

# Cold Big Bang Cosmology

## Uma Nova Solução dentro da Cosmologia Relativística

Armando V.D.B. Assis\*  
Departamento de Física,  
Universidade Federal de Santa Catarina,  
88040-900 Florianópolis, SC, Brazil

(Dated: 27 de abril de 2012)

Conforme aqui se explanará, resolvem-se as equações de campo da relatividade geral no contexto cosmológico com a inserção de um novo argumento quântico para o substrato cosmológico: o princípio de indeterminação de Heisenberg. A solução obtida naturalmente provê um *cutoff* para a temperatura cósmica de fundo nos promórdios do universo, levando à mínima entropia inicial. Ademais, a solução que aqui se obtém concorda com as observações cosmológicas, e.g., prevê a correta temperatura cósmica de fundo atual e a densidade crítica observada, esta tendo explicação dentro da solução obtida, ainda que se preveja um universo de topologia espacial aberta, hiperbólica, para o setor do tipo espaço (*slices* temporais do continuum 4-dimensional).

### UM SISTEMA SOB ESTUDO: O UNIVERSO

Quando se quer investigar um sistema físico como sendo o mais abrangente possível, como o universo, não há como não se embarcar numa fascinante viagem por quase todos os campos da física teórica. Estaremos interessados no estudo da dinâmica do universo inteiro, i.e., estaremos interessados em Cosmologia. Ainda assim, mesmo que possa parecer uma tarefa extremamente complicada, o tratamento matemático da Cosmologia é inerentemente simples, ainda que o universo inteiro esteja sob análise. Esse fato, que de início pode parecer um apelo demasiado à simplicidade pelo uso de modelo simplista, é veraz, uma vez que o universo apresenta certas características, simetrias, que possibilitam a construção de seu modelo sob termos matematicamente tratáveis, sendo, por isso, como veremos, simples. Claro que essa simplicidade não implica a ausência de necessidade de conquistas teóricas ao longo da história da física e das matemáticas, pelo contrário, as conquistas teóricas que se perfizeram no transcorrer dessa história acabam por fornecer tratabilidade a uma empreitada científica que poderia ser impossível. As coisas se complementam, pois o fato de o mundo poder ser descrito matematicamente por leis simples acaba traduzindo sua simplicidade inerente, e o mesmo acaba por acontecer em Cosmologia, pois estaremos fazendo física. Somado a isso, viz., somado às ferramentas de que nos tem a física teórica guarnecido pelo transcorrer de sua história, ferramental matemático a traduzir o que se observa, temos no conjunto mais amplo de fenômenos, no universo, traços claros de simplicidade implícita que coadunam com princípios obtidos em domínio mais restrito. Isso é extremamente importante e estarrecedor, uma vez que a física que se verifica em regiões bem mais diminutas do universo acaba sendo válida, aplicável, também, ao maior de todos os sistemas físicos: ao universo.

### DO SISTEMA, DOS PRINCÍPIOS E DAS FERRAMENTAS

Conforme dito, nosso sistema a ser estudado será o universo, sendo que estaremos interessados em sua dinâmica desde os seus primórdios. A tratabilidade teórica inerente, digamos simplicidade, deve-se, muito, a Nicolau Copérnico. De fato, uma vez que a idéia principal que permeia o princípio donde essa simplicidade emerge acaba por ser apenas uma extensão da revolução copernicana [6]: o princípio cosmológico. Essa extensão, o princípio cosmológico, apenas assevera que nós não estamos de forma alguma numa posição privilegiada em nosso universo. Isso quer dizer que, em escala suficientemente extensa, em média, as propriedades *espaciais* do universo físico são as mesmas, ponto-a-ponto, num dado instante cosmológico (entendendo-se por escala suficientemente extensa como a de aglomerado de galaxias, sendo que isso ficará claro no seguimento). Matematicamente, diz-se que a geometria espacial em escala suficientemente extensa, i.e., a geometria puramente espacial que predomina, em média, em escalas suficientemente extensas do setor espacial do universo num dado instante cosmológico  $t$ , é exatamente a mesma para qualquer observador que esteja localizado em algum ponto pertencente a um fatiamento instantâneo tridimensional do universo, i.e., independentemente de sua localização puramente espacial num  $[t\text{-sliced}]$  universo tridimensional. Equivalentemente, a parte espacial do elemento de linha deverá ser a mesma para todos os observadores localizados nos pontos desse setor puramente espacial num dado instante cosmológico  $t$ . Isso quer dizer que, num dado instante, todos os locais do universo apresentarão a mesma geometria. Assim, a simplicidade referida acima advém de dois aspectos principais logicamente inclusos na maneira pela qual se estabelece o princípio cosmológico, sendo eles:

- A falta de uma descrição física privilegiada do universo numa  $[t\text{-sliced}]$  escala suficientemente extensa

$\Rightarrow$  escala suficientemente extensa  $\Rightarrow$  negligenciam-se todos os tipos de interação física que não são importantes em escalas suficientemente extensas  $\Rightarrow$  permanece a interação gravitacional;

- A falta de uma descrição física privilegiada do universo numa  $[t\text{-sliced}]$  escala suficientemente extensa  $\Rightarrow$  escala suficientemente extensa  $\Rightarrow$  negligenciam-se irregularidades locais de um  $[t\text{-sliced}]$  substrato global representando o  $[t\text{-sliced}]$  universo  $\forall$  instantes cosmológicos  $t \Rightarrow$  o substrato cosmológico é modelado por um fluido sem  $[t\text{-sliced}]$  irregularidades espacialmente localizadas  $\Rightarrow [t\text{-sliced}]$  fluido homogêneo e isotrópico [7].

Enfatizada a característica  $t$ -local do princípio cosmológico - i.e., que a descrição não privilegiada do universo não se aplica, necessariamente, à evolução global das  $[t\text{-sliced}]$  hipersuperfícies do tipo espaço, pelo que isso se deve, também, ao componente observacional que temos do universo, pois, em outras palavras, essas  $t$ -hipersuperfícies que apresentam aspecto homogêneo, conforme enfatizamos, acabam por não preservar essa característica, esse mesmo aspecto, em diferentes instantes (quando se comparam diferentes instantes entre si), conforme experimentalmente asseverado pela expansão do universo -, temos que se faz necessária uma hipótese adicional, em relação à evolução temporal dos pontos pertencentes às  $t$ -hipersuperfícies do tipo espaço:

- Hipótese de Weyl: As partículas do fluido cosmológico inserem-se no espaço-tempo 4-dimensional (fluido cosmológico) sobre uma congruência de geodésicas do tipo tempo, *timelike geodesics*, a partir de um ponto no passado cosmológico; o substrato cosmológico é modelado por um fluido perfeito 4-dimensional.

Tal hipótese coaduna com o princípio cosmológico, pois componentes viscosos, em princípio, introduziriam distorções no fluido que, para um instante  $t$  constante, fariam com que o setor espacial do espaço-tempo apresentasse diferentes aspectos em diferentes locais, contrariando o princípio cosmológico. Ademais, esse postulado requer que as geodésicas que representam as partículas do substrato cosmológico em sua dinâmica 4-dimensional não se interceptem, exceto para um ponto singular no passado e, também passível de ocorrer, num ponto singular, de maneira similar, no futuro. Com isso, somente se permite uma única geodésica para cada ponto do substrato cosmológico, com uma única 4-velocidade para cada ponto, sendo, então, que o substrato cosmológico caracterizar-se-á pelas 4-velocidades de seus pontos e pela pressão em seus pontos [também pela composição do fluido, por sua densidade de energia e pelo tensor métrico; todavia, estamos por enfatizar a ausência de componentes viscosos]. O movimento de galáxias individuais

não obedece esses critérios, mas isso está no domínio de pequena escala para o substrato cosmológico, pois os desvios desses movimentos individuais em relação ao movimento geral da dinâmica cosmológica são aleatórios e menores do que um milésimo da velocidade da luz. Assim, os movimentos individuais das galáxias, em primeira instância, passam a ser desprezíveis em relação aos movimentos relativos das galáxias entre si devidos à dinâmica cosmológica [de expansão], estes últimos comparáveis à velocidade da luz. Em outras palavras, os movimentos aleatórios individuais podem ser desprezados em primeira instância, donde, então, combinando com a observação de que o movimento cosmológico geral é o de expansão relativística, temos que a hipótese de Weyl parece realmente refletir a situação dinâmica dos pontos do substrato cosmológico. Ainda, vamos deixar claro, sob força de hipótese, que modelaremos o universo sob a hipótese de Weyl para quaisquer épocas, mantendo essa premissa bastante conservadora e simplificadora, deixando para a natureza, o universo, a responsabilidade de ratificar, ou não, os resultados que obteremos de nosso modelo que possui, ab initio, tal hipótese inclusa. Conforme veremos, essa hipótese e as demais construções que faremos em nossa solução, também ortodoxas e ratificadas experimentalmente, levarão a corretas previsões sobre o nosso sistema, previsões ratificadas pelas observações e em consonância com princípios físicos arraigados.

Dando continuidade ao desenvolvimento e à investigação que queremos fazer sobre o nosso sistema, sendo que os ingredientes teóricos seguintes, nossas ferramentas, estarão disponíveis para que construamos matemática e conseqüentemente um modelo cosmológico considerando esses princípios que brevemente acabamos de elencar, de modo, também, a dar suporte, o modelo, ao princípio cosmológico e à evolução temporal do universo: há que se salientar que se utilizam definições, resultados e objetos matemáticos que residem na geometria diferencial, uma vez que estão intrínsecos conceitos geométricos nos princípios cosmológico e de Weyl, tais como homogeneidade, isotropia, congruência de curvas, hipersuperfícies, dimensionalidade, geodésicas, entre outros que se inserirão no transcórrer e que, também, de modo direto ou indireto, estarão relacionados aos princípios simplificadores acima, devendo, assim, ter clarificadas suas especificações, definições e escopo teórico. Porém, como este trabalho está em fase de qualificação para possível aceite como tese de doutoramento, aqui há que se ir diretamente ao ponto, i.e., passando para o desenvolvimento do resultado original que é pleiteado neste trabalho. Em outras palavras, estaremos utilizando ferramentas e objetos matemáticos já arraigados, bem como conceitos físicos já demonstrados e aceitos, os quais carregam grande complexidade, sendo, por isso, que elencaremos resultados teóricos intermediários já demonstrados e amplamente aceitos na academia, sendo que deduções que não se fazem necessárias neste estágio serão omi-

tidas, pelo ponto de vista instrumental e pragmático, pois tais resultados já foram objeto de outras teses de doutoramento, já passaram pelo crivo acadêmico e constam nas bibliografias adotadas dentro da academia. Isso quer dizer que, ainda que tais desenvolvimentos façam parte da estrutura teórica deste trabalho, intrínsecos, estudados e entendidos pelo proponente deste trabalho, eles não necessitam de demonstração, de discussão detalhada neste estágio, sendo que tais desenvolvimentos serão inseridos e pedagogicamente desenvolvidos na forma final da tese, caso aceita. Por exemplo, aceitaremos as equações de campo da relatividade geral como o modelo correto para a interação gravitacional, porém não vamos deduzir aqui. Os conceitos e objetos geométricos que nelas se inserem, quando da relevância e conexão direta com este trabalho, serão explanados em detalhes, mantendo sempre o enfoque pragmático, dentro do objetivo da discussão que aqui fazemos, que é o de expor e defender o argumento a ser defendido. Somente dentro das equações de campo da relatividade geral há um campo inteiro das matemáticas, uma série de conceitos e resultados intermediários relacionados aos tensores e ao ente que os provê, relacionados à variedade diferencial, neles intrínsecos conceitos-chave de geometria diferencial, novas definições para a derivação tensorial, objetos definidos na variedade diferencial. Outro exemplo, é a geometria que emerge das hipóteses que elencamos acima, a qual passa a apresentar um elemento de linha fundamental, de Robertson-Walker, como veremos, num sistema de coordenadas especial para cobrir os pontos da variedade diferencial, esta sendo fisicamente o substrato cosmológico, chamado que tal sistema de coordenadas é o das coordenadas comóveis. Somente nessa última frase, há conceitos geométricos importantes, como homogeneidade e isotropia, isometria, esta definida pela invariância do tensor métrico, este definindo, através da nulidade de sua derivada de Lie, sendo que a derivada de Lie tem sua definição na necessidade de se derivar tensores em virtude de uma limitação pela definição usual, um campo vetorial no espaço tangente da variedade chamado de campo de Killing. Assim, se todos os conceitos intermediários utilizados neste trabalho fossem deduzidos primeiramente, para que somente depois passássemos ao ponto deste trabalho em si, que é expor o que queremos defender, estaríamos nos desviando do tema e do propósito do que agora, neste estágio, deve ser feito. Assim, quando uma ferramenta, um conceito, uma definição, um resultado, um ingrediente forem adicionados à linha argumentativa que iremos expor visando o que queremos defender, não nos ateremos a demonstrações inerentes já arraigadas, mas somente ao que de fato for relevante neste estágio, sem, com isso, deixar de expor detalhadamente tais construções de terceiros na versão final da tese aqui pleiteada através dos argumentos e resultados originais aqui detalhadamente desenvolvidos, sendo esses últimos os que realmente devem ser objeto de crivo ao pleito. Feitas

essas considerações, continuemos.

A dinâmica gravitacional, ou simplesmente a gravidade: a geometrodinâmica será modelada pelas equações de campo de Einstein de sua teoria geral da relatividade, as quais, em unidades naturais, são dadas por:

$$G_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (1)$$

onde  $G_{\mu\nu}$  é o tensor de Einstein,  $g_{\mu\nu}$  o tensor métrico (ou simplesmente métrica),  $T_{\mu\nu}$  o tensor de energia e momento, sendo  $\Lambda$  a constante cosmológica, esta última relacionada às propriedades de estado e composição do espaço vazio, como veremos. Mais sobre essa lei fundamental da física, Eq. (1), dentro do escopo que ora estamos interessados, será posto no seguimento; índices gregos serão convencionados a variar de 0 a 3, relacionados às componentes espaço-temporais dos objetos envolvidos; índices latinos variarão de 1 a 3, reservados às componentes puramente espaciais dos objetos envolvidos. Porém, aqui se fazem necessários alguns comentários. A Eq. (1) é intrinsecamente não linear. Assim, se estivermos interessados em comportamento médio, relativo à dinâmica cosmológica e ao seu aspecto mutuamente correlacionado à geometria e à fonte intrínsecas, lados esquerdo e direito da Eq. (1), ao partirmos de uma geometria que encapsule os princípios anteriormente delineados, mormente o princípio cosmológico, esse tendo claramente em si a tácita suposição de que o comportamento médio da distribuição de energia e momento do substrato cosmológico apresentará homogeneidade espacial intrínseca, por construção, partiremos de uma geometria que, em si, já encapsula essa propriedade ao resolvermos as Eqs. de campo, i.e., ao resolvermos a Eq. (1). Assim, o tensor de energia e momento, lado direito da Eq. (1), tensor esse passando a ter a forma definida pelo postulado de Weyl, portanto a de um fluido perfeito, juntamente com as propriedades de homogeneidade e isotropia que a métrica encapsula, levará a uma solução da Eq. (1) que não necessariamente a mesma que se obteria partindo diretamente da Eq. (1) com uma métrica completa, ou perturbada, contendo em si termos relativos à anisotropia e não homogeneidade para que se efetuasse, a posteriori, a média na solução completa da Eq. (1). Isso dependeria de quanto se discrepasse a solução completa, posteriormente mediada, da solução que se obtém pelo que, ab initio, faz-se ao se levar o comportamento médio prontamente inserido na forma do tensor métrico, viz., a partir do elemento de linha de Robertson-Walker, como delinearemos. Portanto, há dois pontos a serem asseverados: estamos ortodoxamente considerando o que se obtém pelo princípio cosmológico definindo a geometria, e isso é o que se observa experimentalmente, i.e., o princípio cosmológico traduz-se matematicamente numa métrica mediada em escala suficientemente extensa que encapsula homogeneidade e isotropia; uma solução completa a partir de uma métrica perturbada que leve em consideração aspectos anisotrópicos e não homogêneos, para que seja

posteriormente mediada em escala suficientemente extensa, não deveria contradizer a solução que se obtém a partir da métrica de Robertson-Walker já prontamente mediada, pois esta última é tradução de um princípio que se ratifica experimentalmente, bem como se ratifica a solução que a partir disso emerge, via Eq. (1), dentro da validade do princípio cosmológico em seu domínio de escalas suficientemente extensas. Assim, se o princípio cosmológico realmente traduz uma descrição apropriada para o sistema físico universo segundo a classe de observadores que o assevera, mantendo-se a homogeneidade por ele apreçoado ou sempre que tal descrição for em escala suficientemente extensa, a geometria acabará por se traduzir no ortodoxo elemento de linha de Robertson-Walker. Conforme dito de início, os desvios são locais, [aparentemente, pois a formação de estruturas locais dependem do espectro de potência associado à não linearidade intrínseca às Eqs. (1)] aleatórios e não relativísticos em relação à dinâmica cosmológica. Voltaremos mais a esse aspecto posteriormente, discutindo como a solução aqui obtida neste trabalho relaciona-se com esses aspectos sutis da solução ortodoxamente pautada sob a validade do elemento de linha de Robertson-Walker.

A homogeneidade é uma propriedade espacial, verificada em qualquer hipersuperfície de simultaneidade tomada, i.e., para qualquer fatiamento de tempo constante do substrato cosmológico, sendo matematicamente traduzida em termos de uma geometria (métrica) que é a mesma ponto-a-ponto no setor espacial do substrato cosmológico, i.e., no setor espacial da variedade diferencial, esta, no nosso caso de dimensão  $n = 4$ , sendo que essa propriedade, homogeneidade, é uma propriedade do sistema de coordenadas específico que cobrirá a variedade segundo o princípio cosmológico. A homogeneidade se traduz por uma liberdade na escolha da origem no setor espacial da variedade para o sistema de coordenadas que cobre a variedade diferencial e que emerge das condições impostas pelo princípio cosmológico. Assim, isso está atrelado ao princípio cosmológico, conforme enfatizamos inicialmente, pois, para um instante cosmológico fixo, qualquer origem do setor espacial da variedade deve apresentar exatamente os mesmos aspectos geométricos, portanto a mesma geometria espacial cronologicamente fatiada. Uma variedade diferencial, no nosso caso o substrato cosmológico, equipada com uma métrica, portanto com uma geometria capaz de prover significado físico para medidas de distância e tempo, é denominada variedade Riemanniana. A homogeneidade não significa que a métrica tenha representação invariante por uma troca do sistema de coordenadas que cobre a variedade, no nosso caso o sistema de coordenadas comóvel, mas que, se passarmos para outro ponto da variedade, mantendo  $t$ , o tempo cosmológico constante, a geometria será dada pelo mesmo elemento de linha nesse outro ponto. Assim, a métrica de Robertson-Walker, a ser elencada em seguida, é construída sob a hipótese de homogeneidade

(e isotropia, que comentaremos em seguida) no sistema de coordenadas comóvel para cobrir a variedade, sistema esse em que os rótulos espaciais, i.e., as coordenadas espaciais de cada um dos pontos da variedade diferencial, mantêm-se constantes, viz., qualquer ponto da variedade em si terá coordenadas espaciais constantes no sistema de coordenadas comóvel, sendo que qualquer ponto, num mesmo instante, poderia ter sido escolhido como origem, descrevendo instantaneamente as mesmas propriedades cosmológicas nesse mesmo instante, inatante por instante, em virtude de homogeneidade. Para elucidar, usando-se o sistema de coordenadas comóvel para cobrir a variedade, um fóton que se propague pelo universo, passa por diversos pontos da variedade, sendo que cada componente espacial de cada um dos pontos da variedade pelos quais o fóton passou continuará tendo sempre suas respectivas coordenadas espaciais com os mesmos valores ad infinitum no tempo, mesmo após o fóton já ter passado por esses pontos da variedade. Não haverá, pela descrição via sistema de coordenadas comóveis, referenciais em que as coordenadas espaciais dos pontos da variedade em si, i.e., do substrato cosmológico, variem, não que isso não pudesse ser feito, mas pelo que o princípio cosmológico acaba por definir um sistema de coordenadas para cobrir a variedade em que a homogeneidade espacial subsiste; a componente temporal, cronológica, desses pontos pelos quais o fóton passou em sua viagem sempre mudarão com o tempo. Diferentemente do que ocorre em relatividade restrita, em cosmologia, é possível definir uma simultaneidade global para todos os observadores que se movem segundo as geodésicas comóveis que rotulam a variedade. Em cosmologia não se definem as coordenadas dos observadores comóveis segundo um movimento relativo desses observadores entre si, mas segundo seus movimentos de fato, e esses movimentos se dão segundo a própria dinâmica cosmológica desses observadores comóveis ( $\equiv$  próprios pontos da variedade), dinâmica essa que é posta segundo o postulado de Weyl. Assim, a cada instante, todos os observadores comóveis possuem a mesma coordenada temporal, sendo que há, então, uma única coordenada temporal cosmológica para todos os pontos da variedade, para todos os observadores comóveis. Isso discrepa do que acontece, por exemplo, no caso da relatividade restrita, onde diferentes observadores lêem suas coordenadas temporais em função dos seus movimentos relativos em relação a um dado observador em seu referencial inercial. Nesse aspecto, vemos a simplicidade inerente à cosmologia a que nos referimos de início, dado que uma transformação entre dois observadores comóveis quaisquer será uma transformação a três parâmetros, a diferença em suas origens espaciais somente, enquanto, num caso geral em relatividade restrita em que se relaxa a sincronização mútua inicial, levando ao grupo de Poincarè, teríamos uma transformação a dez parâmetros, duas transformações de Euler para alinhar o eixo  $Ox$  à direção de velocidade relativa do outro ref-

erencial, mais um boost para coincidir com um sistema em repouso em relação ao segundo sistema, mais três rotações de Euler para alinhar os eixos espaciais dos dois referenciais mutuamente, e mais quatro translações, uma temporal e três espaciais para dar conta da não canonicidade inicial em relação ao grupo de Lorentz. Assim, ratificando para o nosso exemplo do fóton em propagação pelo universo, tal fóton evolui espaço-temporalmente pela variedade ao longo sua geodésica própria do tipo nula, *null geodesic* ou *light-like geodesic*, passando por pontos diferentes da variedade em instantes diferentes, esses pontos da variedade estando em suas próprias geodésicas do tipo tempo segundo a hipótese de Weyl, sendo que, a cada instante, esse fóton tem sua coordenada espaço-temporal concordante com a do ponto da variedade pelo qual está momentaneamente passando, mas feito isso, o ponto da variedade que ficou para trás continuará com suas coordenadas espaciais, seus rótulos espaciais, com esses mesmos valores de rótulo ad infinitum, excetuando-se a componente temporal, cronológica, desse ponto deixado para trás pelo fóton, que evolui, sendo essas últimas as coordenadas que cobrem a variedade. É importante salientar que, naturalmente, num outro sistema de coordenadas de cobertura que não as comóveis, a métrica estaria rotulada de outra forma, em função desse outro sistema de coordenadas, mas ainda seria o mesmo objeto geométrico, uma vez que é um tensor. O fato de utilizarmos o princípio cosmológico, pelo viés observacional, está alicerçado na maneira como observamos o universo, que se mostra homogêneo e isotrópico, mas, nisso está intrínseco o fato de estarmos observando o universo de um sistema de coordenadas comóvel, ou seja, como de fato nos movemos no fluxo dinâmico cosmológico. Assim, as propriedades de homogeneidade e isotropia não são absolutas, não são propriedades tensoriais, não são invariantes geométricos, sendo que se verificam tão somente no sistema de coordenadas comóvel. O sistema de coordenadas comóvel é posto tão somente por um critério que nasce com a revolução copernicana, filosoficamente dentro da evolução epistêmica da física, permeando o campo das idéias mais avançadas que sobrevieram juntamente com suas ferramentas mais complexas, porém, sem deixar de estar atrelado à essência da física como disciplina experimental pelo que as observações astronômicas de homogeneidade e isotropia, muito principalmente pela contribuição de Penzias e Wilson para a conceituação do critério para tais medidas, a radiação cósmica de fundo, o princípio cosmológico passa a ser experimentalmente plausível e ratifica o nosso real estado de evolução dinamicamente cosmológica como sendo realmente a de observadores comóveis em uma das infinitas geodésicas do feixe de geodésicas assumido no modelo que construiremos através desse componente importante posto pela hipótese de Weyl. O elemento de linha de Robertson-Walker que elencaremos em seguida tem encapsuladas essas propriedades, enfatizamos, mas tão somente pelo que

esse elemento de linha, a diagonal do tensor métrico, está escrito no sistema de coordenadas que se escolhe para cobrir a variedade, o comóvel, o que é natural do ponto de vista físico, uma vez que é numa origem desse sistema de coordenadas que residimos, assim como qualquer outro observador no universo também acabará por estar residindo numa outra igualmente caracterizada origem de um sistema de coordenadas comóvel. O fato de que a métrica possa ter aspectos diferentes, ou melhor, de que possa ser diferentemente escrita em outro sistema de coordenadas que não o de coordenadas comóveis, não a torna outro objeto, não implica que outro universo passou a estar sendo estudado, mas tão somente que o mesmo objeto geométrico, o tensor métrico, pode passar a ganhar nova rotulação, novos nomes para suas componentes, i.e., que outro sistema de coordenadas, outro *coordinate patch*, pode vir a ser adotado para escrever a métrica. Pelo princípio geral da relatividade, todos os observadores são equivalentes e, se fôssemos, por exemplo, algum outro objeto físico que não estivesse sob o comovimento cosmológico que de fato estamos, com esse objeto movendo-se relativisticamente em relação à Terra, por exemplo, i.e., em relação a um observador comóvel, muito provavelmente admitiríamos um outro sistema de coordenadas para cobrir a variedade cosmológica, descrevendo o tensor métrico com outras variáveis diferentes das utilizadas no elemento de linha de Robertson-Walker, sem que isso significasse uma outra geometria, um outro universo, simplesmente que não postularíamos homogeneidade e isotropia, pois não as observaríamos, mas, com certeza, obteríamos covariantemente as mesmas leis da física sob forma tensorial, pois as Eqs. de campo seriam as mesmas dadas pela Eq. (1). Por isso, não há nada de absoluto em homogeneidade e isotropia, e com isso vem a não covariância da radiação cósmica de fundo como homogênea e isotrópica, pois, por exemplo, os neutrinos podem muito bem discordar de nós sobre isso em virtude de seu movimento não comóvel, ainda que obedeçamos as mesmas leis da física conforme postula o princípio geral da relatividade encapsulado na Eq. (1). Já a isotropia é matematicamente traduzida em termos de uma falta de direções privilegiadas, também espacialmente falando.

Essas duas características acabam por levar à consideração de espaços equipados com curvatura constante  $K$ . A partir de um teorema da geometria diferencial, o teorema de Schur, um espaço  $n$ -dimensional  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$ , no qual uma  $\eta$ -vizinhança tenha isotropia  $\forall$  pontos pertencentes, terá curvatura constante  $K$  por toda a vizinhança  $\eta$ . Como estamos considerando, espacialmente, isotropia global, então  $K$  deve ser constante em todos os pontos do setor espacial do substrato cosmológico. Assim, a isotropia local ponto-a-ponto nos fatiamentos de  $t$  constante, no setor espacial da variedade cosmológica, leva à homogeneidade, levando à mesma curvatura. De outra forma, os pontos do setor espacial do substrato cosmológico, i.e., os pontos dos fatiamentos a  $t$  constante

do substrato cosmológico, não seriam geometricamente idênticos, contrariando o princípio cosmológico. É natural, assim, que se construa o tensor de curvatura, i.e., o tensor de curvatura de Riemann  $R_{abcd}$ , para um 3-espaço que apresente isotropia e homogeneidade, simplesmente a partir do tensor métrico do setor espacial  $g_{ab}$ , i.e.:

$$R_{abcd} = K (g_{ac} g_{bd} - g_{ad} g_{bc}), \quad (2)$$

pois uma dependência nas derivadas do tensor métrico encapsularia mudanças de geometria ponto-a-ponto no setor espacial, contrariando homogeneidade e isotropia. Escrevendo o 3-escalar de curvatura para esse espaço:

$$\begin{aligned} {}^3R &= g^{ab} R_{ab} = g^{ab} g^{cd} R_{dacb} \\ &= g^{ab} g^{cd} \{K (g_{dc} g_{ab} - g_{db} g_{ac})\} \\ &= K (g^{ab} g^{cd} g_{dc} g_{ab} - g^{ab} g^{cd} g_{db} g_{ac}) \\ &= K (\delta_a^a \delta_c^c - \delta_c^b \delta_b^c) \\ &= K (3 \times 3 - 3) = 6K. \end{aligned}$$

Para que se defina um elemento de linha que encapsule as propriedades de isotropia e homogeneidade requeridas pelo princípio cosmológico para o setor puramente espacial, invocamos primeiramente isotropia espacial. A isotropia espacial significa que, uma vez que se escolha uma origem  $O$  num dado ponto do setor puramente espacial do substrato cosmológico, não se inferirão direções privilegiadas em torno de  $O$ . Assim, um ponto  $P$  a uma distância puramente espacial  $OP$  a partir de  $O$  pode ser considerado como sendo qualquer ponto sobre uma superfície esférica  $S^2(r)$  centrada em  $O$  e tendo raio  $d_r = OP$ . Essa superfície esférica define simetria esférica para  $P$  em relação à origem  $O$ , sendo que essa superfície esférica pode ser coberta por uma coleção de pares ordenados  $(\theta, \phi)$ , sendo esse par inicialmente arbitrário em virtude de isotropia, i.e., a orientação da superfície esférica centrada em  $O$  em relação a um observador em  $O$  é totalmente arbitrária em virtude de isotropia. Uma vez definido um plano equatorial que passe por  $O$ , sendo que qualquer plano pode ser igualmente definido passando por  $O$  em virtude de isotropia, pode-se definir a perpendicular a esse plano baixada de  $P$ , perpendicular essa que intersecciona o plano equatorial em, digamos,  $Q$ . Define-se um eixo pertencente ao plano equatorial ao longo de  $\vec{OQ}$ , definindo  $\phi = 0$  para o ângulo entre  $OQ$  e o eixo construído com direção  $\vec{OQ}$ . Agora, define-se um eixo perpendicular ao plano equatorial, cortando esse plano em  $O$ , sendo tal eixo dextrógiro em relação a rotações  $\phi$  positivas em torno desse eixo, estando, também, esse eixo direcionado ao longo da direção  $\vec{OR}$ , sendo  $R$  definido como sendo o ponto de intersecção entre esse eixo dextrógirante contruído e a paralela ao plano equatorial baixada de  $P$  a  $R$ . O ângulo entre  $OP$  e  $\vec{OR}$  define  $\theta$ . Fixa essa construção, i.e., os eixos e ângulos conforme definidos, os demais pontos em  $S^2(r)$  passam a ter coordenadas esféricas ordinárias para um dado  $r$  fixo,

$S^2(r) = (\theta, \phi)$ ; notar que os demais pontos  $P' \in S^2(r)$  a serem rotulados por  $(\theta, \phi)$  não terão mais necessariamente  $OQ$  ( $OQ'$  para  $P'$ ) e  $\vec{OQ}$  definindo  $\phi' = 0$ , pois  $\vec{OQ}$  já fora definido e passa a estar fixo. Note-se que tal construção tem degeneração intrínseca nos pólos, sendo que isso não é uma falha do conceito de isotropia, mas do *patch* de cobertura utilizado para sua implementação. Tal degenerescência é prontamente removida pela utilização de *patch* cartesiano, por exemplo. Manteremos a cobertura do setor puramente espacial por coordenadas esféricas, mantendo em mente o detalhe relacionado aos pólos. Assim, para um dado  $r$ , os pontos em  $S^2(r)$  são cobertos por:

$$0 \leq \theta \leq \pi; \quad -\pi < \phi \leq \pi.$$

Portanto, o elemento de linha elementar num ponto  $P$  sobre a superfície de  $S^2(r)$  é dado por:

$$do^2 = r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2.$$

Quanto a um deslocamento radial elementar que se dê nesse ponto  $P$  numa mesma direção radial, a isotropia requer que o mesmo independa da direção, i.e., que independa de  $\theta$  e  $\phi$ . Porém, somente por isotropia, esse deslocamento elementar radial pode depender da posição radial específica do ponto  $P$ . De mesma lide, a distância puramente radial  $d_r = OP$  não pode depender de direção específica em virtude de isotropia, porém essa distância pode ser função da coordenada radial  $r$ , sendo, então, que o requisito de isotropia permite geometrias não euclidianas para o setor puramente espacial:

$$(\delta d_r)^2 = f^2(r) (\delta r)^2, \quad (3)$$

onde  $f^2(r)$  retorna um número real estritamente positivo, sendo  $f^2(r)$  uma função da posição radial  $r$  a ser determinada. Note-se que a interpretação  $OP = r$  somente será válida para geometrias euclidianas no setor espacial, uma vez que um segmento da geodésica ordinária euclidiana, um segmento de reta de  $O$  a  $P$ , não se verificará em geometrias não euclidianas. O conceito de reta terá de ser substituído pelo conceito de geodésica, esta como sendo uma curva a um parâmetro definida convenientemente segundo algum critério definidor para esse tipo de curva. As geodésicas desempenharão papel fundamental em nossa análise, sendo que já nos ateremos a essas curvas no seguimento. Portanto o elemento de linha elementar para o setor puramente espacial torna-se:

$$d\sigma^2 = f^2(r) dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (4)$$

Note-se que esse elemento de linha não pode admitir termos cruzados do tipo  $drd\theta$  e/ou  $drd\phi$ , pois, tal elemento não deve ser afetado por uma transformação do tipo  $\theta \rightarrow \pi - \theta$  e  $\phi \rightarrow -\phi$ , dado que  $r$  e não se altera em tal transformação, bem como  $r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$ , sendo tal configuração totalmente equivalente à anterior.

Termo cruzado do tipo  $d\theta d\phi$  não é compatível com o elemento de linha parcial  $r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$  advindo de isotropia. Para obtermos  $f^2(r)$ , recorreremos à homogeneidade. Na obtenção do elemento de linha dado pela Eq. (4), recorreremos a uma origem  $O$  do setor puramente espacial geometricamente definido pela Eq. (2). Assim, o 3-escalar de curvatura deve ser constante em virtude da aplicação concomitante de homogeneidade, i.e., não deve haver nada de especial com a origem escolhida  $O$  em virtude do princípio cosmológico. Assim, devemos calcular o 3-escalar de curvatura para a métrica  $g_{ab}$  do setor puramente espacial dada pela Eq. (4), viz.:

$$g_{ab} = \text{diag} [f^2(r), r^2, r^2 \sin^2 \theta]. \quad (5)$$

Contudo, tal cálculo ficará muito mais simplificado com a utilização de geodésicas. Essa técnica para a obtenção dos elementos da conexão afim  $\Gamma_{bc}^a$  do setor puramente espacial requeridos para o cálculo do tensor contraído de curvatura, tensor de Ricci, levando ao 3-escalar de curvatura para o setor puramente espacial, é geral e também será utilizada posteriormente para a obtenção das Eqs. diferenciais cosmológicas a partir da métrica cosmológica completa que estamos deduzindo. Assim, faremos uma pausa para que se introduzam a definição de curvas geodésicas e os seus objetos matemáticos relacionados.

