T. Kloks
Department of Computer Science
National Tsing Hua University
Hsinchu, Taiwan
kloks@cs.nthu.edu.tw

DE COMBINATORIEK VAN DE BRUIJN

Im memoriam: N. G. de Bruijn. Dit is een korte samenvatting van zijn werk in de combinatoriek.

In dit artikel probeer ik een kort overzicht te geven van het werk van De Bruijn in de combinatoriek.

1. Representantensystemen

In 1927 publiceert Van der Waerden zijn stelling over een gemeenschappelijk representanten systeem van twee opsplitsingen van een eindige verzameling [84]. Om precies te zijn luidt zijn stelling als volgt.

Stelling 1 (Van der Waerden). *Zij* M *een eindige verzameling. Laat* $\mathcal{U}$ *en* $\mathcal{B}$ *twee partities*[1] *zijn van* M *zodanig dat elk element van* $\mathcal{U}$ *en elk element van* $\mathcal{B}$ *precies* n *elementen heeft. Laat* $\mu = |\mathcal{U}| = |\mathcal{B}|$. *Dan is er een verzameling* $X \subset M$ *van* μ *elementen zodanig dat voor elke* $x \in X$ *er precies één* $U \in \mathcal{U}$ *is, en er precies één* $B \in \mathcal{B}$ *is, zodat*

$$X \cap U = X \cap B = \{x\}.$$

Met andere woorden, X is een gemeenschappelijk representantensysteem voor $\mathcal{U}$ en $\mathcal{B}$.

In een nawoord legt Van der Waerden uit dat zijn stelling equivalent is met de stelling van Kőnig die zegt dat elke reguliere bipartiete graaf een bedekking met dimeren heeft (zie Hoofdstuk 9). Hij merkt op dat de stelling van Kőnig naar het oneindige is uitgebreid (waarbij de graad van de reguliere bipartiete graaf eindig blijft) in een artikel van Kőnig en Valkó [53]. Uit die uitbreiding volgt ook de uitbreiding van Van der Waerden's stelling naar het oneindige. Daarbij is dan M mogelijk oneindig, en elk element van $\mathcal{U}$, en elk element van $\mathcal{B}$, heeft precies hetzelfde eindige aantal, zeg n, elementen.

Uitbreidingen van de nauw verwante huwelijksstelling van Hall naar het oneindige volgen in 1965 door Rado [67]. In het eindige geval is Hall's stelling equivalent met de stelling van König-Egerváry. Deze stelling zegt dat, voor bipartiete grafen, het maximaal aantal elementen in een verzameling kanten zódanig dat geen twee kanten een punt gemeen hebben, gelijk is aan het minimale aantal punten wat alle kanten raakt. Hieruit volgt natuurlijk König's stelling voor reguliere bipartiete grafen die we hierboven noemden.

Rado noemt ook eerdere versies van de uitbreiding van Hall's stelling, namelijk door Hall zelf in 1948 [47] en anderen [41, 48]. Deze vroege uitbreidingen (door Hall, door Everett en Whaples, en door Halmos en Vaughan) maken gebruik van Tychonoff's stelling (zie Hoofdstuk 6). Rado's bewijs maakt géén gebruik van Tychonoff's stelling. Bovendien bewijst Rado veel meer dan alleen de uitbreiding die we hieronder noemen in Stelling 2.

Stelling 2 (Hall). *Laat* N *een eindige of oneindige verzameling zijn en laat voor elke* $k \in N$, A_k *een eindige verzameling zijn. Stel dat aan Hall's voorwaarde is voldaan, dat wil zeggen dat voor elke eindige* $M \subset N$ *geldt*

$$|\bigcup_{k \in M} A_k| \geqslant |M|.$$

Dan is er voor elke $k \in N$ *een* $x_k \in A_k$ *zódanig dat*

$$k \neq \ell \quad \textit{impliceert} \quad x_k \neq x_\ell.$$

In 1943 verschijnt een artikel van De Bruijn met een andere uitbreiding van Van der Waerden's stelling naar het oneindige. Dat wil zeggen dat voor M nu ook een oneindige verzameling mag worden gekozen. De eis dat elk element van $\mathcal{U}$ en van $\mathcal{B}$ hetzelfde, eindige aantal elementen bevat wordt vervangen door de volgende twee eisen.

[1] Voor alle duidelijkheid: een partitie van een verzameling V is een verzameling deelverzamelingen van V waarvan er geen leeg is, die elkaar paarsgewijs niet overlappen, en die samen elk element van V bevatten.

1. Voor geen enkele $k \in \mathbb{N}$ zijn er $k-1$ elementen van $\mathcal{U}$ waarvan de vereniging k verschillende elementen van $\mathcal{B}$ bevat.

   Hetzelfde geldt met $\mathcal{U}$ en $\mathcal{B}$ hierboven verwisseld.
2. Elk element van $\mathcal{U}$ en van $\mathcal{B}$ heeft slechts met een eindig aantal elementen van respectievelijk $\mathcal{B}$ en $\mathcal{U}$ een niet-lege doorsnede.

De Bruijn's artikel [9] vervolgt, na een korte inleiding met een zestal opmerkingen. Ik noem er drie. Op de eerste plaats volgt uit de eerste eis, met $k = 1$, dat geen enkele deelverzameling van B of U leeg is. De tweede opmerking van De Bruijn die ik noem stelt dat, áls er een gemeenschappelijk representantensysteem is, dat dan aan het eerste item is voldaan. Met andere woorden, als de tweede eis geldt, dan is er een gemeenschappelijk representantensysteem dan en slechts dan als aan de eerste eis voldaan is. De laatste, 6^{de} opmerking van De Bruijn is, dat we mogen aannemen dat $\mathcal{B}$ en $\mathcal{U}$ (hoogstens) aftelbaar zijn. Dit volgt uit een constructie van Kőnig [54, Stelling G, op Bladzijde 460].

Uit dat laatste volgt dat we de elementen van $\mathcal{U}$ en $\mathcal{B}$ kunnen nummeren, wat we meteen maar doen, zeg

$$U_1, U_2, \ldots \quad \text{en} \quad B_1, B_2, \ldots.$$

Definitie 1. *Een S_k-systeem is een verzameling $\{x_1, \ldots, x_k\}$ van elementen uit M zodanig dat geen element van $\mathcal{U}$ of van $\mathcal{B}$ er twee van bevat.*

Lemma 1. *Onder aanname van de eerste eis alleen geldt het volgende. Zij $k \geqslant 0$ en zij $\{x_1, \ldots, x_k\}$ een S_k-systeem zodat*

$$U_i \cap B_i = \{x_i\} \quad \textit{voor} \;\; i \in \{1, \ldots, k\}. \tag{1}$$

Dan kan men bij elke B_t met $t > k$ een $s > k$ vinden, en een S_{k+1}-systeem $\{y_1, \ldots, y_{k+1}\}$ wat

$$U_1, \ldots, U_k, U_s \quad \textit{en} \quad B_1, \ldots, B_k, B_t$$

representeert (maar niet meer persé in dezelfde volgorde).

Opmerking 1. *De Bruijn merkt op dat zijn bewijs grotendeels dat van Van der Waerden volgt. Wij volgen De Bruijn's beschrijving. Het construeert natuurlijk, in de terminologie van Berge [6], 'een verbeterend pad'.*[2]

BEWIJS. [Van Lemma 1.] We zeggen dat een verzameling U_s verbonden is met de verzameling B_t als er een $\omega \geqslant 1$ en een ketting

$$B_t = B_{i_0},\ U_{i_1},\ B_{i_1},\ U_{i_2},\ B_{i_2},\ \ldots,\ B_{i_{\omega-1}},\ U_{i_\omega} = U_s \tag{2}$$

bestaan zodat

$$B_{i_{\lambda-1}} \cap U_{i_\lambda} \neq \varnothing \quad \text{voor} \;\; \lambda \in \{1, \ldots, \omega\}.$$

We beweren dat er minstens één $s > k$ is zodat U_s verbonden is met B_t. Stel namelijk dat $U_{j_1}, \ldots, U_{j_p}$ de elementen zijn van $\mathcal{U}$ die verbonden met B_t, waarbij

$$j_1 < j_2 < \cdots < j_p \leqslant k.$$

Laat dan $N = \cup_{z=1}^{p} U_{j_z}$. Beschouw $x \in B_t$ en laat $x \in U_m$ voor zekere m. Dan is U_m verbonden met B_t, en dus ligt U_m in N. Dus $B_t \subset N$.

Laat $x_z \in B_{j_z}$ voor zekere $1 \leqslant z \leqslant p$. Stel dat $x_z \in U_m$ voor zekere m. Dan is de ketting die loopt tot U_{j_z} te verlengen met B_{j_z} en U_m. Dus ook U_m is met B_t verbonden, en dus is $x_z \in N$. Met andere woorden, $B_{j_z} \subset N$, voor $1 \leqslant z \leqslant p$.

Dan is

$$\cup_{z=1}^{p} B_{j_z} \cup B_t \subset \cup_{z=1}^{p} U_{j_z}.$$

Dit is in strijd met Eis 1 en dit bewijst de bewering.

Er bestaat dus een ketting vanuit B_t naar een U_s met $s > k$. Natuurlijk nemen we de kleinst mogelijke s waar dat gebeurt, zeg ω, dus $i_1, \ldots, i_{\omega-1}$ zijn allemaal hoogstens k. We mogen ook aannemen dat er geen twee dezelfde elementen van $\mathcal{U}$ in de ketting zitten, anders kunnen we een deel van de ketting weglaten. Kies nu een element

$$y_\lambda \in B_{i_{\lambda-1}} \cap U_{i_\lambda} \quad \text{voor} \;\; \lambda \in \{1, \ldots, \omega\}.$$

In het representantensysteem vervangen we

$$x_{i_1}, \ldots, x_{i_\omega - 1} \quad \text{door} \quad y_{i_0}, y_{i_1}, \ldots, y_{i_\omega - 1}.$$

Die liggen achtereenvolgens in

$$U_{i_1}, \ldots, U_{i_{\omega-1}}, U_s \quad \text{en in} \quad B_t, B_{i_1}, \ldots, B_{i_{\omega-1}}.$$

Dit nieuwe representantensysteem voldoet aan de eis. □

Stelling 3. *Veronderstel dat de partities $\mathcal{U}$ en $\mathcal{B}$ van een eindige of oneindige verzameling M voldoen aan de eisen 1 en 2. Dan bestaat er een gemeenschappelijk representantensysteem $\mathcal{U}$ en $\mathcal{B}$.*

BEWIJS. We kunnen aannemen dat M oneindig is en dat $\mathcal{U}$ en $\mathcal{B}$ aftelbaar zijn. Neem een nummering van de elementen van $\mathcal{U}$ en $\mathcal{B}$, zeg

$$U_1,\ U_2,\ \ldots \quad \text{en} \quad B_1,\ B_2,\ \ldots.$$

Uit Lemma 1 volgt nu het volgende. Als er een S_k-systeem (voor de een of andere k) $\mathcal{S}_n$ is wat onder andere $\{U_1, \ldots, U_n\}$ en $\{B_1, \ldots, B_n\}$ representeert, dan is er ook een S_k-systeem $\mathcal{S}_{n+1}$ wat onder andere de elementen van $\{U_1, \ldots, U_{n+1}\}$ en van $\{B_1, \ldots, B_{n+1}\}$ representeert.

We vinden een aftelbare rij $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \ldots$ van S_k-systemen. In verschillende $\mathcal{S}_i$'s kan U_1 met verschillende B_μ's corresponderen (dat wil zeggen dat die B_μ's een element met U_1 gemeen hebben). Volgens de tweede eis is het aantal B_μ's wat U_1 doorsnijdt eindig. Er is dus minstens één $B_{\mu'}$

[2] Zie bijvoorbeeld ook [63, Exercise 6.7, op Bladzijde 146 en Exercise 6.13 op Bladzijde 149].

die in oneindig veel $\mathcal{S}_i$'s correspondeert met $\mathcal{U}_1$. De $\mathcal{S}_i$'s die deze eigenschap niet hebben laten we uit de rij weg.

We kunnen dit proces herhalen, achtereenvolgens voor $U_1, B_1, U_2, B_2, \ldots$. We vinden telkens een nieuwe correspondentie (U_n, B_{μ_n}) en (B_n, U_{ν_n}) voor zover die niet al eerder was vastgelegd. Dit leidt tot een één-één-duidige correspondentie tussen elementen van $\mathcal{U}$ en $\mathcal{B}$ die paarsgewijs een niet-lege doorsnede hebben.

Daarmee is de stelling bewezen. □

Opmerking 2. *Laten we de oneindige bipartiete graaf* G *eens bekijken, waarvan de knopen de elementen van* $\mathcal{U}$ *en van* $\mathcal{B}$ *zijn. Een paar* $\{U_i, B_j\}$ *vormt een kant in* G *als* $U_i \cap B_j \neq \varnothing$. *De eerste eis is dan de (tweezijdige) voorwaarde van Hall. De tweede eis zegt dat elke punt een eindige graad heeft. Volgens Stelling 3 is er dan een bedekking met dimeren, dat wil zeggen, er is een verzameling kanten die paarsgewijs geen punt gemeen hebben en die samen alle punten van* G *bedekken. Dus elke knoop kan worden uitgehuwelijkt.*

2. De Bruijn cykels

Wellicht is De Bruijn het meest bekend om een van zijn eerste artikelen [10, 36]. In dit artikel bewijst De Bruijn een gissing van ir. K. Posthumus. Naar eigen zeggen kwam De Bruijn er na het schrijven van het artikel achter dat het al eens eerder was bewezen, namelijk door Camille Flye Sainte-Marie [42, 69, 26].

