表中 Q_2 的解析表达式可知，当 $(m,n)\in R_0$ 且 $q\in Q_2$ 時恒有 $\bar{\xi}=-\frac{m+1}{\sqrt{mn}}<0$，由此产生矛盾。因此集合 Q_0 只能是空集。

同样地我们也可证明 $Q\cap Q_4=\phi$，这就证明了 1° 的结论。

2° $Q\cap Q_1=\phi$。

証 如若不然，設 $Q\cap Q_1=Q_0$ 且 Q_0 为一非空集合。现設 q 是集合 Q_0 中的任意一个元素，且有

$$q=(\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\xi},\bar{\eta},p_1,p_2,p_3,p_4)$$

由於 $Q_0\subset Q$ 与 $Q_0\subset Q_1$ 以及 $q\in Q_0$，我们得知有 $q\in Q$ 及 $q\in Q_1$。

由引理 1 的 1° 知道，当 $(\sigma,t)\in D$ 且 $q\in Q$

時恒有 $\overline{\alpha}=\alpha>0$ 及 $\overline{\beta}=\beta>0$。另一方面，从表中 Q_1 的分析表达式可知当 $(m,n)\in R_0$ 且 $g\in Q_1$ 時又有

$$\overline{\alpha}=\frac{\sqrt{-m(n-4)}}{\sqrt{-m(n-4)}-2}>0 \quad \text{……2.40}$$

$$\overline{\beta}=\frac{\sqrt{-(n-4)}}{\sqrt{-(n-4)}-2\sqrt{m}}>0 \quad \text{……2.41}$$

由此立得两元无理不等式组

$$\sqrt{-m(n-4)}-2>0 \quad \text{……2.42}$$

$$\sqrt{-(n-4)}-2\sqrt{m}>0 \quad \text{……2.43}$$

将两元无理不等式组（2.42~2.43）有理化后，我们立刻得到两元二次联立不等式

$$mn-4m+4<0 \quad \text{……2.44}$$

$$4m+n-4<0 \quad \text{……2.45}$$

此处 $(m,n)\in R_0$。

但是，在事实上两元不等式组（2.44~2.45）在域 R_0 上无解。如若不然，設有一解 $(m_0,n_0)\in R_0$ 且满足 2.44 与 2.45 两个不等式。由 R_0 域的定義可知此時有 $4-n_0>0$，且由 2.44 及 2.45 两式依次可得

$$m_0 > \frac{4}{4-n_0}, \quad m_0 < \frac{4-n_0}{4}$$

由不等式的遞推性立得关於n_0的不等式

$$\frac{4-n_0}{4} > \frac{4}{4-n_0} \quad \cdots\cdots 2.46$$

现記$a_0 = \frac{4-n_0}{4}$，由於$(m_0, n_0) \in R_0$故必有n_0的值域$0 < n_0 < 4$。由此得知有

$$0 < a_0 < 1 \quad \cdots\cdots 2.47$$

而此時2.46式成为

$$a_0 > \frac{1}{a_0} \quad \cdots\cdots 2.48$$

但是此与2.47式相違，故产生矛盾。因此，两元不等式组(2.44~2.45)在域R_0上无解。

根据上述結论，集合Q与集合Q_1的交Q_0必定是空集，否则將产生矛盾。这就証明了2°的結论。

3° $Q = Q_3$。

証 由於Q_3確是代数方程组(1.15~1.20)的一个解，所以我们显然有

$$Q_3 \subset Q \quad \cdots\cdots 2.49$$

另一方面，代数方程组（1.15~1.20）的全部形式解有而且只有 Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 四个。因此，我们当然有

$$Q \subset Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3 \cup Q_4 \quad \cdots\cdots 2.50$$

由此可得

$$Q \cap Q \subset Q \cap (Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3 \cup Q_4) \quad \cdots\cdots 2.51$$

注意到

$$Q \cap (Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3 \cup Q_4) = (Q \cap Q_1) \cup (Q \cap Q_2) \cup (Q \cap Q_3) \cup (Q \cap Q_4) \cdots 2.52$$

利用 1° 与 2° 的结论，从 2.52 式我们立刻得到

$$Q \cap (Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3 \cup Q_4) = Q \cap Q_3 \quad \cdots\cdots 2.53$$

由 2.51 及 2.53 两式，我们有

$$Q \cap Q \subset Q \cap Q_3 \quad \cdots\cdots 2.54$$

由 2.54 式并注意到

$$Q \cap Q = Q \quad , \quad Q \cap Q_3 \subset Q_3 \quad \cdots\cdots 2.55$$

我们立刻得到

$$Q \subset Q_3 \quad \cdots\cdots 2.56$$

由 2.49 及 2.56 两式我们立刻得到 $Q = Q_3$ 。

这就证明了 3° 的结论。由此引理 6 得证。

现在，我们来证明定理 2.1。由引理 6 得知，如果将代数方程组 (1.15~1.20) 的解看作为八维欧氏空间 E^8 中的一个流形且用 Q 来表示这个解的话，那末恒有 $Q=Q_3$。这就证明了定理 2.1 的前半部分，且 $(m,n)\in R_0$。

从 Q_3 的解析表达式可知有

$$\bar{\eta}=\frac{m-1}{\sqrt{mn}} \quad \cdots\cdots 2.57$$

另一方面，由引理 1 中的 2° 得知当 $(\sigma,t)\in D$ 时又有

$$\eta=\frac{\sigma-\frac{1}{2}}{t}\neq 0 \quad \cdots\cdots 2.58$$

由 1.8、2.57 及 2.58 三个式子，我们立刻得到

$$m-1\neq 0 \quad \cdots\cdots 2.59$$

其次，从表中 Q_3 的解析表达式可知有

$$\bar{\alpha}=\frac{\sqrt{-m(n-4)}}{\sqrt{-m(n-4)}+2} \quad \cdots\cdots 2.60$$

$$\bar{\beta}=\frac{\sqrt{-(n-4)}}{\sqrt{-(n-4)}+2\sqrt{m}} \quad \cdots\cdots 2.61$$

另外，从引理 1 的 1° 可知

$$0<\alpha<\frac{1}{2} \quad , 0<\beta<\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots 2.62$$

由此并根据1.8式，我们立刻有

$$0<\bar{\alpha}<\frac{1}{2} \quad , 0<\bar{\beta}<\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots 2.63$$

由2.60、2.61及2.63三个式子，我们得到

$$\frac{\sqrt{-m(n-4)}}{\sqrt{-m(n-4)}+2}<\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots 2.64$$

$$\frac{\sqrt{-(n-4)}}{\sqrt{-(n-4)}+2\sqrt{m}}<\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots 2.65$$

对这两个无理不等式进行有理化后，我们就立刻得到

$$-mn-4m+4>0 \quad \cdots\cdots 2.66$$

$$4m+n-4>0 \quad \cdots\cdots 2.67$$

由2.38、2.59、2.66及2.67四式，我们立刻得到了实域K的定义域。这就证明了定理2.1的后半部分。定理2.1至此全部证毕。