Para que definamos curvas em geral numa variedade de dimensão  $n$ , temos que especificar suas  $n$  coordenadas a um parâmetro. I.e., uma curva numa variedade de dimensão  $n$  será:

$$C = \mathcal{S}^1 : x^a = x^a(u), \quad (6)$$

ficando tácito que  $a \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Uma superfície tem  $m$  graus de liberdade, sendo que, particularmente, uma curva tem 1 grau de liberdade, seu parâmetro real  $u$ . Há uma classe especial de curvas chamadas de geodésicas. No espaço euclidiano ordinário, as geodésicas são retas nesse espaço. Nesse espaço, uma curva que não seja uma reta não terá seus vetores tangentes paralelamente propagados neles mesmos, sendo tal propriedade válida para as retas. Em outras palavras, no espaço euclidiano ordinário, se tomarmos, por exemplo, uma parábola e um dos vetores tangentes a essa parábola num de seus pontos e efetuarmos um transporte paralelo desse vetor (mantendo fixa a sua inclinação - o que pressupõe uma reta de referência) ao longo da parábola, não se manterá o vetor tangente transportado ao longo da curva paralelo aos demais vetores tangentes à curva em cada um de seus pontos, pois tal curva, particularmente essa parábola, não é uma reta. Também, no espaço euclidiano ordinário, dados dois de seus pontos, arbitrários, a curva que liga esses dois pontos mantendo seu comprimento

total estacionário (no caso mínimo) é uma reta. Porém, se o espaço for não euclidiano, isso pode não ocorrer. Referências globais que são tomadas num espaço euclidiano, como uma reta em toda a sua extensão, podem falhar drasticamente em espaços não euclidianos. Aliás, uma variedade de dimensão  $n$  somente se parecerá localmente com um espaço euclidiano ordinário de mesma dimensão, sendo essa a maneira usual de se referir a uma variedade. Contudo, em uma variedade, ainda que os objetos linhas retas falhem por existir, haverá seus objetos análogos, as geodésicas. Por construção, para verificarmos se uma curva é uma geodésica em uma variedade, teremos que verificar como se propagam seus vetores tangentes ao longo dessa curva. Analogamente ao caso euclidiano ordinário, uma geodésica em uma variedade será uma curva tal que seus vetores tangentes são propagados paralelamente a si mesmos ao longo da curva. Tais geodésicas assim definidas são denominadas geodésicas afins. Podemos verificar que tal processo pressupõe construção de processos como *transporte paralelo* (no caso de vetores) e que tal processo não pode ser levado a cabo simplesmente se tomando uma reta de referência como se faz no caso euclidiano ordinário de modo global, pois, conforme característica de uma variedade, tal entidade matemática, a variedade, somente se parece localmente com um espaço euclidiano ordinário de mesma dimensão. Podemos esperar que necessitemos comparar dois vetores, o propagado ao longo de uma curva e o tangente em ponto subsequente da propagação, etapa por etapa da propagação, infinitesimalmente, para que verifiquemos a proporcionalidade entre esses vetores com a finalidade de caracterizar, ou não, tal curva como sendo uma geodésica afim. O processo de transporte paralelo em uma variedade levará à necessidade de um novo processo de diferenciação. Isso ocorre por que um tensor, consequentemente um vetor contravariante, ou simplesmente vetor, é um objeto que é definido em uma variedade, em uma variedade diferencial, com rigor, de modo a carregar em si próprio a regra de transformação de coordenadas de cobertura e, também, sua representação no antigo patch de cobertura, viz., um campo tensorial  $T_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p}$  de tipo ou valência  $(p, q)$ , com posto contravariante  $p$  e posto covariante  $q$ , definido sobre os pontos de uma variedade  $\mathcal{M}^n$  de dimensão  $n$ , são objetos que têm suas  $n^{p+q}$  componentes transformadas quando de uma mudança de coordenadas na representação da variedade (mudança de coordinate patch de cobertura na variedade para a mesma região anteriormente coberta, i.e., não estamos nos referindo a uma mudança entre patches simultâneos que cobrem regiões diferentes em virtude de limitação nesses patches e que se entrelaçam na região de overlap) segundo a forma:

$$T'_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_q}{}^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_p} = \frac{\partial x'^{\alpha_1}}{\partial x^{\gamma_1}} \frac{\partial x'^{\alpha_2}}{\partial x^{\gamma_2}} \cdots \frac{\partial x'^{\alpha_p}}{\partial x^{\gamma_p}} \frac{\partial x^{\delta_1}}{\partial x'^{\beta_1}} \frac{\partial x^{\delta_2}}{\partial x'^{\beta_2}} \cdots \frac{\partial x^{\delta_q}}{\partial x'^{\beta_q}} T_{\delta_1\delta_2\cdots\delta_q}{}^{\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_p} = \prod_{k=1}^p \frac{\partial x'^{\alpha_k}}{\partial x^{\gamma_k}} \prod_{l=1}^q \frac{\partial x^{\delta_l}}{\partial x'^{\beta_l}} T_{\delta_1\delta_2\cdots\delta_q}{}^{\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_p}, \quad (7)$$

donde a adição e subtração de campos tensoriais:

$$\left( T'_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_q}{}^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_p} \pm X'_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_q}{}^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_p} \right) = \prod_{k=1}^p \frac{\partial x'^{\alpha_k}}{\partial x^{\gamma_k}} \prod_{l=1}^q \frac{\partial x^{\delta_l}}{\partial x'^{\beta_l}} \left( T_{\delta_1\delta_2\cdots\delta_q}{}^{\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_p} \pm X_{\delta_1\delta_2\cdots\delta_q}{}^{\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_p} \right) \quad (8)$$

geram tensores somente por que esse processo ocorre *em um mesmo ponto da variedade*, sendo que, para o nosso processo de diferenciação, subtraem-se dois vetores,  $X^\alpha(x^\beta + \delta x^\beta)$  e  $X^\alpha(x^\beta)$ , em *pontos distintos* da variedade. Tal processo novo de diferenciação é o que se denomina diferenciação covariante, sendo que o devemos definir. O processo de diferenciação covariante, ou derivação covariante, requer, por construção, um objeto não tensorial que se denomina conexão afim. As geodésicas que são definidas pelo processo de transporte paralelo que se dá ao longo dessas curvas de modo a manterem inalterados seus vetores tangentes nesse processo, viz., de modo a darem suporte para o processo covariante de transporte de seus vetores tangentes ao longo de si mesmas, são denominadas afins pelo que o processo de transporte carrega em si, por construção, a derivação covariante, e esta a conexão afim. Também há como se definir geodésica do ponto de vista variacional, conforme citado para o caso de uma reta euclidiana ordinária, essa sendo condição necessária para a estacionariedade do comprimento total de tal curva (no caso, uma mínima ação para o funcional de Lagrange definido pelo comprimento de arco elementar euclidiano) entre dois pontos arbitrários do espaço euclidiano ordinário. Para as geodésicas assim definidas numa variedade, o processo de cálculo variacional é análogo ao que é feito no caso euclidiano ordinário, sendo a diferença em relação ao caso euclidiano ordinário encapsulada na diferença entre o tensor métrico do caso euclidiano e o do que vier a equipar uma variedade não euclidiana específica. Porém, há que se enfatizar que as geodésicas afins não são necessariamente as geodésicas métricas obtidas pela condição de estacionariedade, sendo que as duas somente concordarão quando a conexão afim for tomada como sendo a conexão métrica dada pela contração pelo tensor métrico dos símbolos de Christoffel de primeiro tipo. Esses jargões ficarão claros no seguimento. Para finalizar este parágrafo antes que nos adentremos na obtenção das geodésicas afins e métricas, ressaltemos que essas curvas são absoluta-

mente importantes, tanto do ponto de vista matemático enquanto técnica para a obtenção de objetos relacionados à Eq. (1), quanto fisicamente; nessa esteira, particularmente, pela presença dessas curvas na enunciação da hipótese de Weyl (aqui, as geodésicas afim e métrica são idênticas, pois a conexão métrica é assumida, até pelo que se faz necessário para que haja significação física para medidas de distância e tempo no fluido cosmológico).

Consideremos uma variedade diferencial  $\mathcal{M}^n$  de dimensão  $n$ , i.e., uma entidade matemática, ou ainda, um espaço matemático de dimensão  $n$  que se parece localmente com o espaço euclidiano ordinário  $\mathbb{R}^n$  de mesma dimensão. Consideremos um campo vetorial  $V^\alpha$  contravariante definido nessa variedade, ou melhor, definido nos espaços tangentes  $T_P(\mathcal{M}^n)$  nos pontos  $P$  da variedade onde se localizam os vetores de tal campo vetorial contravariante  $V^\alpha$ . Suponhamos que a variedade possua um patch de cobertura, i.e, um sistema de coordenadas que cubra os pontos da variedade ou, caso haja limitação, um atlas de patches coordenados para as regiões de cobertura, sendo assim, que se encontre a variedade suficientemente coberta por um atlas. Consideremos agora um ponto  $P$  na variedade, ponto esse de coordenadas  $x^\beta + \delta x^\beta$  e próximo a um ponto  $O$  de coordenadas  $x^\beta$ . Obviamente, os índices contravariantes  $\alpha$  e  $\beta$  somente rotulam as  $n$  coordenadas, do campo vetorial e dos pontos na variedade, respectivamente, variando de 1 até  $n$  (aqui adotaremos a primeira coordenada com rótulo 1, e não zero, somente pelo que estamos fazendo uma digressão matemática; mais adiante, em dimensão  $n = 4$ , no nosso caso físico, rotularemos de 0 a primeira coordenada temporal como de praxe). Assim, até primeira ordem,  $V^\alpha$  em  $P$  é dado por:

$$\begin{aligned} V^\alpha(x^\beta + \delta x^\beta) &= V^\alpha(x^\beta) + \delta V^\alpha(x^\beta) \\ &= V^\alpha(x^\beta) + \delta x^\beta \partial_\beta V^\alpha, \end{aligned} \quad (9)$$

onde estamos sob a convenção para somatórios de Einstein, asseverando; as derivadas parciais são avaliadas em

$O$ , viz., em  $(x^\beta)$ ;  $\partial_\beta \equiv \partial/\partial x^\beta$ . A variação  $\delta V^\alpha(x^\beta)$  do campo vetorial  $V^\alpha(x^\beta)$ :

$$\begin{aligned}\delta V^\alpha(x^\beta) &= \delta x^\beta \partial_\beta V^\alpha = V^\alpha(x^\beta + \delta x^\beta) - V^\alpha(x^\beta) \\ &= V^\alpha|_P - V^\alpha|_O,\end{aligned}\quad (10)$$

conforme discutimos anteriormente, não é tensorial, pois, pela Eq. (8), essa diferença deveria ser calculada em um mesmo ponto da variedade. Podemos pensar que há como contornar essa dificuldade pelo transporte do vetor  $V^\alpha|_O$  para o ponto  $P$ , de modo a efetuarmos a subtração entre o vetor  $V^\alpha|_P$  já em  $P$  pelo vetor transportado. Tal operação seria somente a reprodução do vetor em  $O$  no ponto  $P$ , porém no sentido de que se requeira que a operação limite  $\delta x^\epsilon \rightarrow 0$ , tomada sobre:

$$\frac{V^\alpha|_P - V^\alpha|_{O \rightarrow P}}{\delta x^\epsilon} = \frac{V^\alpha(x^\beta + \delta x^\beta) - V^\alpha|_{O \rightarrow P}}{\delta x^\epsilon}, \quad (11)$$

seja tensorial. Para isso, defina-se:

$$V^\alpha|_{O \rightarrow P} \equiv V^\alpha(x^\beta) + \delta_{\parallel} V^\alpha(x^\beta), \quad (12)$$

e, usando as Eqs. (9), (10) e (12), requeira-se, então, a tensorialidade para o processo limite  $\delta x^\epsilon \rightarrow 0$  tomado sobre a Eq. (11). viz., requeira-se tensorial a razão:

$$\begin{aligned}\frac{V^\alpha|_P - V^\alpha|_{O \rightarrow P}}{\delta x^\epsilon} &= \\ &= \frac{[V^\alpha(x^\beta) + \delta V^\alpha(x^\beta)] - [V^\alpha(x^\beta) + \delta_{\parallel} V^\alpha(x^\beta)]}{\delta x^\epsilon} \\ &= \frac{\delta V^\alpha(x^\beta) - \delta_{\parallel} V^\alpha(x^\beta)}{\delta x^\epsilon} \\ &= \frac{\delta x^\gamma \partial_\gamma V^\alpha - \delta_{\parallel} V^\alpha(x^\beta)}{\delta x^\epsilon}.\end{aligned}\quad (13)$$

Tal transporte vetorial segundo esse mecanismo é o que se denomina transporte paralelo vetorial elementar em uma variedade. No transporte paralelo elementar de um vetor nele mesmo, i.e., aqui, quando  $\delta x^\beta = 0$ , requerer-se-á  $\delta_{\parallel} V^\alpha(x^\beta) = 0$ ; também se requererá que o transporte paralelo elementar de um vetor nulo gere um vetor nulo. Tais requisitos, ainda que sejam por força de hipótese, são evidentemente razoáveis. Em virtude desses dois requisitos, para que se verifiquem, aqui se introduzem os fatores de proporcionalidade, i.e., define-se o objeto matemático *conexão afim*  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(x^\delta)$ , viz., definem-se  $n^3$  funções na variedade diferencial:

$$\delta_{\parallel} V^\alpha(x^\delta) = -\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(x^\delta) V^\beta(x^\delta) \delta x^\gamma, \quad (14)$$

onde o sinal negativo é simplesmente convencionado por conveniência de forma para a definição da derivação covariante que faremos no seguimento. Define-se então a *derivada covariante*  $\nabla_\epsilon V^\alpha(x^\beta)$  de um campo vetorial contravariante  $V^\alpha(x^\beta)$  pelo processo limite:

$$\nabla_\epsilon V^\alpha(x^\beta) = \lim_{\delta x^\epsilon \rightarrow 0} \frac{V^\alpha|_P - V^\alpha|_{O \rightarrow P}}{\delta x^\epsilon}. \quad (15)$$

Em virtude das Eqs. (13) e (14), reescrevemos a Eq. (15):

$$\begin{aligned}\nabla_\epsilon V^\alpha(x^\beta) &= \lim_{\delta x^\epsilon \rightarrow 0} \frac{\delta x^\gamma \partial_\gamma V^\alpha - \delta_{\parallel} V^\alpha(x^\delta)}{\delta x^\epsilon} \\ &= \lim_{\delta x^\epsilon \rightarrow 0} \frac{\delta x^\gamma \partial_\gamma V^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(x^\delta) V^\beta(x^\delta) \delta x^\gamma}{\delta x^\epsilon} \\ &= \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^\epsilon} \partial_\gamma V^\alpha + \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^\epsilon} \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(x^\delta) V^\beta \\ &= \delta_\epsilon^\gamma \partial_\gamma V^\alpha(x^\delta) + \delta_\epsilon^\gamma \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(x^\delta) V^\beta \\ &= \partial_\epsilon V^\alpha(x^\delta) + \Gamma_{\beta\epsilon}^\alpha(x^\delta) V^\beta.\end{aligned}\quad (16)$$

Portanto, a derivada covariante de um campo vetorial contravariante é dada por:

$$\nabla_\epsilon V^\alpha = \partial_\epsilon V^\alpha + \Gamma_{\beta\epsilon}^\alpha V^\beta, \quad (17)$$

ficando tácito que o campo  $V^\alpha$ , as derivadas e a conexão afim são todos calculados num ponto  $O$ ,  $(x^\alpha)$ , arbitrário, da variedade coberta por um sistema de coordenadas  $x^\alpha$ . Note-se que o índice da componente específica segundo a qual a derivada covariante está sendo tomada,  $\epsilon$ , na Eq. (17), está na segunda posição covariante de  $\Gamma_{\beta\epsilon}^\alpha$ . Aqui, ainda não há suposição alguma em relação à simetria nesses índices covariantes de  $\Gamma_{\beta\epsilon}^\alpha$ . Fazemos agora a imposição para que  $\nabla_\epsilon V^\alpha$  seja um tensor de valência (1,1), i.e., posto contravariante 1 e posto covariante 1, em decorrência desse requisito (tensorialidade) para a Eq. (13), conforme o propósito original que ensejou tensorialidade para o processo limite tomado sobre a Eq. (11). Portanto, temos que:

$$\begin{aligned}\nabla_\gamma V^\alpha &= \partial_\gamma V^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha V^\beta \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\gamma} V^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha V^\beta = \frac{\partial V^\alpha}{\partial x'^\epsilon} \frac{\partial x'^\epsilon}{\partial x^\gamma} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha V^\beta \\ &= \frac{\partial x'^\epsilon}{\partial x^\gamma} \frac{\partial}{\partial x'^\epsilon} \left( \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\delta} V'^\delta \right) + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha V^\beta \\ &= \frac{\partial x'^\epsilon}{\partial x^\gamma} \left( \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\delta \partial x'^\epsilon} V'^\delta + \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\delta} \frac{\partial}{\partial x'^\epsilon} V'^\delta \right) + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha V^\beta \\ &= \frac{\partial x'^\epsilon}{\partial x^\gamma} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\delta \partial x'^\epsilon} V'^\delta + \frac{\partial x'^\epsilon}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\delta} \partial'_\epsilon V'^\delta + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha V^\beta \\ &= \frac{\partial x'^\epsilon}{\partial x^\gamma} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\delta \partial x'^\epsilon} \left( \frac{\partial x'^\delta}{\partial x^\beta} V^\beta \right) + \frac{\partial x'^\epsilon}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\delta} \partial'_\epsilon V'^\delta + \\ &\quad + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha V^\beta \\ &= \frac{\partial x'^\epsilon}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\delta}{\partial x^\beta} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\delta \partial x'^\epsilon} V^\beta + \frac{\partial x'^\epsilon}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\delta} \partial'_\epsilon V'^\delta + \\ &\quad + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha V^\beta \\ &= \frac{\partial x'^\epsilon}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\delta} \partial'_\epsilon V'^\delta + \\ &\quad + \left( \frac{\partial x'^\epsilon}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\delta}{\partial x^\beta} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\delta \partial x'^\epsilon} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \right) V^\beta,\end{aligned}\quad (18)$$

donde, uma vez que se deve transformar,  $\nabla_\gamma V^\alpha$ , tensorialmente, em virtude da Eq. (7):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x'^\varphi}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\delta} \nabla'_\varphi V'^\delta &= \frac{\partial x'^\epsilon}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\delta} \partial'_\epsilon V'^\delta + \left( \frac{\partial x'^\epsilon}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\delta}{\partial x^\beta} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\delta \partial x'^\epsilon} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \right) V^\beta \Rightarrow \\
\frac{\partial x'^\varphi}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\delta} \left( \partial'_\varphi V'^\delta + \Gamma_{\epsilon\varphi}^{\prime\delta} V'^\epsilon \right) &= \frac{\partial x'^\epsilon}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\delta} \partial'_\epsilon V'^\delta + \left( \frac{\partial x'^\epsilon}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\delta}{\partial x^\beta} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\delta \partial x'^\epsilon} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \right) V^\beta \Rightarrow \\
\frac{\partial x'^\varphi}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\delta} \partial'_\varphi V'^\delta + \frac{\partial x'^\varphi}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\delta} \Gamma_{\epsilon\varphi}^{\prime\delta} V'^\epsilon &= \frac{\partial x'^\epsilon}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\delta} \partial'_\epsilon V'^\delta + \left( \frac{\partial x'^\epsilon}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\delta}{\partial x^\beta} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\delta \partial x'^\epsilon} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \right) V^\beta \Rightarrow \\
\frac{\partial x'^\epsilon}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\delta} \partial'_\epsilon V'^\delta + \frac{\partial x'^\varphi}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\delta} \Gamma_{\epsilon\varphi}^{\prime\delta} V'^\epsilon &= \frac{\partial x'^\epsilon}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\delta} \partial'_\epsilon V'^\delta + \left( \frac{\partial x'^\epsilon}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\delta}{\partial x^\beta} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\delta \partial x'^\epsilon} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \right) V^\beta \Rightarrow \\
\frac{\partial x'^\varphi}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\delta} \Gamma_{\epsilon\varphi}^{\prime\delta} V'^\epsilon &= \left( \frac{\partial x'^\epsilon}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\delta}{\partial x^\beta} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\delta \partial x'^\epsilon} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \right) V^\beta \Rightarrow \\
\frac{\partial x'^\varphi}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\delta} \Gamma_{\epsilon\varphi}^{\prime\delta} \frac{\partial x'^\epsilon}{\partial x^\beta} V^\beta &= \left( \frac{\partial x'^\epsilon}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\delta}{\partial x^\beta} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\delta \partial x'^\epsilon} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \right) V^\beta. \tag{19}
\end{aligned}$$

Como as  $n$  componentes  $V^\alpha$  são arbitrárias, pois o vetor contravariante é arbitrário, com a Eq. (19) sendo verdadeira não apenas para  $V^\alpha = 0 \forall \alpha \in \{1, 2, \dots, n\}$ , temos que a conexão afim  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$  transforma-se segundo a regra:

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\delta} \frac{\partial x'^\epsilon}{\partial x^\beta} \frac{\partial x'^\varphi}{\partial x^\gamma} \Gamma_{\epsilon\varphi}^{\prime\delta} - \frac{\partial x'^\delta}{\partial x^\beta} \frac{\partial x'^\epsilon}{\partial x^\gamma} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\delta \partial x'^\epsilon}, \tag{20}$$

donde vemos claramente que esse objeto não é um tensor em virtude do termo extra, segundo termo no lado direito da Eq. (20), termo esse que faz a conexão afim transformar-se por forma distinta da forma pela qual se transformaria um tensor do tipo (1,2) dada, também, pela Eq. (7). É usual definir um objeto que se transforma pela regra dada pela Eq. (20) como sendo uma conexão afim. Porém, isso se define colocando-se a Eq. (20) numa forma um pouco diferente, ainda que equiva-

lente. Para tal, notemos que:

$$\delta_\gamma^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\gamma} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\delta} \frac{\partial x'^\delta}{\partial x^\gamma},$$

donde:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x^\beta} \delta_\gamma^\alpha &= \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left( \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\delta} \frac{\partial x'^\delta}{\partial x^\gamma} \right) = 0 \\
&= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\delta} \frac{\partial^2 x'^\delta}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} + \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^\beta \partial x'^\delta} \frac{\partial x'^\delta}{\partial x^\gamma},
\end{aligned}$$

portanto, alcança-se:

$$\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^\beta \partial x'^\delta} \frac{\partial x'^\delta}{\partial x^\gamma} = - \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\delta} \frac{\partial^2 x'^\delta}{\partial x^\beta \partial x^\gamma},$$

e a partir do que se escreve:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^\beta \partial x'^\delta} \frac{\partial x'^\delta}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\epsilon}{\partial x^\beta} &= \delta_\epsilon^\delta \frac{\partial x'^\epsilon}{\partial x^\gamma} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^\beta \partial x'^\delta} = \frac{\partial x'^\epsilon}{\partial x^\gamma} \left[ \delta_\epsilon^\delta \frac{\partial}{\partial x'^\varphi} \left( \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\delta} \right) \frac{\partial x'^\varphi}{\partial x^\beta} \right] = \frac{\partial x'^\epsilon}{\partial x^\gamma} \left( \delta_\epsilon^\delta \frac{\partial x'^\varphi}{\partial x^\beta} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\delta \partial x'^\varphi} \right) \\
&= \frac{\partial x'^\epsilon}{\partial x^\gamma} \left( \frac{\partial x'^\varphi}{\partial x^\beta} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\epsilon \partial x'^\varphi} \right) = - \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\delta} \frac{\partial^2 x'^\delta}{\partial x^\beta \partial x^\gamma},
\end{aligned}$$

i.e.:

$$\frac{\partial x'^\delta}{\partial x^\beta} \frac{\partial x'^\epsilon}{\partial x^\gamma} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\delta \partial x'^\epsilon} = - \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\delta} \frac{\partial^2 x'^\delta}{\partial x^\beta \partial x^\gamma}, \tag{21}$$

onde simplesmente renomeamos para  $\delta$  o índice mudo  $\varphi$  ao reescrevermos o lado esquerdo da Eq. (21) a partir da Eq. subsequentemente anterior. Inserindo o resultado da Eq. (21) na Eq. (20), chega-se à forma usual pela qual se transforma uma *afinidade* (ou simplesmente uma

conexão afim) em uma variedade diferencial:

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\delta} \frac{\partial x'^\epsilon}{\partial x^\beta} \frac{\partial x'^\varphi}{\partial x^\gamma} \Gamma_{\epsilon\varphi}^{\prime\delta} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\delta} \frac{\partial^2 x'^\delta}{\partial x^\beta \partial x^\gamma}, \tag{22}$$

quando de uma mudança de coordenadas de cobertura para a variedade. Seguindo o mesmo comentário que tecemos acima sobre a não tensorialidade de uma conexão afim, o mesmo se conclui pela presença do segundo termo no lado direito da Eq. (22). A ausência de tal termo

faria com que uma conexão afim se transformasse como um tensor de valência (1, 2), viz., com posto contravariante 1 e posto covariante 2, mas não é o caso de sua definição. Conforme dissemos, qualquer quantidade que se transforme conforme a Eq. (22) é o que se denomina uma conexão afim, sendo que uma variedade diferencial equipada com uma conexão de tal tipo, sendo tal conexão contínua, denomina-se *variedade afim* (*affine manifold*). O segundo termo não tensorial do lado direito da Eq. (22) é esperado, uma vez que o mesmo adveio de uma necessidade de se definir uma diferenciação como sendo tensorial, sendo tal termo compensatório em virtude da não tensorialidade da derivada ordinária, o que pode ser verificado trivialmente:

$$\begin{aligned}\partial_\gamma V^\alpha &= \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \left( \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\beta} V'^\beta \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x'^\delta} \left( \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\beta} V'^\beta \right) \frac{\partial x'^\delta}{\partial x^\gamma} \\ &= \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\delta \partial x'^\beta} V'^\beta \frac{\partial x'^\delta}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\beta} \frac{\partial x'^\delta}{\partial x^\gamma} \partial'_\delta V'^\beta, \quad (23)\end{aligned}$$

i.e.:

$$\partial_\gamma V^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\beta} \frac{\partial x'^\delta}{\partial x^\gamma} \partial'_\delta V'^\beta + \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\delta \partial x'^\beta} \frac{\partial x'^\delta}{\partial x^\gamma} V'^\beta \quad (24)$$

é claramente não tensorial em virtude da Eq. (7). O transporte paralelo de tensores terá aplicação fundamental, pois estaremos interessados em sua aplicação ao tensor de energia e momento, viz., na dita forma tensorial a encapsular a covariância da conservação de energia e momento que se põe pela anulação de sua derivada covariante. Tal aplicação e interpretação é profunda e leva a consequências globais para o substrato cosmológico. Nós voltaremos aos aspectos covariantes do tensor de energia e momento em breve, todavia queremos aqui en-

fatizar que a derivada covariante deve ser generalizada para que a possamos instrumentalizar no contexto do tensor de energia e momento, dado que aqui apenas nos ativemos à definição dessa derivação para o caso de um vetor contravariante. Poderíamos nos concentrar na generalização da derivação covariante para tensores com valências respectivas às que posteriormente utilizaremos em nosso tratamento cosmológico, porém a generalização para tensores quaisquer acabará por se tornar evidente, pelo que elencaremos o resultado geral após alguns passos de nossa dedução que se seguirá. É natural que se defina a derivada covariante de um campo escalar  $\phi$  como sendo igual à sua derivada ordinária, pois, diferentemente do que ocorre com a derivada ordinária de um tensor, e.g., conforme ocorreu com um vetor contravariante na Eq. (24), a derivada ordinária de um campo escalar transforma-se como um tensor covariante de posto 1  $T_\alpha$  (vetor covariante), viz.:

$$\partial_\alpha \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \phi}{\partial x'^\beta} = \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \phi'}{\partial x'^\beta} = \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\alpha} \partial'_\beta \phi', \quad (25)$$

pelo que se infere a partir da Eq. (7), e dado que um campo escalar é localmente invariante num ponto arbitrário  $P$  de uma variedade diferencial:

$$\phi = \phi'. \quad (26)$$

Portanto, defina-se:

$$\nabla_\alpha \phi \equiv \partial_\alpha \phi. \quad (27)$$

Ainda, aqui é importante que se destaque que a multiplicação de um tensor de valência  $(p, q)$  por um tensor de valência  $(r, s)$  gera um tensor de valência  $(p + r, q + s)$  (operação que se dá num mesmo ponto da variedade):

$$\left( T_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p} X_{\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_s}^{\epsilon_1 \epsilon_2 \dots \epsilon_r} \right) = \prod_{k=1}^p \frac{\partial x'^{\alpha_k}}{\partial x^{\gamma_k}} \prod_{l=1}^q \frac{\partial x^{\delta_l}}{\partial x'^{\beta_l}} \prod_{m=1}^r \frac{\partial x'^{\epsilon_m}}{\partial x^{\eta_m}} \prod_{n=1}^s \frac{\partial x^{\iota_n}}{\partial x'^{\varphi_n}} \left( T_{\delta_1 \delta_2 \dots \delta_q}^{\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_p} X_{\iota_1 \iota_2 \dots \iota_s}^{\eta_1 \eta_2 \dots \eta_r} \right), \quad (28)$$

o que torna tensorial o produto de uma quantidade qualquer de tensores, donde um tensor de tipo  $(p + r, q + s)$  pode, e.g., ser interpretado como sendo o produto de dois tensores de tipos respectivos  $(p, q)$  e  $(r, s)$ , i.e., convenientemente se fatoram tensores em tipos complementares. Por essas considerações, todavia não somente, torna-se possível generalizar a derivada covariante de tensores de valências quaisquer. De fato, pode-se requerer que a derivada covariante seja *Leibniz*, viz., que satisfaça a regra usual de diferenciação quando aplicada ao produto tensorial. Para tal generalização, comecemos primeira-

mente com o produto mais simples entre dois tensores de valência não nula  $(0, 0)$  (o que seria simplesmente o produto de dois campos escalares), i.e., escrevamos o campo escalar oriundo da contração de um vetor contravariante  $V^\alpha$  [campo tensorial do tipo  $(1, 0)$ ] por seu vetor dual covariante [campo tensorial do tipo  $(0, 1)$ ], gerando um campo escalar [um tensor de posto, ou valência,  $(0, 0)$ , que é um campo escalar, notando que índices duais repetidos cancelam a valência desses postos], viz.:

$$V^\alpha V_\alpha = V^1 V_1 + V^2 V_2 + \dots + V^n V_n = \phi. \quad (29)$$

Agora, em virtude das Eqs. (27) e (29), temos:

$$\nabla_\gamma (V^\alpha V_\alpha) = \nabla_\gamma \phi = \partial_\gamma \phi = \partial_\gamma (V^\alpha V_\alpha). \quad (30)$$

Desenvolvendo o lado direito da Eq. (30):

$$\partial_\gamma (V^\alpha V_\alpha) = V^\alpha (\partial_\gamma V_\alpha) + (\partial_\gamma V^\alpha) V_\alpha, \quad (31)$$

desenvolvendo o lado esquerdo da Eq. (30) com o requisito de que seja Leibniz a derivada covariante aplicada ao produto  $V^\alpha V_\alpha$ :

$$\nabla_\gamma (V^\alpha V_\alpha) = V^\alpha (\nabla_\gamma V_\alpha) + (\nabla_\gamma V^\alpha) V_\alpha, \quad (32)$$

aplicando a Eq. (17) no termo que contém  $(\partial_\gamma V^\alpha)$  no lado direito da Eq. (31), e reescrevendo essa Eq. (31), de modo a ser o lado direito da Eq. (30), então, dado por:

$$\begin{aligned} \partial_\gamma (V^\alpha V_\alpha) &= V^\alpha (\partial_\gamma V_\alpha) + (\nabla_\gamma V^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha V^\beta) V_\alpha \\ &= V^\alpha (\partial_\gamma V_\alpha) + (\nabla_\gamma V^\alpha) V_\alpha - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha V^\beta V_\alpha, \end{aligned} \quad (33)$$

temos, finalmente, igualando os lados esquerdo e direito da Eq. (30), i.e., igualando o lado direito da Eq. (32) ao lado direito da Eq. (33):

$$V^\alpha \nabla_\gamma V_\alpha = (\partial_\gamma V_\alpha - \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta V_\beta) V^\alpha, \quad (34)$$

onde simplesmente renomeamos os índices mudos no terceiro termo do lado direito da Eq. (33). Novamente, as  $n$  componentes  $V^\alpha$  do campo vetorial contravariante são arbitrárias, pois o vetor contravariante é arbitrário, donde a Eq. (34) deve ser verdadeira não apenas para  $V^\alpha = 0 \forall \alpha \in \{1, 2, \dots, n\}$ , pelo que a derivada covariante de um campo vetorial covariante  $V_\alpha$  é suficiente e necessariamente dada por:

$$\nabla_\gamma V_\alpha = \partial_\gamma V_\alpha - \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta V_\beta, \quad (35)$$

dentro das condições impostas, viz., relativamente a ser Leibniz a derivada covariante e a serem idênticas as derivadas covariante e ordinária de um campo escalar definido sobre a variedade diferencial, condições essas que serão, doravante, válidas por força de definição. Note-se novamente que o índice da coordenada em relação à qual a derivada covariante está sendo tomada é o segundo entre os índices covariantes da conexão afim, reiterando novamente que não fizemos nenhuma consideração sobre simetria dos índices covariantes da conexão. A denominação covariante para essa derivada reside no fato de que a derivada covariante de um tensor de tipo  $(p, q)$  gera um tensor do tipo  $(p, q + 1)$ , i.e., gerando no resultado um posto covariante extra. A generalização para tensores quaisquer segue sem maiores dificuldades. E.g.,

para obtermos a derivada covariante de um tensor do tipo  $(1, 1)$ ,  $T_\beta^\alpha$ , escrevemos  $T_\beta^\alpha$  como sendo o produto de um tensor do tipo  $(1, 0)$  (vetor contravariante), digamos  $X^\alpha$ , por um tensor do tipo  $(0, 1)$  (vetor covariante), digamos  $W_\beta$ , i.e.:

$$\begin{aligned} \nabla_\gamma T_\beta^\alpha &= \nabla_\gamma (X^\alpha W_\beta) \\ &= (\nabla_\gamma X^\alpha) W_\beta + X^\alpha (\nabla_\gamma W_\beta) \\ &= (\partial_\gamma X^\alpha + \Gamma_{\epsilon\gamma}^\alpha X^\epsilon) W_\beta + X^\alpha (\partial_\gamma W_\beta - \Gamma_{\beta\gamma}^\delta W_\delta) \\ &= W_\beta \partial_\gamma X^\alpha + \Gamma_{\epsilon\gamma}^\alpha X^\epsilon W_\beta + \\ &\quad + X^\alpha \partial_\gamma W_\beta - \Gamma_{\beta\gamma}^\delta W_\delta X^\alpha \\ &= \partial_\gamma T_\beta^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma}^\delta T_\delta^\alpha + \Gamma_{\epsilon\gamma}^\alpha T_\beta^\epsilon \\ &= \partial_\gamma T_\beta^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma}^\delta T_\delta^\alpha + \Gamma_{\delta\gamma}^\alpha T_\beta^\delta, \end{aligned} \quad (36)$$

onde utilizamos nossos resultados anteriores para a derivação covariante de vetores contravariante e covariante, Eqs. (17) e (35) respectivamente, recolhemos os produtos de  $X^\alpha$  e  $W_\beta$  novamente à forma  $T_\beta^\alpha$ , e renomeamos o índice mudo de  $\epsilon$  para  $\delta$  na conexão para que se infira o padrão para a derivada covariante sendo, assim, a derivada covariante de um tensor de valência  $(1, 1)$ , em virtude da Eq. (36), é dada por:

$$\nabla_\gamma T_\beta^\alpha = \partial_\gamma T_\beta^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma}^\delta T_\delta^\alpha + \Gamma_{\delta\gamma}^\alpha T_\beta^\delta. \quad (37)$$

Esse processo pode ser trivialmente estendido para tensores de ordem quaisquer. Vamos dar mais um exemplo antes de elencar o resultado geral, que segue trivialmente, pois passa-se a notar o padrão de alternância de índices entre a conexão e o tensor derivado. Tomemos a derivada covariante de um tensor de valência  $(2, 2)$  para ilustrar o mecanismo de alternância de índices, o que é suficiente para tornar isso claro:

$$\begin{aligned} \nabla_\gamma T_{\beta_1\beta_2}^{\alpha_1\alpha_2} &= \nabla_\gamma (S_{\beta_1}^{\alpha_1} W_{\beta_2}^{\alpha_2}) = S_{\beta_1}^{\alpha_1} \nabla_\gamma W_{\beta_2}^{\alpha_2} + W_{\beta_2}^{\alpha_2} \nabla_\gamma S_{\beta_1}^{\alpha_1} \\ &= S_{\beta_1}^{\alpha_1} (\partial_\gamma W_{\beta_2}^{\alpha_2} - \Gamma_{\beta_2\gamma}^\delta W_\delta^{\alpha_2} + \Gamma_{\delta\gamma}^{\alpha_2} W_{\beta_2}^\delta) + \\ &\quad + W_{\beta_2}^{\alpha_2} (\partial_\gamma S_{\beta_1}^{\alpha_1} - \Gamma_{\beta_1\gamma}^\delta S_\delta^{\alpha_1} + \Gamma_{\delta\gamma}^{\alpha_1} S_{\beta_1}^\delta) \\ &= S_{\beta_1}^{\alpha_1} \partial_\gamma W_{\beta_2}^{\alpha_2} - S_{\beta_1}^{\alpha_1} \Gamma_{\beta_2\gamma}^\delta W_\delta^{\alpha_2} + S_{\beta_1}^{\alpha_1} \Gamma_{\delta\gamma}^{\alpha_2} W_{\beta_2}^\delta + \\ &\quad + W_{\beta_2}^{\alpha_2} \partial_\gamma S_{\beta_1}^{\alpha_1} - W_{\beta_2}^{\alpha_2} \Gamma_{\beta_1\gamma}^\delta S_\delta^{\alpha_1} + W_{\beta_2}^{\alpha_2} \Gamma_{\delta\gamma}^{\alpha_1} S_{\beta_1}^\delta \\ &= \partial_\gamma T_{\beta_1\beta_2}^{\alpha_1\alpha_2} - \Gamma_{\beta_2\gamma}^\delta T_{\beta_1\delta}^{\alpha_1\alpha_2} - \Gamma_{\beta_1\gamma}^\delta T_{\delta\beta_2}^{\alpha_1\alpha_2} + \\ &\quad + \Gamma_{\delta\gamma}^{\alpha_2} T_{\beta_1\beta_2}^{\alpha_1\delta} + \Gamma_{\delta\gamma}^{\alpha_1} T_{\beta_1\beta_2}^{\delta\alpha_2} \\ &= \partial_\gamma T_{\beta_1\beta_2}^{\alpha_1\alpha_2} - \Gamma_{\beta_1\gamma}^\delta T_{\delta\beta_2}^{\alpha_1\alpha_2} - \Gamma_{\beta_2\gamma}^\delta T_{\beta_1\delta}^{\alpha_1\alpha_2} + \\ &\quad + \Gamma_{\delta\gamma}^{\alpha_1} T_{\beta_1\beta_2}^{\delta\alpha_2} + \Gamma_{\delta\gamma}^{\alpha_2} T_{\beta_1\beta_2}^{\alpha_1\delta}, \end{aligned} \quad (38)$$

o que dá ensejo à generalização para a derivada covariante de um tensor de valência  $(r, p)$ :

$$\begin{aligned} \nabla_\gamma T_{\beta_1 \dots \beta_p}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} &= \partial_\gamma T_{\beta_1 \dots \beta_p}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} - \Gamma_{\beta_1 \gamma}^\delta T_{\delta \beta_2 \dots \beta_p}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} - \Gamma_{\beta_2 \gamma}^\delta T_{\beta_1 \delta \beta_3 \dots \beta_p}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} - \Gamma_{\beta_3 \gamma}^\delta T_{\beta_1 \beta_2 \delta \dots \beta_p}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} - \dots - \Gamma_{\beta_p \gamma}^\delta T_{\beta_1 \dots \beta_{p-1} \delta}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} \\ &+ \Gamma_{\delta \gamma}^{\alpha_1} T_{\beta_1 \dots \beta_p}^{\delta \alpha_2 \dots \alpha_r} + \Gamma_{\delta \gamma}^{\alpha_2} T_{\beta_1 \dots \beta_p}^{\alpha_1 \delta \dots \alpha_r} + \Gamma_{\delta \gamma}^{\alpha_3} T_{\beta_1 \dots \beta_p}^{\alpha_1 \alpha_2 \delta \dots \alpha_r} + \dots + \Gamma_{\delta \gamma}^{\alpha_r} T_{\beta_1 \dots \beta_p}^{\alpha_1 \dots \alpha_{r-1} \delta}. \end{aligned} \quad (39)$$

Já temos elementos para que desenvolvamos matematicamente as geodésicas afins, mas antes de definirmos nas geodésicas em si, que são curvas privilegiadas, conforme dissemos anteriormente, tais que seus vetores tangentes são paralelamente propagados em si mesmos ao longo dessa curva privilegiada, sendo que o porquê dessa condição definidora para as geodésicas já ficará claro, devemos definir primeiramente o que se chama *uma congruência de curvas* em uma variedade diferencial.

- Uma congruência de curvas em uma variedade  $\mathcal{M}^n$  de dimensão  $n$  é uma coleção de curvas a um parâmetro real  $u$ , i.e.,  $\{x_P^\alpha(u)\}_{\forall P \in \mathcal{M}^n, \forall \alpha \in \{1, 2, \dots, n\}}$ , tal que uma e somente uma curva dessa coleção passa por  $P$ , para qualquer ponto  $P$  dessa variedade  $\mathcal{M}^n$ .