Het originele artikel van De Bruijn betreft een stelling over woorden met letters uit een alfabet met twee letters, 0 en 1. Later, samen met Van Aardenne-Ehrenfest, heeft hij het uitgebreid naar alfabetten met een willekeurig aantal letters [1]. Over dit artikel later meer.

Definitie 2. *Laat* $n \in \mathbb{N}$. *Een* P_n*-cykel is een geordende cykel van* 2^n *cijfers 0 en 1 zodanig dat de* 2^n *rijen van opeenvolgende nullen en enen allemaal verschillend zijn.*

Met andere woorden, elke mogelijke rij nullen en enen ter lengte n komt precies één maal voor als een opeenvolgende deelrij in de cykel.

Als voorbeeld kan men een P_3-cykel nemen

00010111

waarin men de 8 mogelijke rijtjes

000   001   010   101   011   111   110   en   100

als deelrijtjes kan onderkennen.

Natuurlijk is er slechts één P_1-cykel, namelijk 01, en er is slechts één P_2-cykel, namelijk 0011. Door wat te puzzelen kan men wel vinden dat er twee P_3-cykels zijn en zestien P_4-cykels. Een ingenieur, ir. K. Posthumus, ploos uit dat het aantal P_5-cykels 2048 is en op grond daarvan giste hij (zie [26]) de volgende stelling.

Stelling 4.

Het aantal P_n*-cykels is* $\quad 2^{2^{n-1}-n} \quad$ *voor alle* n.

BEWIJS. Om dit te bewijzen maken we gebruik van de volgende definitie.

Definitie 3 (Zie ook [44])**.** *Beschouw een gerichte graaf* (G, Δ). *De lijngraaf* $L(G, \Delta)$ *is de gerichte graaf* (G', Δ') *gedefinieerd door*

$$G' = \Delta \quad \textit{en} \quad \begin{cases} \Delta' \textit{ bestaat uit alle paren uit } \Delta \textit{ die kop-} \\ \textit{staart gerelateerd zijn. Formeel:} \\ \Delta' = \{\, ((P,Q),(R,S)) \in \Delta \times \Delta \mid Q = R \,\}. \end{cases}$$

Laat nu G_n de verzameling van alle woorden zijn met $n-1$ letters. Voor elk element $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in G_{n+1}$ nemen we een gerichte kant

$$((\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{n-1}), (\epsilon_2, \ldots, \epsilon_n)) \in \Delta_n.$$

Een P_n-cykel is dan een gesloten wandeling door (G_n, Δ_n) die elke kant precies een maal bezoekt. Dit reduceert de vraag naar het aantal P_n-cykels tot de vraag naar het aantal Euler circuits in (G_n, Δ_n).

Merk nu op dat $(G_{n+1}, \Delta_{n+1}) = L(G_n, \Delta_n)$. Laat N_n het aantal Euler circuits in (G_n, Δ_n) zijn. In het artikel wordt bewezen dat

$$N_{n+1} = 2^{2^{n-1}-1} \cdot N_n = 2^{2^{n-1}-1} \cdot 2^{2^{n-1}-n} = 2^{2^n-n-1}.$$

Hieruit volgt de stelling. □

Opmerking 3. *Dit artikel stamt uit 1946. Het is wellicht opmerkelijk dat het geen enkele referentie bevat, iets wat men tegenwoordig bijna niet meer ziet. De Bruijn maakt dat later goed in* [26]. *Het adres dat De Bruijn geeft is het 'Natuurkundig Laboratorium der N.V. Philips' Gloeilampenfabrieken'.*

3. De De Bruijn-Erdös stelling uit de incidentiemeetkunde

Twee jaar later, in 1948, verschijnt een artikel van De Bruijn en Erdös. De stelling uit dit artikel gaat de geschiedenis in als de 'De Bruijn-Erdös stelling'. Er dient evenwel opgemerkt te worden dat er twéé van die stellingen zijn; een in de grafentheorie en een in de incidentiemeetkunde. We beginnen met de laatste.

Voor $n \in \mathbb{N}$ en voor $m \in \mathbb{N}$ met $m > 1$, laat

$$U = \{1, \ldots, n\},$$

en laat $A_1, \ldots, A_m$ deelverzamelingen van U voorstellen. Neem aan dat elk paar elementen van U bevat is in precies één van de deelverzamelingen A_i. Dan geldt de volgende stelling.

Stelling 5. *Er geldt* $m \geqslant n$ *waarbij gelijkheid optreedt slechts dan in een van de volgende twee gevallen.*

(1) *Een deelverzameling bevat* $n-1$ *elementen, zeg*

$$A_1 = \{1, \dots, n-1\}.$$

De andere deelverzamelingen zijn dan, zonder verlies van algemeenheid, $A_i = \{n, i-1\}$, *voor* $i = 2, \dots, n$.

(2) *Het getal* n *is van de vorm* $n = k(k-1)+1$. *Alle* A_i*s hebben dan* k *elementen en elk element komt in precies* k *deelverzamelingen voor.*

Gevolg 1. *Zij gegeven een configuratie van* n *punten in het vlak die niet allemaal op één lijn liggen. Verbindt elk tweetal van die punten. Dan is het aantal lijnen in dit systeem minstens* n. *In dit geval treedt gelijkheid slechts dan op als er* $n-1$ *punten op een lijn liggen.*

Dit uitvloeisel van Stelling 5 is ook een gevolg van een stelling van Gallai die bekend staat als de 'Sylvester-Gallai stelling'. In het artikel van De Bruijn en Erdös wordt ook Gallai's elegante bewijs van die stelling beschreven.

Stelling 6 (Sylvester-Gallai stelling [43, 62])**.** *Stel dat* n *punten in het vlak gegeven zijn en dat niet alle punten op één lijn liggen. Dan is er een lijn die door precies twee punten gaat.*

BEWIJS. Stel dat de stelling onjuist is. Dan gaat elke lijn die door twee punten gaat ook nog door een derde punt. Projecteer een van de punten, zeg a, in het oneindige en verbindt het met alle andere punten. Dan krijgen we een stelsel evenwijdige lijnen die elk twee of meer van de overige punten bevat. Neem nu een lijn door twee punten die een zo klein mogelijke hoek maakt met de evenwijdige lijnen. Stel dat deze lijn de punten a_1, a_2 en a_3 bevat. De lijn die a_2 met a verbindt bevat minstens een derde punt, zeg a_4. Maar dan maakt een van de lijnen, *of* die door a_1 en a_4, *of* die door a_3 en a_4, een kleinere hoek met het stelsel evenwijdige lijnen. (Door middel van een figuur kan men zichzelf daarvan eenvoudig overtuigen.)

Dit is een tegenspraak die de stelling bewijst. □

Het bewijs van Stelling 5 gaat ruwweg als volgt.

BEWIJS. [Van Stelling 5.] We noemen de deelverzamelingen $A_1, \dots, A_m$ lijnen en we noemen de elementen (of 'punten'), van $\cup\, a_1, \dots, a_n$. Laat k_i het aantal lijnen zijn wat door het punt a_i gaat en laat s_j het aantal punten op de lijn A_j zijn. Dan geldt natuurlijk

$$\sum_{j=1}^{m} s_j = \sum_{i=1}^{n} k_i. \tag{3}$$

Ook geldt dat, als a_i niet op de lijn A_j ligt,

$$s_j \leqslant k_i. \tag{4}$$

Dat is zo omdat a_i verbonden is door een lijn met elk punt op de lijn A_j, en omdat elk tweetal van die lijnen verschillend zijn.

Laat k_n nu de kleinste k_i zijn en laat $A_1, \dots, A_\nu$ de lijnen zijn die door a_n gaan (waarbij $\nu = k_n$). We mogen aannemen dat elke lijn minstens twee punten bevat, anders kunnen we die lijn ook wel weglaten. Ook geldt dat $k_n > 1$ omdat anders alle punten op een lijn zouden liggen. Neem nu, voor $i = 1, \dots, \nu$, een punt $a_i \neq a_n$ op lijn A_i. Dan concluderen we uit (4) dat

$$\begin{gathered} s_2 \leqslant k_1 \quad s_3 \leqslant k_2 \quad \cdots \quad s_\nu \leqslant k_{\nu-1} \quad s_1 \leqslant k_\nu; \\ \text{en, voor } j > \nu, \quad s_j \leqslant k_n. \end{gathered} \tag{5}$$

Nu volgt uit (3) en (5), en uit de keuze van k_n, dat $m \geqslant n$.

We analyseren nu de gevallen waarin $m = n$. Als $m = n$ dan geldt gelijkheid in alle ongelijkheden van (5) gelijkheid. Als $n = m$ kunnen we de punten hernummeren zodanig dat

$$s_1 = k_1 \quad \cdots \quad s_n = k_n.$$

We mogen aannemen dat

$$k_1 \geqslant \cdots \geqslant k_n > 1.$$

We onderscheiden twee gevallen.

Geval $k_1 > k_2$**:** Dan is $s_1 = k_1 > k_i$, $2 \leqslant i \leqslant n$. Nu volgt uit (4) dat alle punten op A_1 liggen. Het punt a_1 ligt dan niet op A_1 en dus geldt het eerste geval uit de stelling.

Geval $k_1 = k_2$**:** Stel dat $k_j < k_1$. Dan, volgens (4), ligt a_j op A_1 en op A_2. De enige mogelÿkheid is dat $j = n$. Omdat $k_1 = \cdots = k_{n-1} > k_n \geqslant 2$ is bevat elke lijn door a_n, behalve één, minstens twee andere punten. Er zijn dus minstens twee lijnen die a_n niet bevatten. Voor beiden geldt volgens (4) dat $s_j \leqslant k_n$, maar is in tegenspraak met $s_1 = \cdots = s_{n-1} > k_n$.

We hebben dus, behalve het hierboven genoemde geval, alleen het geval dat $s_i = k_j = k_1$ voor alle $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Het is nu makkelijk na te gaan dat $n = k(k-1)+1$ en dat elk paar lijnen elkaar snijdt in precies een punt.

www bewijst de stelling. □

Opmerking 4. *Een gevolg uit Stelling 5, die men in de grafentheorie wel vaker tegenkomt, luidt als volgt. Laat* $\mathcal{S}$ *een niet-triviale partitie zijn van de kanten van* K_n *in klieken. Dan geldt dat* $|\mathcal{S}| \geqslant n$ *en gelijkheid geldt dan en slechts dan als*

(a) *of een kliek* $C \in \mathcal{S}$ *bevat* $n-1$ *knopen en de overige* $n-1$ *klieken zijn kopieën van* K_2 *die elk de enige knoop bevatten die niet in* C *ligt,*

(b) *of* $n = k^2 - k + 1$, *en dan bestaat* $\mathcal{S}$ *uit* n *klieken die elk* k *knopen bevatten. Bovendien is dan elke knoop in precies* k *klieken van* $\mathcal{S}$ *bevat.*

De enige kliek K_n *die een niet-triviale partitie van de kanten in* n *driehoeken toelaat, is dus* K_7. *In dat geval is het Fanovlak de incidentiemeetkunde uit Stelling 5. Volgens een stelling van Wilson geldt dat, als* $\binom{n}{2}$ *deelbaar is door* $\binom{k}{2}$, *en* *als $n-1$ deelbaar is door $k-1$, en als n groot genoeg is, dan is er een partitie van de kanten van K_n in k-klieken* [85].

4. Bases voor integers

In 1950 verschijnt een artikel [11] wat een inspiratiebron wordt voor veel later werk, van zowel De Bruijn zelf als van veel anderen, eg, [38, 39]. Als voorbeeld noem ik een concept waar De Bruijn zijn naam aan verleent; de 'Moser-De Bruijn rij' [17, 61]. Dit is de rij getallen die de som zijn van verschillende machten van vier. De rij begint als volgt.

$$0,\ 1,\ 4,\ 5,\ 16,\ 17,\ 20,\ 21,\ 64,\ 65,\ \dots$$

De getallen in deze rij hebben allerlei interessante eigenschappen, en vormen het onderwerp van veel studie.

In dit Debrecen-artikel uit 1950 beantwoord De Bruijn onder andere een vraag van Szele. Laten we beginnen met de definitie van een basis; het is natuurlijk wat je denkt dat het is.

Definitie 4. *Een verzameling gehele getallen*

$$\{\, b_1,\ b_2,\ \dots \}$$

is een basis voor $\mathbb{Z}$ als elke getal $x \in \mathbb{Z}$ op een unieke manier geschreven kan worden als

(6)

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon_i b_i \quad \textit{waar elke } \epsilon_i \in \{0,1\} \textit{ en waar } \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon_i < \infty.$$

Szele opperde het vermoeden dat elke basis slechts één oneven getal heeft, slechts één oneven veelvoud van twee, slechts één oneven veelvoud van vier, enzovoort. Hieronder geven we De Bruijn's bewijs van de juistheid van dit vermoeden. We beginnen met een lemma.

Lemma 2. *Als $B = \{b_1, b_2, \dots\}$ een basis is dan is er één b_i oneven en alle andere zijn even.*

BEWIJS. Tenminste een b_i moet oneven zijn anders kan een oneven getal niet geschreven worden als combinatie van elementen uit de basis. Aangezien de opsomming van de elementen van B willekeurig is, is het voldoende om te laten zien dat $b_1 b_2$ even is.

Laat V_1 de verzameling gehele getallen zijn waarvoor in (6) $\epsilon_1 = 0$. Laat V_2 de verzameling gehele getallen zijn waarvoor in (6) $\epsilon_2 = 0$ en laat $W = V_1 \cap V_2$. Beschouw twee gehele getallen x en y met $x - y = b_1$. Veronderstel dat $y \in V_1$. Dan geldt

$$y = \sum_{i=2}^{\infty} \epsilon_i(y) b_i \quad \text{wat impliceert} \quad x = b_1 + \sum_{i=2}^{\infty} \epsilon_i(y) b_i.$$

Dan is $x \notin V_1$ want volgende de definitie van een basis is x maar op één manier te schrijven in de vorm (6). Natuurlijk impliceert $\epsilon_1(x) = 1$ dat $\epsilon_1(y) = 0$. Met andere woorden, precies één getal van x en y behoort tot V_1.

Als $x \in V_1$ dan zijn, volgens de bovenstaande redenering, $x - 2b_1$ en $x + 2b_1$ ook in V_1. Dus V_1 is periodiek met periode $2b_1$. Zo is ook V_2 periodiek met periode $2b_2$. Dan is $W = V_1 \cap V_2$ periodiek met periode $2b_1b_2$. Laat p de kleinste periode zijn voor de elementen van W.

Voor $\lambda \in \{0,1\}$ en voor $\mu \in \{0,1\}$ zij $W_{\lambda\mu}$ de verzameling getallen met

$$\epsilon_1 = \lambda \quad \text{en} \quad \epsilon_2 = \mu.$$

Merk op dat de verzamelingen $W_{\lambda\mu}$ bijectief op elkaar afgebeeld kunnen worden door eenvoudige verschuivingen. Zij

$$K = |\{\, x \mid x \in W \quad \text{en} \quad 0 < x \leqslant P \,\}|.$$

Uit de symmetrie volgt nu dat elke set $W_{\lambda\mu}$ in elke periode precies K elementen bevat. Dan volgt dat $P = 4K$ en dus is 4 een deler van $2b_1b_2$. Met andere woorden, b_1b_2 is even, hetgeen te bewijzen was. □

Nu bewijzen we Szele's vermoeden.

Stelling 7. *Elke basis kan geschreven worden in de vorm*

$$B = \{d_1,\ 2d_2,\ 2^2 d_3,\ \dots\} \tag{7}$$

waarbij de getallen d_i oneven zijn.

BEWIJS. Laat $\{b_1, b_2, \dots\}$ een basis zijn. Volgens lemma 2 mogen we aannemen dat b_1 oneven is en dat alle andere b_i's even zijn. Nu is $\{b_2, b_3, \dots\}$ een basis voor de even getallen en dus is

$$\{\ \frac{1}{2}b_2,\ \frac{1}{2}b_3,\ \frac{1}{2}b_4, \dots\}$$

een basis voor de gehele getallen. Dan is dus precies één van de elementen oneven. Enzovoort. □

Opmerking 5. *Zij $D = [d_1, d_2, \dots]$ een rij oneven getallen. De rij heet een fundament als (7) een basis is. Stel dat D periodiek is, dat wil zeggen dat $d_{i+s} = d_i$ voor zekere $s > 0$ en alle i. De Bruijn bewijst dat dan in een eindig aantal stappen vastgesteld kan worden of D een fundament is. Het artikel bevat een lijst van alle 20 fundamenten $[a, b, a, b, \dots]$ met periode twee, met*

$$0 < -b < a \leqslant 100.$$

In het artikel wordt Schutte bedankt voor het controleren van die lijst fundamenten.[3] *In 1964 breidt De Bruijn dit resultaat uit* [17].

Aan het eind van het artikel duikt de vraag van Hajós op als (fout) vermoeden. We zien dit terug in Hoofdstuk 10.

[3] Professor H. J. (Hennie) Schutte is in 1957 een van de stichters van 'Die Suid-Afrikaanse Wiskundige Vereniging.'

5. De BEST stelling

In 1951 verschijnt het artikel van Van Aardenne-Ehrenfest en De Bruijn wat we al eerder noemden [1]. Achterin, als 'note added in proof', wordt vermeld dat het aantal Euler circuits in een gerichte graaf kan worden uitgedrukt als een determinant. In deze notitie staat ook dat het artikel van Tutte en Smith [80] hetzelfde resultaat aankondigt. Om die reden gaat de stelling de geschiedenisboeken in als de 'BEST stelling', vanwege de initialen Bruijn, Ehrenfest, Smith en Tutte.

Zij (G,Δ) een gerichte graaf. Om het aantal opspannende bomen, met alle kanten gericht naar een gegeven wortel, te vinden kan men gebruik maken van de stelling van Kirchoff.

Stelling 8. *Zij (G,Δ) een gerichte graaf met knopen $p_1,\dots,p_n$. Beschouw de matrix M met*

$$M(i,j)=\begin{cases}\text{als } i=j: & \text{de totale uitgraad van punt } p_i\\ \text{als } i\neq j: & -\#\,(\text{takken gericht van } p_i \text{ naar } p_j)\end{cases}$$

Dan is het aantal opspannende bomen gericht naar een wortel p_k gelijk aan de (k,k)-minor van M, dat is de determinant van de matrix die men krijgt door uit M de k^{de} rij en de k^{de} kolom weg te laten.

Voor een bewijs zij de lezer verwezen naar [63].

Zij nu (G,Δ) een gerichte graaf waarin voor elk punt de ingraad gelijk is aan de uitgraad. Dan is G een zogenaamde Eulerse graaf en men kan dan, volgens Euler's unicursal stelling, een wandeling, een zogenaamde 'Euler-tour', maken door de graaf die elke tak precies een maal bezoekt. De BEST stelling telt het aantal mogelijke Euler tours.

Stelling 9 (De BEST stelling)**.** *Zij (G,Δ) een gerichte Eulerse graaf. Laat de ingraad en uitgraad van een knoop p gegeven zijn door σ_p. Dan is het aantal Euler-tours in (G,Δ) gelijk aan*

$$P_w(G,\Delta)\prod_{p\in G}(\sigma_p-1)!$$

waarbij $P_w(G,\Delta)$ het aantal opspannende bomen is gericht naar een wortel w.

Opmerking 6. *Een eigenschap van Eulerse grafen is dat*

$$P_w(G,\Delta)=P_v(G,\Delta)$$

voor elke twee knopen v en w. Dus de keuze van de knoop w in Stelling 9 is willekeurig.

BEWIJS. [Van Stelling 9.] Laat de punten van G genummerd zijn als $p_1,\dots,p_n$. Schrijf σ_i in plaats van σ_{p_i} voor de ingraad van de knoop p_i.

Beschouw een Euler tour en start de tour met een gerichte kant (p_1,p_2). Nummer de kanten die bezocht worden door de Euler tour en beschouw voor elke knoop $\neq p_1$ de laatste uitgang die genomen wordt. Het is niet moeilijk in te zien dat deze kanten een opspannende boom vormen; de zogenaamde 'laatste-uitgangs-boom.'

We bewijzen dat elke opspannende boom met wortel p_1, en waarin elke kant gericht naar de wortel p_1, precies $\prod(\sigma_i-1)!$ keer voor komt als laatste-uitgangs-boom. Kleur de kant (p_1,p_2) rood. Voor elke knoop kleur de laatste uitgang die genomen wordt in de Euler-tour blauw. Dan krijgen we een blauwe boom.

Beschouw nu een opspannende boom gericht naar p_1. Kleur de kanten die in de boom zitten blauw. Dan heeft elke knoop precies één blauw gekleurde uitgang, behalve de knoop p_1. Kleur één uitgaande kant vanuit p_1, zeg (p_1,p_2) rood.

Fixeer nu, voor elke knoop, een ordening van de uitgaande kanten, op een zodanige manier dat de gekleurde kant de laatste in de ordening is. Het aantal manieren om dat te doen is natuurlijk

$$\prod_{i=1}^{n}(\sigma_i-1)!$$

De bijbehorende tour start met de rode kant vanuit p_1 en kiest in elke knoop de volgende uitgang in de lokale ordening. Het is niet moeilijk in te zien dat dit een Euler tour oplevert. Stel dat we een kant vanuit een punt $q\neq p_1$ niet gebruikt hebben. Volg dan het blauwe pad vanuit q. Zeg dat q' de opvolger is van q. Dus (q,q') is een blauwe kant die vertrekt uit q. Aangezien er een inkomende kant in q' niet is gebruikt, is ook de blauwe (laatste) uitgaande kant uit q' niet gebruikt. We kunnen dus vanuit q' ons pad voortzetten. Dit pad moet eindigen in p_1 omdat de blauwe kanten een opspannende boom gericht naar p_1 vormen. Daar vinden we een tegenspraak; er is een blauwe kant die in p_1 binnenkomt niet gebruikt, en dus zijn nog niet alle uitgangen vanuit p_1 op, d.w.z., gebruikt in de Euler-tour.

Dit bewijst de stelling. □

Opmerking 7. *De stelling laat zien dat het aantal Euler-tours in polynomiale tijd te berekenen is. Dit probleem is #P-compleet in ongerichte grafen* [8].

6. De De Bruijn-Erdös stelling uit de grafentheorie

In 1951 verschijnt dan het tweede artikel van De Bruijn en Erdös wat bekendheid krijgt als de 'De Bruijn - Erdös stelling'. De Bruijn is intussen werkzaam bij de universiteit Delft. Het onderwerp betreft hier een knopenkleuring van oneindige grafen.

Definitie 5. *Zij $k \in \mathbb{N}$. Een k-kleuring van een graaf G is een toekenning van een kleur aan iedere knoop, uit een verzameling van k kleuren, zodanig dat de twee eindpunten van elke kant een verschillende kleur krijgen.*

Stelling 10. *Zij $k \in \mathbb{N}$. Een graaf G is k-kleurbaar dan en slechts dan als elke eindige deelgraaf van G k-kleurbaar is.*

In het korte artikel stellen de auteurs dat Stelling 10 een gevolg is van de stelling van Rado [66]. Rado's stelling is, op zijn beurt, een eenvoudige toepassing van Tychonoff's stelling [45].

In het artikel van De Bruijn en Erdös wordt Rado's stelling als volgt gepresenteerd.

Stelling 11 (Rado's stelling [66, 45])**.** *Zij M en M_I willekeurige verzamelingen. Stel dat voor elke $i \in M_I$ een eindige deelverzameling $A_i \subset M$ gegeven is. Neem aan dat er voor elke eindige deelverzameling $N \subset M_I$ een keuze-functie $f_N : N \to M$ gegeven is die aan elk element $i \in N$ een element uit A_i toekent:*

$$f_N(i) \in A_i.$$

Dan bestaat er een keuze-functie $f : M_I \to M$, met $f(i) \in A_i$ als $i \in M_I$, met de volgende eigenschap. Voor elke eindige deelverzameling $K \subset M_I$ is er een eindige deelverzameling N met $K \subset N \subset M_I$ zodanig dat

$$f(i) = f_N(i) \quad \textit{voor elk element } \; i \in K.$$

Het artikel van De Bruijn en Erdös laat vervolgens zien dat Stelling 10 eenvoudig volgt uit Rado's stelling.

BEWIJS. [Van Stelling 10.] Laat M de verzameling zijn van de k kleuren en laat M_I de verzameling knopen zijn van de graaf G. Neem voor elke knoop $i \in M_I$ de deelverzameling A_i gelijk aan M. Met elke eindige verzameling knopen $N \subset M_I$ correspondeert een geïnduceerde deelgraaf G_N. De aanname is dat al die eindige deelgrafen G_N k-kleurbaar zijn. Dat wil zeggen dat er een functie $f_N : N \to M$ is die G_N kleurt.

De keuze-functie $f : M_I \to M$, die volgt uit Rado's stelling, kleurt G. Om dat in te zien, laat $e = \{x, y\}$ een kant zijn van G. We laten zien dat f verschillende kleuren toekent aan x en y. Laat $K = e = \{x, y\}$. Laat N een eindige deelverzameling zijn van M_I met

$$K \subset N \subset M_I \quad \text{zodanig dat } f(z) = f_N(z) \text{ voor alle } z \in K.$$

Aangezien f_N een k-kleuring is van de eindige deelgraaf G_N die de kant $e = \{x, y\}$ bevat, geldt dat $f_N(x) \neq f_N(y)$ en dus ook $f(x) \neq f(y)$.

Dit bewijst de stelling. □

Het artikel [33] past Stelling 10 vervolgens toe om de volgende stelling te bewijzen. We hebben de volgende definitie nodig.

Definitie 6. *Laat S een verzameling zijn en laat voor elke $s \in S$ een deelverzameling $f(s)$ van $S \setminus \{s\}$ gegeven zijn. Twee elementen b en c van S heten onafhankelijk als*

$$b \in S \setminus f(c) \quad \textit{en} \quad c \in S \setminus f(b).$$

Een deelverzameling $A \subset S$ heet onafhankelijk als elk tweetal elementen in A onafhankelijk zijn.

Een toepassing van Stelling 10 levert de volgende stelling op.