Assim, heurísticamente, uma congruência de curvas é um preenchimento da variedade diferencial por curvas passando em cada um de seus pontos  $P$  sem que haja cruzamento de curvas nesses pontos. Nessa esteira, dada uma curva qualquer de uma congruência de curvas:

$$x^\alpha = x^\alpha(u), \quad (40)$$

podemos utilizá-la para definir um campo vetorial contravariante [8] tangente:

$$V^\alpha = \frac{dx^\alpha(u)}{du}, \quad (41)$$

ao longo dessa curva. Se assim procedermos para cada curva em uma congruência de curvas, teremos construído um campo vetorial  $V^\alpha$ , dado pela Eq. (41) em cada ponto da curva, por toda a variedade diferencial considerada. Podemos proceder de modo recíproco, em virtude do teorema de existência e unicidade para as equações diferenciais ordinárias, viz., o teorema de existência e unicidade garante que, pelo menos para algum subconjunto de reais, dado um campo vetorial definido em cada ponto da variedade, rigorosamente em cada espaço tangente  $T_P(\mathcal{M}^n)$  relativo a cada um dos pontos  $P$  dessa variedade diferencial  $\mathcal{M}^n$  de dimensão  $n$ :

$$V^\alpha = V^\alpha(x^\beta), \quad (42)$$

podemos, a partir desse campo vetorial, definir uma congruência de curvas na variedade diferencial sob consideração, curvas essas chamadas de linhas de corrente, trajetórias ou órbitas desse campo vetorial  $V^\alpha(x^\beta)$ , procedimento análogo ao que se faz em análise vetorial para a

determinação das linhas de campo, ou linhas de corrente, de um campo vetorial. Essas curvas  $x^\alpha(u)$  de congruência são, então, reciprocamente construídas pela solução das Eqs. diferenciais ordinárias:

$$\frac{dx^\alpha}{du} = V^\alpha[x^\beta(u)], \quad (43)$$

garantida pelo teorema de existência e unicidade para essas Eqs..

Consideremos uma variedade  $\mathcal{M}^n$  de dimensão  $n$  e uma curva  $\mathcal{C} : x^\alpha = x^\alpha(u)$ , parametrizada pelo parâmetro real  $u$ , pertencente a uma congruência de curvas em  $\mathcal{M}^n$ . Consideremos dois pontos da variedade,  $O$  e  $P$ , ambos sobre a curva  $\mathcal{C}$ , i.e., pertencentes à curva  $\mathcal{C}$ , e tais que:

$$\delta u \rightarrow 0 \Rightarrow P[x^\alpha(u + \delta u)] \rightarrow O[x^\alpha(u)], \quad (44)$$

i.e., o ponto  $O$  tem coordenadas  $x^\alpha(u)$  sobre a curva  $\mathcal{C}$ , sendo que o ponto  $P$  de coordenadas  $x^\alpha(u + \delta u)$  é uma vizinhança de  $O$  sobre a curva  $\mathcal{C}$ , tal que ambos os pontos coincidam se e somente se  $\delta u = 0$ . Seja agora um vetor contravariante  $V^\alpha = V^\alpha[x^\beta(u)] = V^\alpha(O)$  no ponto  $O$  da variedade, i.e., pertencente ao espaço tangente  $T_O(\mathcal{M}^n)$  à variedade  $\mathcal{M}^n$  em  $O$ , sendo esse vetor oriundo de um campo vetorial contravariante  $V^\alpha$  construído na variedade e avaliado primariamente em  $O$ , sem que esteja necessariamente vinculado à congruência de curvas à qual pertence  $\mathcal{C}$  [ainda que estejamos usando a mesma notação usada na Eq. (41) para o campo tangente a uma curva de uma congruência de curvas, reiteramos que  $V^\alpha$  é um campo vetorial arbitrário construído na variedade, construído através de uma outra congruência de curvas distinta da que  $\mathcal{C}$  pertence, e.g., mas que, eventualmente, pode passar a estar vinculado à curva  $\mathcal{C}$ , como pela Eq. (41), e.g., dado que  $V^\alpha$  é arbitrário por construção]. Efetuemos agora o transporte paralelo de  $V^\alpha$  de  $O$  até  $P$  ao longo da curva  $\mathcal{C}$ , i.e., transportemos, sobre a curva  $\mathcal{C}$ , esse vetor  $V^\alpha$  primariamente definido em  $O$  até a vizinhança  $P$  de  $O$ , sendo essa uma vizinhança sobre a curva  $\mathcal{C}$  conforme a acabamos de definir. O processo de transporte paralelo já fora por nós definido, sendo que agora apenas teremos de acrescentar o vínculo segundo o qual esse transporte se processa, i.e., teremos apenas de acrescentar a curva sobre a qual o transporte se processa. Para o processo de transporte paralelo em si, temos, em virtude das Eqs. (12) e (14), que o mesmo é dado por:

$$\begin{aligned} V^\alpha|_{O \rightarrow P} &\equiv V^\alpha(x^\delta) + \delta_\parallel V^\alpha(x^\delta) \\ &= V^\alpha(x^\delta) - \Gamma_{\beta \gamma}^\alpha(x^\delta) V^\beta(x^\delta) \delta x^\gamma. \end{aligned} \quad (45)$$

Em sendo esse transporte sobre  $\mathcal{C}$ :

$$\begin{aligned} O \rightarrow P \Leftrightarrow x^\alpha(u) \rightarrow x^\alpha(u + \delta u) &= x^\alpha(u) + \delta x^\alpha(u) \\ &= x^\alpha(u) + \frac{dx^\alpha(u)}{du} \delta u \\ \therefore \delta x^\alpha(u) &= \frac{dx^\alpha(u)}{du} \delta u. \end{aligned} \quad (46)$$

Assim, a Eq. (45) torna-se, em virtude da Eq. (46), i.e., um vetor  $V^\alpha(O)$  definido em um ponto  $O$  de uma variedade que é paralelamente transportado para uma vizinhança  $P$  de  $O$  ao longo de uma curva  $\mathcal{C}$  que passa por  $O$ , curva essa pertencente a uma congruência de curvas em  $\mathcal{M}^n$ , é dado por:

$$V^\alpha + \delta_{\parallel} V^\alpha = V^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha V^\beta \frac{dx^\gamma}{du} \delta u. \quad (47)$$

Esse transporte paralelo refere-se ao paralelismo do vetor transportado em relação ao vetor originalmente definido no ponto inicial  $O$ . Quando definimos a derivada covariante, fizemos a comparação entre esse vetor paralelamente transportado do ponto  $O$  ao ponto vizinho  $P$  e o vetor que já se encontrava no ponto  $P$ , sendo tal comparação feita através do processo limite dado pela Eq. (15). Agora, estamos interessados em determinar quais curvas de uma determinada congruência de tais curvas transportam vetores tangentes em vetores tangentes, i.e., estamos interessados em geodésicas afins. Em outras palavras, se a curva  $\mathcal{C}$  ao longo da qual efetuamos o transporte paralelo de  $V^\alpha$ , processo dado pela Eq. (47), for uma geodésica afim, e se o vetor  $V^\alpha(O)$  for o vetor tangente a essa geodésica em  $O$ , i.e.,  $(dx^\alpha/du)_O$ , então o vetor propagado dado pela Eq. (47),  $(dx^\alpha/du)_{O \rightarrow P}$ , será paralelo ao vetor tangente a essa geodésica em  $P$ , e vice-versa, viz.:

$$\mathcal{C} \text{ é uma geodésica} \Leftrightarrow \left. \frac{dx^\alpha}{du} \right|_{O \rightarrow P} \parallel \left. \frac{dx^\alpha}{du} \right|_P, \quad (48)$$

sendo a necessidade e suficiência válida por força de definição, i.e., a Eq. (48) é a definição de uma geodésica afim. Assim, estamos primeiramente interessados em determinar a condição para o transporte paralelo de um vetor de  $O$  a  $P$  ao longo de uma curva  $\mathcal{C}$  de uma congruência de curvas em  $\mathcal{M}^n$  de forma que esse vetor paralelamente transportado seja paralelo, i.e., proporcional, ao vetor já em  $P$ , sendo  $P$  uma vizinhança de  $O$  ao longo de  $\mathcal{C}$ . Feito isso, para que determinemos a classe especial de curvas que obedecem a Eq. (48), geodésicas afins, simplesmente

imponemos ao vetor transportado  $V^\alpha$  a condição de que seja esse vetor primariamente o vetor tangente à curva  $\mathcal{C}$  em  $O$ , sendo, assim, que o nosso programa para a determinação matemática de geodésicas afins em uma variedade diferencial  $\mathcal{M}^n$  estará completo. Portanto, determinemos o vetor já prontamente no ponto  $P$  de  $\mathcal{C}$ , não transportado paralelamente, simplesmente calculando o campo vetorial arbitrário  $V^\alpha$  no ponto  $P$  da variedade, de  $O$  [ $x^\delta = x^\delta(u)$ ] para  $P$  [ $x^\delta + \delta x^\delta = x^\delta(u) + \delta x^\delta(u) = x^\delta(u + \delta u)$ ], i.e.,  $V^\alpha [x^\delta(u + \delta u)]$ . Esse vetor é simplesmente dado por:

$$\begin{aligned} V^\alpha [x^\delta(u + \delta u)] &= V^\alpha(x^\delta) + \delta V^\alpha(x^\delta) \\ &= V^\alpha(x^\delta) + \left. \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\gamma} \right|_{x^\delta} \delta x^\gamma \\ &= V^\alpha(x^\delta) + \left. \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\gamma} \right|_{x^\delta} \frac{dx^\gamma}{du} \delta u \\ &= V^\alpha + \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\gamma} \frac{dx^\gamma}{du} \delta u. \end{aligned} \quad (49)$$

Exigindo que os vetores nas Eqs. (47) e (49) sejam paralelos, conforme discutido, tendo em vista a dependência no parâmetro  $u$  para essas equações, escrevemos a proporcionalidade entre esses vetores através de uma função de proporcionalidade  $g(u)$ , i.e.:

$$V^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha V^\beta \frac{dx^\gamma}{du} \delta u = g(u) \left( V^\alpha + \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\gamma} \frac{dx^\gamma}{du} \delta u \right). \quad (50)$$

Contudo,  $g(u)$  deve obedecer algumas condições triviais. Se  $\delta u = 0$ , não haverá o que transportar, i.e., o campo vetorial  $V^\alpha$  avaliado em  $O$  é paralelamente transportado nele mesmo, i.e., continuará sendo o campo  $V^\alpha(O)$ . Também, o campo  $V^\alpha$  avaliado em  $P$  será o campo avaliado em  $O$ , pois se tornam esses pontos idênticos. Assim:

$$\delta u = 0 \Rightarrow V^\alpha|_{O \rightarrow P} = V^\alpha|_O, \quad (51)$$

$$\delta u = 0 \Rightarrow V^\alpha|_P = V^\alpha|_O. \quad (52)$$

Em virtude das Eqs. (50), (51) e (52),  $g(u)$  deve satisfazer:

$$\delta u = 0 \Rightarrow g(u) = 1. \quad (53)$$

Façamos, então, dado que em nada restringe os argumentos que levam à Eq. (50):

$$g(u) = 1 - f(u) \delta u. \quad (54)$$

Substituindo o resultado da Eq. (54) na Eq. (50), temos:

$$V^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha V^\beta \frac{dx^\gamma}{du} \delta u = (1 - f(u) \delta u) \left( V^\alpha + \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\gamma} \frac{dx^\gamma}{du} \delta u \right) = V^\alpha + \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\gamma} \frac{dx^\gamma}{du} \delta u - f(u) \delta u V^\alpha - f(u) \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\gamma} \frac{dx^\gamma}{du} (\delta u)^2 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
-\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} V^{\beta} \frac{dx^{\gamma}}{du} \delta u &= \frac{\partial V^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} \frac{dx^{\gamma}}{du} \delta u - f(u) \delta u V^{\alpha} - f(u) \frac{\partial V^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} \frac{dx^{\gamma}}{du} (\delta u)^2 \stackrel{\times(\delta u)^{-1}}{\Rightarrow} \\
-\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} V^{\beta} \frac{dx^{\gamma}}{du} &= \frac{\partial V^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} \frac{dx^{\gamma}}{du} - f(u) V^{\alpha} - f(u) \frac{\partial V^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} \frac{dx^{\gamma}}{du} \delta u \stackrel{\delta u \rightarrow 0}{\Rightarrow} \\
-\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} V^{\beta} \frac{dx^{\gamma}}{du} - \frac{\partial V^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} \frac{dx^{\gamma}}{du} &= -f(u) V^{\alpha} \quad \therefore
\end{aligned}$$

$$\frac{dx^{\gamma}}{du} \left( \frac{\partial V^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} + \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} V^{\beta} \right) = \frac{dx^{\gamma}}{du} (\partial_{\gamma} V^{\alpha} + \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} V^{\beta}) = f(u) V^{\alpha}. \quad (55)$$

A Eq. (55) pode ser reescrita numa forma ainda mais compacta, pois os termos entre parênteses perfazem exatamente a derivada covariante de  $V^{\alpha}$  conforme se desprende da Eq. (17), donde determinamos a *equação do transporte paralelo de um vetor contravariante  $V^{\alpha}$  ao longo de uma curva  $\mathcal{C}$  pertencente a uma congruência de curvas sobre uma variedade  $\mathcal{M}^n$  de dimensão  $n$ , transporte paralelo esse que se processa de um ponto arbitrário  $O$  em  $\mathcal{C}$  até uma vizinhança de  $O$ , ponto  $P$ , sobre  $\mathcal{C}$ , congruência essa que é construída a partir do campo vetorial tangente às  $\mathcal{C}$  da congruência:  $dx^{\gamma}/du$ , conforme discussão que levou à Eq. (42):*

$$\frac{dx^{\gamma}}{du} \nabla_{\gamma} V^{\alpha} = f(u) V^{\alpha}. \quad (56)$$

Para obtermos a Eq. das geodésicas afins, devemos impor a condição dada pela Eq. (48), definição de uma geodésica afim, i.e., condição essa em que  $V^{\alpha}$ , o vetor paralelamente transportado ao longo de  $\mathcal{C}$ , torna-se o próprio vetor tangente à  $\mathcal{C}$ , donde, pelas Eqs. (48) e (56), uma geodésica afim deve suficiente e necessariamente satisfazer:

$$\frac{dx^{\gamma}}{du} \nabla_{\gamma} \left( \frac{dx^{\alpha}}{du} \right) = f(u) \frac{dx^{\alpha}}{du}. \quad (57)$$

Assim:

$$\begin{aligned}
\frac{dx^{\gamma}}{du} \nabla_{\gamma} \left( \frac{dx^{\alpha}}{du} \right) &= f(u) \frac{dx^{\alpha}}{du} \Rightarrow \\
\frac{dx^{\gamma}}{du} \left( \partial_{\gamma} \frac{dx^{\alpha}}{du} + \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} \frac{dx^{\beta}}{du} \right) &= f(u) \frac{dx^{\alpha}}{du} \Rightarrow \\
\frac{dx^{\gamma}}{du} \left[ \frac{\partial}{\partial x^{\gamma}} \left( \frac{dx^{\alpha}}{du} \right) + \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} \frac{dx^{\beta}}{du} \right] &= f(u) \frac{dx^{\alpha}}{du} \Rightarrow \\
\frac{\partial}{\partial x^{\gamma}} \left( \frac{dx^{\alpha}}{du} \right) \frac{dx^{\gamma}}{du} + \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} \frac{dx^{\beta}}{du} \frac{dx^{\gamma}}{du} &= f(u) \frac{dx^{\alpha}}{du} \Rightarrow \\
\frac{d}{du} \left( \frac{dx^{\alpha}}{du} \right) + \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} \frac{dx^{\beta}}{du} \frac{dx^{\gamma}}{du} &= f(u) \frac{dx^{\alpha}}{du},
\end{aligned}$$

donde a *equação das geodésicas afins* é dada por:

$$\frac{d^2 x^{\alpha}}{du^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} \frac{dx^{\beta}}{du} \frac{dx^{\gamma}}{du} = f(u) \frac{dx^{\alpha}}{du}. \quad (58)$$

Há algumas propriedades importantes relacionadas às geodésicas afins. Notemos que a conexão afim  $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$  encontra-se multiplicada por um quantidade simétrica [na realidade um tensor de valência (2,0), vide nota de rodapé [8] e a Eq. (28)]  $Q^{\beta\gamma}$ :

$$Q^{\beta\gamma} = \frac{dx^{\beta}}{du} \frac{dx^{\gamma}}{du} = \frac{dx^{\gamma}}{du} \frac{dx^{\beta}}{du} = Q^{\gamma\beta}. \quad (59)$$

Assim, a Eq. (58) pode ser reescrita:

$$\frac{d^2 x^{\alpha}}{du^2} + \frac{1}{2} (\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} + \Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha}) \frac{dx^{\beta}}{du} \frac{dx^{\gamma}}{du} = f(u) \frac{dx^{\alpha}}{du}. \quad (60)$$

Defina-se a parte simétrica nos índices covariantes da conexão afim, ou simplesmente a parte simétrica da conexão afim, por:

$$\Gamma_{(\beta\gamma)}^{\alpha} = \frac{1}{2} (\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} + \Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha}), \quad (61)$$

sendo essa quantidade claramente simétrica, ainda que não seja tensorial em virtude do segundo termo extra no lado direito da Eq. (22). Todavia, essa quantidade, a parte simétrica da conexão afim transforma-se como uma conexão, em virtude do fator 1/2 em sua definição, o que provê o mesmo termo extra presente no lado direito da Eq. (22), i.e., em virtude das Eqs. (61) e (22):

$$\Gamma_{(\beta\gamma)}^{\alpha} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\delta}} \frac{\partial x'^{\epsilon}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x'^{\varphi}}{\partial x^{\gamma}} \Gamma'_{(\epsilon\varphi)\delta} + \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\delta}} \frac{\partial^2 x'^{\delta}}{\partial x^{\beta} \partial x^{\gamma}}. \quad (62)$$

Analogamente, defina-se a parte antissimétrica nos índices covariantes da conexão afim, ou simplesmente a parte antissimétrica da conexão afim, por:

$$\Gamma_{[\beta\gamma]}^{\alpha} = \frac{1}{2} (\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} - \Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha}), \quad (63)$$

sendo essa quantidade claramente antissimétrica e tensorial, portanto não sendo uma conexão, pois se torna mutuamente cancelado o segundo termo extra do lado direito da Eq. (22) quando escrito em cada parcela do lado direito da Eq. (63), i.e., em virtude das eqs. (63) e (22):

$$\Gamma_{[\beta\gamma]}^{\alpha} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\delta}} \frac{\partial x'^{\epsilon}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x'^{\varphi}}{\partial x^{\gamma}} \Gamma'_{[\epsilon\varphi]\delta}. \quad (64)$$

Defina-se o tensor de torção:

$$\mathcal{T}_{\beta\gamma}^{\alpha} = 2\Gamma_{[\beta\gamma]}^{\alpha} = \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} - \Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha}. \quad (65)$$

Claramente, em sendo simétrica a conexão, viz.:

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha} \Leftrightarrow \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} - \Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha} = 0 \Leftrightarrow \mathcal{T}_{\beta\gamma}^{\alpha} = 0, \quad (66)$$

a torção numa variedade equipada com uma conexão afim, i.e., uma variedade afim, anula-se suficiente e necessariamente. Notemos que mesmo que não se faça qualquer consideração sobre a existência de torção ou não na variedade (tacitamente assumida como afim), i.e., sobre a simetria da conexão afim, as geodésicas afins não são influenciadas pela existência de torção, dado que a Eq. (58), conseqüentemente a Eq. (60), somente leva em consideração a parte simétrica da conexão, donde a equação das geodésicas afins, Eqs. (58) ou (60), pode ser simples e equivalentemente escrita com essa propriedade denotada, viz., em virtude das Eqs. (60) e (61):

$$\frac{d^2 x^{\alpha}}{du^2} + \Gamma_{(\beta\gamma)}^{\alpha} \frac{dx^{\beta}}{du} \frac{dx^{\gamma}}{du} = f(u) \frac{dx^{\alpha}}{du}. \quad (67)$$

Notemos que na construção das geodésicas, i.e., a partir do transporte paralelo de um vetor contravariante  $V^{\alpha}$  arbitrário primariamente avaliado em um ponto  $O$  arbitrário de uma curva  $\mathcal{C}$  pertencente a uma congruência de curvas  $\{\mathcal{C}\}$ , transporte esse que pressupõe a existência de uma conexão afim  $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$  por construção, com a imposição de que esse vetor  $V^{\alpha}$  a ser transportado passasse a ser primariamente o vetor tangente à  $\mathcal{C}$  em  $O$  e que fosse paralelo ao vetor tangente à  $\mathcal{C}$  avaliado no ponto  $P$  subsequentemente vizinho a  $O$  sobre  $\mathcal{C}$ , satisfazendo simultaneamente as Eqs. (48) e (56), não fizemos qualquer especificação em relação ao vetor tangente à  $\mathcal{C}$  em  $O$ . O teorema de existência e unicidade aplicado à Eq. (58) garante que pelo ponto  $O$  passará uma única geodésica  $\mathcal{C}$  segundo uma única direção para o vetor tangente a essa curva em  $O$ . Isso garante que, dada uma vizinhança de  $O$ , i.e., um ponto  $P$  vizinho a  $O$ , sendo que esses dois pontos passam a definir um deslocamento elementar  $dx^{\gamma}$ , haverá uma única geodésica que passe por  $O$  e que tenha vetor tangente  $dx^{\gamma}/du$  em  $O$ . Esse processo pode ser levado a cabo em extensão finita, etapa por etapa infinitesimal, sendo que o processo final acabará por definir uma geodésica que partiu de  $O$  segundo a direção inicialmente definida por  $dx^{\gamma}/du$  em  $O$ . A vizinhança inicial por si não define uma única geodésica,

pois há que se especificar o vetor tangente inicial em  $O$ , isso pelo que temos uma Eq. (58), diferencial ordinária, de segunda ordem, pelo que duas informações iniciais se fazem necessárias, i.e., dois conjuntos de  $n$  coordenadas, um para o ponto inicial e outro para a direção tangente inicial. Em outras palavras, dada uma vizinhança de  $O$  apenas, verificar-se-á que, em extensão finita que parta dessa vizinhança, geodésicas que partam de  $O$  podem focalizar em um outro ponto finitamente distinto de  $O$ , dado que cada uma dessas geodésicas tem um vetor tangente próprio a partir de  $O$ . Mais claramente, o que queremos dizer é que uma vizinhança apenas de um ponto inicial define muitas geodésicas a partir desse ponto, pois, novamente por ênfase, cada geodésica pressupõe a especificação exata de sua direção inicial de partida em  $O$ . Essa situação é análoga a um feixe de retas por um ponto  $O$  no espaço euclidiano ordinário, sendo cada reta do feixe uma geodésica passando por  $O$ , porém com vetores tangentes iniciais em  $O$  distintos. Contudo, no espaço euclidiano ordinário, esse feixe jamais refocalizará em outro ponto, situação que é passível de ocorrer geometrias não euclidianas, conforme estamos qui querendo advertir e enfatizar. Ademais, um deslocamento inicial específico  $dx^{\gamma}$  num ponto  $O$  de uma variedade, deslocamento esse que passa a definir uma única direção específica inicial  $dx^{\gamma}/du$ , o que, por sua vez, em virtude do teorema de existência e unicidade aplicado à Eq. (58), passa a definir uma única geodésica por  $O$ , mas carrega um parâmetro  $u$  escalar real totalmente arbitrário. É por isso que se fará necessária a definição de uma métrica na variedade afim, do que nos encarregaremos em breve. Para que essa limitação se desnude claramente, atenhamo-nos agora aos aspectos relacionados à parametrização de geodésicas, pois tal tarefa é mister para que posteriormente passemos da seara puramente matemática para a física que requer medidas de espaço e tempo na variedade, além, obviamente, do que dessas medidas advierem. Seja uma reparametrização arbitrária para geodésicas afins, i.e.:

$$s = s(u), \quad (68)$$

onde  $u$  é um parâmetro arbitrário segundo o qual geodésicas se parametrizam, conforme estão postas essas curvas pela Eq. (58). Assim, uma reparametrização arbitrária segundo a Eq. (68), leva as geodésicas a serem obtidas de, em virtude das Eqs. (58) e (68):

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{ds} \left( \frac{dx^\alpha}{du} \right) \frac{ds}{du} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{ds} \frac{ds}{du} \frac{dx^\gamma}{ds} \frac{ds}{du} = f(u) \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{ds}{du} \Rightarrow \\
& \frac{d}{ds} \left( \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{ds}{du} \right) \frac{ds}{du} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{ds} \frac{ds}{du} \frac{dx^\gamma}{ds} \frac{ds}{du} = f(u) \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{ds}{du} \Rightarrow \\
& \frac{ds}{du} \left[ \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{d}{ds} \left( \frac{ds}{du} \right) + \frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} \frac{ds}{du} \right] + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{ds} \frac{dx^\gamma}{ds} \dot{s}^2 = f(u) \dot{s} \frac{dx^\alpha}{ds}, \quad \dot{s} = \dot{s}(u) = \frac{ds}{du} \dots \\
& \frac{ds}{du} \left[ \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{d}{du} \left( \frac{ds}{du} \right) \frac{du}{ds} \right] + \frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} \dot{s}^2 + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{ds} \frac{dx^\gamma}{ds} \dot{s}^2 = f(u) \frac{dx^\alpha}{ds} \dot{s} \Rightarrow \\
& \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{d^2 s}{du^2} + \frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} \dot{s}^2 + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{ds} \frac{dx^\gamma}{ds} \dot{s}^2 = f(u) \frac{dx^\alpha}{ds} \dot{s} \Rightarrow \\
& \dot{s} \frac{dx^\alpha}{ds} + \frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} \dot{s}^2 + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{ds} \frac{dx^\gamma}{ds} \dot{s}^2 = f(u) \frac{dx^\alpha}{ds} \dot{s}. \tag{69}
\end{aligned}$$

Dado que  $s = s(u)$  deve variar para que se desenhe na variedade a geodésica reparametrizada,  $\dot{s}(u) \neq 0$ . Assim, podemos reescrever a Eq. (69), de modo a recuperarmos a forma da Eq. diferencial ordinária, conforme a Eq. (58), para a geodésica reparametrizada, viz.:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{ds} \frac{dx^\gamma}{ds} = \frac{f(u) \dot{s} - \ddot{s} dx^\alpha}{\dot{s}^2} \frac{dx^\alpha}{ds}. \tag{70}$$

Porém, sendo a Eq. (70) a Eq. de uma geodésica reparametrizada, devendo ter a forma da Eq. (58), a função de proporcionalidade na Eq. (70) deve ser invertida, i.e.:

$$\frac{f(u) \dot{s}(u) - \ddot{s}(u)}{\dot{s}^2(u)} = j(u) \tag{71}$$

é uma função de  $u$ , devendo ser invertida para que a Eq. (70) tenha a forma da Eq. (58) no novo parâmetro  $s$ :

$$\frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{ds} \frac{dx^\gamma}{ds} = h(s) \frac{dx^\alpha}{ds}. \tag{72}$$

Assim:

$$\begin{aligned}
h(s) &= \left[ \frac{f(u) \dot{s} - \ddot{s}}{\dot{s}^2} \right] (s) \\
&= \left\{ f[u(s)] \left( \frac{du}{ds} \right)^{-1} - \frac{d}{du} \left( \frac{ds}{du} \right) \right\} \left( \frac{ds}{du} \right)^{-2} \\
&= \left\{ f[u(s)] [\dot{u}(s)]^{-1} - \frac{d}{ds} \left( \frac{ds}{du} \right) \frac{ds}{du} \right\} \left( \frac{du}{ds} \right)^2 \\
&= \left\{ \frac{f[u(s)]}{\dot{u}(s)} - \left[ \frac{d}{ds} \left( \frac{du}{ds} \right)^{-1} \right] \left( \frac{du}{ds} \right)^{-1} \right\} \dot{u}^2(s) \\
&= \left\{ \frac{f[u(s)]}{\dot{u}(s)} - (-1) \left( \frac{du}{ds} \right)^{-2} \frac{d^2 u}{ds^2} \frac{1}{\dot{u}(s)} \right\} \dot{u}^2(s) \\
&= \left\{ \frac{f[u(s)]}{\dot{u}(s)} + \frac{1}{\dot{u}^2(s)} \ddot{u}(s) \frac{1}{\dot{u}(s)} \right\} \dot{u}^2(s) \\
&= \dot{u}(s) f[u(s)] + \frac{\ddot{u}(s)}{\dot{u}(s)}. \tag{73}
\end{aligned}$$

Portanto, a Eq. (72) para a geodésica reparametrizada torna-se:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{ds} \frac{dx^\gamma}{ds} = \left\{ \dot{u}(s) f[u(s)] + \frac{\ddot{u}(s)}{\dot{u}(s)} \right\} \frac{dx^\alpha}{ds}. \tag{74}$$

Conforme dissemos algumas linhas acima, a Eq. (58) está carregada de arbitrariedade. Arbitrariedade no que concerne à conexão afim, dado que não lhe fora especificada significação geométrica de contexto. i.e., apenas lhe atribuímos a função de proporcionar as condições para os dois requisitos que levaram à Eq. (14), precisamente o transporte paralelo de um vetor nulo em um vetor nulo e a não alteração local do vetor a ser transportado [vide a explanação que levou à Eq. (14): quando  $\delta x^\beta = 0$ , requereu-se que  $\delta_{\parallel} V^\alpha(x^\beta) = 0$ ]. Sem uma geometria, uma métrica que especifique um comprimento elementar, caminha-se pelo campo abstrato da construção de geodésicas afins numa variedade, pois ainda que essas curvas encapsulem as propriedades que as definiram pelas Eq. (48) e (56), as  $n^3$  funções  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$  ainda estão arbitrárias quanto a contexto geométrico preciso. Por isso, ainda não há sentido em se falar em significação para comprimento sobre uma geodésica, pois qual seria o significado preciso de uma dada parametrização? Ademais, a função de proporcionalidade  $g(u)$  na Eq. (50), a função  $f(u)$  na Eq. (58) e a função  $h(s)$  nas Eqs. (73) e (74) são totalmente arbitrárias. Ainda assim, as geodésicas são curvas especiais, que levam vetores tangentes, por transporte paralelo, em vetores proporcionalmente tangentes, todavia com carga inerente de arbitrariedade que impede, pelo que ora ainda está apenas matematicamente posto, qualquer quantificação física. A física é uma ciência eminentemente experimental. Ainda que tenhamos delineado objetos matemáticos que deverão encapsular a significação a ser provida por um modelo para a natureza, aos fenômenos que se processam no espaço-tempo cosmológico, no nosso caso, temos de passar a definir unidades mensuráveis a serem extraídas desses objetos

matemáticos, unidades que sejam reprodutíveis e rigidamente conexas à inteligibilidade por padrões definidores e mensuráveis. Nossa definição de transporte paralelo, nossa obtenção das geodésicas afins, ainda que feitas sob a égide da plausibilidade matemática, repousam na seara do abstrato e da analogia com conceitos euclidianos, que foram generalizados, i.e., temos objetos matemáticos ainda desprovidos de significação física. Começemos pela necessidade mais básica em física no que concerne à significação reprodutível do que se observa, do que se mede: a unidade de medida. Muito nos ativemos ao transporte paralelo ao longo de geodésicas e não por acaso. É natural que se espere que um determinado caminho seja definido quando se tem a necessidade de perpassar pontos em um espaço para que se atinja uma localização final a partir de uma localização inicial nesse espaço. Bom, as localizações inicial e final acabarão por requerer a noção de pontos em um espaço, e esses subsistem axiomáticamente. Portanto, não temos de construí-los, apenas situá-los segundo algum critério fisicamente reprodutível. Se tomarmos um caminho que permita que uma unidade elementar de seu comprimento que seja medida exatamente ao longo desse caminho em nossa posição atual, portanto num ponto, digamos  $O$ , portanto tangente ao caminho em  $O$  (exatamente ao longo do caminho), seja reproduzida em outro ponto subsequente de nossa caminhada, e assim sucessivamente, estaremos caminhando sobre uma geodésica, i.e., estaremos transportando uma unidade básica de referência tomada inicialmente em nosso ponto inicial  $O$ , portanto efetuando uma reprodutibilidade de um padrão definido inicialmente para a unidade elementar ao longo do caminho (tangencialmente), dado que uma geodésica permite isso. Esse processo mental, que acaba por encapsular um conteúdo heurísticamente físico, põe uma séria restrição à arbitrariedade da função  $f(u)$  na Eq. (58). Por quê? Ora, nesse processo mental, a unidade elementar, ainda que não tenha sido batizada numericamente, mas isso apenas requer uma convenção definidora de quantidade, está sendo paralelamente transportada nela mesma tangencialmente ponto por ponto ao longo da geodésica, donde o vetor tangente transportado a partir de  $O$  não pode diferir do vetor tangente no ponto subsequente, pois é o processo de transporte paralelo da unidade tomada inicialmente (em  $O$ ) ao longo da curva (em  $O$ ) que está, por requisito de reprodutibilidade dessa medida ponto por ponto ao longo da curva, definindo as demais unidades de medida ao longo (portanto, tangencialmente) do restante da curva. Assim, os vetores do lado esquerdo e do lado direito da Eq. (50) têm de ser iguais. Portanto,  $g(u) = 1$  nessa Eq. (50) e, então, em virtude da Eq. (54),  $f(u) = 0$ . Assim, se um parâmetro  $u$  for escolhido tal que anule  $f(u)$ , estaremos transportando vetores tangentes em si mesmos, compatível com essa reprodutibilidade da unidade de medida ao longo da curva ponto por ponto. Tal parâmetro é o que se denomina parâmetro afim. A

partir de agora, estaremos considerando geodésicas afins dessa forma parametrizadas, i.e., dadas pela Eq. (58) com a condição de que a parametrização seja afim, i.e.,  $u$  tal que  $f(u) = 0$ , donde:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{du^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{du} \frac{dx^\gamma}{du} = 0. \quad (75)$$

Porém, como uma determinada unidade de medida é arbitrária, uma reparametrização, i.e., uma transformação dessa unidade de medida em outra, por exemplo definida por outro observador ao longo da geodésica, não deveria alterar a propriedade de reprodutibilidade da unidade de medida ao longo da geodésica ponto por ponto. Assim, de acordo com a Eq. (74), para a geodésica reparametrizada a partir de uma geodésica com parâmetro afim:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{ds} \frac{dx^\gamma}{ds} = \frac{\ddot{u}(s)}{\dot{u}(s)} \frac{dx^\alpha}{ds}, \quad (76)$$

devemos ter que as reparametrizações permitidas para a unidade afim  $du$  devem satisfazer:

$$\ddot{u}(s) = 0 \Rightarrow u(s) = as + b, \quad (77)$$

com  $a \neq 0$  [pois o parâmetro  $u$  (assim como  $s$ ) deve desenhara a geodésica na variedade] e  $b$  constantes reais. Assim, qualquer reparametrização a partir de uma unidade  $du$  [note-se que o requisito de que  $du$  seja uma unidade reprodutível ponto por ponto, tangencialmente, sobre uma geodésica, o que pode ser prontamente convencionado a priori ao longo de uma geodésica, fará com que essa curva seja dada pela Eq. (75)] tal que o novo parâmetro  $s$  também proveja uma unidade  $ds$  reprodutível ponto por ponto, tangencialmente, ao longo da geodésica, deve ser do tipo:

$$u \rightarrow s(u) = cu + d, \quad (78)$$

com  $c = 1/a$  e  $d = -b/a$  constantes reais. Assim, a geodésica também será dada pela Eq. (75), ou pela Eq. (76), equivalentemente, pois esta Eq. torna-se:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{ds} \frac{dx^\gamma}{ds} = 0. \quad (79)$$

Em outras palavras, toda vez que se tomar uma unidade  $du$ , reprodutível tangencialmente ponto a ponto ao longo de uma geodésica, tal geodésica deverá ser dada pela Eq. (75) [ou pela Eq. (76)], sendo que tal unidade  $du$  será uma unidade afim relacionada a alguma outra unidade também afim através da Eq. (78). Se quisermos que haja somente uma única unidade  $du$  a partir um único parâmetro afim  $u$  para a geodésica, basta que se convençione:

$$s \equiv u, \quad (80)$$

$a = 1$  e  $b = 0$  para as geodésicas. Tal procedimento será adotado por nós posteriormente, quando convencionaremos  $s = u = c\tau$ , onde  $\tau$  é o tempo próprio a

ser medido por um relógio que se mova ao longo de uma geodésica. Ainda que tenhamos retringido as geodésicas às que advêm da Eq. (75), por argumentação física de mensurabilidade ao longo dessas curvas, elas ainda carregam a carga de arbitrariedade intrínseca à conexão afim nessa Eq.. Do ponto de vista geométrico relativo a contexto geométrico, i.e., relativo ao tipo de geometria específica sob consideração, temos de definir a regra segundo a qual os comprimentos elementares são obtidos, i.e., temos de definir o elemento de linha específico de uma geometria específica. Para o caso euclidiano ordinário, a natureza quotidiana nos mostra que o teorema de Pitágoras se incumbe bem de tal tarefa, i.e., que comprimentos elementares são obtidos de:

$$ds^2 = g_{ab}dx^a dx^b = dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (81)$$

utilizando-se coordenadas cartesianas, em cuja representação o tensor métrico  $g_{ab}$  é simplesmente dado pela matriz identidade tridimensional:

$$g_{ab} = \text{diag} [+1, +1, +1]. \quad (82)$$

Assim, para esse caso específico, estabelecemos um contexto geométrico, estabelecemos uma métrica, uma regra segundo a qual os comprimentos elementares são obtidos pelo elemento de linha, dado pela Eq. (81). Note-se que, neste caso, estamos cobrindo uma variedade, no caso  $\mathbb{R}^3$ , com um patch coordenado, o patch cartesiano, pelo qual a métrica se representa descrita segundo essas coordenadas do patch adotado, coordenadas cartesianas, sendo, então, que a métrica passa a ser dada pela matriz identidade tridimensional. Todavia, poderíamos muito bem ter adotado um outro patch, como o das coordenadas esféricas, segundo as quais o elemento de linha seria dado por:

$$ds^2 = g_{ab}dx^a dx^b = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (83)$$

sendo a métrica, segundo esse patch de cobertura, também diagonalmente, representada por:

$$g_{ab} = \text{diag} [+1, +r^2, +r^2 \sin^2 \theta]. \quad (84)$$

A métrica é exatamente a mesma nas Eqs. (81) e (83). O que mudou foi simplesmente a maneira de nomear os pontos da variedade em consideração ( $\mathbb{R}^3$ ). Tal variedade, no caso  $\mathbb{R}^3$ , é dita metricamente plana, *metric flatness*, i.e., equipada com uma métrica dita plana, pois existe um sistema de coordenadas de cobertura para essa variedade, o cartesiano, no qual a métrica é diagonal e com elementos  $\pm 1$ . Num outro exemplo, em relatividade especial, a variedade, no caso  $\mathbb{R}^4$  (topologicamente equivalente, pois se anula o tensor de Riemann) - o espaço-tempo de Minkowski, é metricamente plana, pois existe um sistema de coordenadas, o patch de Minkowski, em cuja representação escreve-se, a menos de convenção para assinatura, para o elemento de linha:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta = \pm [d(ct)]^2 \mp dx^2 \mp dy^2 \mp dz^2, \quad (85)$$

sendo a métrica nesse patch dada por:

$$g_{\alpha\beta} = \text{diag} [\pm 1, \mp 1, \mp 1, \mp 1]. \quad (86)$$

Contudo, o elemento de linha para essa variedade da relatividade especial poderia ter sido escrito segundo outra rotulação para os pontos dessa variedade, viz., pela utilização de um patch coordenado diferente para os pontos desse espaço-tempo, com o setor espacial simultâneo coberto, e.g., por coordenadas esféricas, o que, também a menos de convenção para assinatura, provê:

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta \\ &= \pm [d(ct)]^2 \mp dr^2 \mp r^2 d\theta^2 \mp r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \end{aligned} \quad (87)$$

sendo a métrica nesse patch dada por:

$$g_{\alpha\beta} = \text{diag} [\pm 1, \mp 1, \mp r^2, \mp r^2 \sin^2 \theta]. \quad (88)$$

Novamente, a métrica é exatamente a mesma nas Eqs. (85) e (87), mudando apenas a maneira de nomear os pontos dessa variedade. O que queremos enfatizar: não se confundam coordenadas curvilíneas com espaços curvos. Nos dois exemplos anteriores, as variedades são metricamente planas, pois, para cada um dos exemplos, há um sistema de coordenadas de cobertura em que a métrica é diagonalmente dada por elementos  $\pm 1$ . Em que se relacionam esses dois exemplos com a arbitrariedade para a conexão afim a que nos referíamos no contexto da Eq. (75)? Na construção de nossas geodésicas afins, tínhamos uma variedade diferencial como substrato matemático para a construção do transporte paralelo, para a construção das geodésicas afins. Todavia, nossa variedade diferencial, nosso substrato matemático, não estava equipado com uma regra para a obtenção dos comprimentos elementares, i.e., nossa variedade diferencial ainda não tinha a qualidade de ser Riemanniana. Em ambos os exemplos que acabamos de elencar, as variedades são Riemannianas, pois estão equipadas, cada qual, com seu campo tensorial  $g_{\alpha\beta}$  covariante simétrico de posto 2, i.e., de valência (0, 2), provendo comprimento elementar em cada um desses espaços, provendo os elementos de linha nesses espaços, pelo que, portanto, as respectivas regras de obtenção dos comprimentos elementares nesses espaços passam a estar prontamente definidas. Se elevarmos nossa variedade diferencial de dimensão  $n$  na qual construímos nossas geodésicas afins à estatura de variedade diferencial Riemanniana de dimensão  $n$ , passamos a supor que nossa variedade  $\mathcal{M}^n$  está equipada com um campo tensorial  $g_{\alpha\beta}$  covariante simétrico de posto 2, simplesmente um tensor métrico (ou métrica), em  $\mathcal{M}^n$ :

$$\mathcal{M}^n \text{ é Riemanniana} \Leftrightarrow \mathcal{M}^n \text{ com } g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha} \text{ em } \mathcal{M}^n, \quad (89)$$

tal que o comprimento de arco quadrático elementar  $ds^2$ , elemento de linha, passa a estar definido em  $\mathcal{M}^n$  em virtude de  $g_{\alpha\beta}$ , e dos deslocamentos elementares infinitesimais de cobertura  $dx^\alpha$ ,  $\forall \alpha \in \{1, 2, \dots, n\}$ , por:

$$ds^2 \equiv g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta. \quad (90)$$

Veremos que uma variedade Riemanniana acabará por fulminar a arbitrariedade que havia para a conexão, novamente por considerações de necessidade física. Para tal, suponhamos que a métrica seja não singular, que admita uma inversa, i.e.:

$$|g_{\alpha\beta}| \neq 0 \Leftrightarrow \exists g^{\alpha\beta} \mid g^{\alpha\delta} g_{\delta\beta} = g_{\beta\delta} g^{\delta\alpha} = \delta_{\beta}^{\alpha}. \quad (91)$$

Isso posto, pelo que se pode construir a métrica a partir de sua inversa, e esta a partir de dois campos vetoriais contravariantes  $X^{\alpha}$  e  $Y^{\beta}$  tais que:

$$X^{\alpha} Y^{\beta} = g^{\alpha\beta}, \quad (92)$$

pela Eq. (28). Dado que a derivação covariante é Leibniz, por construção, tomemos a derivada covariante da inversa da métrica, viz.:

$$\nabla_{\gamma} g^{\alpha\beta} = \nabla_{\gamma} (X^{\alpha} Y^{\beta}) = (\nabla_{\gamma} X^{\alpha}) Y^{\beta} + X^{\alpha} (\nabla_{\gamma} Y^{\beta}). \quad (93)$$

Suponhamos que a derivada covariante na Eq. (93) seja avaliada em um ponto  $O$  da variedade. Escolhamos agora uma geodésica que passe por  $O$ , com vetor tangente em  $O$  dado por  $dx^{\gamma}/du$ , parametrizada por um parâmetro afim  $u$ , i.e., que satisfaça a Eq. (75), portanto com  $f(u) = 0$ . Contraindo ambos os lados da Eq. (93) por  $dx^{\gamma}/du$ , temos:

$$\frac{dx^{\gamma}}{du} \nabla_{\gamma} g^{\alpha\beta} = \left( \frac{dx^{\gamma}}{du} \nabla_{\gamma} X^{\alpha} \right) Y^{\beta} + X^{\alpha} \left( \frac{dx^{\gamma}}{du} \nabla_{\gamma} Y^{\beta} \right). \quad (94)$$

Os termos entre parênteses na Eq. (94) nada mais são do que o transporte paralelo [em virtude da Eq. (56)], ao longo de uma geodésica que passe por  $O$  e que tenha vetor tangente  $dx^{\gamma}/du$  em  $O$  [construção permitida pelo teorema de existência e unicidade aplicado à Eq. (75)], dos vetores contravariantes  $X^{\alpha}$  e  $Y^{\beta}$ , vetores esses usados em  $O$  para construir a inversa da métrica nesse ponto pela Eq. (92). Note-se que  $X^{\alpha}$  e  $Y^{\beta}$  não são vetores necessariamente paralelos à geodésica, são somente transportados ao longo de uma geodésica que passe por  $O$ , construção que levou à Eq. (56) [os vetores  $X^{\alpha}$  e  $Y^{\beta}$  fazem o papel do vetor  $V^{\alpha}$  na Eq. (56), e a geodésica aqui, particularmente utilizada, é uma curva  $\mathcal{C}$  de uma congruência de curvas, conforme construção que levou à Eq. (56)]. Em virtude da Eq. (56) e (92), a Eq. (94) torna-se:

$$\begin{aligned} \frac{dx^{\gamma}}{du} \nabla_{\gamma} g^{\alpha\beta} &= [f(u) X^{\alpha}] Y^{\beta} + X^{\alpha} [f(u) Y^{\beta}] \\ &= 2f(u) X^{\alpha} Y^{\beta} = 2f(u) g^{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (95)$$

A Eq. (95) simplesmente afirma que a métrica em si, através de sua inversa, estará sendo paralelamente transportada ao longo de uma geodésica que passe por  $O$  até um ponto vizinho a  $O$  ao longo dessa geodésica. Porém, como tomamos um parâmetro afim para a geodésica, temos que  $f(u) = 0$ , donde a métrica (através de sua inversa), está sendo levada nela mesma ao ponto vizinho, i.e., estamos transportando a métrica nela mesma

de um ponto  $O$ , a um ponto vizinho a  $O$  ao longo de uma geodésica:

$$\frac{dx^{\gamma}}{du} \nabla_{\gamma} g^{\alpha\beta} = 0. \quad (96)$$

Novamente aqui, vemos que a preservação de unidade que fora discutida para parâmetros afins é mister, pois está preservando a métrica e, por isso, a medida dos comprimentos de arco elementar, ainda aqui para pontos vizinhos ao longo de uma geodésica. O ponto  $O$  é totalmente arbitrário. A direção no ponto  $O$  também. Como o teorema da existência e unicidade aplicado à Eq. das geodésicas garante que, dado um ponto e uma direção, haverá uma única geodésica por esse ponto, podemos propagar, transportar a métrica por toda a vizinhança de  $O$ , sendo que, obviamente, a cada direção tomada a partir de  $O$ , uma congruência distinta de geodésicas deve ser adotada, dado que cada congruência define um único vetor tangente à uma única geodésica em  $O$ . Pela arbitrariedade do ponto  $O$ , a métrica será sempre propagada em si mesma em qualquer vizinhança na variedade, i.e., por toda a variedade, processo esse que pode começar em qualquer local da variedade. Vemos que desde que o processo de transporte paralelo esteja presente, i.e., em havendo sido definida uma conexão afim, em sendo a métrica localmente invertível e construída pelo produto tensorial de dois campos contravariantes específicos, o processo de derivação covariante acaba por propagar a métrica, ou seja, os comprimentos elementares pela variedade, esta, então Riemanniana. A arbitrariedade na conexão afim começa a ser fulminada, pois, em sendo arbitrária a direção de propagação em  $O$ , e dado que, na Eq. (96), a derivada covariante da inversa da métrica é avaliada em  $O$ , temos que, necessariamente:

$$\nabla_{\gamma} g^{\alpha\beta} = 0. \quad (97)$$

A Eq. (97) afirma que a derivada covariante da inversa da métrica se anula no ponto  $O$ , mas, em sendo esse ponto arbitrário, a derivada covariante da inversa da métrica anula-se em toda a variedade diferencial Riemanniana. Disso, decorre a anulação da derivada covariante da métrica em si. De fato, pelas Eq. (91) e (97), e uma vez que a derivada covariante é Leibniz por construção:

$$\begin{aligned} \nabla_{\gamma} \delta_{\beta}^{\alpha} &= \nabla_{\gamma} (g^{\alpha\delta} g_{\delta\beta}) \\ &= (\nabla_{\gamma} g^{\alpha\delta}) g_{\delta\beta} + g^{\alpha\delta} (\nabla_{\gamma} g_{\delta\beta}) \\ &= g_{\delta\beta} \nabla_{\gamma} g^{\alpha\delta} + g^{\alpha\delta} \nabla_{\gamma} g_{\delta\beta} \\ &= g^{\alpha\delta} \nabla_{\gamma} g_{\delta\beta} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (98)$$

Contraindo a igualdade anterior pela métrica, i.e., por  $g_{\epsilon\alpha}$ , tem-se, em virtude da Eq. (91):

$$\begin{aligned} g_{\epsilon\alpha} g^{\alpha\delta} \nabla_{\gamma} g_{\delta\beta} &= 0 \\ &= \delta_{\epsilon}^{\delta} \nabla_{\gamma} g_{\delta\beta} \\ &= \nabla_{\gamma} g_{\epsilon\beta}, \end{aligned} \quad (99)$$

i.e:

$$\nabla_{\gamma} g_{\alpha\beta} = 0, \quad (100)$$

conforme queríamos demonstrar. Assim, passamos a ter a relação entre a conexão afim e a métrica via a anulação necessária da derivada covariante da métrica. Fulminada está a arbitrariedade da conexão afim, pois ela pode agora ser obtida a partir das Eqs. (39), (91) e (100). De fato, pela Eq. (39), obtêm-se:

$$\begin{aligned} \nabla_{\beta} g_{\delta\gamma} &= \partial_{\beta} g_{\delta\gamma} - \Gamma_{\delta\beta}^{\alpha} g_{\alpha\gamma} - \Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha} g_{\delta\alpha} = 0 \Rightarrow \\ \partial_{\beta} g_{\delta\gamma} &= \Gamma_{\delta\beta}^{\alpha} g_{\alpha\gamma} + \Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha} g_{\delta\alpha}; \end{aligned} \quad (101)$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\gamma} g_{\delta\beta} &= \partial_{\gamma} g_{\delta\beta} - \Gamma_{\delta\gamma}^{\alpha} g_{\alpha\beta} - \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} g_{\delta\alpha} = 0 \Rightarrow \\ \partial_{\gamma} g_{\delta\beta} &= \Gamma_{\delta\gamma}^{\alpha} g_{\alpha\beta} + \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} g_{\delta\alpha}; \end{aligned} \quad (102)$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\delta} g_{\beta\gamma} &= \partial_{\delta} g_{\beta\gamma} - \Gamma_{\beta\delta}^{\alpha} g_{\alpha\gamma} - \Gamma_{\gamma\delta}^{\alpha} g_{\beta\alpha} = 0 \Rightarrow \\ \partial_{\delta} g_{\beta\gamma} &= \Gamma_{\beta\delta}^{\alpha} g_{\alpha\gamma} + \Gamma_{\gamma\delta}^{\alpha} g_{\beta\alpha}. \end{aligned} \quad (103)$$

Assim, pelas Eqs. (101), (102) e (103), temos:

$$\begin{aligned} \partial_{\beta} g_{\delta\gamma} + \partial_{\gamma} g_{\delta\beta} - \partial_{\delta} g_{\beta\gamma} &= \Gamma_{\delta\beta}^{\alpha} g_{\alpha\gamma} + \Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha} g_{\delta\alpha} + \Gamma_{\delta\gamma}^{\alpha} g_{\alpha\beta} + \\ &+ \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} g_{\delta\alpha} - \Gamma_{\beta\delta}^{\alpha} g_{\alpha\gamma} - \Gamma_{\gamma\delta}^{\alpha} g_{\beta\alpha} \\ &= [\Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha} g_{\delta\alpha} + \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} g_{\delta\alpha}] + [\Gamma_{\delta\beta}^{\alpha} g_{\alpha\gamma} - \Gamma_{\beta\delta}^{\alpha} g_{\alpha\gamma}] + \\ &+ [\Gamma_{\delta\gamma}^{\alpha} g_{\alpha\beta} - \Gamma_{\gamma\delta}^{\alpha} g_{\beta\alpha}] \\ &= g_{\delta\alpha} [\Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha} + \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}] + g_{\alpha\gamma} [\Gamma_{\delta\beta}^{\alpha} - \Gamma_{\beta\delta}^{\alpha}] + \\ &+ g_{\alpha\beta} [\Gamma_{\delta\gamma}^{\alpha} - \Gamma_{\gamma\delta}^{\alpha}] \\ &= 2g_{\delta\alpha} \Gamma_{(\gamma\beta)}^{\alpha} + 2g_{\alpha\gamma} \Gamma_{[\delta\beta]}^{\alpha} + 2g_{\alpha\beta} \Gamma_{[\delta\gamma]}^{\alpha}, \end{aligned}$$

onde utilizamos as Eqs. (61) e (63). Contraindo os lados esquerdo e direito da Eq. anterior com inversa da métrica, temos, em virtude da Eq. (91):

$$\begin{aligned} g^{\epsilon\delta} (\partial_{\beta} g_{\delta\gamma} + \partial_{\gamma} g_{\delta\beta} - \partial_{\delta} g_{\beta\gamma}) &= 2g^{\epsilon\delta} g_{\delta\alpha} \Gamma_{(\gamma\beta)}^{\alpha} + \\ &+ 2g^{\epsilon\delta} g_{\alpha\gamma} \Gamma_{[\delta\beta]}^{\alpha} + 2g^{\epsilon\delta} g_{\alpha\beta} \Gamma_{[\delta\gamma]}^{\alpha} = 2\delta_{\alpha}^{\epsilon} \Gamma_{(\gamma\beta)}^{\alpha} + \\ &+ 2g^{\epsilon\delta} g_{\alpha\gamma} \Gamma_{[\delta\beta]}^{\alpha} + 2g^{\epsilon\delta} g_{\alpha\beta} \Gamma_{[\delta\gamma]}^{\alpha} = 2\Gamma_{(\gamma\beta)}^{\epsilon} + \\ &+ 2g^{\epsilon\delta} g_{\alpha\gamma} \Gamma_{[\delta\beta]}^{\alpha} + 2g^{\epsilon\delta} g_{\alpha\beta} \Gamma_{[\delta\gamma]}^{\alpha}, \end{aligned}$$

donde se lê a parte simétrica da conexão afim:

$$\begin{aligned} \Gamma_{(\beta\gamma)}^{\alpha} &= \frac{1}{2} g^{\alpha\delta} (\partial_{\beta} g_{\delta\gamma} + \partial_{\gamma} g_{\delta\beta} - \partial_{\delta} g_{\beta\gamma}) + \\ &- g^{\alpha\delta} g_{\epsilon\gamma} \Gamma_{[\delta\beta]}^{\epsilon} - g^{\alpha\delta} g_{\epsilon\beta} \Gamma_{[\delta\gamma]}^{\epsilon}. \end{aligned} \quad (104)$$

Conforme discutimos anteriormente, a Eq. das geodésicas afins filtra somente a parte simétrica da conexão, conforme verificamos ao obtermos a Eq. (67). Também comentamos que as geodésicas afins não são necessariamente as geodésicas obtidas pela condição de estacionariedade da ação para o funcional de Lagrange.

Investigaremos agora qual equação para as geodésicas advém puramente da condição de estacionariedade para o funcional:

$$\mathcal{L}(\dot{x}^{\gamma}, x^{\gamma}; u) = \frac{ds}{du} = \sqrt{g_{\alpha\beta}(x^{\gamma}) \dot{x}^{\alpha} \dot{x}^{\beta}}, \quad (105)$$

que advém da norma do vetor tangente  $dx^{\gamma}/du$  à geodésica, norma essa que se defina por:

$$\left| \frac{dx^{\gamma}}{du} \right|^2 = g_{\alpha\beta} \frac{dx^{\alpha}}{du} \frac{dx^{\beta}}{du} = \left( \frac{ds}{du} \right)^2, \quad (106)$$

em virtude da Eq. (90) para o comprimento elementar, comprimento esse agora tomado sobre uma curva  $\mathcal{C} : x^{\gamma}(u)$ , curva essa parametrizada por um parâmetro  $u$ , sendo que tal comprimento é avaliado no ponto  $x^{\gamma}(u)$  dessa curva, curva descrita por um patch de coordenadas  $x^{\gamma}$ ,  $\gamma = 1, 2, \dots, n$ , usado para cobrir a variedade Riemanniana  $\mathcal{M}^n$  de dimensão  $n$ , sendo tal curva uma geodésica Riemanniana que passa a existir como condição necessária por força de definição de estacionariedade, viz.:

$$\mathcal{C} : x^{\gamma}(u) \Big|_{\partial\mathcal{C}} \delta \int_{\partial\mathcal{C}} \mathcal{L}(\dot{x}^{\gamma}, x^{\gamma}; u) du = \delta \int_{\partial\mathcal{C}} ds = 0, \quad (107)$$

sendo  $\partial\mathcal{C}$  uma fronteira arbitrária para a geodésica  $\mathcal{C}$ , i.e., dois pontos dados tais que os deve incluir  $\mathcal{C}$ . Do cálculo variacional elementar:

$$\delta \int_{\mathcal{C}} \mathcal{L}(\dot{x}^{\gamma}, x^{\gamma}; u) du = 0 \Rightarrow \int_{\mathcal{C}} \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta x^{\alpha}} \delta x^{\alpha} du = 0, \quad (108)$$

donde a Eq. (107) é satisfeita somente se:

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta x^{\alpha}} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{d}{du} \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{x}^{\alpha}} \right) = 0, \quad \forall \alpha \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (109)$$

dado que cada incremento de componente de caminho,  $\delta x^{\alpha}$ , à geodésica de componentes  $x^{\alpha}(u)$  solução dessa Eq. (109), é arbitrário e independente dos demais. As  $n$  Eqs. (109) que proverão a geodésica  $\mathcal{C}$ , por força de necessidade à Eq. (108), conforme definição para essa curva [Eq. (107)], são as *Eqs. de Euler-Lagrange* nas componentes canônicas  $x^{\alpha}$  e  $\dot{x}^{\alpha}$  para o ponto de coordenadas  $x^{\alpha}$  da curva geodésica, ponto esse representado no espaço de fase de dimensão  $2n$ . Esse conjunto de Eqs. passará a ser chamado simplesmente de Eq. de Euler-Lagrange, pois estaremos nos referindo à forma dessas Eqs., sendo que o contexto tornará claro a necessidade de que se considerem as  $n$  Eqs. de Lagrange. Multiplicando ambos os lados das Eqs. de Euler-Lagrange por  $2\mathcal{L}$ , temos:

$$2\mathcal{L} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^{\alpha}} - 2\mathcal{L} \frac{d}{du} \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{x}^{\alpha}} \right) = 0; \quad (110)$$

mas, em virtude de:

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} \left( \frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) &= \frac{d}{du} \left( 2\mathcal{L} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) = 2\mathcal{L} \frac{d}{du} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\alpha} + \\ &+ 2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\alpha} \frac{d\mathcal{L}}{du} \Rightarrow \\ 2\mathcal{L} \frac{d}{du} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) &= \frac{d}{du} \left( \frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) - 2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\alpha} \frac{d\mathcal{L}}{du}, \end{aligned} \quad (111)$$

e de:

$$\frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial x^\alpha} = 2\mathcal{L} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\alpha}, \quad (112)$$

obtem-se, pela substituição dessas Eqs. (111) e (112) na Eq. (110):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial x^\alpha} + 2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\alpha} \frac{d\mathcal{L}}{du} - \frac{d}{du} \left( \frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) &= 0 \Rightarrow \\ \frac{d}{du} \frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial \dot{x}^\alpha} - \frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial x^\alpha} &= 2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\alpha} \frac{d\mathcal{L}}{du}. \end{aligned} \quad (113)$$

Trabalhando o lado esquerdo da Eq. (113), sendo o funcional de Lagrange  $\mathcal{L}$  dado pela Eq. (105), temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{x}^\alpha} g_{\beta\gamma} \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma \right) - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (g_{\beta\gamma} \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma) &= \frac{d}{du} \left( g_{\beta\gamma} \frac{\partial \dot{x}^\beta}{\partial \dot{x}^\alpha} \dot{x}^\gamma + g_{\beta\gamma} \frac{\partial \dot{x}^\gamma}{\partial \dot{x}^\alpha} \dot{x}^\beta \right) - \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma \frac{\partial}{\partial x^\alpha} g_{\beta\gamma} \\ &= \frac{d}{du} (g_{\beta\gamma} \delta_\alpha^\beta \dot{x}^\gamma + g_{\beta\gamma} \delta_\alpha^\gamma \dot{x}^\beta) - \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma \frac{\partial}{\partial x^\alpha} g_{\beta\gamma} \\ &= \frac{d}{du} (g_{\alpha\gamma} \dot{x}^\gamma + g_{\beta\alpha} \dot{x}^\beta) - \partial_\alpha g_{\beta\gamma} \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma = \frac{d}{du} (2g_{\alpha\beta} \dot{x}^\beta) - \partial_\alpha g_{\beta\gamma} \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma \\ &= 2g_{\alpha\beta} \ddot{x}^\beta + 2\dot{x}^\beta \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} \frac{dx^\gamma}{du} - \partial_\alpha g_{\beta\gamma} \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma \\ &= 2g_{\alpha\beta} \ddot{x}^\beta + 2\dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma \partial_\gamma g_{\alpha\beta} - \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma \partial_\alpha g_{\beta\gamma} \\ &= 2g_{\alpha\beta} \ddot{x}^\beta + \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma \partial_\gamma g_{\alpha\beta} + \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma \partial_\gamma g_{\beta\alpha} - \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma \partial_\alpha g_{\beta\gamma} \\ &= 2g_{\alpha\beta} \ddot{x}^\beta + \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma \partial_\gamma g_{\beta\alpha} + \dot{x}^\gamma \dot{x}^\beta \partial_\beta g_{\gamma\alpha} - \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma \partial_\alpha g_{\beta\gamma} \\ &= 2g_{\alpha\beta} \ddot{x}^\beta + \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma (\partial_\gamma g_{\beta\alpha} + \partial_\beta g_{\alpha\gamma} - \partial_\alpha g_{\beta\gamma}) \\ &= 2g_{\alpha\beta} \ddot{x}^\beta + 2\dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma \left[ \frac{1}{2} (\partial_\gamma g_{\beta\alpha} + \partial_\beta g_{\alpha\gamma} - \partial_\alpha g_{\beta\gamma}) \right], \end{aligned} \quad (114)$$

Reescrevendo a Eq. (113), agora com o seu lado esquerdo desenvolvido, dado pela Eq. (114), temos:

$$2g_{\alpha\beta} \ddot{x}^\beta + 2\dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma \left[ \frac{1}{2} (\partial_\gamma g_{\beta\alpha} + \partial_\beta g_{\alpha\gamma} - \partial_\alpha g_{\beta\gamma}) \right] = 2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\alpha} \frac{d\mathcal{L}}{du}. \quad (115)$$

Trabalhemos o lado direito da Eq. (115) para o funcional de Lagrange dado pela Eq. (105):

$$\begin{aligned}
2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\alpha} \frac{d\mathcal{L}}{du} &= 2 \frac{\partial}{\partial \dot{x}^\alpha} (g_{\beta\gamma} \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma)^{1/2} \frac{d}{du} \left( \frac{ds}{du} \right) \\
&= 2 \cdot \frac{1}{2} (g_{\beta\gamma} \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma)^{-1/2} \left( g_{\beta\gamma} \dot{x}^\beta \frac{\partial \dot{x}^\gamma}{\partial \dot{x}^\alpha} + g_{\beta\gamma} \dot{x}^\gamma \frac{\partial \dot{x}^\beta}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) \frac{d^2 s}{du^2} \\
&= (g_{\beta\gamma} \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma)^{-1/2} (g_{\beta\gamma} \delta_\alpha^\gamma \dot{x}^\beta + g_{\beta\gamma} \delta_\alpha^\beta \dot{x}^\gamma) \frac{d^2 s}{du^2} \\
&= (g_{\beta\gamma} \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma)^{-1/2} (g_{\beta\alpha} \dot{x}^\beta + g_{\alpha\gamma} \dot{x}^\gamma) \frac{d^2 s}{du^2} \\
&= 2 (g_{\beta\gamma} \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma)^{-1/2} g_{\alpha\beta} \dot{x}^\beta \frac{d^2 s}{du^2} \\
&= 2 \frac{du}{ds} g_{\alpha\beta} \dot{x}^\beta \frac{d^2 s}{du^2} \\
&= 2 \frac{\ddot{s}(u)}{\dot{s}(u)} g_{\alpha\beta} \dot{x}^\beta.
\end{aligned} \tag{116}$$

Reescrevendo a Eq. (115), agora com o seu lado direito desenvolvido e dado pela Eq. (116), e simplificando o

fator 2 em ambos os lados da Eq. resultante, temos:

$$g_{\alpha\beta} \ddot{x}^\beta + \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma \left[ \frac{1}{2} (\partial_\gamma g_{\beta\alpha} + \partial_\beta g_{\alpha\gamma} - \partial_\alpha g_{\beta\gamma}) \right] = \frac{\ddot{s}(u)}{\dot{s}(u)} g_{\alpha\beta} \dot{x}^\beta. \tag{117}$$

Contraindo ambos os lados da Eq. (117) com a inversa da métrica,  $g^{\alpha\delta}$ , temos:

$$\begin{aligned}
g^{\alpha\delta} g_{\alpha\beta} \ddot{x}^\beta + \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma \left\{ \frac{1}{2} g^{\alpha\delta} (\partial_\gamma g_{\beta\alpha} + \partial_\beta g_{\alpha\gamma} - \partial_\alpha g_{\beta\gamma}) \right\} &= \frac{\ddot{s}(u)}{\dot{s}(u)} \dot{x}^\beta g^{\alpha\delta} g_{\alpha\beta} \Rightarrow \\
\delta_\beta^\delta \ddot{x}^\beta + \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma \left\{ \frac{1}{2} g^{\alpha\delta} (\partial_\gamma g_{\beta\alpha} + \partial_\beta g_{\alpha\gamma} - \partial_\alpha g_{\beta\gamma}) \right\} &= \frac{\ddot{s}(u)}{\dot{s}(u)} \dot{x}^\beta \delta_\beta^\delta \Rightarrow \\
\ddot{x}^\delta + \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma \left\{ \frac{1}{2} g^{\alpha\delta} (\partial_\gamma g_{\beta\alpha} + \partial_\beta g_{\alpha\gamma} - \partial_\alpha g_{\beta\gamma}) \right\} &= \frac{\ddot{s}(u)}{\dot{s}(u)} \dot{x}^\delta.
\end{aligned} \tag{118}$$

A Eq. (118) é a Eq. das *geodésicas métricas*. Assim denominaremos tal Eq., tendo em vista que a sua obtenção foi feita numa variedade supostamente equipada com uma métrica, sendo tal variedade Riemanniana, conforme discutido anteriormente - geodésicas tais, obtidas no contexto variacional, curvas essas necessariamente ótimas no sentido de tornarem estacionária a integral da ação elementar definida pelo funcional de Lagrange tomado como a norma de seus vetores tangentes, pela Eq. (105), sendo que se refere a estacionariedade à integral de compri-

mento de arco elementar. No contexto Euclidiano ordinário, estamos acostumados a fazer tal procedimento para a obtenção das retas ordinárias como sendo as curvas que minimizam o comprimento do caminho entre dois pontos, sendo tal caminho a própria reta. Claro que esse exemplo euclidiano elementar está relacionado simplesmente à estacionariedade, no caso um mínimo, para a integral do comprimento de arco elementar dado pelo teorema de Pitágoras aplicado aos infinitésimos de deslocamento mutuamente perpendiculares em um dado ponto.

Todavia, aqui, nenhuma significação foi ainda dada para métricas específicas, para o que seja o parâmetro  $s$ . Simplesmente nos referiremos a uma geodésica métrica como a curva  $\mathcal{C}$  que, quando integrada em sua fronteira  $\partial\mathcal{C}$ , i.e., entre dois de seus pontos, tal que seja estacionário o intervalo ao longo dessa curva conectando a fronteira adotada, i.e., dois pontos sobre a curva, sob pequenas variações desse intervalo que se anulam sobre a fronteira  $\partial\mathcal{C}$  dessa curva, seja, necessariamente, tal curva, ótima em virtude dessa estacionariedade. Tudo isso foi o que exatamente impusemos na definição das geodésicas métricas para a obtenção dessas curvas, i.e., para a obtenção da Eq. (118). É conveniente que coloquemos a Eq. (118) numa forma mais compacta. Para tal, definamos os símbolos de *Christoffel de primeiro tipo*, dado pela quantidade entre parênteses na Eq. das geodésicas métricas, no lado esquerdo da Eq. (118), sendo, assim dados e denotados por:

$$\{\alpha\beta, \gamma\} \equiv \frac{1}{2} (\partial_\alpha g_{\beta\gamma} + \partial_\beta g_{\alpha\gamma} - \partial_\gamma g_{\alpha\beta}), \quad (119)$$

sendo que tais quantidades são claramente simétricas em seus dois primeiros índices, sendo, como se vêem, essas quantidades construídas através das derivadas do tensor métrico. A contração dos símbolos de Christoffel de primeiro tipo pela inversa da métrica  $g^{\alpha\delta}$ , contração feita no terceiro índice dos símbolos de Christoffel, define os símbolos de *Christoffel de segundo tipo*:

$$g^{\alpha\delta} \{\beta\gamma, \delta\} = \frac{1}{2} g^{\alpha\delta} (\partial_\beta g_{\gamma\delta} + \partial_\gamma g_{\beta\delta} - \partial_\delta g_{\beta\gamma}), \quad (120)$$

que continuam simétricos no par de índices simétricos dos símbolos de Christoffel de primeiro tipo, i.e., nos dois primeiros índices entre as chaves, ao lado esquerdo da vírgula, como facilmente se depreendem. Os símbolos de Christoffel de segundo tipo desempenharão papel fundamental, pelo que se infere a partir da presença desses símbolos na Eq. das geodésicas métricas, Eq. (118). Assim, escrevemos a Eq. das geodésicas métricas, Eq. (118), em termos dos símbolos de Christoffel:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{du^2} + g^{\alpha\delta} \{\beta\gamma, \delta\} \frac{dx^\beta}{du} \frac{dx^\gamma}{du} = \frac{\ddot{s}(u)}{\dot{s}(u)} \frac{dx^\alpha}{du}. \quad (121)$$

Identificando as geodésicas métricas como as geodésicas afins, i.e., requerendo que as geodésicas métricas possuam a propriedade de prover o transporte paralelo de seus vetores tangentes em vetores tangentes, o que é compatível com a nossa discussão anterior, no contexto das geodésicas afins, para a necessidade de transporte da unidade de medida ao longo das geodésicas, vemos que, necessariamente a partir dessa identificação, as geodésicas métricas são aprioristicamente parametrizadas por um parâmetro  $u$  que deve ser necessariamente afim. Isso, porque se identificam:

$$f(u) = \frac{\ddot{s}(u)}{\dot{s}(u)} = 0, \quad (122)$$

nas Eqs. (58) e (121), com  $u$  tal que  $f(u) = 0$ , para que os vetores tangentes transportados sejam transportados neles mesmos, conforme discutido anteriormente para as geodésicas afins, condição em que  $u$  lá se denominou afim, viz., quando da discussão que levou à obtenção da Eq. (75). A denominação afim claramente se vê necessariamente também pela Eq. (122), i.e., pelo que:

$$f(u) = \frac{\ddot{s}(u)}{\dot{s}(u)} = 0 \Rightarrow \ddot{s}(u) = 0 \Rightarrow s(u) = cu + d, \quad (123)$$

com  $c, d$  constantes reais, pelo que esperamos ser  $s$  um parâmetro direta e fisicamente observável, assim como  $u$ , também com  $\dot{s}(u) \neq 0$ . Note-se: se  $\dot{s}(u) = 0 \Rightarrow ds = 0$ , a Eq. (107), definidora das geodésicas métricas, falha por trivialidade. Porém, a Eq. (56) para as geodésicas afins não possui essa restrição em sua construção. Notando que a identificação menos restritiva para os símbolos de Christoffel do segundo tipo na Eq. das geodésicas métricas em relação à Eq. das geodésicas afins ocorre em relação à Eq. (67) para estas geodésicas, i.e., em sendo as geodésicas métricas também afins, a relação:

$$\Gamma_{(\beta\gamma)}^\alpha = g^{\alpha\delta} \{\beta\gamma, \delta\}, \quad (124)$$

é menos restritivamente decorrente. Porém, isso não é suficiente para estabelecer a ausência de torção na variedade, i.e., para estabelecer a validade da Eq. (66):

$$\Gamma_{[\beta\gamma]}^\alpha = 0 \Leftrightarrow \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \Gamma_{(\beta\gamma)}^\alpha. \quad (125)$$

Isso pelo que, pelas Eqs. (104) e (124):

$$\begin{aligned} g^{\alpha\delta} \{\beta\gamma, \delta\} &= g^{\alpha\delta} \{\beta\gamma, \delta\} - g^{\alpha\delta} g_{\epsilon\gamma} \Gamma_{[\delta\beta]}^\epsilon - g^{\alpha\delta} g_{\epsilon\beta} \Gamma_{[\delta\gamma]}^\epsilon \Rightarrow \\ g^{\alpha\delta} g_{\epsilon\gamma} \Gamma_{[\delta\beta]}^\epsilon + g^{\alpha\delta} g_{\epsilon\beta} \Gamma_{[\delta\gamma]}^\epsilon &= 0, \end{aligned} \quad (126)$$

o que não implica a anulação da parte antissimétrica da conexão afim, i.e., não implica a validade da Eq. (125). Assim, se quisermos identificar, restritivamente, a conexão como sendo dada pelos símbolos de Christoffel do segundo tipo, i.e., que a variedade não apresentará torção e que as geodésicas métricas possuem a propriedade de prover o transporte paralelo de seus vetores tangentes, i.e., que as geodésicas métricas são geodésicas afins, estaremos trabalhando canonicamente no terreno em que a Relatividade Geral geometricamente caminha para seu substrato geométrico Riemanniano. Assim procederemos. As teorias do tipo Einstein-Cartan passam a considerar a possibilidade de torção na variedade, mas não serão essas teorias substrato teórico em nossa análise. Assim, daqui em diante, estaremos considerando que a nossa variedade Riemanniana está livre de torção, decorrendo, assim, das Eqs. (104) e (125), que a conexão afim é exatamente a conexão métrica, i.e., dada pelos símbolos de Christoffel do segundo tipo:

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \Gamma_{(\beta\gamma)}^\alpha = g^{\alpha\delta} \{\beta\gamma, \delta\}. \quad (127)$$