Stelling 12. *Zij $k \in \mathbb{N}$ en neem aan dat $|f(s)| \leqslant k$ voor alle $s \in S$. Dan is S de vereniging van $2k + 1$ onafhankelijke verzamelingen.*

Opmerking 8. *Merk op dat de 4-kleurenstelling voor planaire grafen met behulp van Stelling 10 uit te breiden is naar oneindige planaire grafen. Verder kan de stelling bijvoorbeeld gebruikt worden (op soortgelijke wijze als hierboven) om de volgende uitbreiding van Dilworth's stelling naar oneindige partieel geordende verzamelingen te verkrijgen. Een (eventueel oneindige) partieel geordende verzameling heeft een eindige breedte w dan en slechts dan als de verzameling op te delen is in w ketens.*

7. Wortelbomen in het platte vlak

In een artikel uit 1964 laten Harary, Prins en Tutte zien dat een tweetal klassen van bomen dezelfde voortbrengende functie hebben en ze brengen een één-éénduidige relatie tussen de twee klassen tot stand [49]. De beschrijving van die relatie is nogal ingewikkeld en De Bruijn en Morselt laten zien dat het ook heel gemakkelijk kan; en wel op drie verschillende manieren [35].

Definitie 7. *Een platte wortelboom is een boom met een wortel die is ingebed in het platte vlak en waarbij een ordening van de uitgaande takken uit de wortel gegeven is.*

In de volgende stelling leiden we de voortbrengende functie af voor het aantal platte wortelbomen met n knopen.

Stelling 13. *Laat de voortbrengende functie voor het aantal platte wortelbomen gegeven zijn door*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$$

waar c_n het aantal platte wortelbomen met n punten is. Dan voldoet f aan

$$f(x) = x + f(x)^2. \tag{8}$$

Voor de coëfficiënten c_n geldt

$$c_n = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!n!} \quad \textit{oftewel} \quad c_{n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

BEWIJS. Een platte wortelboom T bestaat óf uit slechts een punt, óf er is een eerste kant, vanuit de wortel die een platte wortelboom draagt met, zeg k, punten. De rest van de boom T, inclusief de wortel, is dan een platte wortelboom met $n-k$ punten. Dit bewijst dat het polynoom f voldoet aan de functionaal vergelijking (8) en hieruit volgt dat

$$f(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}. \tag{9}$$

Uit de reeksontwikkeling van $\sqrt{1-4x}$ is gemakkelijk af te leiden dat c_n het $(n-1)^{\text{ste}}$ Catalan getal is. □

Definitie 8. *Een binaire platte wortelboom is een platte wortelboom die ofwel uit slechts een punt bestaat ofwel een wortel van graad twee heeft en waarin dan elke andere knoop graad 1 of graad 3 heeft.*

Stelling 14. *Als $g(x)$ de voortbrengende functie is van de binaire platte wortelbomen, dan geldt*

$$g(x) = \frac{f(x^2)}{x}. \tag{10}$$

BEWIJS. Een binaire platte wortelboom heeft óf maar een punt, óf heeft een wortel met daaruit twee takken. Die twee takken dragen vervolgens binaire platte wortelbomen. Dit bewijst dat het polynoom g voldoet aan

$$g(x) = x + xg(x)^2 \quad \Rightarrow \quad g(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{2x}. \tag{11}$$

Laat nu $h(x) = f(x^2)/x$. Dan volgt uit (8) dat

$$h(x) = x(1 + h(x)^2).$$

Dus de oplossing voor (11) is $g(x) = h(x)$.

Men kan natuurlijk (10) ook afleiden uit (9) en (11). □

Gevolg 2. *Het aantal platte wortelbomen met n knopen is gelijk aan het aantal binaire platte wortelbomen met $2n-1$ knopen, dat wil zeggen, n knopen van graad 1, $n-2$ van graad 3 en één wortel.*

We tonen Gevolg 2 op een tweede manier aan.

We beginnen weer met de platte wortelbomen. Stel dat een luis van links naar rechts loopt, over de boom. Bij elke tak roept hij, of zij, of hij naar boven loopt of naar beneden. We krijgen dan van de luis een zogenaamde 'updown code' door.

Bijvoorbeeld, bij een platte wortelboom die geen enkele kant heeft roept de luis niets. Een platte wortelboom met twee knopen heeft ook slechts één mogelijke code, namelijk 'UD'. Er zijn twee mogelijke platte wortelbomen met drie knopen. De twee mogelijke codes zijn 'UUDD' en 'UDUD'.

We kunnen de algemene vorm van een UD-code weergeven met de Backus-Naur Form grammatica. Dat wil zeggen, een UD-code ziet er in het algemeen uit als volgt.

$$< UD - code >::= |U < UD - code > D < UD - code >$$

Het is of een leeg woord, of het begint met een 'U', gevolgd door een willekeurige UD-code en dan een 'D', gevolgd door weer een willekeurige UD-code.

Opmerking 9. *Laat d_i het aantal U's zijn die komen na de $(i-1)^{\text{ste}}$ D en voor de i^{de} D. De rij partiële sommen voldoen dan aan*

$$d_1 \geqslant 1 \quad d_1+d_2 \geqslant 2 \quad d_1+d_2+d_3 \geqslant 3 \quad d_1+\cdots+d_n = n.$$

Het aantal mogelijke rijtjes van dit soort partiële sommen wordt gegeven door de Catalan getallen.

De platte binaire wortelbomen kunnen we coderen we met een zogenaamde 'knoop-eind code'. De luis loopt weer over de platte boom van links naar rechts. Bij elke knoop roept de luis of het een interne knoop is, zeg 'K', of een blad, zeg 'E'. Echter, hij roept dat alléén maar tijdens de éérste keer dat hij de knoop ziet!

Bijvoorbeeld, als de boom slechts uit een wortel bestaat roept de luis alleen 'E'. Als de boom bestaat uit een wortel met twee bladeren, roept hij 'KEE'. Er twee mogelijke platte binaire wortelbomen met vijf knopen. De codes zijn 'KKEEE' en 'KEKEE'.

De KE-code eindigt altijd met een 'E'. Als we die weglaten krijgen we de zogenaamde afgekorte KE-code, ofwel de 'aKE-code'.

Als we de KE-code met de Backus-Naur grammatica weergeven krijgen we de volgende formule.

$$< KE - code >::= E|K < KE - code >< KE - code >$$

De vorm voor de afgekorte KE-code is dus

$$\begin{aligned} < aKE > \quad &::= \quad |K < KE - code >< aKE - code > \\ &::= \quad |K < aKE > E < aKE > \end{aligned}$$

en we zien dus dat de grammatica's voor de aKE-code en de UD-code identiek zijn.

Opmerking 10. *Het artikel van De Bruijn en Morselt laat ook nog op een derde manier de overeenkomst tussen de twee soorten bomen zien, namelijk door middel van een simpel plaatje dat, in feite, alles zegt. We verwijzen verder ook naar* [63] *voor een aardige beschrijving van het een en ander.*

Tutte liet het trouwens niet op zich zitten; die kwam een paar jaar later met de telling van 'platte grafen' [79]. *Daarin noemt hij wel nog het artikel van Harary, Prins en zichzelf, maar niet dat van De Bruijn en Morselt.*

Opmerking 11. *In 1972 verschijnt nog een artikel van De Bruijn over platte wortelbomen. Het krijgt een behoorlijke invloed in de loop der tijd vanwege toepassingen, onder andere in de informatica. Dit keer is het geschreven samen met Knuth en Rice en gaat het over de gemiddelde hoogte van platte wortelbomen met n knopen. Na een fikse rekenpartij is het resultaat de volgende stelling.*

Stelling 15. *Gemiddeld genomen over alle platte wortelbomen met n knopen is de hoogte*

$$\sqrt{\pi \cdot n} - \frac{1}{2} + O(n^{-1/2} \log n) \quad (n \to \infty).$$

8. Permutaties met een vaste vorm

Permutaties van een bepaalde vorm worden al meer dan 120 jaar bestudeerd [3, 4, 59, 74]. Over de alternerende permutaties is natuurlijk het meest bekend. Een permutatie $[a_1, \dots, a_n]$ heet alternerend als

$$a_1 > a_2 < a_3 > a_4 < \dots \tag{12}$$

en als de tekens de andere kant op staan heet de permutatie omgekeerd alternerend. Als E_n het aantal alternerende permutaties is dan geldt voor de voortbrengende functie [3, 75]

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{\infty} E_n \frac{x^n}{n!} &= \sec(x) + \tan(x) = \frac{1}{\cos(x)} + \tan(x) = \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + 2\frac{x^3}{3!} + 5\frac{x^4}{4!} + 16\frac{x^5}{5!} + 61\frac{x^6}{6!} + \dots\end{aligned} \tag{13}$$

Ook geldt de recurrente betrekking

$$E_{n+1} = \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \text{ odd}}} \binom{n}{j} E_j E_{n-j} \quad \text{voor } n \geqslant 1.$$

Een asymptotische benadering is [5, 75]

$$\frac{E_n}{n!} = \frac{4}{\pi}\left(\frac{2}{\pi}\right)^n + O\left(\left(\frac{2}{3\pi}\right)^n\right).$$

MacMahon stelt in 1908 voor om de algemene vorm van een permutatie te bestuderen.

Definitie 9. *Zij $n \in \mathbb{N}$. Laat*

$$Q = (q_1, \dots, q_{n-1})$$

een vector zijn met alle componenten $q_i \in \{-1, +1\}$. Een permutatie

$$\pi = [\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n]$$

van $\{1, \dots, n\}$ heeft de vorm Q als

$$q_i(\pi_{i+1} - \pi_i) > 0 \quad \textit{voor alle } \; i \in \{1, \dots, n-1\}.$$

Het aantal permutaties van de vorm Q geven we aan met $\psi(Q)$.

Niven leidt in [64] een formule af voor $\psi(Q)$ in de vorm van een determinant (de formule staat ook op [60, Pagina 190]). De Bruijn leidt recurrente betrekkingen af voor het aantal permutaties van de vorm Q die eindigen met een bepaald cijfer [21].

Definitie 10. *Laat Q een vorm zijn voor permutaties van de graad n, dat wil zeggen, we beschouwen een deelverzameling van S_n, de groep permutaties van*

$$\{1, \dots, n\}.$$

Laat $1 \leqslant j \leqslant n$. Definieer $\theta(Q; j)$ als het aantal permutaties $[a_1, \dots, a_n]$ van de vorm Q met $a_n = j$.

Er geldt natuurlijk

$$\sum_{j=1}^{n} \theta(Q; j) = \psi(Q).$$

Lemma 3. *Laat $Q = \{q_1, \dots, q_{n-1})$ een vorm zijn en definieer*

$$(Q, 1) = (q_1, \dots, q_{n-1}, 1).$$

Dan geldt $\theta((Q, 1); 1) = 0$ en, voor $1 < j \leqslant n + 1$

$$\theta((Q, 1); j) = \sum_{1 \leqslant h < j} \theta(Q; h). \tag{14}$$

BEWIJS. Voor een permutatie

$$\alpha = [a_1, \dots, a_{n+1}]$$

definieer $\ell(\alpha) = a_{n+1}$. Definieer $\pi(\alpha)$ als de permutatie van $\{1, \dots, n\}$ die men krijgt door 1 af te trekken van elke a_i met $1 \leqslant i \leqslant n$ die groter is dan a_{n+1}. Bijvoorbeeld,

$$\alpha = [2, 4, 5, 1, 6, 3] \quad \Rightarrow \quad \pi(\alpha) = [2, 3, 4, 1, 5].$$

Als α de vorm $(Q, 1)$ heeft dan heeft $\pi(\alpha)$ de vorm Q. Ook geldt dan dat

$$1 \leqslant \ell(\pi(\alpha)) < \ell(\alpha).$$

Zij nu β een permutatie van $\{1, \dots, n\}$ van de vorm Q met $\ell(\beta) < j$. Er is precies één permutatie α van $\{1, \dots, n+1\}$ van de vorm $(Q, 1)$ met $\ell(\alpha) = j$ en $\pi(\alpha) = \beta$. Tel namelijk 1 op bij elk element wat groter is dan $j - 1$, en zet een j op het eind.

Dit bewijst (14). $\square$

Lemma 4. *Laat* $Q = (q_1, \dots, q_{n-1})$ *een vorm zijn en definieer*

$$(Q, -1) = (q_1, \ \dots, \ q_{n-1}, \ -1).$$

Dan is $\theta((Q,-1); n+1) = 0$ *en voor* $1 \leqslant j \leqslant n$

$$\theta((Q,-1); j) = \sum_{j-1<h\leqslant n} \theta(Q; h). \tag{15}$$

BEWIJS. Merk op dat $\theta(Q; k) = \theta(-Q; n+1-k)$ en dus

$$\theta((Q,-1); j) = \theta((-Q, 1); n+2-j).$$

De Formule (15) volgt nu uit (14). □

De Lemmas 3 en 4 leiden tot een eenvoudig algoritme om $\psi(Q)$ uit te rekenen voor een gegeven vorm Q. Dit algoritme vergt $O(n^2)$ stappen. De Bruijn bescrhijft dit algoritme in [21].

Niven bewees in zijn artikel ook dat voor alle $n \in \mathbb{N}$

$$\psi(Q) < \psi(Q_0) = \psi(-Q_0) \tag{16}$$

tenzij $Q = Q_0$ of $Q = -Q_0$ is, waarbij Q_0 de vorm is van een alternerende permutatie (12), dat wil zeggen,

$$Q_0 = (1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^n).$$

Een algoritme voor het bepalen van $\psi(Q_0)$, 'het Euler getal', was eerder al eens beschreven door Entringer [40]. De Bruijn komt door een analyse van zijn algoritme (wat veel lijkt op Entringer's algoritme) tot een eenvoudig bewijs voor dezelfde ongelijkheid (16).

Viennot doet het allemaal nog eens over in 1979 [83]. Hij beweert dat zijn algoritme het eenvoudigst is, maar het is van hetzelfde laken een pak. Viennot bewijst ook Niven's ongelijkheid (16) nog een keer.

Opmerking 12. *De Bruijn geeft, in een appendix, de ALGOL-60 code voor zijn algoritme. Dit algoritme is getest op de Electrologica-X8 machine van de THE (een machine die gemaakt werd in Nederland). Het programma is gedraaid voor alle* 2^n *vormen van permutaties met* $n \leqslant 9$. *ALGOL is een programmeertaal die ontwikkeld werd door een internationaal team, waaronder exponenten Bakus, Naur en Dijkstra. Het operating system voor de Electrologica-X8 was het 'THE multiprogramming system', ontwikkeld door een team geleid door Dijkstra. De enige programmeertaal die ondersteund werd door Dijkstra's operating system was ALGOL-60.*

9. Het bedekken van grafen met dimeren

Definitie 11. *Zij* (G, Γ) *een graaf. Een bedekking van* G *met dimeren is een deelverzameling* Γ' *van kanten zodanig dat elke knoop een eindpunt is van precies één kant in* Γ'.

Natuurlijk kan niet elke graaf bedekt worden met dimeren. Een noodzakelijke voorwaarde is dat het aantal knopen even is maar dat is in het algemeen niet voldoende.

Zij (G, Γ) een graaf met n knopen. Voor het gemak, stel dat

$$G = \{1, \dots, n\}.$$

Een cykelbedekking van G is een verzameling van cykels die onderling knoop-disjunct zijn en die samen alle knopen van G bevatten. We laten hier ook cykels van lengte twee toe; dit zijn cykels die bestaan uit één kant.

In een cykelbedekking heeft elke knoop i precies één 'opvolger', zeg $\sigma(i)$, waarbij

$$\sigma \in S_n$$

dan een permutatie is van $\{1, \dots, n\}$. Om het begrip van een 'opvolger' te vangen vatten we elke kant van G op als een vereniging van twee gerichte kanten; voor elke kant $\{i, j\} \in \Gamma$ zijn er dan twee gerichte kanten; (i, j) en (j, i). Geef elke gerichte kant (i, j) een gewicht, zeg $a_{i,j}$, en definieer het gewicht van een cykelbedekking met bijbehorende permutatie σ, als

$$\text{gewicht van } \sigma = \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}.$$

Beschouw de verbindingsmatrix A van G en vervang elke 1 door een gewicht $a_{i,j}$. Dan is de permanent van A

$$\text{permanent van } A = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}.$$

Met andere woorden, de permanent van A telt de gewichten van alle cykelbedekkingen van G op.

Opmerking 13. *Voor een bipartiete graaf is het aantal bedekkingen met dimeren gelijk aan de permanent van de bipartiete verbindingsmatrix.*

Opmerking 14. *Het lijkt erop dat het berekenen van de permanent van een matrix veel moeilijker is dan het berekenen van de determinant. Het berekenen van de permanent is namelijk #P-volledig* [81]. *Dit houdt onder meer in dat uit het bestaan van een polynomiaal algoritme* P = NP *volgt. Via een formule van Ryser kan de permanent van een* $n \times n$ *matrix berekend worden in* $O(2^n n)$ *tijd* [71] *en er is op het moment niet veel beters* [7].

Kasteleyn vond in 1961–1963 dat het aantal bedekkingen van een planaire graaf met dimeren berekend kan worden met behulp van de Pfaffiaan van een bepaalde antisymmetrische matrix [51, 52]. In het artikel [50] laat hij dat eerst zien voor rechthoekige roosters. Onafhankelijk van Kasteleyn laten ook Temperley en Fisher zien dat het aantal bedekkingen van rechthoekige roosters met dimeren uitgedrukt kan worden in Pfaffianen [78]. De reden is dat een planaire graaf op een bepaalde manier, zogenaamd 'Pfaffiaans', georiënteerd kan worden. Een dergelijke Pfaffiaanse oriëntatie brengt het probleem terug tot het uitrekenen van een determinant. We beschijven de manier waarop De Bruijn dit laat zien in [29].

Definitie 12. *Zij* (G, Γ) *een graaf en laat* $G = \{1, \ldots, n\}$*. Neem aan dat elke kant* $\{i, j\}$ *een gewicht* $b_{i,j}$ *heeft, waarbij we aannemen dat*

$$b_{i,j} = b_{j,i}.$$

Een circuit is een deelverzameling van kanten, met ten minste één element, die cyclisch geordend kunnen worden als

$$[\{i_1, i_2\}, \{i_2, i_3\}, \ldots, \{i_{k-1}, i_k\}, \{i_k, i_1\}], \tag{17}$$

en waarbij $i_1, \ldots, i_k$ *allemaal verschillend zijn.*[4] *De lengte van het circuit is* k*. Het gewicht van het circuit is*

$$\prod_{\ell=1}^{k} b_{i_\ell, i_{\ell+1}} \quad \textit{waarin} \quad i_{k+1} = i_1. \tag{18}$$

Merk op dat een circuit van lengte twee bestaat uit één kant $\{i, j\}$ en dat het gewicht van zo'n cykel $b_{i,j}^2$ is.

Een circuitbedekking is een verzameling circuits waarvan de knopen een partitie van G vormen. Als alle circuits in een circuitbedekking lengte twee hebben is het dus een bedekking met dimeren. Het gewicht van een circuitbedekking is het product van de gewichten van de circuits erin. Ingeval het een bedekking met dimeren betreft noemen we de wortel uit het gewicht het wortelgewicht.

Definitie 13. *Een oriëntatie van een graaf* (G, Γ) *is een antisymmetrische* $n \times n$ *matrix* ϵ *met elementen* $\epsilon_{i,j}$ *die voldoen aan*

$$\epsilon_{i,j} = \begin{cases} 0 & : \quad \textit{als } \{i,j\} \notin \Gamma, \textit{ en} \\ -1 \quad \textit{of} \quad +1 & : \quad \textit{als } \{i,j\} \in \Gamma, \textit{ en wel zodanig dat } \epsilon_{i,j} = -\epsilon_{j,i}. \end{cases}$$

Het teken van een circuit van even lengte zoals gegeven in (17) is

$$-\epsilon_{i_1,i_2} \cdot \epsilon_{i_2,i_3} \cdot \cdots \cdot \epsilon_{i_k,i_1} \tag{19}$$

Merk op dat dit teken niet afhangt van de gekozen orientatie omdat het circuit even is. Merk ook op dat een circuit van lengte twee altijd een positief teken heeft.

Definitie 14. *Een oriëntatie is Pfaffiaans als in elke circuitbedekking met even circuits alle circuits een positief teken hebben.*

Stelling 16. *Zij* ϵ *een Pfaffiaanse oriëntatie van een graaf* (G, Γ)*. Laat*

$$S = \sum_{\beta} \rho(\beta) \tag{20}$$

waarin gesommeerd wordt over alle bedekkingen met dimeren β *en waarin* $\rho(\beta)$ *het wortelgewicht is van zo'n bedekking. Dan geldt*

$$S^2 = \det(A) \tag{21}$$

waarby A *de antisymmetrische matrix is met elementen*

$$a_{i,j} = \epsilon_{i,j} \cdot b_{i,j}.$$

BEWIJS. Natuurlijk is

$$S^2 = \sum_{(\beta_1, \beta_2)} \rho(\beta_1)\rho(\beta_2)$$

waarbij gesommeerd wordt over alle geordende paren (β_1, β_2) van bedekkingen met dimeren. Als β_1 en β_2 bedekkingen zijn met dimeren dan is de vereniging $\beta_1 \cup \beta_2$ een circuitbedekking met even circuits. De kanten in de circuits van lengte > 2 zijn om en om kanten van β_1 en kanten van β_2.

Omgekeerd, zij γ een circuitbedekking met even circuits. Zij $\nu(\gamma)$ het aantal circuits in γ van lengte > 2. Dan zijn er $2^{\nu(\gamma)}$ manieren om paren β_1 en β_2 te kiezen. Als een circuit van γ lengte twee heeft dan kiezen we die kant natuurlijk zowel in β_1 als in β_2.

Hiermee is bewezen dat

$$S^2 = \sum_{\gamma} 2^{\nu(\gamma)} w(\gamma)$$

waarin gesommeerd wordt over alle circuitbedekkingen met even circuits en waarin $w(\gamma)$ het gewicht is van γ.

Volgens de Leibniz formule is de determinant van A gelijk aan

$$\text{determinant } A = \sum_{\pi \in S_n} \mathrm{sgn}(\pi) \cdot a_{1,\pi(1)} \ldots a_{n\pi(n)} \tag{22}$$

waar gesommeerd wordt over alle permutaties $\pi \in S_n$. De factor $\mathrm{sgn}(\pi)$ is 1 of -1 al naargelang het aantal even cykels in π even of oneven is. Als $\{i, \pi(i)\} \notin \Gamma$ dan kunnen we π weglaten uit de sommatie, want $b_{i,\pi(i)} = 0$. In het bijzonder laten we alle permutaties π buiten beschouwing waarvoor $\pi(i) = i$ voor de een of andere knoop i.

Elke permutatie splitst uit naar een of meer cykels. Voor de permutaties die we beschouwen vormen de cykels circuits in G voorzien van een bepaalde omlooprichting. Voor de circuits van lengte > 2 zijn er twee mogelijke omlooprichtingen. Als γ een circuitbedekking is met even circuits dan zijn er $2^{\nu(\gamma)}$ omlooprichtingen en die corresponderen met verschillende permutaties π.

Als we de omlooprichting van een oneven circuit omkeren, dan wisselt het teken in (22) want de matrix A is antisymetrisch. Dus circuitbedekkingen die een oneven circuit bevatten doen elkaar paarsgewijs teniet.

We beweren nu dat de termen in (22), die horen bij een en dezelfde even circuitbedekking γ, allemaal gelijk zijn aan

$$w(\gamma) = b_{1,\pi(1)} \ldots b_{n,\pi(n)}.$$

Namelijk, $\mathrm{sgn}(\pi)$ is het produkt van een aantal -1 termen wat gelijk is aan het aantal (even) circuits. Omdat γ Pfaffiaans is geldt dat elk circuit in een even circuitbedekking

[4] Een 'circuit' is hier dus equivalent met een 'cykel', zoals we dat hier boven beschreven. Het gebruik van beide begrippen zoals hier is ongebruikelijk.

$+1$ is, dus het produkt van de ϵ's in elk circuit in γ is, volgens (19), -1. □

In de rest van het artikel [29] schetst De Bruijn het bewijs van Kasteleyn [51, 52] dat alle planaire grafen een Pfaffiaanse oriëntatie hebben. Het komt erop neer dat er een oriëntatie nodig is die voor elke even cykel C waarvoor $G \setminus C$ een bedekking heeft met dimeren, voor elke omlooprichting van C, het aantal kanten van C waarvan de oriëntatie samenvalt met de omlooprichting oneven is.

Opmerking 15. *Beschouw een planaire graaf* (G, Γ) *die ligt ingebed in het platte vlak. Er is een oriëntatie van* G *zódanig dat de begrenzing van elk eindig gebied een oneven aantal kanten heeft wat met de klok meedraait. Dit is een Pfaffiaanse oriëntatie.*

Om een dergelijke oriëntatie te vinden kan men, ruwweg, als volgt te werk gaan. Neem een opspannende boom T *en oriënteer de kanten van* T *willekeurig. Neem een tweede opspannende boom* T' *op de duale van* G *door twee aangrenzende gebieden te verbinden door een kant in* T' *als de grens géén kant is in* T. *Kies het buitengebied als wortel van* T'.

Start nu met de bladeren van T' *en werk naar de wortel toe. Onderweg, oriënteer de kanten in* G *die corresponderen met de kanten van* T' *zódanig dat elke gebied een oneven totaal aantal kanten krijgt wat met de klok meedraait.*

Volgens Kasteleyn heeft een oriëntatie zoals hierboven beschreven de eigenschap dat voor elke cykel de pariteit van het aantal kanten wat met de klok meedraait tegengesteld is aan de pariteit van het aantal knopen wat is ingesloten door de cykel. Als de cykel onderdeel uitmaakt van een circuitbedekking met even circuits dan is het aantal punten wat ingesloten is natuurlijk even en dat is dus volgens Kasteleyn precies het geval als de cykel een oneven aantal kanten heeft wat met de klok meedraait.

De Bruijn geeft aan dat het bewijs voor het bestaan van een dergelijke oriëntatie terug te brengen is tot dat voor veelhoeken die opgedeeld zijn in driehoeken. Voor deze laatste klasse van grafen is, volgens De Bruijn, gemakkelijk met inductie naar het aantal kanten te bewijzen dat ze een Pfaffiaanse oriëntatie hebben. De inductiestap is het weglaten van één kant van de buitenste rand van de veelhoek.