Em relação à restrição a que nos referimos anteriormente relacionada à condição  $\dot{s}(u) \neq 0$ , i.e., de que a argumentação variacional para a obtenção das geodésicas falha quando  $\mathcal{L}(\dot{x}^\gamma, x^\gamma; u) = 0$ , enfatize-se que a conexão não é uma propriedade das geodésicas métricas em si, i.e., na obtenção das geodésicas afins não se fizeram restrições em relação ao tipo de geodésica específica quanto ao sinal de  $ds$ , pois a Eq. das geodésicas afins, Eq. (58), não possui restrição desse tipo, sendo que tal restrição somente se apresenta quando de reparametrização. Em sendo as geodésicas métricas munidas de capacidade de prover o transporte paralelo de seus vetores, o que as transforma em geodésicas afins, têm-se essas curvas métricas sob qualquer eventual anulamento do comprimento de arco fundamental  $ds = 0$ . A rigor, parte-se da Eq. (58), sem que se faça referência a qualquer reparametrização específica, uma vez que essa Eq. (58) não tem qualquer resquício de que  $u$  tenha interpretação específica, i.e., de que seja esse parâmetro um comprimento de arco. Assim, mesmo geodésicas que possuam  $ds = 0$ , sendo esse parâmetro dado pela Eq. (105), serão descritas pela Eq. (58). Em outras palavras, a Eq. para as geodésicas será a mesma, terá a mesma forma dada pela Eq. (58), sejam essas geodésicas tais que:

$$g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta > 0, \quad (128)$$

as quais chamaremos de geodésicas do tipo tempo,

$$g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta = 0, \quad (129)$$

as quais chamaremos de geodésicas do tipo nula, ou do tipo luz, ou ainda:

$$g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta < 0, \quad (130)$$

as quais chamaremos de geodésicas do tipo espaço, pela convenção de assinatura para a métrica que faremos a seguir para o contexto de relatividade geral. Essa falha na obtenção das geodésicas nulas pela condição variacional acaba por se tornar trivial para essas curvas, dado que a Eq. (108) trivialmente se anula. Mesmo assim, essa Eq. (108) é satisfeita para geodésicas de comprimento de arco nulo, sendo que elas simplesmente são dadas pela Eq. (58) em que, no nosso caso, por construção, a conexão afim é dada pelos símbolos de Christoffel de segundo tipo. Poderíamos ter simplesmente começado a adotar as geodésicas afins prontamente sem que se definissem pelo critério variacional, impondo torção nula à variedade, o que automaticamente definiria a conexão afim para a variedade Riemanniana como sendo dada pelos símbolos de Christoffel do segundo tipo em virtude da Eq. (104). As geodésicas estariam definidas e, a posteriori, aplicando o princípio variacional para que se tornasse estacionário o comprimento elementar, verificaríamos que tais curvas, por esse princípio, de fato emergem, diferindo

apenas quanto à interpretação de seus comprimentos de arco elementar em virtude dessas últimas três equações, Eqs. (128), (129) e (130). Conforme anteriormente mencionado, logo após a obtenção da Eq. (5), adentramos na especificação das geodésicas, para que utilizássemos essas curvas para a obtenção da conexão afim, dado que esta é requerida para a obtenção de objetos-chave em relatividade geral, mormente o tensor de curvatura de Riemann e, deste, o tensor de Ricci e, deste, o escalar de curvatura, elementos intrinsecamente definidores da geometria do substrato, i.e., conexos à matéria, à energia, e vice-versa. Ainda que tenhamos como obter a conexão pelo cálculo direto a partir da Eq. (127), tendo em vista a Eq. (120), a partir de um tensor métrico, a obtenção da conexão, viz., o cálculo de seus elementos  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ , é muito mais efetivo e direto pela utilização de geodésicas, pois esses elementos da conexão podem ser diretamente identificados a partir de Eq. das geodésicas. Ademais, uma vez escrita a Eq. das geodésicas, podemos prontamente saber quais os elementos da conexão são nulos, dado que os nulos não aparecerão escritos nas parcelas da Eq. das geodésicas. Nós continuaremos com a obtenção final do elemento de linha para o setor espacial do substrato cosmológico do estágio em que paramos na Eq. (5), agora com a utilização de geodésicas, o que tornará clara essa obtenção direta dos elementos da conexão, bem como a obtenção do 3-escalar de curvatura a partir do tensor de curvatura de Riemann e através do tensor de Ricci. Porém, ainda podemos facilitar mais a técnica matemática para a obtenção dos elementos da conexão. Isso, porque estaremos sempre escolhendo um parâmetro afim para parametrizar as geodésicas. Claramente, note-se que o lado direito da Eq. (113), dado pela Eq. (116), anula-se quando se adota um parâmetro afim, pois  $\dot{s} = 0$  nesse caso [Eq. (123)]. Assim, a Eq. (113) torna-se:

$$\frac{d}{du} \left( \frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{du} \left( \frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) = 0. \quad (131)$$

Essa Eq. (131) é a Eq. de Euler-Lagrange para uma nova função de lagrange  $2\mathcal{K}(\dot{x}^\gamma, x^\gamma; u)$ :

$$\begin{aligned} 2\mathcal{K}(\dot{x}^\gamma, x^\gamma; u) &\equiv \mathcal{L}^2(\dot{x}^\gamma, x^\gamma; u) = g_{\alpha\beta}(x^\gamma) \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \\ &= \left( \frac{ds}{du} \right)^2, \end{aligned} \quad (132)$$

em virtude da Eq. (105), e conforme o sabemos a partir da forma dada pela Eq. (109) para a Eq. de Euler-Lagrange. Por conseguinte, i.e., pela utilização de uma parametrização afim para as geodésicas, a Eq. de Euler-Lagrange para o novo funcional de Lagrange  $2\mathcal{K}$  leva à Eq. (114) igualada a zero, viz.:

$$2g_{\alpha\beta}\ddot{x}^\beta + 2\dot{x}^\beta\dot{x}^\gamma \left[ \frac{1}{2} (\partial_\gamma g_{\beta\alpha} + \partial_\beta g_{\alpha\gamma} - \partial_\alpha g_{\beta\gamma}) \right] = 0, \quad (133)$$

pois a Eq. (114) é o desenvolvimento do lado esquerdo da Eq. (113), agora sendo igualado a zero, pois, conforme adotado, o lado direito dessa Eq. (113) é nulo em virtude de parametrização afim. Contraindo ambos os lados dessa Eq. (133) pela inversa da métrica e dividindo por 2, procedimento análogo ao que fizemos para levar a Eq. (115) à Eq. (118), temos, em virtude das Eqs. (120) e (127):

$$\frac{d^2 x^\alpha}{du^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{du} \frac{dx^\gamma}{du} = 0. \quad (134)$$

Em outras paravras, a Eq. de Euler-Lagrange para o novo funcional de Lagrange  $2\mathcal{K}$ , Eq. (131), levará à Eq. das geodésicas [parametrizadas por parâmetro afim], Eq. (134), de onde se lêem diretamente os componentes não nulos  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \neq 0$  da conexão métrica afim. Temos ainda que, em virtude das Eqs. (123), (128), (129), (130) e (132), as geodésicas classificar-se-ão em tipo tempo, tipo nula (ou tipo luz) ou tipo espaço conforme:

$$2\mathcal{K} \equiv c^2 (\dot{x}^\gamma, x^\gamma; u) = \text{cte} > 0; \quad (135)$$

$$2\mathcal{K} \equiv c^2 (\dot{x}^\gamma, x^\gamma; u) = \text{cte} = 0; \quad (136)$$

$$2\mathcal{K} \equiv c^2 (\dot{x}^\gamma, x^\gamma; u) = \text{cte} < 0, \quad (137)$$

respectivamente. Isso posto no contexto de relatividade geral, pois que, doravante, adotaremos assinatura  $-2$  para o tensor métrico, i.e.,  $(+1, -1, -1, -1)$ , exceto em se tratando do contexto específico da determinação da métrica para o setor espacial do substrato cosmológico, Eq. (5), caso em que esse setor espacial passará somente a ter assinatura  $-3$ , conforme nossa convenção, quando completamente inserida a sua métrica na métrica completa do substrato cosmológico, métricas essas que estão em via iminente de terem completadas, a seguir, as suas obtenções.

Voltemos então, à discussão que levou à Eq. (5), onde estávamos incumbidos de determinar a métrica para o setor puramente espacial do substrato cosmológico sob as condições postas pelo princípio cosmológico, viz., sob homogeneidade e isotropia para o setor puramente espacial. Conforme argumentamos, o 3-escalar de curvatura deve ser constante, não dependendo de localização específica no setor puramente espacial do substrato cosmológico. Em virtude da Eq. (2), obtivemos o 3-escalar de curvatura:

$${}^3R = 6K. \quad (138)$$

O tensor de curvatura de Riemann dado pela Eq. (2) é o tensor covariantemente contraído pela métrica a partir do tensor de Riemann, este também chamado de tensor de curvatura, ou simplesmente *tensor de Riemann*  $R_{\beta\gamma\delta}^\alpha$ :

$$g_{\alpha\epsilon} R_{\beta\gamma\delta}^\epsilon = R_{\alpha\beta\gamma\delta}. \quad (139)$$

O tensor de Riemann  $R_{\beta\gamma\delta}^\alpha$  advém da não comutabilidade da derivada covariante, i.e.:

$$\nabla_\gamma \nabla_\delta T_{\beta\dots}^{\alpha\dots} - \nabla_\delta \nabla_\gamma T_{\beta\dots}^{\alpha\dots} \neq 0 \quad (140)$$

a despeito da diferenciação parcial ordinária, que, em geral, comuta. Em geral, verifica-se a falha de comutabilidade posta pela Eq. (140), exceto para variedade específica em que existe um sistema de coordenadas de cobertura no qual se anula a conexão afim em todos os pontos dessa variedade, caso em que essa variedade é dotada de propriedade denominada planitude afim, *affine flatness*. Há um teorema extremamente importante, o qual não vamos provar, ainda que a sua prova não seja complicada, porque nos interessa - o resultado -, muito mais, neste estágio, do que os detalhes dessa prova. Tal teorema:

- Uma condição necessária e suficiente para que haja um sistema de coordenadas  $S$  de cobertura para uma variedade, tal que se anule:

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \stackrel{S}{=} 0, \quad (141)$$

viz., tal que se anule, em  $S$ , a conexão afim em todos os pontos dessa variedade, i.e., para que tal variedade seja dotada de planitude afim, *affine flatness*, é o anulamento do tensor de Riemann,  $R_{\beta\gamma\delta}^\alpha = 0$ , em todos os pontos dessa variedade.

Esse teorema decorre da necessidade de que se possa efetuar o transporte paralelo de um vetor contravariante entre dois pontos de uma variedade independentemente da curva tomada para que, sobre ela, se perfaça esse transporte paralelo. Isso não é sempre verdadeiro, pois, em geral, o transporte paralelo de um vetor contravariante entre dois pontos de uma variedade dependerá do caminho. Caso seja esse transporte paralelo independente do caminho, a *conexão é dita integrável*. Assim, uma vez provados estes dois lemas intermediários:

- Uma condição necessária e suficiente para que uma conexão afim  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$  seja integrável em uma variedade, *integrable connection*, é o anulamento do tensor de Riemann,  $R_{\beta\gamma\delta}^\alpha = 0$ , em todos os pontos dessa variedade ;
- Uma condição necessária e suficiente para que uma variedade seja dotada de planitude afim, *affine flatness*, é que a conexão afim nessa variedade seja simétrica e integrável, *symmetric and integrable connection*,

prova-se o teorema supra. Não nos ateremos aos detalhes dessa prova, mas que se retenham esses resultados. Pois bem, como não necessariamente trabalharemos, no nosso contexto cosmológico, com uma variedade dotada de planitude afim, não teremos o anulamento apriorístico

do tensor de Riemann, e vice-versa. Dessa forma, a derivada covariante não necessariamente comutará em nossa variedade, como veremos a seguir. Todavia, já vemos que o tensor de Riemann, suficientemente, não se anula [escalar de curvatura não nulo é suficiente para que o tensor de Riemann não se anule, dado que o anulamento do tensor de Riemann é suficiente para que se anule o escalar de curvatura, o que pode ser prontamente inferido, para o setor puramente espacial, a partir da Eq. (2) e da obtenção que dela se seguiu para o 3-escalar de curvatura dado pela Eq. (138); tal propriedade não é exclusiva do tensor de Riemann para o setor puramente espacial, viz., sempre que o escalar de curvatura for não nulo, também não o será, o tensor de Riemann,

nos respectivos pontos da variedade, o que se tornará claro a seguir] para o setor puramente espacial do substrato cosmológico, dado que, pela Eq. (138), vemos que o escalar de curvatura para esse setor não se anula, exceto quando esse espaço possui curvatura nula ( $K = 0$ ), i.e., quando o setor puramente espacial for plano. Para obter o tensor de Riemann  $R_{\beta\gamma\delta}^\alpha$ , trabalhemos o comutador covariante, o comutador da derivada covariante, para o caso de um campo tensorial contravariante  $V^\alpha(x^\gamma)$  de valência (1,0), viz., para campo vetorial  $V^\alpha(x^\gamma)$ , contravariante, definido nos espaços tangentes  $T_P(\mathcal{M}^n)$  nos pontos  $P(x^\gamma)$ ,  $\forall \gamma \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $\forall P$  cobertos por  $x^\gamma$ , de uma variedade  $\mathcal{M}^n$  de dimensão  $n$  coberta por esse sistema de coordenadas  $x^\gamma$  [9]:

$$\nabla_\gamma \nabla_\delta V^\alpha - \nabla_\delta \nabla_\gamma V^\alpha = \nabla_\gamma (\partial_\delta V^\alpha + \Gamma_{\beta\delta}^\alpha V^\beta) - \nabla_\delta (\partial_\gamma V^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha V^\beta), \quad (142)$$

em virtude da Eq. (39), aplicada ao campo tensorial em questão, ao campo tensorial de valência (1,0), asseverando. Ainda, em virtude da Eq. (39), aplicada, separadamente, em relação à coordenada  $x^\gamma$  e em relação à coordenada  $x^\delta$ , a dois campos tensoriais de valência (1,1), digamos  $T_\delta^\alpha$  e  $S_\gamma^\alpha$ , dados por:

$$\begin{aligned} T_\delta^\alpha &\equiv \nabla_\delta V^\alpha = \partial_\delta V^\alpha + \Gamma_{\beta\delta}^\alpha V^\beta, \\ S_\gamma^\alpha &\equiv \nabla_\gamma V^\alpha = \partial_\gamma V^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha V^\beta, \end{aligned} \quad (143)$$

temos que:

$$\begin{aligned} \nabla_\gamma T_\delta^\alpha &= \partial_\gamma T_\delta^\alpha - \Gamma_{\delta\gamma}^\epsilon T_\epsilon^\alpha + \Gamma_{\epsilon\gamma}^\alpha T_\delta^\epsilon, \\ \nabla_\delta S_\gamma^\alpha &= \partial_\delta S_\gamma^\alpha - \Gamma_{\gamma\delta}^\epsilon S_\epsilon^\alpha + \Gamma_{\epsilon\delta}^\alpha S_\gamma^\epsilon, \end{aligned} \quad (144)$$

donde:

$$\begin{aligned} \nabla_\gamma \nabla_\delta V^\alpha - \nabla_\delta \nabla_\gamma V^\alpha &= \partial_\gamma (\partial_\delta V^\alpha + \Gamma_{\beta\delta}^\alpha V^\beta) - \Gamma_{\delta\gamma}^\epsilon (\partial_\epsilon V^\alpha + \Gamma_{\beta\epsilon}^\alpha V^\beta) + \Gamma_{\epsilon\gamma}^\alpha (\partial_\delta V^\epsilon + \Gamma_{\beta\delta}^\epsilon V^\beta) + \\ &- \partial_\delta (\partial_\gamma V^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha V^\beta) + \Gamma_{\gamma\delta}^\epsilon (\partial_\epsilon V^\alpha + \Gamma_{\beta\epsilon}^\alpha V^\beta) - \Gamma_{\epsilon\delta}^\alpha (\partial_\gamma V^\epsilon + \Gamma_{\beta\gamma}^\epsilon V^\beta) \\ &= \partial_\gamma \partial_\delta V^\alpha + \partial_\gamma (\Gamma_{\beta\delta}^\alpha V^\beta) - \Gamma_{\delta\gamma}^\epsilon \partial_\epsilon V^\alpha - \Gamma_{\delta\gamma}^\epsilon \Gamma_{\beta\epsilon}^\alpha V^\beta + \Gamma_{\epsilon\gamma}^\alpha \partial_\delta V^\epsilon + \Gamma_{\epsilon\gamma}^\alpha \Gamma_{\beta\delta}^\epsilon V^\beta + \\ &- \partial_\delta \partial_\gamma V^\alpha - \partial_\delta (\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha V^\beta) + \Gamma_{\gamma\delta}^\epsilon \partial_\epsilon V^\alpha + \Gamma_{\gamma\delta}^\epsilon \Gamma_{\beta\epsilon}^\alpha V^\beta - \Gamma_{\epsilon\delta}^\alpha \partial_\gamma V^\epsilon - \Gamma_{\epsilon\delta}^\alpha \Gamma_{\beta\gamma}^\epsilon V^\beta \\ &= (\partial_\gamma \Gamma_{\beta\delta}^\alpha) V^\beta + \Gamma_{\beta\delta}^\alpha (\partial_\gamma V^\beta) - \Gamma_{\delta\gamma}^\epsilon \partial_\epsilon V^\alpha - \Gamma_{\delta\gamma}^\epsilon \Gamma_{\beta\epsilon}^\alpha V^\beta + \Gamma_{\epsilon\gamma}^\alpha \partial_\delta V^\epsilon + \Gamma_{\epsilon\gamma}^\alpha \Gamma_{\beta\delta}^\epsilon V^\beta + \\ &- (\partial_\delta \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha) V^\beta - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha (\partial_\delta V^\beta) + \Gamma_{\gamma\delta}^\epsilon \partial_\epsilon V^\alpha + \Gamma_{\gamma\delta}^\epsilon \Gamma_{\beta\epsilon}^\alpha V^\beta - \Gamma_{\epsilon\delta}^\alpha \partial_\gamma V^\epsilon - \Gamma_{\epsilon\delta}^\alpha \Gamma_{\beta\gamma}^\epsilon V^\beta \\ &= (\partial_\gamma \Gamma_{\beta\delta}^\alpha) V^\beta - \Gamma_{\delta\gamma}^\epsilon \partial_\epsilon V^\alpha - \Gamma_{\delta\gamma}^\epsilon \Gamma_{\beta\epsilon}^\alpha V^\beta + \Gamma_{\epsilon\gamma}^\alpha \Gamma_{\beta\delta}^\epsilon V^\beta - (\partial_\delta \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha) V^\beta + \Gamma_{\gamma\delta}^\epsilon \partial_\epsilon V^\alpha \\ &+ \Gamma_{\gamma\delta}^\epsilon \Gamma_{\beta\epsilon}^\alpha V^\beta - \Gamma_{\epsilon\delta}^\alpha \Gamma_{\beta\gamma}^\epsilon V^\beta \\ &= (\partial_\gamma \Gamma_{\beta\delta}^\alpha) V^\beta - \Gamma_{\delta\gamma}^\epsilon (\partial_\epsilon V^\alpha + \Gamma_{\beta\epsilon}^\alpha V^\beta) + \Gamma_{\epsilon\gamma}^\alpha \Gamma_{\beta\delta}^\epsilon V^\beta - (\partial_\delta \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha) V^\beta + \\ &+ \Gamma_{\gamma\delta}^\epsilon (\partial_\epsilon V^\alpha + \Gamma_{\beta\epsilon}^\alpha V^\beta) - \Gamma_{\epsilon\delta}^\alpha \Gamma_{\beta\gamma}^\epsilon V^\beta \\ &= (\partial_\gamma \Gamma_{\beta\delta}^\alpha + \Gamma_{\epsilon\gamma}^\alpha \Gamma_{\beta\delta}^\epsilon - \partial_\delta \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha - \Gamma_{\epsilon\delta}^\alpha \Gamma_{\beta\gamma}^\epsilon) V^\beta + (\Gamma_{\gamma\delta}^\epsilon - \Gamma_{\delta\gamma}^\epsilon) (\partial_\epsilon V^\alpha + \Gamma_{\beta\epsilon}^\alpha V^\beta) \\ &= (\partial_\gamma \Gamma_{\beta\delta}^\alpha - \partial_\delta \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha + \Gamma_{\epsilon\gamma}^\alpha \Gamma_{\beta\delta}^\epsilon - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \Gamma_{\epsilon\delta}^\alpha) V^\beta + (\Gamma_{\gamma\delta}^\epsilon - \Gamma_{\delta\gamma}^\epsilon) \nabla_\epsilon V^\alpha \\ &= R_{\beta\gamma\delta}^\alpha V^\beta + (\Gamma_{\gamma\delta}^\epsilon - \Gamma_{\delta\gamma}^\epsilon) \nabla_\epsilon V^\alpha. \end{aligned} \quad (145)$$

Assim, a Eq. (145) fornece o comutador entre as derivadas covariantes, viz.:

$$\nabla_\gamma \nabla_\delta V^\alpha - \nabla_\delta \nabla_\gamma V^\alpha = R_{\beta\gamma\delta}^\alpha V^\beta + 2\Gamma_{[\gamma\delta]}^\epsilon \nabla_\epsilon V^\alpha, \quad (146)$$

operado sobre um campo vetorial contravariante  $V^\alpha$ , onde utilizamos a Eq. (63) para a parte antissimétrica

da conexão; também, sendo, assim, de onde se define o *tensor de Riemann*:

$$R_{\beta\gamma\delta}^{\alpha} = \partial_{\gamma}\Gamma_{\beta\delta}^{\alpha} - \partial_{\delta}\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} + \Gamma_{\epsilon\gamma}^{\alpha}\Gamma_{\beta\delta}^{\epsilon} - \Gamma_{\beta\gamma}^{\epsilon}\Gamma_{\epsilon\delta}^{\alpha}. \quad (147)$$

Conforme enfatizado anteriormente, a conexão afim não é um tensor, não se transforma segundo a Eq. (7), mas a parte antissimétrica da conexão afim o é, em virtude do cancelamento do segundo termo na Eq. (20) [ou na Eq. (22)] quando do cálculo de  $\Gamma_{[\beta\gamma]}^{\alpha}$  definido pela Eq. (63). Assim, O segundo termo do lado direito da Eq. (146):

$$2\Gamma_{[\gamma\delta]}^{\epsilon}\nabla_{\epsilon}V^{\alpha} = \mathcal{T}_{\gamma\delta}^{\epsilon}\nabla_{\epsilon}V^{\alpha}, \quad (148)$$

assim escrito em termos do tensor de torção definido pela Eq. (65), é um tensor, pois a derivada covariante de um campo vetorial contravariante, i.e.,  $\nabla_{\epsilon}V^{\alpha}$ , também é um tensor por construção, conforme a construímos na marcha que levou da Eq. (17) à Eq. (20). Assim, em virtude da Eq. (28), a Eq. (128) é uma igualdade entre tensores idênticos e legítimos. Pode-se verificar que a Eq. (147) se transforma como um tensor de valência (1, 3) pela aplicação da regra de transformação para a conexão afim dada pela Eq. (20) [ou pela Eq. (22)]. Porém, é mais direta a verificação de que  $R_{\beta\gamma\delta}^{\alpha}$ , Eq. (147), é um tensor em virtude da Eq. (8), pois o lado esquerdo da Eq. (146) é um tensor. Defina-se o *tensor de Ricci*  $R_{\alpha\beta}$  pela contração, pela inversa da métrica, nos primeiro e terceiro índices do tensor baixado de curvatura de Riemann dado Eq. (139), viz:

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta} &= g^{\gamma\delta}R_{\delta\alpha\gamma\beta} \Rightarrow \\ R_{\alpha\beta} &= g^{\gamma\delta}g_{\delta\epsilon}R_{\alpha\gamma\beta}^{\epsilon} = \delta_{\epsilon}^{\gamma}R_{\alpha\gamma\beta}^{\epsilon} \quad \therefore \\ R_{\alpha\beta} &= R_{\alpha\gamma\beta}^{\gamma}, \end{aligned} \quad (149)$$

onde se utilizou a Eq. (91), estando implícita, como usual, a convenção para somatórios de Einstein. Defina-se o *n-escalar de curvatura*, ou *escalar de Ricci*, pela contração, pela inversa da métrica, do tensor de Ricci, viz.:

$${}^nR = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\gamma\beta}^{\gamma}. \quad (150)$$

Precisamos determinar o 3-escalar de curvatura para o setor puramente espacial do substrato cosmológico, incumbência posta no início deste parágrafo. Temos agora o arsenal matemático necessário, i.e., determinaremos a

Eq. (150) para o setor puramente espacial do substrato cosmológico através de geodésicas nesse setor. Pelas Eqs. (150) e (138), temos, em virtude do princípio cosmológico, que o escalar de Ricci no setor puramente espacial, portanto o 3-escalar de curvatura, deve ser constante, i.e., deve ser independente de localizações específicas de origem nesse setor, conforme argumentamos de início:

$${}^3R = g^{ab}R_{ab} = 6K, \quad (151)$$

onde os índices latinos variam somente no setor espacial, i.e., tomando todos os valores no conjunto  $\{1, 2, 3\}$ , uma vez que a métrica para esse setor é dada pela Eq. (5), sendo o elemento de linha correspondente dado pela Eq. (4), as quais aqui se reescrevem, para facilitar referência:

$$d\sigma^2 = f^2(r)dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2, \quad (152)$$

$$g_{ab} = \text{diag} [f^2(r), r^2, r^2\sin^2\theta]. \quad (153)$$

Temos que resolver a Eq. (131):

$$\frac{\partial\mathcal{L}^2}{\partial x^a} - \frac{d}{du} \left( \frac{\partial\mathcal{L}^2}{\partial \dot{x}^a} \right) = 0, \quad (154)$$

para a função de Lagrange dada pela Eq. (132):

$$2\mathcal{K} = \mathcal{L}^2 = \left( \frac{d\sigma}{du} \right)^2 = g_{ab}\dot{x}^a\dot{x}^b, \quad (155)$$

conforme desenvolvemos anteriormente, para que se leiam as componentes da conexão a partir da Eq. das geodésicas obtida, Eq. (134), para que, então, se obtenham: o tensor de Riemann, Eq. (147), o tensor de Ricci, Eq. (149), o 3-escalar de curvatura, Eq. (150), e, donde, finalmente, resolve-se a Eq. (151). Temos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^2 &= g_{ab}\dot{x}^a\dot{x}^b \\ &= g_{11}\dot{x}^1\dot{x}^1 + g_{22}\dot{x}^2\dot{x}^2 + g_{33}\dot{x}^3\dot{x}^3 \\ &= g_{11}\dot{r}\dot{r} + g_{22}\dot{\theta}\dot{\theta} + g_{33}\dot{\phi}\dot{\phi} \\ &= g_{11}\dot{r}^2 + g_{22}\dot{\theta}^2 + g_{33}\dot{\phi}^2 \\ &= f^2(r)\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2 \quad \therefore \end{aligned}$$

$$2\mathcal{K}(\dot{x}^c, x^c; u) \equiv \mathcal{L}^2(\dot{x}^c, x^c; u) = g_{ab}(x^c)\dot{x}^a\dot{x}^b = f^2(r)\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2, \quad (156)$$

uma vez que a métrica, Eq. (153), é diagonal, onde:

$$x^1 \equiv r, \quad (157)$$

$$x^2 \equiv \theta, \quad (158)$$

$$x^3 \equiv \phi. \quad (159)$$

Calculamos agora os termos necessários às Eqs. que advêm da Eq. (154), i.e., para as três Eqs. de Euler-Lagrange que se referem às coordenadas:  $r$ , para a qual

$a = 1$ ;  $\theta$ , para a qual  $a = 2$ ; e  $\phi$ , para a qual  $a = 3$ . Assim:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial x^1} &= \frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left[ f^2(r) \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right] \\ &= \dot{r}^2 \cdot 2f(r) \frac{df(r)}{dr} + \dot{\theta}^2 \cdot 2r + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \cdot 2r \\ &\quad \vdots \\ \frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial x^1} &= \frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial r} = 2f(r) \dot{r}^2 \frac{df(r)}{dr} + 2r \dot{\theta}^2 + 2r \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta; \end{aligned} \quad (160)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial x^2} &= \frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ f^2(r) \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right] \\ &= r^2 \dot{\phi}^2 \cdot 2 \sin \theta \cos \theta \\ &\quad \vdots \\ \frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial x^2} &= \frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial \theta} = 2 \sin \theta \cos \theta r^2 \dot{\phi}^2; \end{aligned} \quad (161)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial x^3} &= \frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ f^2(r) \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right] \\ &= 0 \\ &\quad \vdots \\ \frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial x^3} &= \frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial \phi} = 0; \end{aligned} \quad (162)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial \dot{x}^1} &= \frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial}{\partial \dot{r}} \left[ f^2(r) \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right] \\ &= 2f^2(r) \dot{r} \quad \therefore \\ \frac{d}{du} \left( \frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial \dot{x}^1} \right) &= \frac{d}{du} \left( \frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial \dot{r}} \right) = \frac{d}{du} [2f^2(r) \dot{r}] = 2f^2(r) \ddot{r} + 2\dot{r} \cdot 2f(r) \frac{df(r)}{du} \\ &= 2f^2(r) \ddot{r} + 4f(r) \dot{r} \frac{df(r)}{du} \\ &\quad \vdots \\ \frac{d}{du} \left( \frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial \dot{x}^1} \right) &= \frac{d}{du} \left( \frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial \dot{r}} \right) = 2f^2(r) \ddot{r} + 4f(r) \dot{r} \frac{df(r)}{du}; \end{aligned} \quad (163)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial \dot{x}^2} &= \frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} \left[ f^2(r) \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right] \\
&= r^2 \cdot 2\dot{\theta} = 2r^2 \dot{\theta} \quad \therefore \\
\frac{d}{du} \left( \frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial \dot{x}^2} \right) &= \frac{d}{du} \left( \frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{d}{du} (2r^2 \dot{\theta}) = 2 \frac{d}{du} (r^2 \dot{\theta}) = 2 \left( r^2 \frac{d}{du} \dot{\theta} + \dot{\theta} \frac{d}{du} r^2 \right) \\
&= 2 (r^2 \ddot{\theta} + \dot{\theta} \cdot 2r\dot{r}) \\
&\therefore \\
\frac{d}{du} \left( \frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial \dot{x}^2} \right) &= \frac{d}{du} \left( \frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial \dot{\theta}} \right) = 2r^2 \ddot{\theta} + 4r\dot{r}\dot{\theta}; \tag{164}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial \dot{x}^3} &= \frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}} \left[ f^2(r) \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right] \\
&= r^2 \sin^2 \theta \cdot 2\dot{\phi} \quad \therefore \\
\frac{d}{du} \left( \frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial \dot{x}^3} \right) &= \frac{d}{du} \left( \frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial \dot{\phi}} \right) \\
&= \frac{d}{du} (2r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}) = 2 \frac{d}{du} (r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}) \\
&= 2 \left[ (r^2 \sin^2 \theta) \frac{d}{du} \dot{\phi} + \dot{\phi} \frac{d}{du} (r^2 \sin^2 \theta) \right] \\
&= 2 \left[ r^2 \sin^2 \theta \ddot{\phi} + \dot{\phi} \left( r^2 \frac{d}{du} \sin^2 \theta + \sin^2 \theta \frac{d}{du} r^2 \right) \right] \\
&= 2 \left[ r^2 \sin^2 \theta \ddot{\phi} + \dot{\phi} \left( r^2 \cdot 2 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta} + \sin^2 \theta \cdot 2r\dot{r} \right) \right] \\
&\therefore \\
\frac{d}{du} \left( \frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial \dot{x}^3} \right) &= \frac{d}{du} \left( \frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial \dot{\phi}} \right) = 2r^2 \sin^2 \theta \ddot{\phi} + 4 \sin \theta \cos \theta r^2 \dot{\theta} \dot{\phi} + 4 \sin^2 \theta r \dot{r} \dot{\phi}. \tag{165}
\end{aligned}$$

Com as Eqs. (160) e (163) substituídas na Eq. (154), obtemos a primeira Eq. de geodésicas para o setor pura-

mente espacial do substrato cosmológico relativa à coordenada canônica  $x^1 \equiv r$ , i.e.:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial x^1} - \frac{d}{du} \left( \frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial \dot{x}^1} \right) &= \frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial r} - \frac{d}{du} \left( \frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial \dot{r}} \right) = 0 \\
\Rightarrow 2f(r)\dot{r}^2 \frac{df(r)}{dr} + 2r\dot{\theta}^2 + 2r\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta - \left[ 2f^2(r)\ddot{r} + 4f(r)\dot{r} \frac{df(r)}{du} \right] &= 0 \\
\Rightarrow 2f^2(r)\ddot{r} + 4f(r)\dot{r} \frac{df(r)}{du} - 2f(r)\dot{r}^2 \frac{df(r)}{dr} - 2r\dot{\theta}^2 - 2r\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta &= 0 \quad (\times \text{ ambos os lados por } [2f^2(r)]^{-1} \neq \infty) \\
\Rightarrow \ddot{r} + \frac{2\dot{r}}{f(r)} \frac{df(r)}{du} - \frac{1}{f(r)} \frac{df(r)}{dr} \dot{r}^2 - \frac{r}{f^2(r)} \dot{\theta}^2 - \frac{r \sin^2 \theta}{f^2(r)} \dot{\phi}^2 &= 0 \\
\Rightarrow \ddot{r} + \frac{2\dot{r}}{f(r)} \frac{df(r)}{dr} \frac{dr}{du} - \frac{1}{f(r)} \frac{df(r)}{dr} \dot{r}^2 - \frac{r}{f^2(r)} \dot{\theta}^2 - \frac{r \sin^2 \theta}{f^2(r)} \dot{\phi}^2 &= 0 \\
\Rightarrow \ddot{r} + \frac{2\dot{r}}{f(r)} \frac{df(r)}{dr} \dot{r} - \frac{1}{f(r)} \frac{df(r)}{dr} \dot{r}^2 - \frac{r}{f^2(r)} \dot{\theta}^2 - \frac{r \sin^2 \theta}{f^2(r)} \dot{\phi}^2 &= 0 \\
\therefore \ddot{r} + \frac{1}{f(r)} \frac{df(r)}{dr} \dot{r}^2 - \frac{r}{f^2(r)} \dot{\theta}^2 - \frac{r \sin^2 \theta}{f^2(r)} \dot{\phi}^2 &= 0. \tag{166}
\end{aligned}$$

Analogamente, com as Eqs. (161) e (164) substituídas na Eq. (154), obtemos a segunda Eq. de geodésicas

para o setor puramente espacial do substrato cosmológico relativa à coordenada canônica  $x^2 \equiv \theta$ , i.e.:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial x^2} - \frac{d}{du} \left( \frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial \dot{x}^2} \right) &= \frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial \theta} - \frac{d}{du} \left( \frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial \dot{\theta}} \right) = 0 \\
\Rightarrow 2 \sin \theta \cos \theta r^2 \dot{\phi}^2 - \left[ 2r^2 \ddot{\theta} + 4r\dot{r}\dot{\theta} \right] &= 0 \\
\Rightarrow 2r^2 \ddot{\theta} + 4r\dot{r}\dot{\theta} - 2 \sin \theta \cos \theta r^2 \dot{\phi}^2 &= 0 \quad (\times \text{ ambos os lados por } [2r^2]^{-1} \neq \infty) \\
\therefore \ddot{\theta} + \frac{2}{r} \dot{r}\dot{\theta} - \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 &= 0. \tag{167}
\end{aligned}$$

Nova e finalmente, com as Eqs. (162) e (165) substituídas na Eq. (154), obtemos a terceira Eq. de geodésicas para

o setor puramente espacial do substrato cosmológico relativa à coordenada canônica  $x^3 \equiv \phi$ , i.e.:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial x^3} - \frac{d}{du} \left( \frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial \dot{x}^3} \right) &= \frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial \phi} - \frac{d}{du} \left( \frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial \dot{\phi}} \right) = 0 \\
\Rightarrow 0 - \left[ 2r^2 \sin^2 \theta \ddot{\phi} + 4 \sin \theta \cos \theta r^2 \dot{\theta} \dot{\phi} + 4 \sin^2 \theta r \dot{r} \dot{\phi} \right] &= 0 \\
\Rightarrow 2r^2 \sin^2 \theta \ddot{\phi} + 4 \sin \theta \cos \theta r^2 \dot{\theta} \dot{\phi} + 4 \sin^2 \theta r \dot{r} \dot{\phi} &= 0 \quad (\times \text{ ambos os lados por } [2r^2 \sin^2 \theta]^{-1} \neq \infty) \\
\Rightarrow \ddot{\phi} + \frac{4 \sin \theta \cos \theta r^2}{2r^2 \sin^2 \theta} \dot{\theta} \dot{\phi} + \frac{4 \sin^2 \theta r}{2r^2 \sin^2 \theta} \dot{r} \dot{\phi} &= 0 \\
\therefore \ddot{\phi} + \frac{2 \cos \theta}{\sin \theta} \dot{\theta} \dot{\phi} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\phi} &= 0. \tag{168}
\end{aligned}$$

Em virtude da Eq. (134), lemos a partir da Eq. (166) as únicas componentes não nulas no índice contravariante

$a = 1$  da conexão métrica afim  $\Gamma_{bc}^a$  para o setor pura-

mente espacial do substrato cosmológico:

$$\Gamma_{11}^1 \equiv \Gamma_{rr}^r = \frac{1}{f(r)} \frac{df(r)}{dr}; \quad (169)$$

$$\Gamma_{22}^1 \equiv \Gamma_{\theta\theta}^r = -\frac{r}{f^2(r)}; \quad (170)$$

$$\Gamma_{33}^1 \equiv \Gamma_{\phi\phi}^r = -\frac{r \sin^2 \theta}{f^2(r)}. \quad (171)$$

Analogamente, a partir da Eq. (167), lemos as únicas componentes não nulas no índice contravariante  $a = 2$  da conexão métrica afim  $\Gamma_{bc}^a$  para o setor puramente espacial do substrato cosmológico:

$$\Gamma_{r\theta}^\theta \equiv \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 \equiv \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r}; \quad (172)$$

$$\Gamma_{33}^2 \equiv \Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta, \quad (173)$$

tendo em vista que a torção é supostamente nula, i.e., a conexão é simétrica e dada pela Eq. (127) aplicada ao setor puramente espacial do substrato cosmológico, onde se notam os componentes iguais que se aglutinam,  $\Gamma_{12}^2 \dot{r} \dot{\theta} + \Gamma_{21}^2 \dot{\theta} \dot{r}$ , na Eq. (167), o que não ocorre para índices covariantes iguais, pois índices covariantes iguais aparecem somente uma vez no somatório implícito na Eq. (134). Mais uma vez, agora a partir da Eq. (168), lêem-se as únicas componentes não nulas no índice contravariante  $a = 3$  da conexão métrica afim  $\Gamma_{bc}^a$  para o

setor puramente espacial do substrato cosmológico:

$$\Gamma_{\theta\phi}^\phi \equiv \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 \equiv \Gamma_{\phi\theta}^\phi = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}; \quad (174)$$

$$\Gamma_{r\phi}^\phi \equiv \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 \equiv \Gamma_{\phi r}^\phi = \frac{1}{r}, \quad (175)$$

onde, obviamente, aplicam-se, também aqui, os comentários anteriores sobre a simetria da conexão e sobre a aglutinação de termos na Eq. das geodésicas. Uma vez que a métrica é diagonal, temos, em virtude da Eq. (150), aqui aplicada ao o setor puramente espacial do substrato cosmológico, portanto tridimensional, que o 3-escalar de curvatura é dado simplesmente por:

$${}^3R = g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33}, \quad (176)$$

i.e., interessa-nos o cálculo das componentes  $R_{11}$ ,  $R_{22}$  e  $R_{33}$  do tensor de Ricci. Em virtude das Eqs. (147) e (149), temos que o tensor de Ricci é dado por:

$$\begin{aligned} R_{ab} &= R_{acb}^c \\ &= \partial_c \Gamma_{ab}^c - \partial_b \Gamma_{ac}^c + \Gamma_{ec}^c \Gamma_{ab}^e - \Gamma_{ac}^e \Gamma_{eb}^c. \end{aligned} \quad (177)$$