Als de graaf een 'duale' heeft dan volgt Kasteleyn's stelling ook uit het volgende lemma van Little, toegepast op de duale graaf [56, Lemma 1].

Lemma 5. *Laat* (G, Γ) *een eindige, samenhangende graaf zijn en laat* $v \in G$. *Dan is er een oriëntatie van* G *zodanig dat elke knoop behalve* v *een oneven uitgraad heeft.*

BEWIJS. Laat ϵ een oriëntatie zijn zodanig dat het aantal knopen in $G \setminus \{v\}$ wat een even uitgraad heeft minimaal is. Stel dat er een knoop $u \neq v$ is met een even uitgraad. Aangezien G samenhangend is, is er een pad P van u naar v in (G, Γ). Keer in elke kant $\{i, j\}$ in P het teken $\epsilon_{i,j}$ om. Dat verandert de pariteit van de uitgraad alléén voor de knoop $u \in G \setminus \{v\}$. □

Opmerking 16. *In* [57] *geeft Little een bewijs voor de stelling dat een graaf die geen deelgraaf heeft die homeomorf is met* $K_{3,3}$, *een Pfaffiaanse oriëntatie heeft.*

Laat A een vierkante matrix zijn met elementen 0 en 1. Laat B een matrix zijn die verkregen is uit A door enkele enen in A te vervangen door -1. Dan heet B een Pólya-matrix voor A als

permanent van A = determinant van B. Zie [65].

Vazirani en Yannakakis bewijzen de volgende stelling [82].

Stelling 17. *Een bipartiete graaf* G *heeft een Pfaffiaanse oriëntatie dan en slechts dan als de bipartiete verbindingsmatrix een Pólya-matrix heeft.*

Opmerking 17. *In* [58] *geeft Little een nodige en voldoende voorwaarde opdat een bipartiete graaf een Pfaffiaanse oriëntatie heeft. Robertson, Seymour en Thomas geven een structurele karakterisering, wat leidt tot een polynomiaal herkenningsalgoritme* [70].

10. Factorisaties van eindige groepen

De Bruijn geeft aan, in zijn inleiding op het dictaat combinatoriek, dat de groepentheorie niet tot de combinatoriek behoort [63]. (Volgens van Lint behoort de groepentheorie, alsook de combinatoriek, tot de discrete wiskunde [55].) De grenzen van de combinatoriek zijn vaag, en wellicht kan combinatoriek nog het best gedefinieerd worden als dat wat De Bruijn onderwees en wat beschreven wordt in zijn college dictaat [63].

Maar alle gekheid op een stokje! Ik wil toch enkele belangrijke resultaten in de groepentheorie van De Bruijn noemen.

In 1953, De Bruijn is dan werkzaam bij de Universiteit van Amsterdam, verschijnen er twee artikelen over de factorisatie van eindige groepen. Deze artikelen hebben tot op de dag van vandaag een behoorlijke invloed (zie bijvoorbeeld [2, 37, 72, 73, 77]) en ik wil iets ervan kort beschrijven.

In dit hoofdstuk is een groep synoniem met een eindige abelse groep.

Als G een direct product is van cyclische groepen van orde 2^3, 2 en 5 dan zeggen we dat G van het type $\{2^3, 2, 5\}$ is. Laat G een groep zijn en laat A en B deelverzamelingen van G zijn. We schrijven $G = AB$ als elk element g van G op een unieke manier te schrijven is als $g = ab$ met

$a \in A$ en $b \in B$. In dat geval zeggen we dat $G = AB$ een ontbinding is van G in factoren A en B. Als H_1 en H_2 subgroepen zijn van G dan betekent $G = H_1H_2$ dat G het directe product is van H_1 en H_2.

Als A een deelverzameling is van een groep G en als $g \in G$ is dan schrijven we

$$Ag = \{\, ag \mid a \in A \,\}.$$

Een deelverzameling A van een groep G heet periodiek als er een element $g \in G$, $g \neq e$, is zodat $Ag = A$. Als A en B twee deelverzamelingen zijn van G dan schrijven we

$$AB = \{\, ab \mid a \in A \quad b \in B \,\} \quad \text{alléén als } |AB| = |A| \cdot |B|.$$

Dat wil zeggen, we gebruiken de notatie AB alléén als elk element van AB op een unieke manier te schrijven is als ab ($a \in A$ en $b \in B$).

Een conjecture van Minkowski werd bewezen door Hajós met behulp van de volgende stelling.

Stelling 18 (Hajós' stelling [46])**.** *Stel dat G een eindige abelse groep is en stel dat G een factorisatie $G = A_1 \cdots A_m$ heeft waarbij elke factor A_i van de volgende vorm is.*

$$A_i = \{\, e,\ a_i,\ a_i^2, \ldots,\ a_i^{m_i} \,\}.$$

Dan is tenminste één van de A_i's periodiek.

De stelling van Hajós leidde hem (en ook De Bruijn) tot de volgende vraag:

> Als G een groep is, met een ontbinding in factoren $G = AB$, is dan altijd tenminste een van de factoren periodiek?

Het antwoord (van Hajós) is 'nee' en dit leidde tot de vraag welke groepen die 'Hajós eigenschap' hebben.

Definitie 15. *Een eindige abelse groep G heeft de Hajós eigenschap als voor elke ontbinding $G = AB$ van G in factoren A en B, tenminste een factor A of B periodiek is.*

Het antwoord is intussen bekend; Sands geeft de volgende karakterisering [72] (met belangrijke bijdragen van De Bruijn en Rédei [68]).

Stelling 19. *Een eindige abelse groep G heeft de Hajós eigenschap als G isomorf is met een subgroep van een groep die van een van de volgende types is, waarbij $p < q < r < s$ priemgetallen zijn en $n \in \mathbb{N}$: $\{p^n, q\}$, $\{p^2, q^2\}$, $\{p^2, q, r\}$, $\{p, q, r, s\}$, $\{p, p\}$, $\{p, 3, 3\}$, $\{3^2, 3\}$, $\{p^3, 2, 2\}$, $\{p^2, 2, 2, 2\}$, $\{p, 2^2, 2\}$, $\{p, 2, 2, 2, 2\}$, $\{p, q, 2, 2\}$, $\{2^n, 2\}$ en $\{2^2, 2^2\}$.*

Voor de cyclische groepen die de Hajós eigenschap hebben werd een karakterisering gevonden in [73] (met behulp van constructies door De Bruijn).

Opmerking 18. *Een nauw verwant probleem is de classificatie van groepen met de Rédei eigenschap. Een groep G heeft de Rédei eigenschap als voor elke ontbinding $G = AB$, met $e \in A \cap B$, tenminste een van A en B bevat is in een echte ondergroep van G (dus $< A > \neq G$ of $< B > \neq G$, waarbij $< A >$ de kleinste ondergroep van G is die A bevat). Voor het gemak zegt men dat $G = \{e\}$ óók de Rédei eigenschap heeft. Er zijn intussen wat resultaten bekend* [37, 76].

11. Pólya's tel-theorie

In 1964 verschijnt een artikel van De Bruijn waarmee hij zich, met allure, op internationaal gebied manifesteert als leermeester in de combinatoriek [18]. Om het een 'overzichtsartikel' te noemen zou dit artikel jammerlijk tekort doen! Het artikel bevat niet alleen een kristalheldere uiteenzetting van Pólya's theorie maar het zit bovendien bomvol voorbeelden, toepassingen, uitbreidingen enz. Dat het in de smaak valt moge trouwens blijken uit het feit dat hij vaak gevraagd wordt het nog eens over te doen, zowel in het Duits, als in het Engels, en Nederlands [22, 23, 28].

Dat De Bruijn een groot bewonderaar is van George Pólya steekt hij niet onder stoelen of banken! In diverse artikelen [15, 16, 19, 24, 27], waarin hij telkens Pólya's stelling op niet-triviale manier uitbreidt, noemt hij Pólya's stelling steevast 'de fundamentele stelling', en ik geloof niet dat hij het *ooit* 'de Redfield-Pólya stelling' genoemd heeft. Zijn 'liefste boek' is, sinds de tijd dat hij bij Philips werkt, Pólya and Szegö's Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis (Springer, 1925) [31]. Zijn twee belangrijke artikelen over Penrose's vlakverdelingen draagt hij op aan Pólya [30].

Het zou te ver gaan om al het werk van De Bruijn met betrekking tot Pólya's tel-techniek hier uiteen te zetten. Veel kan men vinden in Nienhuys' beschrijving van De Bruijn's college *combinatoriek* [63]. Ik beperk me hier tot een korte uiteenzetting van De Bruijn's uitleg van Pólya's stelling zoals hij dat doet in [18] en in [63].

Beschouw een kubus. Er zijn natuurlijk 2^6 manieren om de zijvlakken te kleuren met twee kleuren, zeg wit en zwart. Als we de kubus draaien in de ruimte dan zijn veel van die kleuringen niet meer van elkaar te onderscheiden. Wat zijn de verschillende zwart-wit kleuringen?

1) Alle zijvlakken wit.
2) Één vlak zwart.
3) Twee zwarte zijvlakken die één ribbe delen.
4) Twee zwarte zijvlakken, tegenover elkaar.
5) Drie zwarte zijvlakken, die bij elkaar komen in een hoekpunt.
6) Drie zwarte zijvlakken, in een U-vorm.
7) Twee tegenover elkaar liggende witte zijvlakken.
8) Twee witte zijvlakken die een ribbe delen.
9) Precies één wit zijvlak.
10) Alle zijvlakken zwart.

Als we twee kleuringen van de kubus hetzelfde noemen als de ene in de andere over gaat door een draaiing van de kubus in de ruimte, dan zijn er dus tien verschillende kleuringen.

Het hangt duidelijk af van de groep van draaiingen die de zijvlakken van de kubus in elkaar doet overgaan. We zeggen dat die groep van draaiingen *werkt* op de verzameling D van zijvlakken van de kubus. Dat betekent dat er een homomorfisme is, de 'werking van de groep',

(23) $\pi : G \to S_D$ zodanig dat

$$\forall_{g_1 \in G} \forall_{g_2 \in G}\ \pi(g_1 g_2^{-1}) = \pi g_1 (\pi g_2)^{-1}.$$

Belangrijk is nu het *type* van de draaiing.

Definitie 16. *Elke permutatie $\pi \in S_n$ splitst $\{1, \dots, n\}$ op in een collectie cykels. Het type van de permutatie π is de rij*

$$(b_1(\pi),\ b_2(\pi),\ \dots),$$

waar $b_i(\pi)$ het aantal cyckels is van lengte i.

Als voorbeeld geven we hieronder de verschillende draaiingen van de kubus met het type van de werking op de zijvlakken. Er zijn natuurlijk $6 \times 4 = 24$ verschillende draaiingen.

(a) Alle rotaties over 90°, rond een as die door de middens van twee tegenover elkaar liggende zijvlakken gaat, lijken op elkaar. Het type is $(2, 0, 0, 1, 0, \dots)$ en het aantal draaiingen van dit type is 6.
(b) We kunnen de kubus draaien over 180°, rond eenzelfde as. Het type van zo'n draaiing is $(2, 2, 0, \dots)$. Er zijn 3 van deze draaiingen.
(c) We kunnen de kubus 120° draaien, rond een as door twee diagonaal tegenover elkaar liggende hoekpunten. Het type is $(0, 0, 2, \dots)$ en er zijn er 8 van.
(d) Neem een as door het midden van twee tegenover elkaar liggende ribben, en draai de kubus 180°. Het type is $(0, 3, 0, \dots)$ en er zijn 6 van zulke draaiingen.
(e) Tenslotte moeten we de identieke afbeelding niet vergeten. Er is er een, en het type is natuurlijk $(6, 0, 0, \dots)$.

Ter controle kan men de aantallen optellen; in totaal hebben we

$$24 = 6 + 3 + 8 + 6 + 1 \quad \text{draaiingen.}$$

Definitie 17. *Voor een groep G met een werking π is de cykelindex de veelterm (met variabelen x_1, x_2, enz.)*

(24) $$P_{G,\pi}(x_1, x_2, \dots) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} x_1^{b_1(\pi(g))} x_2^{b_2(\pi(g))} \cdots$$

waarbij $(b_1(\pi(g)), b_2(\pi(g)), \dots)$ het type is van de permutatie $\pi(g)$.

Dus, voor de groep draaiingen van de kubus G, waarbij π de werking is op de zijvlakken D, is de cykelindex, volgens bovenstaande tabel:

$$P_{G,\pi}(x_1, x_2, \dots) = \frac{1}{24}(x_1^6 + 3x_1^2x_2^2 + 6x_1^2x_4 + 6x_2^3 + 8x_3^2).$$

We kunnen de groep draaiingen ook laten werken op de hoekpunten van de kubus. We krijgen dan een andere cykelindex, namelijk

$$P_{G,\pi'}(x_1, x_2, \dots) = \frac{1}{24}(x_1^8 + 9x_2^4 + 6x_4^2 + 8x_1^2x_3^2).$$

De uitwerking op de ribben geeft de volgende cykelindex.

$$P_{G,\pi''}(x_1, x_2, \dots) = \frac{1}{24}(x_1^{12} + 3x_2^6 + 6x_4^3 + 6x_1^2x_2^5 + 8x_3^4).$$

De rechtgeaarde ingenieur pluist natuurlijk allerlei regeltjes uit die helpen bij de controle van zoiets. Bijvoorbeeld is de som van de coëfficiënten altijd 24 (dat wil zeggen, in het algemeen, $|G|$).

Als we willen weten wat het aantal manieren is om de zijvlakken van de kubus met twee kleuren te kleuren, waarbij twee kleuringen hetzelfde zijn als ze in elkaar over gaan door een draaiing van de kubus, dan geeft de stelling van Pólya het antwoord, namelijk,

(25)
$$P_{G,\pi}(2, 2, \dots) = \frac{1}{24}(2^6 + 3 \cdot 2^2 2^2 + 6 \cdot 2^2 2 + 6 \cdot 2^3 + 8 \cdot 2^2)$$
$$\frac{1}{24}(64 + 48 + 48 + 48 + 32) = \frac{240}{24} = 10$$

precies wat we hierboven ook vonden, maar dan met de hand.

We zouden ook geinteresseerd kunnen zijn in het aantal (niet-equivalente) kleuringen van de zijvlakken met twee kleuren, zodanig dat er 4 zwarte en 2 witte zijvlakken zijn. Dat vinden we door voor $x_i = z^i + w^i$ in te vullen. We vinden

(26)
$$\frac{1}{24}((z+w)^6 + 3(z+w)^2(z^2+w^2)^2 + 6(z+w)^2(z^4+w^4) + 6(z^2+w^2)^3 + 8(z^3+w^3)^2).$$

De coëfficiënt van z^4w^2 (4 zwarte en 2 witte zijvlakken) is

$$\frac{1}{24}(15 + 9 + 6 + 18 + 0) = 2.$$

Met andere woorden, volgens de stelling van Pólya kunnen we de zijvlakken van de kubus op 2 manieren met 4 zwarte en 2 witte zijvlakken kleuren. En dat klopt!

Om de stelling van Pólya te bewijzen hebben we een lemma nodig wat vroeger het 'Lemma van Burnside' heette. Door toedoen van De Bruijn [27] heet dat nu het 'Lemma van Cauchy-Frobenius'.

Lemma 6 (Cauchy-Frobenius)**.** *Zij* G *een groep en stel dat* π *de werking is van* G *op een verzameling objecten* D*. Dus* $\pi : G \to S_D$ *is een homomorfisme zodanig dat voor alle* $g_1 \in G$ *en* $g_2 \in G$

(27) $\qquad \pi(g_1g_2) = \pi(g_1)\pi(g_2) \quad en \quad \pi(e) = I_D,$

waarbij π *het eenheidselement* $e \in G$ *afbeeldt op de identieke permutatie* I_D*. Merk trouwens op dat* (27) *hetzelfde is als* (23)*.*

Definieer een equivalentierelatie $\sim$ *op* D *als volgt.*

(28) $\qquad d_1 \sim d_2 \quad \Leftrightarrow \quad \exists_{g\in G}\ \pi(g)d_1 = d_2.$

dan is het aantal equivalentieklassen, $|D/G|$*, gelijk aan*

$$|D/G| \;=\; \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\psi(g), \quad \textit{waarbij}$$

(29) $$\psi(g) \;=\; |\{\, d \in D \mid \pi(g)d = d \,\}|.$$

Dus $\psi(g) = b_1(\pi(g))$, het aantal cykels in $\pi(g)$ ter lengte 1.

BEWIJS. Tel het aantal paren (g, s) met

$$g \in G \quad \text{en} \quad s \in D \quad \text{en} \quad \pi(g)s = s$$

op twee manieren. Voor elke $g \in G$ zijn er $\psi(g)$ elementen $s \in D$ die voldoen. Dus het aantal paren is gelijk aan

$$\nu = \sum_{g\in G}\psi(g).$$

Laat, voor $s \in D$, $\eta(s)$ het aantal $g \in G$ met $\pi(g)s = s$ zijn. Dan geldt dus

(30) $$\sum_{s\in D}\eta(s) = \sum_{g\in G}\psi(g).$$

Voor een $s \in D$ vormen de elementen $g \in G$ waarvoor $\pi(g)s = s$ een ondergroep van G, zeg G_s. Het aantal elementen van die ondergroep is $|G_s| = \eta(s)$.

Als nu $s' \sim s$, dan is het aantal elementen $g \in G$ met $\pi(g)s = s'$ gelijk aan $\eta(s)$, want

$$\pi(h)s' = s \quad \Rightarrow \quad (\ \pi(g)s = s' \quad \Leftrightarrow \quad hg \in G_s\ ).$$

We kunnen G dus opsplitsen in deelverzamelingen met $|G_s|$ elementen zódanig dat elke deelverzameling precies één element van de equivalentieklasse van s bevat. De equivalentieklasse van s bevat dus $\frac{|G|}{\eta(s)}$ elementen. Met andere woorden

$$\eta(s) = \frac{|G|}{\#\,\{\, s' \mid s' \sim s \,\}}.$$

De som over $\eta(s)$ over alle s in één equivalentieklasse is $|G|$. Dus de som van $\eta(s)$ over alle $s \in D$ is gelijk aan $|G|$ maal het aantal equivalentieklassen.

Het lemma volgt nu uit (30). □

Op precies dezelfde manier kunnen we ook een gewogen versie van Cauchy-Frobenius afleiden. Stel dat elk element $d \in D$ een gewicht $\omega(d)$ heeft. Een eis daarbij is wel dat het gewicht constant is op de equivalentieklassen, dat wil zeggen, dat voor elk tweetal elementen

$$d_1 \sim d_2 \quad \Rightarrow \quad \omega(d_1) = \omega(d_2).$$

We kunnen dan het gewicht van een equivalentieklasse definieren als het gewicht van een element uit die klasse.

Lemma 7 (Cauchy-Frobenius met gewichten)**.** *De som van de gewichten van de equivalentieklassen* D/G *is* $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\Psi(g)$*, waarbij*

$$\Psi(g) = \sum_{d\in D}\omega(d)\cdot\nu(\pi(g)d = d).$$

Hier gebruiken we de indicatorfunctie

$$\nu(\text{bewering}) = \begin{cases} 0 & \text{als de bewering onwaar is} \\ 1 & \text{als de bewering waar is.} \end{cases}$$

Definitie 18. *Een kleuring is een functie* $f : D \to R$*, waarbij* R *een verzameling kleuren is, bijvoorbeeld*

$$R = \{\, \textit{wit},\ \textit{zwart}\, \},$$

en waarbij D *de verzameling objecten is die we willen kleuren. In ons voorbeeld is* D *de verzameling zijvlakken van de kubus.*

Zoals al eerder opgemerkt zijn we niet zozeer geïnteresseerd in het aantal kleuringen (dat zijn er 2^6), maar in het aantal *kleurpatronen*. Twee kleuringen zijn equivalent als de ene over gaat in de andere door een draaiing van de kubus, en een kleurpatroon is een equivalentieklasse onder die relatie.

Zij G weer de groep draaiingen van de kubus. De werking van G op de kleuringen is een homomorfisme gedefinieerd als volgt.

(31) $\quad \sigma : G \to S_{R^D} \quad$ gedefinieerd door

$$\sigma(g)f = f \circ \pi(g^{-1}).$$

Laten we eerst even controleren of dit inderdaad een werking is volgens (27) (of (23)).

$$\begin{aligned} \sigma(g_1g_2)f &= f \circ \pi((g_1g_2)^{-1}) \\ &= f \circ \pi(g_2^{-1}g_1^{-1}) \\ &= f \circ \pi(g_2^{-1}) \circ \pi(g_1^{-1}) \\ &= \sigma(g_1)(f \circ \pi(g_2^{-1})) \\ &= (\sigma(g_1)\sigma(g_2))f. \end{aligned}$$

Geef de kleuren een 'gewicht', bijvoorbeeld w en z. Het gewicht van een kleur $r \in R$ geven we aan met $\omega(r)$.

Definitie 19. *Zij* $f : D \to R$ *een kleuring. Het gewicht van* f *is*

$$\Omega(f) = \prod_{d\in D}\omega(f(d)).$$

Bijvoorbeeld, als we de zijvlakken van de kubus kleuren met wit en zwart, dan heeft elke kleuring met 4 zwarte en twee witte zijvlakken hetzelfde gewicht, namelijk $z^4 w^2$.

Als we de kubus draaien, verandert het gewicht niet, met andere woorden, we kunnen het gewicht van een kleurpatroon F definiëren als

$$\Omega(F) = \Omega(f) \quad \text{voor} \;\; f \in F.$$

Stelling 20 (Pólya's Fundamentele Stelling). *De som van de gewichten van de kleurpatronen is*

$$P_{G,\pi}\Big(\sum_{r\in R}\omega(r), \sum_{r\in R}\omega(r)^2, \sum_{r\in R}\omega(r)^3, \dots\Big). \tag{32}$$

In ons voorbeeld krijgen we dus de veelterm (26). Hieruit kunnen we dan bijvoorbeeld het aantal kleurpatronen met twee witte en vier zwarte zijvlakken aflezen. Als we alle gewichten gewoon 1 nemen, krijgen we

$$\sum_{r\in R}\omega(r)^i = |R| \quad \text{voor alle } i.$$

Het totaal aantal kleurpatronen met twee kleuren is dus $P_{G,\pi}(2, 2, \dots) = 10$, zoals in (25).

BEWIJS. [Van Stelling 20.] Volgens Cauchy-Frobenius (met gewichten) geldt

$$\sum_{F\in\{\text{ kleurpatronen }\}}\Omega(F) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\Psi(g),$$

$$\text{waarbij } \Psi(g) = \sum_{f\in R^D}\Omega(f)\cdot\nu(\sigma(f) = f). \tag{33}$$

Laat $g \in G$. Dan splitst de werking $\pi(g)$ van g, D in cykels D_1, D_2, enz. De eis dat $f \circ \pi(g^{-1}) = f$ betekent dat alle cykels D_i egaal gekleurd moeten worden. Dat houdt in

$$\Psi(g) = \sum_{\substack{f\in R^D\\ \sigma(f)=f}}\Omega(f) = \prod_{\text{cykels } D_i}\sum_{r\in R}\omega(r)^{|D_i|}.$$

Als we nu de cykels bij elkaar vegen die dezelfde lengte hebben, vinden we

$$\Psi(g) = \Big(\sum_{r\in R}\omega(r)\Big)^{\#\text{1-cykels in } \pi(g)} \cdot \Big(\sum_{r\in R}\omega(r)^2\Big)^{\#\text{2-cykels in } \pi(g)} \cdots \tag{34}$$

En dit is precies (32). □

Opmerking 19. *De Bruijn publiceerde veel uitbreidingen op Pólya's stelling. Bijvoorbeeld zou men geïnteresseerd kunnen zijn in het aantal kleurpatronen waarbij men ook kleuren mag verwisselen. Dit lijkt minder gekunsteld als de kleuren veel op elkaar lijken, zoals purper en violet; dit zijn kleuren die veel mensen wel kunnen onderscheiden maar toch vaak verwisselen. We krijgen dan een soort 'kleur-designs', in plaats van gewone kleurpatronen.*

In bijvoorbeeld [18] *en* [63] *kan men nog veel meer uitbreidingen en voorbeelden vinden.*

12. Afsluiting

Ik heb in dit artikel geprobeerd een kort overzicht te geven van De Bruijn's bijdragen tot de combinatoriek. Voor mijzelf was dit een bijzonder aangename reis door de tijd. De artikelen van De Bruijn hebben niets verloren aan helderheid; men leest ze alsof ze gisteren door De Bruijn geschreven werden. Dat was mijn ervaring ook, zelfs in versterkte mate, bij het vertalen in het Engels van Nienhuys' college-aantekeningen. Ik waande me meer dan eens terug in de tijd, luisterend naar De Bruijn; luisterend naar *zijn* combinatoriek.

Ik moest voor dit korte overzicht natuurlijk een keuze maken. Er zijn nog veel andere verhalen die het lezen zeker waard zijn. Om nog één ander, bijzonder leuk, voorbeeld te noemen is er het blokkendoos verhaal uit 1969 [20, 63]. Daarin gaat De Bruijn in op de vraag van zijn zoon, die er op zeven-jarige leeftijd achter komt dat hij zijn $6 \times 6 \times 6$ doos niet kan vullen met blokken van $1 \times 2 \times 4$.

Ook de artikelen van De Bruijn over vloerbedekkingen à la Penrose laat ik onbesproken. Over dit onderwerp, alsook over De Bruijn's asymptotiek en zijn werk aan AUTOMATH, verschijnen binnekort andere samenvattingen.

Ik heb geprobeerd een indruk te geven van zijn meest bekende artikelen in de combinatoriek, en ik laat het hierbij; met een diepe buiging voor een der grootste Nederlandse wiskundigen én leermeesters.

Referenties

[1] van Aardenne-Ehrenfest, T. and N. G. de Bruijn, Circuits and trees in oriented linear graphs, *Simon Stevin* **28** (1951), pp. 203–217.
Dit artikel is ook verschenen in: (I. Gessel and G. Rota eds.) *Classic Papers in Combinatorics*, Modern Birkhäuser Classics, 2009, pp. 149–163

[2] Amin, K., Factorization of finite abelian groups, *International Journal of Algebra* **6** (2012), pp. 101–107.

[3] André, D., Développements de $\sec x$ et de $\tan x$, *Comtes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences. Paris.* 88 (1879), pp. 965–967.