Portanto,  $R_{11}$  é dada por:

$$\begin{aligned} R_{11} &= \partial_c \Gamma_{11}^c - \partial_1 \Gamma_{1c}^c + \Gamma_{11}^e \Gamma_{ec}^c - \Gamma_{1c}^e \Gamma_{e1}^c \\ &= \partial_1 \Gamma_{11}^1 + \partial_2 \Gamma_{11}^2 + \partial_3 \Gamma_{11}^3 - (\partial_1 \Gamma_{11}^1 + \partial_1 \Gamma_{12}^2 + \partial_1 \Gamma_{13}^3) + \\ &+ \Gamma_{11}^1 (\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3) + \Gamma_{11}^2 (\Gamma_{21}^1 + \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{23}^3) + \Gamma_{11}^3 (\Gamma_{31}^1 + \Gamma_{32}^2 + \Gamma_{33}^3) + \\ &- (\Gamma_{11}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{13}^1 \Gamma_{11}^3 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{13}^2 \Gamma_{21}^3 + \Gamma_{11}^3 \Gamma_{31}^1 + \Gamma_{12}^3 \Gamma_{31}^2 + \Gamma_{13}^3 \Gamma_{31}^3) \\ &= \partial_r \left[ \frac{1}{f(r)} \frac{df(r)}{dr} \right] - \left[ \partial_r \left( \frac{1}{f(r)} \frac{df(r)}{dr} \right) + \partial_r \left( \frac{1}{r} \right) + \partial_r \left( \frac{1}{r} \right) \right] + \\ &+ \frac{1}{f(r)} \frac{df(r)}{dr} \left[ \frac{1}{f(r)} \frac{df(r)}{dr} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \right] - \left[ \frac{1}{f(r)} \frac{df(r)}{dr} \frac{1}{f(r)} \frac{df(r)}{dr} + \frac{1}{r} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \frac{1}{r} \right] \\ &= -2\partial_r \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{f^2(r)} \left[ \frac{df(r)}{dr} \right]^2 + \frac{2}{rf(r)} \frac{df(r)}{dr} - \frac{1}{f^2(r)} \left[ \frac{df(r)}{dr} \right]^2 - \frac{2}{r^2} \\ &= -2 \cdot (-1) r^{-2} - \frac{2}{r^2} + \frac{2}{rf(r)} \frac{df(r)}{dr} \\ &\therefore \\ R_{11} &= \frac{2}{rf(r)} \frac{df(r)}{dr}, \end{aligned} \quad (178)$$

onde as Eqs. de (169) a (175) foram utilizadas quando necessárias. Analogamente, em virtude da Eq. (177),

$R_{22}$  é dada por:

$$\begin{aligned}
R_{22} &= \partial_c \Gamma_{22}^c - \partial_2 \Gamma_{2c}^c + \Gamma_{22}^e \Gamma_{ec}^c - \Gamma_{2c}^e \Gamma_{e2}^c \\
&= \partial_1 \Gamma_{22}^1 + \partial_2 \Gamma_{22}^2 + \partial_3 \Gamma_{22}^3 - (\partial_2 \Gamma_{21}^1 + \partial_2 \Gamma_{22}^2 + \partial_2 \Gamma_{23}^3) + \\
&+ \Gamma_{22}^1 (\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3) + \Gamma_{22}^2 (\Gamma_{21}^1 + \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{23}^3) + \Gamma_{22}^3 (\Gamma_{31}^1 + \Gamma_{32}^2 + \Gamma_{33}^3) + \\
&- (\Gamma_{21}^1 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{23}^1 \Gamma_{12}^3 + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{23}^2 \Gamma_{22}^3 + \Gamma_{21}^3 \Gamma_{32}^1 + \Gamma_{22}^3 \Gamma_{32}^2 + \Gamma_{23}^3 \Gamma_{32}^3) \\
&= \partial_r \left( -\frac{r}{f^2(r)} \right) - \left[ \partial_\theta \left( \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) \right] + \left( -\frac{r}{f^2(r)} \right) \left[ \frac{1}{f(r)} \frac{df(r)}{dr} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \right] + \\
&- \left[ \left( -\frac{r}{f^2(r)} \right) \left( \frac{1}{r} \right) + \left( \frac{1}{r} \right) \left( -\frac{r}{f^2(r)} \right) + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right] \\
&= (-r) \partial_r f^{-2}(r) + f^{-2}(r) \partial_r (-r) - \left[ (\cos \theta) \partial_\theta (\sin \theta)^{-1} + (\sin \theta)^{-1} \partial_\theta (\cos \theta) \right] + \\
&+ \left( -\frac{r}{f^2(r)} \right) \left[ \frac{1}{f(r)} \frac{df(r)}{dr} + \frac{2}{r} \right] - \left[ -\frac{2}{f^2(r)} + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \right] \\
&= (-r) \cdot (-2) f^{-3}(r) \frac{df(r)}{dr} - f^{-2}(r) - \left[ (\cos \theta) \cdot (-1) \sin^{-2} \theta (\cos \theta) + (\sin \theta)^{-1} \cdot (-\sin \theta) \right] + \\
&- \frac{r}{f^3(r)} \frac{df(r)}{dr} - \frac{2}{f^2(r)} + \frac{2}{f^2(r)} - \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \\
&= \frac{2r}{f^3(r)} \frac{df(r)}{dr} - \frac{1}{f^2(r)} + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} + 1 - \frac{r}{f^3(r)} \frac{df(r)}{dr} - \frac{2}{f^2(r)} + \frac{2}{f^2(r)} - \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \\
&\therefore \\
R_{22} &= \frac{r}{f^3(r)} \frac{df(r)}{dr} + 1 - \frac{1}{f^2(r)}, \tag{179}
\end{aligned}$$

onde as Eqs. de (169) a (175) foram utilizadas quando necessárias. Finalmente, também em virtude da Eq.

(177),  $R_{33}$  é dada por:

$$\begin{aligned}
R_{33} &= \partial_c \Gamma_{33}^c - \partial_3 \Gamma_{3c}^c + \Gamma_{33}^e \Gamma_{ec}^c - \Gamma_{3c}^e \Gamma_{e3}^c \\
&= \partial_1 \Gamma_{33}^1 + \partial_2 \Gamma_{33}^2 + \partial_3 \Gamma_{33}^3 - (\partial_3 \Gamma_{31}^1 + \partial_3 \Gamma_{32}^2 + \partial_3 \Gamma_{33}^3) + \\
&+ \Gamma_{33}^1 (\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3) + \Gamma_{33}^2 (\Gamma_{21}^1 + \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{23}^3) + \Gamma_{33}^3 (\Gamma_{31}^1 + \Gamma_{32}^2 + \Gamma_{33}^3) + \\
&- (\Gamma_{31}^1 \Gamma_{13}^1 + \Gamma_{32}^2 \Gamma_{13}^2 + \Gamma_{33}^3 \Gamma_{13}^3 + \Gamma_{31}^2 \Gamma_{23}^1 + \Gamma_{32}^2 \Gamma_{23}^2 + \Gamma_{33}^3 \Gamma_{23}^3 + \Gamma_{31}^3 \Gamma_{33}^1 + \Gamma_{32}^3 \Gamma_{33}^2 + \Gamma_{33}^3 \Gamma_{33}^3) \\
&= \partial_r \left[ -\frac{r \sin^2 \theta}{f^2(r)} \right] + \partial_\theta (-\sin \theta \cos \theta) + \left[ -\frac{r \sin^2 \theta}{f^2(r)} \right] \left[ \frac{1}{f(r)} \frac{df(r)}{dr} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \right] + (-\sin \theta \cos \theta) \left( \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) + \\
&- \left\{ \left[ -\frac{r \sin^2 \theta}{f^2(r)} \right] \left( \frac{1}{r} \right) + (-\sin \theta \cos \theta) \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \left( \frac{1}{r} \right) \left[ -\frac{r \sin^2 \theta}{f^2(r)} \right] + \left( \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) (-\sin \theta \cos \theta) \right\} \\
&= (-\sin^2 \theta) \partial_r [r f^{-2}(r)] + [(-\sin \theta) \partial_\theta (\cos \theta) + (\cos \theta) \partial_\theta (-\sin \theta)] + \\
&+ \left[ -\frac{r \sin^2 \theta}{f^2(r)} \right] \left[ \frac{1}{f(r)} \frac{df(r)}{dr} + \frac{2}{r} \right] - \cos^2 \theta - \left[ -\frac{\sin^2 \theta}{f^2(r)} - \cos^2 \theta - \frac{\sin^2 \theta}{f^2(r)} - \cos^2 \theta \right] \\
&= (-\sin^2 \theta) \{ r \partial_r [f^{-2}(r)] + [f^{-2}(r)] \partial_r r \} + (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) - \frac{r \sin^2 \theta}{f^3(r)} \frac{df(r)}{dr} - \frac{2 \sin^2 \theta}{f^2(r)} - \cos^2 \theta + \\
&+ \frac{\sin^2 \theta}{f^2(r)} + \cos^2 \theta + \frac{\sin^2 \theta}{f^2(r)} + \cos^2 \theta \\
&= (-\sin^2 \theta) \left[ r \cdot (-2) f^{-3}(r) \frac{df(r)}{dr} + f^{-2}(r) \right] + \sin^2 \theta - \frac{r \sin^2 \theta}{f^3(r)} \frac{df(r)}{dr} - \frac{\sin^2 \theta}{f^2(r)} + \frac{\sin^2 \theta}{f^2(r)} \\
&= \frac{2r \sin^2 \theta}{f^3(r)} \frac{df(r)}{dr} - \frac{\sin^2 \theta}{f^2(r)} + \sin^2 \theta - \frac{r \sin^2 \theta}{f^3(r)} \frac{df(r)}{dr} - \frac{\sin^2 \theta}{f^2(r)} + \frac{\sin^2 \theta}{f^2(r)} \\
&\therefore \\
R_{33} &= \frac{r \sin^2 \theta}{f^3(r)} \frac{df(r)}{dr} - \frac{\sin^2 \theta}{f^2(r)} + \sin^2 \theta, \tag{180}
\end{aligned}$$

onde as Eqs. de (169) a (175) foram utilizadas quando necessárias. Para o tensor métrico diagonal dado na Eq. (153), temos a seguinte inversão:

$$\begin{aligned}
g^{ac} g_{cb} &= g^{a1} g_{1b} + g^{a2} g_{2b} + g^{a3} g_{3b} = \delta_b^a \Rightarrow \\
g^{ac} g_{ca} &= g^{a1} g_{1a} + g^{a2} g_{2a} + g^{a3} g_{3a} = \delta_a^a = 1,
\end{aligned}$$

pois  $a$  e  $b$  são índices livres, onde se utilizou a Eq. (91); i.e., os elementos não nulos do tensor métrico diagonal inverso, para o setor puramente espacial do substrato cosmológico, são dados por:

$$\begin{aligned}
g^{aa} &= \frac{1}{g_{aa}}, \quad \forall a \in \{1, 2, 3\} \quad \therefore \\
g^{aa} &= \text{diag} \left[ \frac{1}{f^2(r)}, \frac{1}{r^2}, \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \right]. \tag{181}
\end{aligned}$$

---

Portanto, em virtude das Eqs. (176), (178), (179), (180) e (181), o 3-escalar de curvatura para o setor puramente espacial do substrato cosmológico,  ${}^3R$  (o escalar de Ricci tridimensional para o setor puramente espacial do substrato cosmológico), é dado por:

$$\begin{aligned}
{}^3R &= \frac{1}{f^2(r)} \frac{2}{rf(r)} \frac{df(r)}{dr} + \frac{1}{r^2} \left[ \frac{r}{f^3(r)} \frac{df(r)}{dr} + 1 - \frac{1}{f^2(r)} \right] + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left[ \frac{r \sin^2 \theta}{f^3(r)} \frac{df(r)}{dr} - \frac{\sin^2 \theta}{f^2(r)} + \sin^2 \theta \right] \\
&= \frac{2}{rf^3(r)} \frac{df(r)}{dr} + \frac{1}{rf^3(r)} \frac{df(r)}{dr} + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2 f^2(r)} + \frac{1}{rf^3(r)} \frac{df(r)}{dr} - \frac{1}{r^2 f^2(r)} + \frac{1}{r^2} \\
&\vdots \\
{}^3R &= \frac{4}{rf^3(r)} \frac{df(r)}{dr} + \frac{2}{r^2} - \frac{2}{r^2 f^2(r)}. \tag{182}
\end{aligned}$$

Conforme enfatizado, em vista do princípio cosmológico, esse escalar de curvatura deve ser constante, viz., conforme obtido anteriormente, deve ser dado pela Eq. (151). Portanto, pelas Eqs. (151) e (182),  $f(r)$  deve ser tal que:

$$\frac{4}{rf^3(r)} \frac{df(r)}{dr} + \frac{2}{r^2} - \frac{2}{r^2 f^2(r)} = 6K. \tag{183}$$

Temos uma Eq. diferencial [Eq. (183)] ordinária de primeira ordem cuja integração não parece tão trivial. Porém, note-se que:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{1}{f^2(r)} \right) \right] &= \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( 1 - \frac{1}{f^2(r)} \right) + \left( 1 - \frac{1}{f^2(r)} \right) \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \right) \\
&= \frac{1}{r} \left[ (-1) \cdot (-2) f^{-3}(r) \frac{df(r)}{dr} \right] + \left( 1 - \frac{1}{f^2(r)} \right) \cdot (-1) r^{-2} \\
&= \frac{2}{rf^3(r)} \frac{df(r)}{dr} - \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2 f^2(r)} \quad \therefore \\
2 \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{1}{f^2(r)} \right) \right] &= \frac{4}{rf^3(r)} \frac{df(r)}{dr} - \frac{2}{r^2} + \frac{2}{r^2 f^2(r)} \\
&= \frac{4}{rf^3(r)} \frac{df(r)}{dr} + 0 - \frac{2}{r^2} + 0 + \frac{2}{r^2 f^2(r)} \\
&= \frac{4}{rf^3(r)} \frac{df(r)}{dr} + \left( \frac{4}{r^2} - \frac{4}{r^2} \right) - \frac{2}{r^2} + \left( \frac{4}{r^2 f^2(r)} - \frac{4}{r^2 f^2(r)} \right) + \frac{2}{r^2 f^2(r)} \\
&= \left[ \frac{4}{rf^3(r)} \frac{df(r)}{dr} + \frac{2}{r^2} - \frac{2}{r^2 f^2(r)} \right] + \frac{4}{r^2 f^2(r)} - \frac{4}{r^2} \\
&= \underbrace{\left[ \frac{4}{rf^3(r)} \frac{df(r)}{dr} + \frac{2}{r^2} - \frac{2}{r^2 f^2(r)} \right]}_{\text{Eq. (183)}} + \frac{4}{r^2} \left( \frac{1}{f^2(r)} - 1 \right) \\
&= 6K + \frac{4}{r^2} \left( \frac{1}{f^2(r)} - 1 \right) \\
&\vdots \\
\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{1}{f^2(r)} \right) \right] &= 3K + \frac{2}{r^2} \left( \frac{1}{f^2(r)} - 1 \right). \tag{184}
\end{aligned}$$

Nossa tarefa atual passa a ser a de resolver a Eq. (184) para a função desconhecida  $f(r)$ . Para tal, defina-se a

função:

$$y(r) \equiv \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{1}{f^2(r)} \right), \tag{185}$$

donde a Eq. (184) torna-se:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dr} &= 3K + \frac{2}{r} \left[ -\frac{1}{r} \left( 1 - \frac{1}{f^2(r)} \right) \right] \stackrel{\text{Eq. (185)}}{\dots} \\ \frac{dy}{dr} &= 3K - \frac{2y}{r}. \end{aligned} \quad (186)$$

A Eq. (186) ainda não se encontra numa forma separável. Para isso, devemos encontrar um fator de integração, i.e., escrevendo essa Eq. (186) na forma:

$$dy = \left( 3K - \frac{2y}{r} \right) dr \quad \therefore \quad \left( \frac{2y}{r} - 3K \right) dr + dy = 0, \quad (187)$$

multipliquemos ambos os lados da Eq. (187) por um fator de integração  $\lambda(y, r)$ , viz.:

$$\lambda(y, r) \left( \frac{2y}{r} - 3K \right) dr + \lambda(y, r) dy = 0, \quad (188)$$

tal que essa Eq. (188) seja um diferencial total de uma função  $C(y, r)$  constante, i.e.:

$$dC(y, r) = \lambda(y, r) \left( \frac{2y}{r} - 3K \right) dr + \lambda(y, r) dy = 0. \quad (189)$$

Mas, em sendo a Eq. (189) um diferencial total, temos:

$$dC(y, r) = \frac{\partial C(y, r)}{\partial r} dr + \frac{\partial C(y, r)}{\partial y} dy = 0, \quad (190)$$

e também:

$$\frac{\partial^2 C(y, r)}{\partial y \partial r} = \frac{\partial^2 C(y, r)}{\partial r \partial y}. \quad (191)$$

Pelas Eqs. (189) e (190):

$$\frac{\partial C(y, r)}{\partial r} = \lambda(y, r) \left( \frac{2y}{r} - 3K \right); \quad (192)$$

$$\frac{\partial C(y, r)}{\partial y} = \lambda(y, r). \quad (193)$$

Aplicando a condição dada pela Eq. (191) para um diferencial total, utilizando as Eqs. (192) e (193), temos que  $\lambda(y, r)$  deve satisfazer:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 C(y, r)}{\partial y \partial r} &= \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial C(y, r)}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \lambda(y, r) \left( \frac{2y}{r} - 3K \right) \right] = \frac{\partial}{\partial r} \lambda(y, r) = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial C(y, r)}{\partial y} = \frac{\partial^2 C(y, r)}{\partial r \partial y} \\ &\therefore \\ \frac{\partial \lambda}{\partial r} &= \lambda \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{2y}{r} - 3K \right) + \left( \frac{2y}{r} - 3K \right) \frac{\partial \lambda}{\partial y} \\ &= \lambda \cdot \frac{2}{r} + \left( \frac{2y}{r} - 3K \right) \frac{\partial \lambda}{\partial y}. \end{aligned} \quad (194)$$

Pela Eq. (194), vemos que podemos escolher um fator de integração que dependa somente de  $r$ , i.e.,  $\lambda = \lambda(r)$ , uma vez que se anulará, sob tal escolha, o segundo termo no lado direito dessa Eq. (194), sendo, também, coerente com o lado esquerdo dessa Eq. (194) que, então, dependerá somente de  $r$ . Assim, com  $\lambda = \lambda(r)$ , temos que a

Eq. (194) torna-se:

$$\frac{d\lambda(r)}{dr} = \frac{2\lambda}{r}, \quad (195)$$

cuja integração é trivial:

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{dr}{r} \Rightarrow \int \frac{d\lambda}{\lambda} = \int \frac{dr}{r} \Rightarrow \frac{1}{2} \ln |\lambda| = \ln |r| + \text{constante}. \quad (196)$$

Como estamos interessados em qualquer fator de integração da família de fatores de integração dada pela Eq.

(196), façamos nula a constante de integração. Disso

decorre que:

$$\begin{aligned} \ln |\lambda|^{1/2} - \ln |r| &= \ln \frac{\sqrt{|\lambda|}}{|r|} = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{|\lambda|}}{|r|} = 1 \Rightarrow \\ \frac{\sqrt{|\lambda|} - |r|}{|r|} &= 0 \Rightarrow \sqrt{|\lambda|} = |r| \Rightarrow |\lambda| = |r|^2 \Rightarrow \\ \sqrt{\lambda^2} &= \left(\sqrt{r^2}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{\lambda^2} = r^2 \Rightarrow \lambda^2 = r^4 \quad \therefore \\ \lambda &= \pm r^2. \end{aligned} \quad (197)$$

Mais uma vez, interessa-nos qualquer fator de integração. Assim, tomemos:

$$\lambda(r) = r^2. \quad (198)$$

Substituindo o fator de integração dado pela Eq. (198) na Eq. (192), temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C(y, r)}{\partial r} &= 2yr - 3Kr^2 \Rightarrow \\ \partial C(y, r) &= (2yr - 3Kr^2) \partial r \Rightarrow \\ \int \partial C(y, r) &= \int (2yr - 3Kr^2) \partial r \Rightarrow \\ C(y, r) &= yr^2 - Kr^3 + h(y), \end{aligned} \quad (199)$$

onde  $h(y)$  é uma função exclusiva de  $y$ . Substituindo  $C(y, r)$  dado pela Eq. (199) na Eq. (193), bem como  $\lambda(r)$  dado pela Eq. (198), determinamos  $h(y)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} [yr^2 - Kr^3 + h(y)] &= r^2 \Rightarrow \frac{dh(y)}{dy} = 0 \quad \therefore \\ h(y) &= h = \text{constante}. \end{aligned} \quad (200)$$

A substituição de  $h = \text{constante}$ , dado pela Eq. (200), na Eq. (199) provê a solução geral da Eq. (186), i.e., a solução geral dessa Eq. diferencial. Todavia, como  $C(y, r)$  também é constante, temos que  $h$  pode ser absorvido por  $C(y, r)$ . Chamando  $C(y, r) - h$  simplesmente de  $C$ , uma constante, temos, então, a solução geral da Eq. (186):

$$yr^2 - Kr^3 = C. \quad (201)$$

Nosso problema de determinação de  $f^2(r)$  está completamente resolvido, pois, em virtude da Eq. (185):

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{f^2(r)}\right) r^2 - Kr^3 &= C \Rightarrow \\ r \left(1 - \frac{1}{f^2(r)}\right) &= C + Kr^3 \\ \left(1 - \frac{1}{f^2(r)}\right) &= \frac{C}{r} + Kr^2 \Rightarrow \frac{1}{f^2(r)} = 1 - \frac{C}{r} - Kr^2. \end{aligned} \quad (202)$$

Porém, como não há singularidade alguma nas origens tomadas sobre o setor puramente espacial do substrato

cosmológico, i.e., em  $r = 0$ , para qualquer origem, temos que a constante de integração  $C$  na Eq. (202) deve ser nula. Assim, em virtude da Eq. (202), retirada a restrição para a origem, i.e.,  $C = 0$ , temos que a função  $f^2(r)$  está completamente determinada:

$$f^2(r) = \frac{1}{1 - Kr^2}. \quad (203)$$

Portanto, o elemento de linha do setor puramente espacial do substrato cosmológico, dado pela Eq. (4), está completamente determinado:

$$d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (204)$$

Temos que determinar o tensor métrico completo para o substrato cosmológico 4-dimensional, o elemento de linha completo, o qual é dado pela Eq. (90), enfatizando, agora, o retorno ao uso dos índices gregos, os quais tomam todos os valores para o espaço-tempo cosmológico (substrato cosmológico), i.e., tomando os valores 0, 1, 2, 3. Reescrevemos a Eq. (90):

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\alpha\beta}(x^\gamma) dx^\alpha dx^\beta \\ &= g_{00} (dx^0)^2 + g_{0a} dx^0 dx^a + g_{a0} dx^a dx^0 + g_{ab} dx^a dx^b \\ &= g_{00} (dx^0)^2 + 2g_{0a} dx^0 dx^a + g_{ab} dx^a dx^b \\ &= g_{00} dt^2 + 2g_{0a} dt dx^a + g_{ab} dx^a dx^b, \end{aligned} \quad (205)$$

enfatizando que o tensor métrico  $g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(x^\gamma)$  é avaliado em cada ponto da variedade, i.e., dependendo tão somente da localização  $(x^\gamma)$  na variedade onde é avaliado; escrevemos a Eq. (205) separando as componentes puramente espaciais (índices latinos tomando os valores 1, 2, 3) no elemento de linha, pois o requisito de isotropia acabará por restringir a forma final da Eq. (205);  $x^0 \equiv t$  foi definida como a coordenada temporal cosmológica, a qual consideraremos em seguida. Note-se que o requisito de isotropia espacial é incompatível com  $g_{0a} \neq 0$ , uma vez que uma inversão de eixo espacial alteraria a assinatura da métrica, viz., num dado instante cosmológico, o princípio cosmológico requer que não se verifiquem direções espaciais geometricamente privilegiadas, sendo que a métrica completa estaria inserindo um efeito de anisotropia relacionada ao setor puramente espacial, incompatível com a pureza homogênea e isotrópica suposta para esse setor. Em outras palavras os observadores fundamentais, os pontos do substrato cosmológico, devem descrever curvas 4-dimensionais que são ortogonais ao setor puramente espacial do substrato cosmológico, curvas essas que, pela hipótese de Weyl posta no início de nossa discussão, devem pertencer a uma congruência de geodésicas do tipo tempo, então, uma congruência de geodésicas do tipo tempo ortogonais ao setor puramente espacial. Por essas considerações, a Eq. (205) reduz-se à forma:

$$ds^2 = g_{00} dt^2 + g_{ab} dx^a dx^b. \quad (206)$$

Ademais, conforme discutimos de início, os observadores fundamentais, os próprios pontos do substrato cosmológico, possuem coordenadas espaciais fixas, donde, um intervalo fundamental para um desses pontos, em virtude da Eq. (206), lê-se:

$$ds^2 = g_{00}dt^2, \quad (207)$$

pois a coordenada puramente espacial  $x^a$  que rotula um dado ponto do substrato cosmológico permanece constante, para qualquer ponto do substrato cosmológico, ainda que cada ponto tenha o seu próprio rótulo, o que, obviamente, o distingue de outro ponto distinto, mas com  $dx^a = 0, \forall a \in \{1, 2, 3\}$ , qualquer que seja o ponto do substrato cosmológico. Tais observadores fundamentais com suas coordenadas espaciais fixas nesses pontos do substrato cosmológico, i.e., os próprios pontos do substrato cosmológico, são os *observadores comóveis*. É à congruência de geodésicas desses observadores comóveis que se refere a hipótese de Weyl. Em virtude do princípio cosmológico, num dado instante, cada ponto do substrato cosmológico, portanto pertencente ao setor puramente espacial do substrato cosmológico, ou, o que é o mesmo, a uma *hipersuperfície de simultaneidade do substrato cosmológico*, deve ser totalmente equivalente do ponto de vista físico, i.e., os observadores nesses pontos dessa hipersuperfície instantânea observam, descrevem, as propriedades instantâneas do universo exatamente da mesma maneira. Portanto, o instante cosmológico deve ser o mesmo para qualquer um desses pontos nessa hipersuperfície, obviamente condizente com a propriedade de simultaneidade para tal hipersuperfície. Assim, a hipersuperfície inteira é rotulada por um parâmetro, denominado *instante cosmológico da hipersuperfície*. Um conjunto de tais hipersuperfícies continuamente ordenado de forma crescente é rotulado por um parâmetro contínuo crescentemente ordenado denominado *tempo cosmológico*. Portanto, como a evolução 4-dimensional de um ponto em tal hipersuperfície dar-se-á pela passagem subsequentemente contínua à outra hipersuperfície, esse ponto descreverá uma geodésica ortogonal a essa hipersuperfície cuja variação paramétrica ao longo dessa geodésica é dada por  $ds = dt$ , onde  $t$  é o tempo cosmológico e, em sendo esse o tempo a ser cosmológicamente definido na Eq. (206), em seu lado direito, temos, aplicando, particularmente, essa Eq. (206) à geodésica específica que descreve de um observador comóvel, i.e., usando a Eq. (207), temos que ( $ds = dt$  somente para observadores comóveis, ratifique-se):

$$\begin{aligned} dt^2 &= g_{00}dt^2 \quad \therefore \\ g_{00} &= 1. \end{aligned} \quad (208)$$

Deixemos claro que  $t$  sempre será o tempo cosmológico no lado direito da Eq. (206), interpretado, por força de definição paramétrica para as geodésicas comóveis pela rotulação das hipersuperfícies de simultaneidade

do substrato cosmológico, como sendo o tempo medido pelos observadores comóveis, i.e., é o parâmetro que parametriza as geodésicas que são as trajetórias cosmológicas dos observadores comóveis, mas que não será o mesmo parâmetro de uma geodésica outra que não seja a trajetória de um observador comóvel, i.e., em outras palavras,  $ds$  no lado esquerdo da Eq. (206) somente será  $dt$ , a variação elementar de tempo cosmológico, quando o comprimento de arco  $ds$  ao longo de uma geodésica for o de uma geodésica que descreve a trajetória de um observador comóvel, de um ponto do substrato cosmológico que evolui segundo a dinâmica desse substrato. E.g., um fóton que se propague pelo universo terá  $ds = 0 \neq dt \neq 0$ , uma vez que fótons satisfazem a Eq. (129). Assim, o elemento de linha dado pela Eq. (206) torna-se:

$$ds^2 = dt^2 + g_{ab}dx^a dx^b. \quad (209)$$

Ademais, impõe-se a unicidade para o parâmetro  $t$  como sendo um parâmetro afim único para as geodésicas comóveis, i.e.:

$$\begin{aligned} d &= 0; \\ c &= 1; \\ u &= t; \\ &\vdots \\ s(u) &= u = t, \end{aligned} \quad (210)$$

na Eq. (123), i.e., os pontos do substrato cosmológico descrevem trajetórias 4-dimensionais que são geodésicas métricas afins parametrizadas pelo parâmetro afim único dado pela Eq. (210), o tempo cosmológico, geodésicas essas que formam um conjunto de geodésicas, i.e., uma congruência de geodésicas ortogonais às hipersuperfícies de simultaneidade a cada instante  $t$ , hipersuperfícies essas rotuladas por esse parâmetro afim único  $t$ , sendo que tais geodésicas focalizam em um ponto remoto no passado cosmológico e possivelmente num ponto futuro, pela hipótese de Weyl. O sistema de coordenadas de cobertura para o substrato cosmológico é então o dos observadores comóveis. Assim, a cada instante  $t$ , temos uma hipersuperfície de simultaneidade em que cada ponto dessa hipersuperfície possui 4 coordenadas:  $t$ , mais as três coordenadas espaciais do ponto nessa hipersuperfície, as quais, em coordenadas esféricas para o setor puramente espacial, são dadas por  $(r, \theta, \phi)$ ; cada ponto de uma hipersuperfície de simultaneidade é dado pela intersecção entre a geodésica comóvel à qual pertence o ponto e a hipersuperfície em si. Tal sistema  $S$  de coordenadas é dito *sistema de coordenadas gaussianas normais*, pois se define tal sistema pela condição para o tensor métrico:

$$\begin{aligned} g_{00} &\stackrel{S}{=} 1; \\ g_{0a} &\stackrel{S}{=} 0. \end{aligned} \quad (211)$$

Tal sistema de coordenadas separa o setor puramente espacial no elemento de linha do termo puramente

cronológico  $t$ , conforme discutimos há pouco. Nesse sentido, explica-se a denominação *normal*, sendo essa referência feita à ortogonalidade das geodésicas comóveis em relação ao setor puramente espacial, i.e., em relação às hipersuperfícies de simultaneidade. Em outras palavras, como bem enfatizado e indicado anteriormente, homogeneidade e isotropia são propriedades espaciais, relacionadas ao setor puramente espacial do substrato cosmológico. A evolução temporal, particularmente, uma expansão, passa a estar conforme, em concordância, com essas duas propriedades puramente espaciais que logicamente emergem do princípio cosmológico em termos de coordenadas gaussianas normais. Claramente, em outras palavras, a expansão (ou contração) ocorre no setor espacial do substrato cosmológico. Assim, o que tínhamos

chamado de setor puramente espacial do substrato cosmológico, cujo elemento de linha é dado pela Eq. (204), passa a ser dado por:

$$d\sigma^2 \rightarrow S^2(t) d\sigma^2, \quad (212)$$

diferindo o setor espacial (não mais puramente espacial, simplesmente espacial), a cada instante, do setor anterior, por um *fator de escala*  $S(t)$  que o expande (ou contrai) à medida que o universo evolui. Portanto, o elemento de linha completo para o substrato cosmológico, pelas Eqs. (204), (209) e (212), é o que se conhece por *elemento de linha de Robertson-Walker*, sendo, asseverando, assim, que, matematicamente, a métrica do espaço-tempo cosmológico tem a forma:

$$ds^2 = dt^2 - S^2(t) d\sigma^2 = dt^2 - S^2(t) \left( \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right), \quad (213)$$

onde  $(+, -, -, -)$  é a assinatura adotada para a nossa variedade Riemanniana, para o substrato cosmológico. Note-se que o 3-escalar de curvatura para o setor espacial não é constante, a despeito do 3-escalar de curvatura do setor *puramente* espacial que obtivemos anteriormente, este dado pela Eq. (182) e igualado à constante  $6K$  na Eq. (183). Ocorre que, para o setor espacial com o elemento de linha dado pela Eq. (212), o cálculo para o 3-escalar de curvatura para esse setor é exatamente idêntico ao que fizemos anteriormente, sendo que a única diferença é que partiríamos da métrica:

$$g_{ab} = \text{diag} [S^2(t)f^2(r), S^2(t)r^2, S^2(t)r^2 \sin^2 \theta], \quad (214)$$

em vez da Eq. (153). Como o cálculo que lá fizemos referiu-se a um instante fixo, i.e., somente para o que denominamos setor puramente espacial, toda a derivação que fizemos seria idêntica até a aplicação final da Eq. (176), uma vez que o fator comum  $S^2(t)$  desaparecería quando das Eqs. para as geodésicas do substrato espacial, Eqs. (166), (167) e (168). Portanto, as componentes da conexão  $\Gamma_{bc}^a$  obtidas dessas Eqs. seriam as mesmas, levando exatamente às mesmas componentes para o tensor de Ricci dadas pelas Eqs. (178), (179) e (180). Todavia, quando da aplicação da Eq. (176), o tensor métrico inverso dar-se-ia por:

$$g^{ab} = \text{diag} \left[ \frac{1}{S^2(t)f^2(r)}, \frac{1}{S^2(t)r^2}, \frac{1}{S^2(t)r^2 \sin^2 \theta} \right], \quad (215)$$

em vez da Eq. (181). Assim, a marcha que vai da Eq. (181) até a Eq. (182), viz., a aplicação da Eq. (176), levaria, para o setor espacial, ao seguinte 3-escalar de

curvatura:

$${}^3R = \frac{4}{S^2(t)r f^3(r)} \frac{df(r)}{dr} + \frac{2}{S^2(t)r^2} - \frac{2}{S^2(t)r^2 f^2(r)}, \quad (216)$$

em vez da Eq. (182), donde a Eq. (183) seria idêntica, viz.:

$$\frac{4}{S^2(t)r f^3(r)} \frac{df(r)}{dr} + \frac{2}{S^2(t)r^2} - \frac{2}{S^2(t)r^2 f^2(r)} = \frac{6K}{S^2(t)}. \quad (217)$$

Note-se que, efetivamente, uma expansão tal que  $S^2(t) \rightarrow \infty$  tende a tornar o 3-escalar de curvatura  ${}^3R(t)$  dado pela Eq. anterior, i.e.:

$${}^3R(t) = \frac{6K}{S^2(t)} = 6K(t), \quad (218)$$

com  $K(t) \equiv K/S^2(t)$ , nulo, i.e., tende a tornar o universo localmente plano em seu setor espacial, o que pode ser referido como um crescimento da planeza local espacial sob tal comportamento expansivo para o universo. Porém, enfatize-se que  $K$  no elemento de linha dado pela Eq. (213), em seu lado direito no setor espacial, é constante, definido na Eq. (2). Assim, em sendo  $K \neq 0$ , o setor puramente espacial não é puramente plano, ainda que o setor espacial, em virtude de expansão, possa ser cada vez mais localmente plano. Antes de adentrarmos no cálculo das Eqs. diferenciais cosmológicas propriamente ditas através da aplicação do método das geodésicas que desenvolvemos anteriormente, agora a ser aplicado ao substrato 4-dimensional, i.e., ao tensor métrico que define o elemento de linha completo dado pela Eq. (213), em conjunção com as Eqs. de campo da relatividade geral, é

conveniente que normalizemos a constante de curvatura  $K$ ;  $K$  é denominada *curvatura gaussiana*. Definimos uma nova coordenada espacial  $\bar{r}$ , tal que (supondo  $K \neq 0$ ):

$$r = \frac{\bar{r}}{\sqrt{|K|}} \frac{R_0}{R_0} = \frac{\bar{r}}{\sqrt{|K|}}, \quad (219)$$

onde ficará claro mais adiante o porquê de termos escrito um fator  $(R_0/R_0) = 1$ , o que não altera em nada a Eq. (219), sendo que  $R_0$  é um comprimento arbitrário. Assim, substituindo  $r$  dado pela Eq. (219) na Eq. (213), temos:

$$\begin{aligned} ds^2 &= dt^2 - S^2(t) \left\{ \left[ d \left( \frac{\bar{r}}{\sqrt{|K|}} \right) \right]^2 \left[ 1 - K \left( \frac{\bar{r}}{\sqrt{|K|}} \right)^2 \right]^{-1} + \left( \frac{\bar{r}}{\sqrt{|K|}} \right)^2 d\theta^2 + \left( \frac{\bar{r}}{\sqrt{|K|}} \right)^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right\} \\ &= dt^2 - S^2(t) \left\{ \left[ \frac{1}{\sqrt{|K|}} d\bar{r} \right]^2 \left[ 1 - \frac{K}{|K|} \bar{r}^2 \right]^{-1} + \frac{\bar{r}^2}{|K|} d\theta^2 + \frac{\bar{r}^2}{|K|} \sin^2 \theta d\phi^2 \right\} \\ &= dt^2 - S^2(t) \left[ \frac{1}{|K|} \frac{d\bar{r}^2}{1 - (K/|K|) \bar{r}^2} + \frac{1}{|K|} \bar{r}^2 d\theta^2 + \frac{1}{|K|} \bar{r}^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right] \\ &= dt^2 - \frac{S^2(t)}{|K|} \left[ \frac{d\bar{r}^2}{1 - (K/|K|) \bar{r}^2} + \bar{r}^2 d\theta^2 + \bar{r}^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right]. \end{aligned} \quad (220)$$

Definam-se, a *curvatura gaussiana normalizada*  $k$ :

$$k \equiv \frac{K}{|K|} \text{ se } K \neq 0; \quad (221)$$

$$k \equiv 0 \text{ se } K = 0, \quad (222)$$

sendo que a curvatura gaussiana normalizada assumirá um dos valores:

$$k = -1, \quad (223)$$

$$k = 0 \text{ ou} \quad (224)$$

$$k = +1, \quad (225)$$

caso seja o setor espacial de topologia aberta, plana ou fechada, respectivamente, e o fator de escala reescalado:

$$a(t) \equiv \frac{S(t)}{\sqrt{|K|}}, \text{ se } K \neq 0; \quad (226)$$

$$a(t) \equiv S(t), \text{ se } K = 0, \quad (227)$$

donde, pelas Eqs. (220), (221) e (226), a Eq. (213) é reescrita na forma canônica para  $K \neq 0$ :

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right), \quad (228)$$

onde renomeamos  $\bar{r}$  novamente, para  $r$ . Notemos que a aplicação das definições dadas pelas Eqs. (222) e (227) à Eq. (228) leva à Eq. (213), dado que  $K = 0$  nesse caso. Assim, a forma para o elemento de linha de Robertson-Walker dada pela Eq. (228) continuará válida qualquer que seja a geometria para o setor espacial, i.e., seja ela

aberta [Eq. (223)], plana [Eq. (224)] ou fechada [Eq. (225)]. A Eq. (228), simplesmente elemento de linha de Robertson-Walker, será posta sob uma forma física ao final, donde as unidades físicas ficarão claras, i.e., os significados, de  $s$ , de  $a(t)$ , bem como o de  $r$ . Por enquanto, vamos utilizar o elemento de linha na forma dada pela Eq. (228) sem nos atermos à significação física relacionada a unidades, para que não precisemos ficar carregando constantes ao longo dos cálculos que faremos, donde, digamos, que, por enquanto, vamos trabalhar com o elemento de linha dado pela Eq. (228) em sua forma matematicamente natural, ou ainda, em unidades naturais.

Determinemos as Eqs. diferenciais cosmológicas. Primeiramente, apliquemos o método das geodésicas, o que foi aplicado anteriormente ao setor puramente espacial, agora aplicado à métrica cosmológica completa dada pela Eq. (228), para que obtenhamos as componentes da conexão métrica afim  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$  para o substrato cosmológico. A partir da Eq. (228), com  $\alpha, \beta \in \{0, 1, 2, 3\}$ :

$$x^0 \equiv t, \quad x^1 \equiv r, \quad x^2 \equiv \theta \text{ e } x^3 \equiv \phi,$$

onde o significado físico dessas coordenadas ficará inteiramente determinado ao final, conforme dissemos, quando voltarmos a considerar essas coordenadas do ponto de vista da métrica original, em termos físicos, que leva à Eq. (228); índices gregos variarão de 0 a 3, e índices latinos de 1 a 3. A função de Lagrange, ou simplesmente lagrangeana, será dada, em virtude da Eq. (131) e (132), por:

$$\mathcal{K}(\dot{x}^\gamma, x^\gamma; u) = \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}(x^\gamma)\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta = \frac{1}{2}g_{00}\dot{x}^0\dot{x}^0 + \frac{1}{2}g_{11}\dot{x}^1\dot{x}^1 + \frac{1}{2}g_{22}\dot{x}^2\dot{x}^2 + \frac{1}{2}g_{33}\dot{x}^3\dot{x}^3, \quad (229)$$

pois  $g_{\alpha\beta} = 0$  para  $\alpha \neq \beta$  no presente caso, conforme facilmente se verifica a partir do elemento de linha dado pela Eq. (228). Note-se que estamos aqui tomando  $\mathcal{K}$  como função de Lagrange, o que, evidentemente, levará às mesmas Eqs. para as geodésicas no substrato cosmológico, uma vez que podemos multiplicar ambos os lados da Eq. (131) pelo fator  $1/2$ , Eq. essa que se torna a Eq. de Euler-Lagrange para a função de Lagrange  $(1/2)\mathcal{L}^2 \equiv \mathcal{K} = (1/2)g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta$ , em virtude da Eq. (132). Salientemos que os pontos denotam  $d/du$ , sendo  $u$  um parâmetro geodésico afim. Procederemos o cálculo para geodésicas quaisquer que sejam observadas pelos observadores comóveis, i.e., segundo o tensor métrico dado pela Eq. (228), donde  $t$  não será necessariamente o parâmetro afim dessas geodésicas quaisquer, sendo  $t$ , conforme discutido há pouco, o parâmetro geodésico afim das geodésicas que são as trajetórias 4-dimensionais dos observadores comóveis em si, i.e., dos pontos do substrato cosmológico. Depois, particularizaremos as nossas geodésicas quaisquer obtidas para que sejam as trajetórias 4-dimensionais dos observadores comóveis, i.e., estaremos interessados na dinâmica dos pontos do sub-

strato cosmológico em si, viz., na dinâmica do universo, mas isso somente será feito mais adiante. Assim,  $t$  é apenas uma das quatro coordenadas espaço-temporais dos pontos que descrevem as geodésicas quaisquer que obteremos, cujo significado físico é o de parametrizar os observadores comóveis em si, sendo  $u$  um parâmetro afim que estará parametrizando uma geodésica qualquer a satisfazer a Eq. geral das geodésicas, agora no contexto do tensor métrico dado pela Eq. (228), elemento de linha de Robertson-Walker, sendo que, particularmente, pela Eq. (210), acabará  $u$  por coincidir com  $t$  no caso em que as geodésicas sejam as trajetórias 4-dimensionais dos pontos do substrato cosmológico. Enfatizem-se esses comentários, e perdoe-se a prolixidade, para que não se estranhe o fato de que  $dt/du = \dot{t}$  não seja necessariamente igual a 1, exceto para os observadores comóveis, para os pontos do substrato cosmológico em si. Dadas essas considerações, continuemos. A partir da Eq. (228), obtêm-se as componentes não nulas do tensor métrico segundo as coordenadas comóveis para os pontos da variedade por construção, as componentes diagonais do tensor métrico:

$$g_{\alpha\beta} = \text{diag} \left[ +1, -a^2(t)(1 - kr^2)^{-1}, -a^2(t)r^2, -a^2(t)r^2 \sin^2 \theta \right].$$

Assim, a partir das componentes acima para o tensor métrico, a lagrangeana, Eq. (229), torna-se:

$$\mathcal{K}(\dot{x}^\gamma, x^\gamma; u) = \frac{1}{2}\dot{t}^2 - \frac{1}{2}a^2(t)(1 - kr^2)^{-1}\dot{r}^2 - \frac{1}{2}a^2(t)r^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}a^2(t)r^2\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta. \quad (230)$$

As Eqs. de Euler-Lagrange são dadas por:

$$\frac{d}{du} \left( \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{x}^\gamma} \right) - \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial x^\gamma} = 0, \quad \forall \gamma \in \{0, 1, 2, 3\}. \quad (231)$$

A partir da Eq. (230), calculam-se as necessárias diferenciações requeridas pelas Eqs. de Euler-Lagrange, Eq. (231). Primeiramente, para  $\partial \mathcal{K} / \partial \dot{t}$  e para  $\partial \mathcal{K} / \partial t$ , temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{t}} &= \frac{\partial}{\partial \dot{t}} \left[ \frac{1}{2} \dot{t}^2 - \frac{1}{2} a^2(t) (1 - kr^2)^{-1} \dot{r}^2 - \frac{1}{2} a^2(t) r^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} a^2(t) r^2 \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \right] = \frac{1}{2} 2\dot{t} = \dot{t}; \\
\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{2} \dot{t}^2 - \frac{1}{2} a^2(t) (1 - kr^2)^{-1} \dot{r}^2 - \frac{1}{2} a^2(t) r^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} a^2(t) r^2 \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \right] \\
&= -\frac{1}{2} (1 - kr^2)^{-1} \dot{r}^2 \frac{\partial}{\partial t} a^2(t) - \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}^2 \frac{\partial}{\partial t} a^2(t) - \frac{1}{2} r^2 (\sin^2 \theta) \dot{\phi}^2 \frac{\partial}{\partial t} a^2(t) \\
&= -\frac{1}{2} (1 - kr^2)^{-1} \dot{r}^2 \cdot 2a(t) \frac{\partial a(t)}{\partial t} - \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}^2 \cdot 2a(t) \frac{\partial a(t)}{\partial t} - \frac{1}{2} r^2 (\sin^2 \theta) \dot{\phi}^2 \cdot 2a(t) \frac{\partial a(t)}{\partial t} \\
&= -aa' \dot{r}^2 (1 - kr^2)^{-1} - aa' r^2 \dot{\theta}^2 - aa' r^2 \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta, \text{ onde } a' = a'(t) = \frac{da(t)}{dt}.
\end{aligned}$$


---

Agora para  $\partial \mathcal{K} / \partial \dot{r}$  e para  $\partial \mathcal{K} / \partial r$ , temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{r}} &= \frac{\partial}{\partial \dot{r}} \left[ \frac{1}{2} \dot{t}^2 - \frac{1}{2} a^2(t) (1 - kr^2)^{-1} \dot{r}^2 - \frac{1}{2} a^2(t) r^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} a^2(t) r^2 \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \right] \\
&= -\frac{1}{2} a^2(t) (1 - kr^2)^{-1} \frac{\partial}{\partial \dot{r}} \dot{r}^2 = -\frac{1}{2} a^2(t) (1 - kr^2)^{-1} \cdot 2\dot{r} \\
&= -\dot{r} a^2(t) (1 - kr^2)^{-1}; \\
\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{2} \dot{t}^2 - \frac{1}{2} a^2(t) (1 - kr^2)^{-1} \dot{r}^2 - \frac{1}{2} a^2(t) r^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} a^2(t) r^2 \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \right] \\
&= -\frac{1}{2} a^2(t) \dot{r}^2 \frac{\partial}{\partial r} (1 - kr^2)^{-1} - \frac{1}{2} a^2(t) \dot{\theta}^2 \frac{\partial}{\partial r} r^2 - \frac{1}{2} a^2(t) (\sin^2 \theta) \dot{\phi}^2 \frac{\partial}{\partial r} r^2 \\
&= -\frac{1}{2} a^2(t) \dot{r}^2 \cdot (-1) (1 - kr^2)^{-2} \frac{\partial}{\partial r} (1 - kr^2) - \frac{1}{2} a^2(t) \dot{\theta}^2 \cdot 2r - \frac{1}{2} a^2(t) (\sin^2 \theta) \dot{\phi}^2 \cdot 2r \\
&= -\frac{1}{2} a^2(t) \dot{r}^2 \cdot (-1) (1 - kr^2)^{-2} (-k) \cdot 2r - \frac{1}{2} a^2(t) \dot{\theta}^2 \cdot 2r - \frac{1}{2} a^2(t) (\sin^2 \theta) \dot{\phi}^2 \cdot 2r \\
&= -kra^2(t) \dot{r}^2 (1 - kr^2)^{-2} - ra^2(t) \dot{\theta}^2 - ra^2(t) (\sin^2 \theta) \dot{\phi}^2.
\end{aligned}$$


---

Ainda, para  $\partial \mathcal{K} / \partial \dot{\theta}$  e para  $\partial \mathcal{K} / \partial \theta$ , temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{\theta}} &= \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} \left[ \frac{1}{2} \dot{t}^2 - \frac{1}{2} a^2(t) (1 - kr^2)^{-1} \dot{r}^2 - \frac{1}{2} a^2(t) r^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} a^2(t) r^2 \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \right] \\
&= -\frac{1}{2} a^2(t) r^2 \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} \dot{\theta}^2 = -\frac{1}{2} a^2(t) r^2 \cdot 2\dot{\theta} \\
&= -r^2 \dot{\theta} a^2(t); \\
\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{2} \dot{t}^2 - \frac{1}{2} a^2(t) (1 - kr^2)^{-1} \dot{r}^2 - \frac{1}{2} a^2(t) r^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} a^2(t) r^2 \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \right] \\
&= -\frac{1}{2} a^2(t) r^2 \dot{\phi}^2 \frac{\partial}{\partial \theta} \sin^2 \theta = -\frac{1}{2} a^2(t) r^2 \dot{\phi}^2 \cdot 2 (\sin \theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \\
&= -\frac{1}{2} a^2(t) r^2 \dot{\phi}^2 \cdot 2 (\sin \theta) \cos \theta \\
&= -r^2 a^2(t) \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta.
\end{aligned}$$

Finalmente, para  $\partial\mathcal{K}/\partial\dot{\phi}$  e para  $\partial\mathcal{K}/\partial\phi$ , temos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial\dot{\phi}} &= \frac{\partial}{\partial\dot{\phi}} \left[ \frac{1}{2}\dot{t}^2 - \frac{1}{2}a^2(t)(1-kr^2)^{-1}\dot{r}^2 - \frac{1}{2}a^2(t)r^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}a^2(t)r^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta \right] \\ &= -\frac{1}{2}a^2(t)r^2(\sin^2\theta)\frac{\partial}{\partial\dot{\phi}}\dot{\phi}^2 = -\frac{1}{2}a^2(t)r^2(\sin^2\theta) \cdot 2\dot{\phi} \\ &= -r^2a^2(t)\dot{\phi}\sin^2\theta; \\ \frac{\partial\mathcal{K}}{\partial\phi} &= \frac{\partial}{\partial\phi} \left[ \frac{1}{2}\dot{t}^2 - \frac{1}{2}a^2(t)(1-kr^2)^{-1}\dot{r}^2 - \frac{1}{2}a^2(t)r^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}a^2(t)r^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta \right] \\ &= 0.\end{aligned}$$

Temos quatro equações diferenciais a partir das Eqs. de Euler-Lagrange, Eq. (231):

$$\frac{d}{du} \left( \frac{\partial\mathcal{K}}{\partial\dot{t}} \right) - \frac{\partial\mathcal{K}}{\partial t} = 0; \quad (232)$$

$$\frac{d}{du} \left( \frac{\partial\mathcal{K}}{\partial\dot{r}} \right) - \frac{\partial\mathcal{K}}{\partial r} = 0; \quad (233)$$

$$\frac{d}{du} \left( \frac{\partial\mathcal{K}}{\partial\dot{\theta}} \right) - \frac{\partial\mathcal{K}}{\partial\theta} = 0; \quad (234)$$

$$\frac{d}{du} \left( \frac{\partial\mathcal{K}}{\partial\dot{\phi}} \right) - \frac{\partial\mathcal{K}}{\partial\phi} = 0, \quad (235)$$

condições necessárias para ação estacionária, dado que as Eqs. de Euler-Lagrange seguem do princípio da ação estacionária:

$$\delta \int_{\partial\mathcal{C}} \sqrt{g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta} du = 0,$$

conforme discutido anteriormente em nossas considerações sobre geodésicas, exceto para geodésicas do tipo nula, quando o argumento falha em virtude da nulidade do elemento de linha. Contudo, conforme vimos,

a equação para as geodésicas será a mesma, com o lado direito nulo, independentemente do tipo de geodésica quando tomamos uma parametrização afim, i.e., quando usamos um parâmetro afim que anule  $f(u)$  no lado direito da Eq. (58) para as geodésicas, escolhida a conexão dada pela Eq. (127). Esses parâmetros diferirão entre si, conforme anteriormente discutido, em função do tipo de geodésica, ainda que sejam parâmetros do tipo afim [ $u \mid f(u) = 0$ , na Eq. (58)] em qualquer caso em que eles assim sejam escolhidos. Lembremos que podemos tomar a equação de Euler-Lagrange, Eq. (231), com  $\mathcal{K}$  definida pela Eq. (229), justamente pelo fato de estarmos utilizando uma parametrização afim,  $u$  sendo um parâmetro afim. Construamos as Eqs. de geodésicas no substrato cosmológico para que possamos extrair dessas Eqs. as componentes da conexão afim  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ , pois precisaremos da conexão afim na solução das Eqs. de campo da relatividade geral  $G_{\alpha\beta} - \Lambda g_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}$ . A partir da Eq. (232) e das Eqs. previamente obtidas para  $\partial\mathcal{K}/\partial\dot{t}$  e para  $\partial\mathcal{K}/\partial t$ , têm-se:

$$\begin{aligned}\frac{d}{du}\dot{t} - \left[ -a(t)\frac{da(t)}{dt}\dot{r}^2(1-kr^2)^{-1} - a(t)\frac{da(t)}{dt}r^2\dot{\theta}^2 - a(t)\frac{da(t)}{dt}r^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta \right] &= 0 \quad \therefore \\ \ddot{t} + aa'\dot{r}^2(1-kr^2)^{-1} + aa'r^2\dot{\theta}^2 + aa'r^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta &= 0.\end{aligned} \quad (236)$$

A partir da Eq. (233) e das Eqs. previamente obtidas para  $\partial\mathcal{K}/\partial\dot{r}$  e para  $\partial\mathcal{K}/\partial r$ , têm-se:

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{du} \left[ -\dot{r}a^2(t) (1 - kr^2)^{-1} \right] - \left[ -kra^2(t)\dot{r}^2 (1 - kr^2)^{-2} - ra^2(t)\dot{\theta}^2 - ra^2(t)\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \right] = 0 \Rightarrow \\
-\dot{r} \frac{d}{du} \left[ a^2(t) (1 - kr^2)^{-1} \right] + a^2(t) (1 - kr^2)^{-1} \frac{d}{du} (-\dot{r}) + kra^2(t)\dot{r}^2 (1 - kr^2)^{-2} + ra^2(t)\dot{\theta}^2 + ra^2(t)\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta &= 0 \Rightarrow \\
-\dot{r} \left[ a^2(t) \frac{d}{du} (1 - kr^2)^{-1} + (1 - kr^2)^{-1} \frac{d}{du} a^2(t) \right] - \ddot{r}a^2(t) (1 - kr^2)^{-1} + & \\
+ kra^2(t)\dot{r}^2 (1 - kr^2)^{-2} + ra^2(t)\dot{\theta}^2 + ra^2(t)\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta &= 0 \Rightarrow \\
-\dot{r} \left[ a^2(t) (-1) (1 - kr^2)^{-2} \frac{d}{du} (1 - kr^2) + (1 - kr^2)^{-1} \left( 2a(t) \frac{da(t)}{du} \right) \right] - \ddot{r}a^2(t) (1 - kr^2)^{-1} + & \\
+ kra^2(t)\dot{r}^2 (1 - kr^2)^{-2} + ra^2(t)\dot{\theta}^2 + ra^2(t)\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta &= 0 \Rightarrow \\
-\dot{r} \left[ a^2(t) (-1) (1 - kr^2)^{-2} (-k \cdot 2r\dot{r}) + (1 - kr^2)^{-1} \left( 2a(t) \frac{da(t)}{dt} \frac{dt}{du} \right) \right] - \ddot{r}a^2(t) (1 - kr^2)^{-1} + & \\
+ kra^2(t)\dot{r}^2 (1 - kr^2)^{-2} + ra^2(t)\dot{\theta}^2 + ra^2(t)\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta &= 0 \Rightarrow \\
-\dot{r} \left[ 2kr\dot{r}a^2(t) (1 - kr^2)^{-2} + 2a(t)a'(t)\dot{t} (1 - kr^2)^{-1} \right] - \ddot{r}a^2(t) (1 - kr^2)^{-1} + kra^2(t)\dot{r}^2 (1 - kr^2)^{-2} + & \\
+ ra^2(t)\dot{\theta}^2 + ra^2(t)\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta &= 0 \Rightarrow \\
-2kr\dot{r}^2a^2(t) (1 - kr^2)^{-2} - 2\dot{r}a(t)a'(t)\dot{t} (1 - kr^2)^{-1} - \ddot{r}a^2(t) (1 - kr^2)^{-1} + kra^2(t)\dot{r}^2 (1 - kr^2)^{-2} + & \\
+ ra^2(t)\dot{\theta}^2 + ra^2(t)\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta &= 0 \Rightarrow \\
-kr\dot{r}^2a^2(t) (1 - kr^2)^{-2} - 2\dot{r}a(t)a'(t)\dot{t} (1 - kr^2)^{-1} - \ddot{r}a^2(t) (1 - kr^2)^{-1} + ra^2(t)\dot{\theta}^2 + ra^2(t)\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta &= 0 \\
&\vdots \\
-\ddot{r}a^2(t) (1 - kr^2)^{-1} - 2\dot{t}ra(t)a'(t) (1 - kr^2)^{-1} - kr\dot{r}^2a^2(t) (1 - kr^2)^{-2} + r\dot{\theta}^2a^2(t) + r\dot{\phi}^2a^2(t) \sin^2 \theta &= 0.
\end{aligned} \tag{237}$$

Ainda, a partir da Eq. (234) e das Eqs. previamente obtidas para  $\partial\mathcal{K}/\partial\dot{\theta}$  e para  $\partial\mathcal{K}/\partial\theta$ , têm-se:

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{du} \left[ -r^2\dot{\theta}a^2(t) \right] - \left[ -r^2a^2(t)\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta \right] = 0 \Rightarrow \\
-r^2 \frac{d}{du} \left[ \dot{\theta}a^2(t) \right] + \dot{\theta}a^2(t) \frac{d}{du} (-r^2) + r^2a^2(t)\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta &= 0 \Rightarrow \\
-r^2 \left[ \dot{\theta} \frac{d}{du} a^2(t) + a^2(t)\dot{\theta} \right] + \dot{\theta}a^2(t) (-2r\dot{r}) + r^2a^2(t)\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta &= 0 \Rightarrow \\
-r^2 \left[ \dot{\theta} \cdot 2a(t) \frac{da(t)}{du} + a^2(t)\ddot{\theta} \right] - 2r\dot{r}\dot{\theta}a^2(t) + r^2a^2(t)\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta &= 0 \Rightarrow \\
-r^2 \left[ \dot{\theta} \cdot 2a(t)a'(t)\dot{t} + a^2(t)\ddot{\theta} \right] - 2r\dot{r}\dot{\theta}a^2(t) + r^2a^2(t)\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta &= 0 \quad \therefore \\
-2a(t)a'(t)r^2\dot{\theta}\dot{t} - r^2a^2(t)\ddot{\theta} - 2r\dot{r}\dot{\theta}a^2(t) + r^2a^2(t)\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta &= 0.
\end{aligned} \tag{238}$$

E, finalmente, a partir da Eq. (235) e das Eqs. previamente obtidas para  $\partial\mathcal{K}/\partial\dot{\phi}$  e para  $\partial\mathcal{K}/\partial\phi$ , têm-se:

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{du} \left[ -r^2 a^2(t) \dot{\phi} \sin^2 \theta \right] - 0 = -r^2 \frac{d}{du} \left[ a^2(t) \dot{\phi} \sin^2 \theta \right] + a^2(t) \dot{\phi} (\sin^2 \theta) \frac{d}{du} (-r^2) = 0 \Rightarrow \\
& -r^2 \left[ a^2(t) \frac{d}{du} (\dot{\phi} \sin^2 \theta) + \dot{\phi} \sin^2 \theta \frac{d}{du} a^2(t) \right] + a^2(t) \dot{\phi} (\sin^2 \theta) (-2r\dot{r}) = 0 \Rightarrow \\
& -r^2 \left\{ a^2(t) \left[ \dot{\phi} \frac{d}{du} (\sin^2 \theta) + (\sin^2 \theta) \frac{d}{du} (\dot{\phi}) \right] + \dot{\phi} (\sin^2 \theta) \cdot 2a(t) \frac{da(t)}{du} \right\} - 2r\dot{r} \dot{\phi} a^2(t) \sin^2 \theta = 0 \Rightarrow \\
& -r^2 \left\{ a^2(t) \left[ \dot{\phi} \cdot 2(\sin \theta) \frac{d}{du} \sin \theta + (\sin^2 \theta) \ddot{\phi} \right] + \dot{\phi} (\sin^2 \theta) \cdot 2a(t) \frac{da(t)}{dt} \frac{dt}{du} \right\} - 2r\dot{r} \dot{\phi} a^2(t) \sin^2 \theta = 0 \Rightarrow \\
& -r^2 \left\{ a^2(t) \left[ \dot{\phi} \cdot 2(\sin \theta) \cdot (\cos \theta) \dot{\theta} + \ddot{\phi} \sin^2 \theta \right] + \dot{\phi} (\sin^2 \theta) \cdot 2a(t) a'(t) \dot{t} \right\} - 2r\dot{r} \dot{\phi} a^2(t) \sin^2 \theta = 0 \therefore \\
& -2r^2 a^2(t) \dot{\phi} \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta - 2a(t) a'(t) r^2 \dot{\phi} \sin^2 \theta - r^2 a^2(t) \ddot{\phi} \sin^2 \theta - 2r\dot{r} \dot{\phi} a^2(t) \sin^2 \theta = 0. \quad (239)
\end{aligned}$$

As Eqs. (236), (237), (238) e (239) são as Eqs. das geodésicas, trajetórias 4-dimensionais no substrato cosmológico. Essas Eqs. estão na forma dada pela Eq. (117), com o lado direito nulo em virtude de ser afim o parâmetro  $u$ , viz., as Eqs. (236), (237), (238) e (239) não estão contraídas pela inversa da métrica:

$$g^{\alpha\beta} = \text{diag} \left[ +1, -\frac{1-kr^2}{a^2(t)}, -\frac{1}{a^2(t)r^2}, -\frac{1}{a^2(t)r^2 \sin^2 \theta} \right].$$

Assim, multiplicando ambos os lados das Eqs. (236), (237), (238) e (239) pelos respectivos componentes do tensor métrico inverso acima, obtemos, em virtude da forma dada para a Eq. das geodésicas, Eq. (134), as componentes não nulas da conexão métrica afim  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$  [procedimento análogo ao que fora adotado para a obtenção das Eqs. (169), (170), (171), (172), (173), (174) e (175), lembrando da aglutinação de termos cruzados distintos na soma implícita na Eq. (134)]. Pela Eq. (236), as únicas componentes não nulas no índice contravariante  $\alpha = 0$  [ $x^0 \equiv t$ ] da conexão métrica afim  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ :

$$\Gamma_{11}^0 \equiv \Gamma_{rr}^t = a(t) a'(t) (1-kr^2)^{-1}; \quad (240)$$

$$\Gamma_{22}^0 \equiv \Gamma_{\theta\theta}^t = a(t) a'(t) r^2; \quad (241)$$

$$\Gamma_{33}^0 \equiv \Gamma_{\phi\phi}^t = a(t) a'(t) r^2 \sin^2 \theta. \quad (242)$$

Pela Eq. (237), as únicas componentes não nulas no índice contravariante  $\alpha = 1$  [ $x^1 \equiv r$ ] da conexão métrica

afim  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ :

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 & \equiv \Gamma_{rr}^r = \frac{-ka^2(t)r(1-kr^2)^{-2}}{-a^2(t)(1-kr^2)^{-1}} \\
& = kr(1-kr^2)^{-1}; \quad (243)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{22}^1 & \equiv \Gamma_{\theta\theta}^r = \frac{ra^2(t)}{-a^2(t)(1-kr^2)^{-1}} \\
& = -r(1-kr^2); \quad (244)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{tr}^r & \equiv \Gamma_{01}^1 = \Gamma_{10}^1 \equiv \Gamma_{rt}^r \\
& = \frac{-a(t)a'(t)(1-kr^2)^{-1}}{-a^2(t)(1-kr^2)^{-1}} \\
& = \frac{a'(t)}{a(t)}; \quad (245)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{33}^1 & \equiv \Gamma_{\phi\phi}^r = \frac{ra^2(t)\sin^2 \theta}{-a^2(t)(1-kr^2)^{-1}} \\
& = -r(1-kr^2)\sin^2 \theta. \quad (246)
\end{aligned}$$

Pela Eq. (238), as únicas componentes não nulas no índice contravariante  $\alpha = 2$  [ $x^2 \equiv \theta$ ] da conexão métrica afim  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ :

$$\begin{aligned}
\Gamma_{t\theta}^\theta & \equiv \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{20}^2 \equiv \Gamma_{\theta t}^\theta = \frac{-a(t)a'(t)r^2}{-r^2 a^2(t)} \\
& = \frac{a'(t)}{a(t)}; \quad (247)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{r\theta}^\theta & \equiv \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 \equiv \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{-ra^2(t)}{-r^2 a^2(t)} \\
& = \frac{1}{r}; \quad (248)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{33}^2 & \equiv \Gamma_{\phi\phi}^\theta = \frac{r^2 a^2(t) \sin \theta \cos \theta}{-r^2 a^2(t)} \\
& = -\sin \theta \cos \theta. \quad (249)
\end{aligned}$$

Pela Eq. (239), as únicas componentes não nulas no índice contravariante  $\alpha = 3$  [ $x^3 \equiv \phi$ ] da conexão métrica

afim  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ :

$$\begin{aligned}\Gamma_{t\phi}^\phi &\equiv \Gamma_{03}^3 = \Gamma_{30}^3 \equiv \Gamma_{\phi t}^\phi = \frac{-a(t)a'(t)r^2 \sin^2 \theta}{-r^2 a^2(t) \sin^2 \theta} \\ &= \frac{a'(t)}{a(t)};\end{aligned}\quad (250)$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{r\phi}^\phi &\equiv \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 \equiv \Gamma_{\phi r}^\phi = \frac{-ra^2(t) \sin^2 \theta}{-r^2 a^2(t) \sin^2 \theta} \\ &= \frac{1}{r};\end{aligned}\quad (251)$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{\theta\phi}^\phi &\equiv \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 \equiv \Gamma_{\phi\theta}^\phi = \frac{-r^2 a^2(t) \sin \theta \cos \theta}{-r^2 a^2(t) \sin^2 \theta} \\ &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta}.\end{aligned}\quad (252)$$

Conforme ventilamos anteriormente, a dedução dos símbolos de Christoffel de segundo tipo  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ , i.e., a conexão métrica afim, Eqs. (120) e (127), que acabamos de obter, torna-se necessária em virtude da necessidade que temos de obter o tensor de Ricci, uma vez que o tensor de Ricci é usado nas Eqs. de campo de Einstein, sendo o tensor de Ricci dependente dos símbolos de Christoffel do segundo tipo [dependente da conexão afim em virtude da dependência do tensor de Riemman nessa conexão, mas estamos sob a validade de ausência de torção, situação essa em que a conexão afim é a conexão métrica dada pelos símbolos de Christoffel de segundo tipo]. De fato, as Eqs. de campo de Einstein são obti-

das a partir do tensor de Einstein  $G_{\alpha\beta}$ , viz., as Eqs. de campo de Einstein são dadas por:

$$G_{\alpha\beta} - \Lambda g_{\alpha\beta} = \bar{\kappa} T_{\alpha\beta}, \quad (253)$$

onde  $\Lambda$  é a constante cosmológica,  $\bar{\kappa}$  uma constante de acoplamento à teoria Newtoniana para a gravitação, e  $T_{\alpha\beta}$  é o tensor de energia e momento, sobre o qual delinearemos considerações mais adiante. O tensor de Einstein,  $G_{\alpha\beta}$ , é definido em termos do tensor de Ricci  $R_{\alpha\beta}$ :

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R, \quad (254)$$

onde  $R$  é o escalar de Ricci:

$$R = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}. \quad (255)$$

Lembremos que já utilizamos o escalar de Ricci e o tensor de Ricci anteriormente no contexto do setor puramente espacial do substrato cosmológico, Eqs. (150) e (149) respectivamente. Assim, o nosso programa atual é o seguinte:

- O tensor  $R_{\alpha\beta}$  é obtido a partir do tensor de curvatura de Riemman, pela Eq. (149):

$$R_{\alpha\beta} = R_{\alpha\gamma\beta}^\gamma, \quad (256)$$

onde o tensor de curvatura de Riemman é dado pela Eq. (147):

$$R_{\beta\gamma\delta}^\alpha = \partial_\gamma \Gamma_{\beta\delta}^\alpha - \partial_\delta \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha + \Gamma_{\beta\delta}^\epsilon \Gamma_{\epsilon\gamma}^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma}^\epsilon \Gamma_{\epsilon\delta}^\alpha, \quad (257)$$

Donde o tensor de Ricci e o escalar de curvatura,

escalar de Ricci, são, respectivamente, dados por:

$$R_{\alpha\beta} = \partial_\gamma \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma - \partial_\beta \Gamma_{\alpha\gamma}^\gamma + \Gamma_{\alpha\beta}^\epsilon \Gamma_{\epsilon\gamma}^\gamma - \Gamma_{\alpha\gamma}^\epsilon \Gamma_{\epsilon\beta}^\gamma \quad (258)$$

$$R = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} \partial_\gamma \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma - g^{\alpha\beta} \partial_\beta \Gamma_{\alpha\gamma}^\gamma + g^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^\epsilon \Gamma_{\epsilon\gamma}^\gamma - g^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\gamma}^\epsilon \Gamma_{\epsilon\beta}^\gamma. \quad (259)$$

- De início, discutimos o porquê de a hipótese de Weyl levar à representação do substrato cosmológico em termos de um fluido perfeito 4-dimensional. Aliás, a necessidade desse substrato advém da reflexão que se fizera em relação à maneira de sem compatibilizar a teoria da relatividade geral a um sistema como o universo inteiro. Substrato de matéria/energia é o cerne da

conexão intrínseca entre a geometria do espaço-tempo e o que a produz, i.e., matéria/energia. Isso é prontamente observado na Eq. (253), uma vez que o lado esquerdo dessa Eq. é eminentemente geométrico, contém informação sobre a geometria do espaço-tempo considerado, sendo que o lado direito contém informação sobre matéria/energia em termos do tensor de energia e momento. Bom,

antes de definirmos, em termos do tensor de energia e momento, o que é um fluido perfeito, recorreremos à forma mais simples de fluido, como protótipo, um fluido muito rarefeito sem interações, descrito tão somente pelo campo de 4-velocidades; tal fluido, que ainda não é o fluido perfeito que queremos, tem apenas componente descritivo cinemático, simplesmente descrito em termos de seu campo de 4-velocidades e, uma vez que o tensor de energia momento é de posto covariante 2, i.e., de valência (0, 2), temos que a forma mais simples de construir um tensor de tal tipo, a partir simplesmente de sua característica intrínseca, sua densidade própria, e do campo de 4-velocidades é:

$$\begin{aligned} T^{\alpha\beta} &= \rho_0 u^\alpha u^\beta = \rho_0 \frac{dx^\alpha}{du} \frac{dx^\beta}{du} \\ &= \rho_0 \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta, \end{aligned} \quad (260)$$

onde  $u^\alpha = \dot{x}^\alpha$  é a 4-velocidade de um elemento infinitesimal desse protótipo de fluido rarefeito. Para que façamos uma extensão desse fluido rarefeito para um fluido perfeito, como não há interações nesse fluido rarefeito, e, uma vez que um fluido perfeito seja descrito por seu campo de pressão, por sua densidade própria e por seu campo de 4-velocidades, o que é uma construção natural, uma vez que não há efeitos viscosos num fluido perfeito, devemos esperar que um fluido perfeito reduza-se ao nosso protótipo de fluido rarefeito não interagente no limite em que  $p(x^\gamma) \rightarrow 0$ , i.e., no limite em que se anula o campo de pressão no fluido perfeito, donde construímos:

$$T^{\alpha\beta} = \rho_0 u^\alpha u^\beta + p W^{\alpha\beta}, \quad (261)$$

onde  $W^{\alpha\beta}$  é um campo tensorial simétrico a ser determinado. Note-se que estamos fazendo a construção mais simples, com as dependências mais simples nesses componentes de construção para o tensor de energia e momento desse fluido perfeito, esperando dependência linear na pressão. Ademais, o tensor de energia e momento  $T^{\alpha\beta}$  deve realmente ser simétrico, pois isso decorre da Eq. de Einstein, viz., das Eqs. (253) e (254), uma vez que o tensor de Ricci é simétrico. A simetria do tensor de Ricci é verificada em virtude da simetria do tensor baixado de Riemman pela métrica, e a simetria desse tensor baixado de Riemann, uma vez que a simetria é uma propriedade tensorial, é verificada de maneira simples pela utilização de um sistema de coordenadas geodésico, i.e., um sistema de coordenadas em que se anule a conexão afim

num dado ponto da variedade, sendo que sempre é possível definir num ponto da variedade um sistema de coordenadas em que se anule a conexão afim nesse ponto, tal sistema denominado *sistema de coordenadas geodésico*, cuja demonstração é extremamente trivial. O tensor simétrico  $W^{\alpha\beta}$  deve ser construído em termos dos elementos contravariantes de posto 2 associados ao fluido, sendo que os únicos elementos desse tipo são  $u^\alpha u^\beta$ , i.e., o tensor posto 2 contravariante construído a partir das 4-velocidades, e o tensor métrico  $g^{\alpha\beta}$  [no caso, o tensor métrico inverso]. Assim, adotando um princípio de simplicidade, escrevemos essa dependência de  $W^{\alpha\beta}$  nesses tensores,  $u^\alpha u^\beta$  e  $g^{\alpha\beta}$ :

$$W^{\alpha\beta} = a u^\alpha u^\beta + b g^{\alpha\beta}. \quad (262)$$

Exigindo o acoplamento à relatividade restrita, i.e., pela aplicação do critério de conservação:

$$\partial_\alpha T^{\alpha\beta} = 0, \quad (263)$$

e pela exigência de que se reduza à Eq. da continuidade e à Eq. de Navier-Stokes na ausência de forças externas, temos que, necessariamente:

$$a = 1; \quad (264)$$

$$b = -1. \quad (265)$$

Assim, o tensor de energia e momento para um fluido perfeito será dado por:

$$T^{\alpha\beta} = (\rho_0 + p) u^\alpha u^\beta - p g^{\alpha\beta}.$$

Todavia, note-se que a densidade própria será a própria densidade  $\rho$  no caso cosmológico, uma vez que os observadores fundamentais comóveis estão em repouso em relação aos elementos de substrato cosmológico, i.e., em outras palavras, não há observador externo no caso cosmológico, pois os observadores comóveis fundamentais têm a mesma dinâmica que o substrato cosmológico, dado que esses observadores são os próprios pontos do substrato cosmológico donde a Eq. anterior torna-se:

$$T^{\alpha\beta} = (\rho + p) u^\alpha u^\beta - p g^{\alpha\beta}. \quad (266)$$