[4] André, D., Sur les permutations alternées, *Journal de Mathématiques pures et appliquées. Paris.* **7** (1881), pp. 167–184.

[5] André, D., Probabilité pour qu'une permutation donnée de n lettres soit une

permutation alternée, *Comtes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences. Paris.* 97 (1883), pp. 983–984.

[6] Berge, C., Two theorems in graph theory, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* **43** (1957), pp. 842–844.

[7] Björklund, A., Counting perfect matchings as fast as Ryser, *Proceedings* 23rd *Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, Kyoto, Japan. SIAM (2012), pp. 914–921.

[8] Brightwell, G. and P. Winkler, Counting Eulerian cirsuits is #P-complete, *Proceedings of the* 7th *Workshop on Algorithm Engineering and Experiments and the Second Workshop on Analytic Algorithmics and Combinatorics*, Vancouver, BC, Canada. SIAM (2005), pp. 259–262.

[9] de Bruijn, N. G., Gemeenschappelijke representatensystemen van twee klassenindeelingen van een verzameling, *Nieuw Archief voor Wiskunde* **22** (1943), pp. 48–52.

[10] de Bruijn, N. G., A combinatorial problem, *Idagationes Mathematicae* **8** (1946), pp. 461–467.

[11] de Bruijn, N. G., On bases for the set of integers, *Publicationes Mathematicae* **1** (1950), pp. 232–242.

[12] de Bruijn, N. G., On the factorization of finite abelian groups, *Indagationes Mathematicae* **15** (1953), pp. 258–264.

[13] de Bruijn, N. G., On the factorization of cyclic groups, *Indagationes Mathematicae* **15** (1953), pp. 370–377.

[14] de Bruijn, N. G., On number systems, *Nieuw Archief voor Wiskunde* **4** (1956), pp. 15–17.

[15] de Bruijn, N. G., Generalization of Pólya's fundamental theorem in enumerative combinatorial analysis, *Indagationes Mathematicae* **21** (1959), pp. 59–69.

[16] de Bruijn, N. G., Enumerative combinatorial problems concerning structures, *Nieuw Archief voor Wiskunde* **11** (1963), pp. 142–161.

[17] de Bruijn, N. G., Some direct decompositions of the set of integers, *Mathematics of Computation* **18** (1964), pp. 537–546.

[18] de Bruijn, N. G., Pólya's theory of counting. Chapter 5 in (E. Beckenbach ed.) *Applied Combinatorial mathematics*, Wiley, 1964, pp. 144–184.

[19] de Bruijn, N. G., Colour patterns that are invariant under a given permutation of the colours, *Journal of Combinatorial Theory* **2** (1967), pp. 418–421.

[20] de Bruijn, N. G., Filling boxes with bricks, *American Mathematical Monthly* **76** (1969), pp. 37–40.

[21] de Bruijn, N. G., Permutations with given ups and downs, *Nieuw Archief voor Wiskunde* **18** (1970), pp. 61–65.

[22] de Bruijn, N. G., Pólya's Abzähltheorie: Muster für Graphen und chemische Verbindungen. In (K. Jacobs ed.) *Selecta Mathematica III* Springer-Verlag, Heidelberger Taschenbücher **86**, 1971, pp. 1–26.

[23] de Bruijn, N. G., A survey of generalizations of Pólya's enumeration theorem, *Nieuw Archief voor Wiskunde* **19** (1971), pp. 89–112.

[24] de Bruijn, N. G., Enumeration of mapping patterns, *Journal of Combinatorial Theory (A)* **12** (1972), pp. 14–20.

[25] de Bruijn, N. G., A solitaire game and its relation to a finite field, *Journal of Recreational Mathematics* **5** (1972), pp. 133–137.

[26] de Bruijn, N. G., Acknowledgement of priority to C. Flye Sainte-Marie on the counting or circular arrangements of 2^n zeros and ones that show each n-letter word eaxactly once. Technical Report, TUE, T.H.-Report 75-WSK-06, Technological University Eindhoven, 1975.

[27] de Bruijn, N. G., A note on the Cauchy-Frobenius lemma, *Indagationes Mathematicae* **41** (1979), pp. 225–228.

[28] de Bruijn, N. G., De stelling van Pólya, met toepassing op het tellen van bomen en boomvormige molekulen. In *Vertelling over tellen*, Vakantiecursus 34/80, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1980.

[29] de Bruijn, N. G., Counting complete matchings without using Pfaffians, *Indagationes Mathematicae* **42** (1980), pp. 361–366.

[30] de Bruijn, N. G., Algebraic theory of Penrose's non-periodic tilings of the plane (I and II), *Indiagationes Mathematicae* **43** (1981), pp. 38–66.

[31] de Bruijn, N. G., Mijn liefste boek: Pólya-Szegö. In *Uitgelezen Gezelschap*, Equiliber nr. 6, Bibliotheek TUE, 1994, pp. 4–8.

[32] de Bruijn, N. G. and P. Erdös, On a combinatorial problem, *Indagationes Mathematicae* **10** (1948), pp. 421–423. In de originele titel staat een tikfout; 'combinatioral.'

[33] de Bruijn, N. G. and P. Erdös, A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations, *Indagationes Mathematicae* **13** (1951), pp. 371–373.

[34] de Bruijn, N. G., D. E. Knuth and S. O. Rice, The average height of planted plane trees. In (R. Read ed.) *Graph Theory and Computing*, Academic Press, 1972, pp. 15–22.

[35] de Bruijn, N. G. and B. J. M. Morselt, A note on plane trees, *Journal of Combinatorial Theory* **2** (1967), pp. 27–34.

[36] Compeau, P. E. C., P. A. Pevzner and G. Tesler, How to apply de Bruijn graphs to genome assembly, *Nature Biotechnology* **29** (2011), pp. 987–991.

[37] Dinitz, M., Full rank tilings of finite abelian groups, *SIAM Journal on Discrete Mathematics* **20** (2006), pp. 160–170.

[38] Dowell, J., Periodic basic sequences, *Nieuw Archief voor Wiskunde* **16** (1968), pp. 112–115.

[39] Eigen, S. J., Y. Ito and V. S. Prasad, Universally bad integers and the 2-adics, *Journal of Number Theory* **107** (2004), pp. 322–334.

[40] Entringer, R. C., A combinatorial interpretation of the Euler and Bernoulli numbers, *Nieuw Archief voor Wiskunde* **14** (1966), pp. 241–246.

[41] Everett, C. J. and G. Whaples, Representations of sequences of sets, *American Journal of Mathematics* **71** (1949), pp. 287–293.

[42] Flye Sainte-Marie, C., Solution to question nr. 48, *L'Intermédiare des Mathématiciens* **1** (1894), pp. 107–110.

[43] Gallai (Grünwald), T., Solution to problem 4065, *American Mathematical Monthly* **51** (1944), pp. 169–171.

[44] Good, I. J., Normal recurring decimals, *Journal of the London Mathematical Society* **21** (1946), pp. 167–169.

[45] Gottschalk, W. H., Choice functions and Tychonoff's theorem, *Proceedings of the American Mathematical Society* **2** (1951), pp. 172.

[46] Hajós, G., Über einfache und mehrfache Bedeckung des n-dimensionalen Raumes met einem Würfelgitter, *Mathematische Zeitschrift* **47** (1941), pp. 427–467.

[47] Hall, M., Distinct representatives of subsets, *Bulletin of the American Mathematical Society* **54** (1948), pp. 922–926.

[48] Halmos, P. R. and H. E. Vaughan, The marriage problem, *American Journal of Mathematics* **72** (1950), pp. 214–215.

[49] Harary, F., G. Prins and W. T. Tutte, The number of plane trees, *Indagationes Mathematicae* **26** (1964), pp. 319–329.

[50] Kasteleyn, P. W., The statistics of dimers on a lattice. I. The number of dimer arrangements on a quadratic lattice, *Physica* **27** (1961), pp. 1209–1225.

[51] Kasteleyn, P. W., Dimer statistics and phase transitions, *Journal of Mathematical Physics* **4** (1963), pp. 287–293.

[52] Kasteleyn, P. W., Graph theory and crystal physics. In (F. Harary ed.) *Graph Theory and Theoretical Physics*, Academic Press, 1967, pp. 43–110.

[53] König, D. and S. Valkó, Über mehrdeutige Abbildungen von Mengen, *Mathematische Annalen* **95** (1926), pp. 135–138.

[54] König, D., Über Graphen und ihre Anwendung auf Determinantentheorie und Mengenlehre, *Mathematische Annalen* **77** (1916), pp. 453–465.

[55] van Lint, J. H., Recente ontwikkelingen in de combinatoriek, *Nieuw Archief voor Wiskunde* **24** (1976), pp. 215–225.

[56] Little, C. H. C., Kasteleyn's theorem and arbitrary graphs, *Canadian Journal of Mathematics* **25** (1973), pp. 758–764.

[57] Little, C. H. C., Extensions of Kasteleyn's method of enumerating the 1-factors of

planar graphs. In (D. Holton ed.) *Combinatorial Mathematics II*, Proceedings of the Second Australian Conference, Melbourne, Australia. Springer-Verlag, Lecture Notes in Mathematics **403**, (1974), pp. 63–72.

[58] Little, C. H. C., A characterization of convertible $(0,1)$-matrices, *Journal of Combinatorial Theory, Series B* **18** (1975), pp. 187–208.

[59] MacMahon, P. A., Second memoir on the compositions of numbers, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character* **207** (1908), pp. 65–134.

[60] MacMahon, P. A., *Combinatory Analysis*, Volume 1, Cambridge University Press, 1915.

[61] Moser, L., An application of generating series, *Mathematical Magazine* **35** (1962), pp. 37–38.

[62] Motzkin, Th., The lines and planes connecting the points of a finite set, *Transactions of the American Mathematical Society* **70** (1951), pp. 451–464.

[63] Nienhuys, J. W., (L. Hung and T. Kloks, eds.) *De Bruijn's Combinatorics*. Manuscript on viXra: 1208.0223, 2012.

[64] Niven, I., A combinatorial problem on finite sequences, *Nieuw Archief voor Wiskunde* **16** (1968), pp. 116–123.

[65] Pólya, G., Aufgabe 424, *Archiv der Mathematik und Physik* **20** (1913), pp. 271.

[66] Rado, R., Axiomatic treatment of rank in infinite sets, *Canadian Journal of Mathematics* **1** (1949), pp. 337–343.

[67] Rado, R., Note on the transfinite case of hall's theorem on representatives, *Journal of the London mathematical Society* **42** (1967), pp. 321–324.

[68] Rédei, L., *Lacunary polynomials over finite fields*, Akademiai Kiado, 1973.
Also published by North-Holland, Amsterdam - London; American Elsevier, New York, 1973.

[69] de Rivière, A., Question nr. 48, *L'Intermédiare des Mathématiciens* **1** (1894), pp. 19–20.

[70] Robertson, N., P. D. Seymour and R. Thomas, Permanents, Pfaffian orientations, and even directed circuits, *Annals of Mathematics* **150** (1999), pp. 929–975.

[71] Ryser, H. J., *Combinatorial Mathematics*, Carus Mathematical Monographs **14**, Published by the Mathematical Association of America, distributed by John Wiley and Sons, 1963.

[72] Sands, A. D., The factorization of abelian groups (II), *The Quarterly Journal of Mathematics* **13** (1962), pp. 45–54.

[73] Sands, A. D., Factoring finite abelian groups, *Journal of Algebra* **275** (2004), pp. 540–549.

[74] Shapiro, B., M. Shapiro and A. Vainshtein, Periodic De Bruijn triangles: exact and asymptotic results, *Discrete Mathematics* **298** (2005), pp. 321–333.

[75] Stanley, R. P., A survey of alternating permutations. ArXiv: 0912.4240v1, 2009.

[76] Szabó,S., Constructions related to the Rédei property of groups, *Journal of the London Mathematical Society* **73** (2006), pp. 701–715.

[77] Szabó, S. and A. D. Sands, *Factoring groups into subsets*, Chapman & Hall / CRC, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics **257**, 2009.

[78] Temperley, H. N. V. and M. E. Fisher, Dimer problem in statistical mechanics – an exact result, *Philosophical Magazine* **6** (1961), pp. 1061–1063.

[79] Tutte, W. T., On the enumeration of planar maps, *Bulletin of the American Mathematical Society* **74** (1968), pp. 64–74.

[80] Tutte, W. T. and C. A. B. Smith, On unicursal paths in a network of degree 4, *American mathematical Monthly* **48** (1941), pp. 233–247.

[81] Valiant, L., The complexity of computing the permanent, *Theoretical Computer Science* **8** (1979), pp. 189–201.

[82] Vazirani, V. V. and M. Yannakakis, Pfaffian orientations, 0-1 permanents, and even cycles in directed graphs, *Discrete Applied Mathematics* **25** (1989), pp. 179–190.

[83] Viennot, G., Permutations ayant une forme donnee, *Discrete Mathematics* **26** (1979), pp. 279–284.

[84] van der Waerden, B. L., Ein Satz über klasseneinteilungen von endlichen Mengen, *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg* **5** (1927), pp. 185–188.

[85] Wilson, R. M., Decompositions of complete graphs into subgraphs isomorphic to a given graph, *Proceedings* 5$^{\text{th}}$ *British Combinatorial Conference*, Congressus Numerantium XV, Utilitas Mathematica (1976), pp. 647–659.