Com esse programa, temos todos os elementos para determinar as Eqs. de campo de Einstein para o substrato cosmológico. No entanto, baixemos primeiramente os índices contravariantes do tensor de energia e momento pela métrica:

$$\begin{aligned}
g_{\delta\beta}g_{\gamma\alpha}T^{\alpha\beta} &= (\rho + p)g_{\delta\beta}g_{\gamma\alpha}u^\alpha u^\beta - pg_{\delta\beta}g_{\gamma\alpha}g^{\alpha\beta} \Rightarrow \\
g_{\delta\beta}T_\gamma^\beta &= (\rho + p)g_{\delta\beta}u_\gamma u^\beta - pg_{\delta\beta}\delta_\gamma^\beta \Rightarrow \\
T_{\gamma\delta} &= (\rho + p)u_\gamma u_\delta - pg_{\delta\gamma},
\end{aligned}$$

ou simplesmente:

$$T_{\alpha\beta} = (\rho + p)u_\alpha u_\beta - pg_{\alpha\beta}. \quad (267)$$

Calcularemos agora o tensor de Ricci a partir da Eq. (258). Coletando as componentes da conexão métrica afim, os símbolos de Christoffel de segundo tipo, dadas pelas Eqs. de (240) até (252), trocando agora a linha pelo ponto na derivação em relação à coordenada  $t$  sobre o fator de escala  $a(t)$ , uma vez que as derivadas no tensor de curvatura de Riemann são em função das coordenadas em si, i.e., não há derivações em função do parâmetro geodésico afim  $u$  como nas Eqs. de Euler-Lagrange, donde adotaremos os pontos sobre uma função como sendo exclusivamente a derivada total em relação à coordenada  $t$  [salientemos que ainda não especificamos as geodésicas como sendo as trajetórias 4-dimensionais dos observadores comóveis, viz., dos pontos do substrato cosmológico, o que faremos mais adiante; agora, vamos obter os objetos do lado esquerdo das Eqs. de campo de Einstein, Eq. (253), de um modo geral, sendo que depois particularizaremos para o caso das geodésicas comóveis quando igualarmos o lado esquerdo das Eqs. de campo ao tensor de energia e momento para substrato cosmológico dado pela Eq. (267) com os elementos de fluido possuindo as 4-velocidades dos pontos do substrato cosmológico, viz., dos observadores comóveis]:

$$\Gamma_{11}^0 \equiv \Gamma_{rr}^t = a(t)\dot{a}(t)(1 - kr^2)^{-1}; \quad (268)$$

$$\Gamma_{22}^0 \equiv \Gamma_{\theta\theta}^t = a(t)\dot{a}(t)r^2; \quad (269)$$

$$\Gamma_{33}^0 \equiv \Gamma_{\phi\phi}^t = a(t)\dot{a}(t)r^2 \sin^2 \theta. \quad (270)$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 &\equiv \Gamma_{rr}^r = \frac{-ka^2(t)r(1 - kr^2)^{-2}}{-a^2(t)(1 - kr^2)^{-1}} \\
&= kr(1 - kr^2)^{-1}; \quad (271)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{22}^1 &\equiv \Gamma_{\theta\theta}^r = \frac{ra^2(t)}{-a^2(t)(1 - kr^2)^{-1}} \\
&= -r(1 - kr^2); \quad (272)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{tr}^r &\equiv \Gamma_{01}^1 = \Gamma_{10}^1 \equiv \Gamma_{rt}^r \\
&= \frac{-a(t)\dot{a}(t)(1 - kr^2)^{-1}}{-a^2(t)(1 - kr^2)^{-1}} \\
&= \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}; \quad (273)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{33}^1 &\equiv \Gamma_{\phi\phi}^r = \frac{ra^2(t)\sin^2 \theta}{-a^2(t)(1 - kr^2)^{-1}} \\
&= -r(1 - kr^2)\sin^2 \theta. \quad (274)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{t\theta}^\theta &\equiv \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{20}^2 \equiv \Gamma_{\theta t}^\theta = \frac{-a(t)\dot{a}(t)r^2}{-r^2a^2(t)} \\
&= \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}; \quad (275)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{r\theta}^\theta &\equiv \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 \equiv \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{-ra^2(t)}{-r^2a^2(t)} \\
&= \frac{1}{r}; \quad (276)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{33}^2 &\equiv \Gamma_{\phi\phi}^\theta = \frac{r^2a^2(t)\sin \theta \cos \theta}{-r^2a^2(t)} \\
&= -\sin \theta \cos \theta. \quad (277)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{t\phi}^\phi &\equiv \Gamma_{03}^3 = \Gamma_{30}^3 \equiv \Gamma_{\phi t}^\phi = \frac{-a(t)\dot{a}(t)r^2 \sin^2 \theta}{-r^2a^2(t)\sin^2 \theta} \\
&= \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}; \quad (278)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{r\phi}^\phi &\equiv \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 \equiv \Gamma_{\phi r}^\phi = \frac{-ra^2(t)\sin^2 \theta}{-r^2a^2(t)\sin^2 \theta} \\
&= \frac{1}{r}; \quad (279)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\theta\phi}^\phi &\equiv \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 \equiv \Gamma_{\phi\theta}^\phi = \frac{-r^2a^2(t)\sin \theta \cos \theta}{-r^2a^2(t)\sin^2 \theta} \\
&= \frac{\cos \theta}{\sin \theta}. \quad (280)
\end{aligned}$$

A partir da Eq. (258), temos:

$$\begin{aligned}
R_{00} &= \partial_\gamma \Gamma_{00}^\gamma - \partial_0 \Gamma_{0\gamma}^\gamma + \Gamma_{00}^\epsilon \Gamma_{\epsilon\gamma}^\gamma - \Gamma_{0\gamma}^\epsilon \Gamma_{\epsilon 0}^\gamma \\
&= -\partial_0 (\Gamma_{01}^1 + \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{03}^3) + \\
&\quad - (\Gamma_{00}^\epsilon \Gamma_{\epsilon 0}^0 + \Gamma_{01}^\epsilon \Gamma_{\epsilon 0}^1 + \Gamma_{02}^\epsilon \Gamma_{\epsilon 0}^2 + \Gamma_{03}^\epsilon \Gamma_{\epsilon 0}^3) \\
&= -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} + \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} + \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right) + \\
&\quad - (\Gamma_{01}^1 \Gamma_{10}^1 + \Gamma_{02}^2 \Gamma_{20}^2 + \Gamma_{03}^3 \Gamma_{30}^3) \\
&= -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{3\dot{a}(t)}{a(t)} \right) - \left( \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} + \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} + \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} \right) \\
&= -3 \left[ \dot{a}(t) \cdot (-1) a^{-2}(t) \dot{a}(t) + \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} \right] - \frac{3\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} \\
&= \frac{3\ddot{a}(t)}{a^2(t)} - \frac{3\ddot{a}(t)}{a(t)} - \frac{3\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} \\
&= -3 \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} \\
&\quad \vdots \\
R_{00} &= -3 \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)}. \quad (281)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{01} &= \partial_\gamma \Gamma_{01}^\gamma - \partial_1 \Gamma_{0\gamma}^\gamma + \Gamma_{01}^\epsilon \Gamma_{\epsilon\gamma}^\gamma - \Gamma_{0\gamma}^\epsilon \Gamma_{\epsilon 1}^\gamma \\
&= \partial_1 \Gamma_{01}^1 - \partial_1 \Gamma_{01}^1 - \partial_1 \Gamma_{02}^2 - \partial_1 \Gamma_{03}^3 + \Gamma_{01}^1 \Gamma_{1\gamma}^\gamma - \Gamma_{0\gamma}^0 \Gamma_{01}^\gamma - \Gamma_{0\gamma}^1 \Gamma_{11}^\gamma - \Gamma_{0\gamma}^2 \Gamma_{21}^\gamma - \Gamma_{0\gamma}^3 \Gamma_{31}^\gamma \\
&= \Gamma_{01}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{01}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{01}^1 \Gamma_{13}^3 - (\Gamma_{01}^1 \Gamma_{11}^1) - (\Gamma_{02}^2 \Gamma_{21}^2) - \Gamma_{03}^3 \Gamma_{31}^3 \\
&= \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} kr (1 - kr^2)^{-1} + \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \frac{1}{r} + \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \frac{1}{r} - \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} kr (1 - kr^2)^{-1} - \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \frac{1}{r} - \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \frac{1}{r} \\
&= 0 \\
&\vdots \\
R_{01} &= R_{10} = 0. \quad (R_{01} = R_{10}, \text{ pois o tensor de Ricci é simétrico.}) \tag{282}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{02} &= \partial_\gamma \Gamma_{02}^\gamma - \partial_2 \Gamma_{0\gamma}^\gamma + \Gamma_{02}^\epsilon \Gamma_{\epsilon\gamma}^\gamma - \Gamma_{0\gamma}^\epsilon \Gamma_{\epsilon 2}^\gamma \\
&= \partial_2 \Gamma_{02}^2 - \partial_2 \Gamma_{00}^0 - \partial_2 \Gamma_{01}^1 - \partial_2 \Gamma_{02}^2 - \partial_2 \Gamma_{02}^3 + \Gamma_{02}^2 \Gamma_{2\gamma}^\gamma - \Gamma_{0\gamma}^0 \Gamma_{02}^\gamma - \Gamma_{0\gamma}^1 \Gamma_{12}^\gamma - \Gamma_{0\gamma}^2 \Gamma_{22}^\gamma - \Gamma_{0\gamma}^3 \Gamma_{32}^\gamma \\
&= \frac{\dot{a}(t) \cos \theta}{a(t) \sin \theta} - \Gamma_{03}^3 \Gamma_{32}^3 \\
&= \frac{\dot{a}(t) \cos \theta}{a(t) \sin \theta} - \frac{\dot{a}(t) \cos \theta}{a(t) \sin \theta} \\
&= 0 \\
&\vdots \\
R_{02} &= R_{20} = 0. \quad (R_{02} = R_{20}, \text{ pois o tensor de Ricci é simétrico.}) \tag{283}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{03} &= \partial_\gamma \Gamma_{03}^\gamma - \partial_3 \Gamma_{0\gamma}^\gamma + \Gamma_{03}^\epsilon \Gamma_{\epsilon\gamma}^\gamma - \Gamma_{0\gamma}^\epsilon \Gamma_{\epsilon 3}^\gamma \\
&= \partial_3 \Gamma_{03}^3 - \partial_3 (\Gamma_{01}^1 + \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{03}^3) + \Gamma_{03}^3 \Gamma_{3\gamma}^\gamma - (\Gamma_{0\gamma}^0 \Gamma_{03}^\gamma + \Gamma_{0\gamma}^1 \Gamma_{13}^\gamma + \Gamma_{0\gamma}^2 \Gamma_{23}^\gamma + \Gamma_{0\gamma}^3 \Gamma_{33}^\gamma) \\
&\vdots \\
R_{03} &= R_{30} = 0. \quad (R_{03} = R_{30}, \text{ pois o tensor de Ricci é simétrico.}) \tag{284}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{11} &= \partial_\gamma \Gamma_{11}^\gamma - \partial_1 \Gamma_{1\gamma}^\gamma + \Gamma_{11}^\epsilon \Gamma_{\epsilon\gamma}^\gamma - \Gamma_{1\gamma}^\epsilon \Gamma_{\epsilon 1}^\gamma \\
&= \partial_0 \Gamma_{11}^0 + \partial_1 \Gamma_{11}^1 - \partial_1 (\Gamma_{10}^0 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3) + \Gamma_{11}^0 \Gamma_{0\gamma}^\gamma + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{1\gamma}^\gamma - (\Gamma_{1\gamma}^0 \Gamma_{01}^\gamma + \Gamma_{1\gamma}^1 \Gamma_{11}^\gamma + \Gamma_{1\gamma}^2 \Gamma_{21}^\gamma + \Gamma_{1\gamma}^3 \Gamma_{31}^\gamma) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \left[ a(t) \dot{a}(t) (1 - kr^2)^{-1} \right] + \frac{\partial}{\partial r} \left[ kr (1 - kr^2)^{-1} \right] - \frac{\partial}{\partial r} \left[ kr (1 - kr^2)^{-1} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \right] + \\
&+ a(t) \dot{a}(t) (1 - kr^2)^{-1} (\Gamma_{01}^1 + \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{03}^3) + kr (1 - kr^2)^{-1} (\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3) + \\
&- (\Gamma_{11}^0 \Gamma_{01}^1 + \Gamma_{10}^1 \Gamma_{11}^0 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{13}^3 \Gamma_{31}^3) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \left[ a(t) \dot{a}(t) (1 - kr^2)^{-1} \right] + \frac{\partial}{\partial r} \left[ kr (1 - kr^2)^{-1} \right] - \frac{\partial}{\partial r} \left[ kr (1 - kr^2)^{-1} + \frac{2}{r} \right] + \\
&+ a(t) \dot{a}(t) (1 - kr^2)^{-1} \left( \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} + \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} + \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right) + kr (1 - kr^2)^{-1} \left[ kr (1 - kr^2)^{-1} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \right] + \\
&- \left[ a(t) \dot{a}(t) (1 - kr^2)^{-1} \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} + \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} a(t) \dot{a}(t) (1 - kr^2)^{-1} + kr (1 - kr^2)^{-1} kr (1 - kr^2)^{-1} + \frac{1}{r} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \frac{1}{r} \right] \\
&= (1 - kr^2)^{-1} \frac{\partial}{\partial t} (a(t) \dot{a}(t)) + (a(t) \dot{a}(t)) \frac{\partial}{\partial t} \left[ (1 - kr^2)^{-1} \right] - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{2}{r} \right) + 3\dot{a}^2(t) (1 - kr^2)^{-1} + \\
&+ \left[ kr (1 - kr^2)^{-1} \right]^2 + 2k (1 - kr^2)^{-1} - \left\{ \dot{a}^2(t) (1 - kr^2)^{-1} + \dot{a}^2(t) (1 - kr^2)^{-1} + \left[ kr (1 - kr^2)^{-1} \right]^2 + \frac{2}{r^2} \right\} \\
&= (1 - kr^2)^{-1} a(t) \ddot{a}(t) + (1 - kr^2)^{-1} \dot{a}^2(t) + a(t) \dot{a}(t) \cdot (-1) (1 - kr^2)^{-2} (-k) \cdot 2r\dot{r} + \frac{2}{r^2} + \\
&+ 3\dot{a}^2(t) (1 - kr^2)^{-1} + \left[ kr (1 - kr^2)^{-1} \right]^2 + 2k (1 - kr^2)^{-1} - \dot{a}^2(t) (1 - kr^2)^{-1} - \dot{a}^2(t) (1 - kr^2)^{-1} + \\
&- \left[ kr (1 - kr^2)^{-1} \right]^2 - \frac{2}{r^2} \\
&= 2\dot{a}^2(t) (1 - kr^2)^{-1} + 2k (1 - kr^2)^{-1} + (1 - kr^2)^{-1} a(t) \ddot{a}(t) \\
&\therefore \\
R_{11} &= a(t) \ddot{a}(t) (1 - kr^2)^{-1} + 2\dot{a}^2(t) (1 - kr^2)^{-1} + 2k (1 - kr^2)^{-1} \\
&= [a(t) \ddot{a}(t) + 2\dot{a}^2(t) + 2k] (1 - kr^2)^{-1}. \tag{285}
\end{aligned}$$

---


$$\begin{aligned}
R_{12} &= \partial_\gamma \Gamma_{12}^\gamma - \partial_2 \Gamma_{1\gamma}^\gamma + \Gamma_{12}^\epsilon \Gamma_{\epsilon\gamma}^\gamma - \Gamma_{1\gamma}^\epsilon \Gamma_{\epsilon 2}^\gamma \\
&= \partial_2 \Gamma_{12}^2 - \partial_2 (\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3) + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{2\gamma}^\gamma - (\Gamma_{10}^\epsilon \Gamma_{\epsilon 2}^0 + \Gamma_{11}^\epsilon \Gamma_{\epsilon 2}^1 + \Gamma_{12}^\epsilon \Gamma_{\epsilon 2}^2 + \Gamma_{13}^\epsilon \Gamma_{\epsilon 2}^3) \\
&= \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ kr (1 - kr^2)^{-1} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \right] + \frac{1 \cos \theta}{r \sin \theta} - (\Gamma_{13}^3 \Gamma_{32}^3) \\
&= \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{1}{r} - \frac{1 \cos \theta}{r \sin \theta} \\
&= 0 \\
&\therefore \\
R_{12} &= R_{21} = 0. \quad (R_{12} = R_{21}, \text{ pois o tensor de Ricci é simétrico.}) \tag{286}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{13} &= \partial_\gamma \Gamma_{13}^\gamma - \partial_3 \Gamma_{1\gamma}^\gamma + \Gamma_{13}^\epsilon \Gamma_{\epsilon\gamma}^\gamma - \Gamma_{1\gamma}^\epsilon \Gamma_{\epsilon 3}^\gamma \\
&= \partial_3 \Gamma_{13}^3 - \partial_3 (\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3) + \Gamma_{13}^3 \Gamma_{3\gamma}^\gamma - (\Gamma_{10}^\epsilon \Gamma_{\epsilon 3}^0 + \Gamma_{11}^\epsilon \Gamma_{\epsilon 3}^1 + \Gamma_{12}^\epsilon \Gamma_{\epsilon 3}^2 + \Gamma_{13}^\epsilon \Gamma_{\epsilon 3}^3) \\
&= \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ kr (1 - kr^2)^{-1} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \right] \\
&= 0 \\
&\vdots \\
R_{13} &= R_{31} = 0. \quad (R_{13} = R_{31}, \text{ pois o tensor de Ricci é simétrico.}) \tag{287}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{22} &= \partial_\gamma \Gamma_{22}^\gamma - \partial_2 \Gamma_{2\gamma}^\gamma + \Gamma_{22}^\epsilon \Gamma_{\epsilon\gamma}^\gamma - \Gamma_{2\gamma}^\epsilon \Gamma_{\epsilon 2}^\gamma \\
&= \partial_0 \Gamma_{22}^0 + \partial_1 \Gamma_{22}^1 - \partial_2 \Gamma_{23}^3 + \Gamma_{22}^0 \Gamma_{0\gamma}^\gamma + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{1\gamma}^\gamma - (\Gamma_{20}^\epsilon \Gamma_{\epsilon 2}^0 + \Gamma_{21}^\epsilon \Gamma_{\epsilon 2}^1 + \Gamma_{22}^\epsilon \Gamma_{\epsilon 2}^2 + \Gamma_{23}^\epsilon \Gamma_{\epsilon 2}^3) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} [a(t)\dot{a}(t)r^2] + \frac{\partial}{\partial r} [-r(1 - kr^2)] - \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) + \Gamma_{22}^0 \Gamma_{01}^1 + \Gamma_{22}^0 \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{22}^0 \Gamma_{03}^3 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{12}^2 + \\
&+ \Gamma_{22}^1 \Gamma_{13}^3 - (\Gamma_{20}^2 \Gamma_{22}^0 + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{22}^0 \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{23}^3 \Gamma_{32}^3) \\
&= r^2 [a(t)\ddot{a}(t) + \dot{a}^2(t)] + (-1 + 3kr^2) - \left[ \cos \theta \cdot (-1) \sin^{-2} \theta \cos \theta + \frac{1}{\sin \theta} (-\sin \theta) \right] + a(t)\dot{a}(t)r^2 \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} + \\
&+ a(t)\dot{a}(t)r^2 \cdot \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} + a(t)\dot{a}(t)r^2 \cdot \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} + [-r(1 - kr^2)] kr (1 - kr^2)^{-1} + [-r(1 - kr^2)] \left( \frac{1}{r} \right) + \\
&+ [-r(1 - kr^2)] \left( \frac{1}{r} \right) - \left\{ \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \cdot a(t)\dot{a}(t)r^2 + \left( \frac{1}{r} \right) [-r(1 - kr^2)] + a(t)\dot{a}(t)r^2 \cdot \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} + [-r(1 - kr^2)] \left( \frac{1}{r} \right) + \right. \\
&\left. + \left( \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right)^2 \right\} \\
&= a(t)\ddot{a}(t)r^2 + \dot{a}^2(t)r^2 - 1 + 3kr^2 + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} + 1 + \dot{a}^2(t)r^2 + \dot{a}^2(t)r^2 + \dot{a}^2(t)r^2 - kr^2 - (1 - kr^2) - (1 - kr^2) + \\
&- \dot{a}^2(t)r^2 + (1 - kr^2) - \dot{a}^2(t)r^2 + (1 - kr^2) - \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \\
&= a(t)\ddot{a}(t)r^2 + 2\dot{a}^2(t)r^2 + 2kr^2 \\
&\vdots \\
R_{22} &= a(t)\ddot{a}(t)r^2 + 2\dot{a}^2(t)r^2 + 2kr^2. \tag{288}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{23} &= \partial_\gamma \Gamma_{23}^\gamma - \partial_3 \Gamma_{2\gamma}^\gamma + \Gamma_{23}^\epsilon \Gamma_{\epsilon\gamma}^\gamma - \Gamma_{2\gamma}^\epsilon \Gamma_{\epsilon 3}^\gamma \\
&= \partial_0 \Gamma_{23}^0 + \partial_1 \Gamma_{23}^1 + \partial_2 \Gamma_{23}^2 + \partial_3 \Gamma_{23}^3 - (\partial_3 \Gamma_{20}^0 + \partial_3 \Gamma_{21}^1 + \partial_3 \Gamma_{22}^2 + \partial_3 \Gamma_{23}^3) + \\
&+ \Gamma_{23}^0 \Gamma_{0\gamma}^\gamma + \Gamma_{23}^1 \Gamma_{1\gamma}^\gamma + \Gamma_{23}^2 \Gamma_{2\gamma}^\gamma + \Gamma_{23}^3 \Gamma_{3\gamma}^\gamma - (\Gamma_{2\gamma}^0 \Gamma_{03}^\gamma + \Gamma_{2\gamma}^1 \Gamma_{13}^\gamma + \Gamma_{2\gamma}^2 \Gamma_{23}^\gamma + \Gamma_{2\gamma}^3 \Gamma_{33}^\gamma) \\
&= \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) - \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) + 0 - 0 \\
&= 0 \\
&\vdots \\
R_{23} &= R_{32} = 0. \quad (R_{23} = R_{32}, \text{ pois o tensor de Ricci é simétrico.}) \tag{289}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{33} &= \partial_\gamma \Gamma_{33}^\gamma - \partial_3 \Gamma_{3\gamma}^\gamma + \Gamma_{33}^\epsilon \Gamma_{\epsilon\gamma}^\gamma - \Gamma_{3\gamma}^\epsilon \Gamma_{\epsilon 3}^\gamma \\
&= \partial_0 \Gamma_{33}^0 + \partial_1 \Gamma_{33}^1 + \partial_2 \Gamma_{33}^2 + \partial_3 \Gamma_{33}^3 - (\partial_3 \Gamma_{30}^0 + \partial_3 \Gamma_{31}^1 + \partial_3 \Gamma_{32}^2 + \partial_3 \Gamma_{33}^3) + \Gamma_{33}^0 \Gamma_{0\gamma}^\gamma + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{1\gamma}^\gamma + \\
&+ \Gamma_{33}^2 \Gamma_{2\gamma}^\gamma + \Gamma_{33}^3 \Gamma_{3\gamma}^\gamma - (\Gamma_{3\gamma}^0 \Gamma_{03}^\gamma + \Gamma_{3\gamma}^1 \Gamma_{13}^\gamma + \Gamma_{3\gamma}^2 \Gamma_{23}^\gamma + \Gamma_{3\gamma}^3 \Gamma_{33}^\gamma) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} [a(t)\dot{a}(t)r^2 \sin^2 \theta] + \frac{\partial}{\partial r} [-r \sin^2 \theta (1 - kr^2)] + \frac{\partial}{\partial \theta} (-\sin \theta \cos \theta) + \frac{\partial}{\partial \phi} (0) + \\
&- \frac{\partial}{\partial \phi} (0 + 0 + 0 + 0) + [a(t)\dot{a}(t)r^2 \sin^2 \theta] (\Gamma_{00}^0 + \Gamma_{01}^1 + \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{03}^3) + [-r \sin^2 \theta (1 - kr^2)] \times \\
&\times (\Gamma_{10}^0 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3) + (-\sin \theta \cos \theta) (\Gamma_{20}^0 + \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{23}^3) + 0 + \\
&- (\Gamma_{30}^0 \Gamma_{03}^0 + \Gamma_{31}^0 \Gamma_{03}^1 + \Gamma_{32}^0 \Gamma_{03}^2 + \Gamma_{33}^0 \Gamma_{03}^3 + \Gamma_{30}^1 \Gamma_{13}^0 + \Gamma_{31}^1 \Gamma_{13}^1 + \Gamma_{32}^1 \Gamma_{13}^2 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{13}^3) + \\
&- (\Gamma_{30}^2 \Gamma_{23}^0 + \Gamma_{31}^2 \Gamma_{23}^1 + \Gamma_{32}^2 \Gamma_{23}^2 + \Gamma_{33}^2 \Gamma_{23}^3 + \Gamma_{30}^3 \Gamma_{33}^0 + \Gamma_{31}^3 \Gamma_{33}^1 + \Gamma_{32}^3 \Gamma_{33}^2 + \Gamma_{33}^3 \Gamma_{33}^3) \\
&= r^2 \sin^2 \theta [a(t)\ddot{a}(t) + \dot{a}(t)\dot{a}(t)] + \sin^2 \theta \frac{\partial}{\partial r} (-r + kr^3) + \left[ (-\sin \theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \cos \theta + \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} (-\sin \theta) \right] - 0 + \\
&+ [a(t)\dot{a}(t)r^2 \sin^2 \theta] \left( 0 + \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} + \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} + \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right) + [-r \sin^2 \theta (1 - kr^2)] \left[ 0 + kr (1 - kr^2)^{-1} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \right] + \\
&+ (-\sin \theta \cos \theta) \left( \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) - \left\{ [a(t)\dot{a}(t)r^2 \sin^2 \theta] \left( \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right) + [-r \sin^2 \theta (1 - kr^2)] \left( \frac{1}{r} \right) + \right. \\
&+ (-\sin \theta \cos \theta) \left( \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) + \left. \left( \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right) [a(t)\dot{a}(t)r^2 \sin^2 \theta] + \left( \frac{1}{r} \right) [-r \sin^2 \theta (1 - kr^2)] + \right. \\
&+ \left. \left( \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) (-\sin \theta \cos \theta) + 0 \right\} \\
&= a(t)\ddot{a}(t)r^2 \sin^2 \theta + \dot{a}^2(t)r^2 \sin^2 \theta - \sin^2 \theta + 3kr^2 \sin^2 \theta + \sin^2 \theta - \cos^2 \theta + 3\dot{a}^2(t)r^2 \sin^2 \theta - kr^2 \sin^2 \theta + \\
&- 2 \sin^2 \theta (1 - kr^2) - \cos^2 \theta - \dot{a}^2(t)r^2 \sin^2 \theta + \sin^2 \theta (1 - kr^2) + \cos^2 \theta - \dot{a}^2(t)r^2 \sin^2 \theta + \sin^2 \theta (1 - kr^2) + \\
&+ \cos^2 \theta \\
&= a(t)\ddot{a}(t)r^2 \sin^2 \theta + \dot{a}^2(t)r^2 \sin^2 \theta - \sin^2 \theta + 3kr^2 \sin^2 \theta + \sin^2 \theta - \cos^2 \theta + 3\dot{a}^2(t)r^2 \sin^2 \theta + \\
&+ kr^2 \sin^2 \theta - 2 \sin^2 \theta - \cos^2 \theta - 2\dot{a}^2(t)r^2 \sin^2 \theta - 2kr^2 \sin^2 \theta + 2 \sin^2 \theta + 2 \cos^2 \theta \\
&= a(t)\ddot{a}(t)r^2 \sin^2 \theta + 2\dot{a}^2(t)r^2 \sin^2 \theta + 2kr^2 \sin^2 \theta \\
&\therefore \\
R_{33} &= r^2 [a(t)\ddot{a}(t) + 2\dot{a}^2(t) + 2k] \sin^2 \theta. \tag{290}
\end{aligned}$$

Nas Eqs. de (281) até (290), utilizamos as componentes da conexão métrica afim dadas pelas Eqs. de (268) até (280). Muitas das passagens que levaram às obtenções das Eqs. de (281) até (290) simplificam-se prontamente, verificando-se que as componentes da conexão métrica afim que não constam dentre as Eqs. de (268) até (280) são nulas. Então, em virtude das Eqs. de (281) até (290), temos que as únicas componentes não nulas do tensor de Ricci são estas:

$$R_{00} = -3 \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)}; \tag{291}$$

$$R_{11} = \frac{a(t)\ddot{a}(t) + 2\dot{a}^2(t) + 2k}{1 - kr^2}; \tag{292}$$

$$R_{22} = r^2 [a(t)\ddot{a}(t) + 2\dot{a}^2(t) + 2k]; \tag{293}$$

$$R_{33} = r^2 [a(t)\ddot{a}(t) + 2\dot{a}^2(t) + 2k] \sin^2 \theta. \tag{294}$$

Para que escrevamos o tensor de energia momento em sua representação covariante dada pela Eq. (267), passemos agora a particularizar as geodésicas como sendo as trajetórias 4-dimensionais dos observadores comóveis, i.e., dos pontos do substrato cosmológico. Assim, estaremos estudando a dinâmica dos pontos do substrato cosmológico, viz. estaremos estudando a dinâmica do universo, objeto primeiro de nossa análise. Conforme discutido anteriormente, as coordenadas de um ponto  $P$  do substrato cosmológico, o qual descreve uma geodésica comóvel do tipo tempo parametrizada pelo parâmetro afim  $s = u = t$ , conforme discutimos anteriormente, num instante  $t$  são dadas por:

$$(x^\alpha)_P = (t, x, y, z) = (t, x_P, y_P, z_P), \tag{295}$$

onde  $x_P$ ,  $y_P$  e  $z_P$  são constantes relacionadas ao ponto  $P$ , pois as coordenadas espaciais de  $P$  são fixas, con-

forme discutido anteriormente. Isso é verdade para qualquer ponto do substrato cosmológico, pois  $P$  é arbitrário. Assim, a 4-velocidade de um ponto  $P$  do substrato cosmológico é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{d}{du}(x^\alpha) &= (u^\alpha) = \frac{d}{du}(t, x_P, y_P, z_P) \\ &= \left( \frac{dt}{du}, \frac{dx_P}{du}, \frac{dy_P}{du}, \frac{dz_P}{du} \right) \\ &= \left( \frac{dt}{du}, 0, 0, 0 \right) \\ &\equiv^t (1, 0, 0, 0), \end{aligned} \quad (296)$$

uma vez que as coordenadas espaciais de um ponto comóvel, i.e., de um ponto do substrato cosmológico, são constantes, e  $u \equiv t$ . Assim, em virtude da Eq. (296), as componentes da 4-velocidade dos pontos do substrato

cosmológico,  $u^\alpha$ , são dadas por:

$$u^\alpha = \delta_0^\alpha. \quad (297)$$

Contraindo ambos os lados da Eq. (297) pelo tensor métrico, viz.:

$$u_\beta = g_{\beta\alpha}u^\alpha = g_{\beta\alpha}\delta_0^\alpha = g_{\beta 0}\delta_0^0 = \delta_\beta^0, \quad (298)$$

uma vez que a métrica de Robertson-Walker é diagonal com  $g_{00} = 1$ . Substituindo a Eq. (298) na Eq. (267), temos o tensor de energia e momento para os pontos do substrato cosmológico segundo observadores comóveis:

$$T_{\alpha\beta} = (\rho + p)\delta_\alpha^0\delta_\beta^0 - pg_{\alpha\beta}, \quad (299)$$

donde se obtém o traço:

$$\begin{aligned} g^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta} &= (\rho + p)g^{\alpha\beta}\delta_\alpha^0\delta_\beta^0 - pg^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta} \Rightarrow \\ T^\beta_\beta &= (\rho + p)g^{\alpha\beta}\delta_\alpha^0\delta_\beta^0 - p\delta_\beta^\beta \\ &= (\rho + p)g^{\alpha\beta}\delta_\alpha^0\delta_\beta^0 - p(\delta_0^0 + \delta_1^1 + \delta_2^2 + \delta_3^3) \\ &= (\rho + p)g^{\alpha\beta}\delta_\alpha^0\delta_\beta^0 - 4p \\ &= (\rho + p)[g^{0\beta}\delta_0^0\delta_\beta^0 + g^{1\beta}\delta_1^0\delta_\beta^0 + g^{2\beta}\delta_2^0\delta_\beta^0 + g^{3\beta}\delta_3^0\delta_\beta^0] - 4p \\ &= (\rho + p)g^{0\beta}\delta_\beta^0 - 4p \\ &= (\rho + p)g^{00} - 4p \\ &\vdots \\ T^\beta_\beta &= (\rho + p)g^{00} - 4p = \rho - 3p, \end{aligned} \quad (300)$$

uma vez que  $g^{00} = 1/g_{00} = 1/1 = 1$ . Pelas Eqs. (253) e (254), i.e., pelas Eqs. de campo de Einstein, temos, pela

contração pelo tensor métrico inverso para obtenção do traço:

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R - \Lambda g_{\alpha\beta} &= \bar{\kappa}T_{\alpha\beta} \Rightarrow g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}R - \Lambda g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta} = \bar{\kappa}g^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta} \Rightarrow \\ R^\beta_\beta - \frac{1}{2}\delta_\beta^\beta R - \Lambda\delta_\beta^\beta &= \bar{\kappa}T^\beta_\beta \Rightarrow \\ R^\beta_\beta - \frac{1}{2} \cdot 4R - \Lambda \cdot 4 &= \bar{\kappa}T^\beta_\beta \Rightarrow \\ R^\beta_\beta - 2R - 4\Lambda &= \bar{\kappa}T^\beta_\beta \Rightarrow \\ R^\beta_\beta - 2R^\beta_\beta - 4\Lambda &= \bar{\kappa}T^\beta_\beta \\ \vdots \\ R^\beta_\beta &= R = -4\Lambda - \bar{\kappa}T^\beta_\beta, \end{aligned} \quad (301)$$

lembrando que o escalar de curvatura  $R$ , o escalar de Ricci, é dado pelo traço:

$$g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} = R^\beta_\beta = R, \quad (302)$$

em virtude da Eq. (255). Substituindo o escalar de Ricci dado pela Eq. (301) na Eq. (254) para o tensor de Ein-

stein e o tensor de Einstein na Eq. (253), temos as Eqs. de campo de Einstein completas [com a constante cos-

mológica  $\Lambda$ ] para o substrato cosmológico:

$$\begin{aligned}
R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}(-4\Lambda - \bar{\kappa}T^\gamma_\gamma) - \Lambda g_{\alpha\beta} &= \bar{\kappa}T_{\alpha\beta} \Rightarrow \\
R_{\alpha\beta} + 2\Lambda g_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\bar{\kappa}g_{\alpha\beta}T^\gamma_\gamma - \Lambda g_{\alpha\beta} &= \bar{\kappa}T_{\alpha\beta} \xrightarrow{\text{Eq. (300)}} \\
R_{\alpha\beta} + 2\Lambda g_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\bar{\kappa}g_{\alpha\beta}(\rho - 3p) - \Lambda g_{\alpha\beta} &= \bar{\kappa}T_{\alpha\beta} \xrightarrow{\text{Eq. (299)}} \\
R_{\alpha\beta} + 2\Lambda g_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\bar{\kappa}g_{\alpha\beta}(\rho - 3p) - \Lambda g_{\alpha\beta} &= \bar{\kappa}(\rho + p)\delta_\alpha^0\delta_\beta^0 - \bar{\kappa}pg_{\alpha\beta}. \tag{303}
\end{aligned}$$

Tendo em vista as Eqs. de (291) até (294) para o tensor de Ricci, e uma vez que a métrica de Robertson-Walker é

diagonal, as Eqs. de campo de Einstein completas serão dadas apenas por Eqs. diagonais, viz.:

$$\begin{aligned}
R_{00} + 2\Lambda g_{00} + \frac{1}{2}\bar{\kappa}g_{00}(\rho - 3p) - \Lambda g_{00} &= \bar{\kappa}(\rho + p)\delta_0^0\delta_0^0 - \bar{\kappa}pg_{00} \Rightarrow \\
-3\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + 2\Lambda + \frac{1}{2}\bar{\kappa}(\rho - 3p) - \Lambda &= \bar{\kappa}(\rho + p) - \bar{\kappa}p \Rightarrow \\
-3\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + 2\Lambda + \frac{1}{2}\bar{\kappa}\rho - \frac{3}{2}\bar{\kappa}p - \Lambda &= \bar{\kappa}\rho + \bar{\kappa}p - \bar{\kappa}p \Rightarrow \\
-3\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + \Lambda = \frac{2}{2}\bar{\kappa}\rho - \frac{\bar{\kappa}}{2}\rho + \frac{3}{2}\bar{\kappa}p &= \frac{1}{2}\bar{\kappa}\rho + \frac{3}{2}\bar{\kappa}p \quad \therefore \\
-3\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + \Lambda = \frac{\bar{\kappa}\rho}{2} + \frac{3\bar{\kappa}p}{2}. \tag{304}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{11} + 2\Lambda g_{11} + \frac{1}{2}\bar{\kappa}g_{11}(\rho - 3p) - \Lambda g_{11} &= \bar{\kappa}(\rho + p)\delta_1^0\delta_1^0 - \bar{\kappa}pg_{11} \Rightarrow \\
\frac{a(t)\ddot{a}(t) + 2\dot{a}^2(t) + 2k}{1 - kr^2} + 2\Lambda \left[ -a^2(t)(1 - kr^2)^{-1} \right] &+ \frac{1}{2}\bar{\kappa} \left[ -a^2(t)(1 - kr^2)^{-1} \right] (\rho - 3p) - \Lambda \left[ -a^2(t)(1 - kr^2)^{-1} \right] = \\
&= -\bar{\kappa}p \left[ -a^2(t)(1 - kr^2)^{-1} \right] \Rightarrow \\
(1 - kr^2)^{-1} \left\{ [a(t)\ddot{a}(t) + 2\dot{a}^2(t) + 2k] - 2\Lambda a^2(t) - \frac{1}{2}\bar{\kappa}a^2(t)(\rho - 3p) + \Lambda a^2(t) - \bar{\kappa}pa^2(t) \right\} &= 0 \Rightarrow \\
a(t)\ddot{a}(t) + 2\dot{a}^2(t) + 2k - \Lambda a^2(t) - \frac{1}{2}\bar{\kappa}a^2(t)\rho + \frac{3}{2}\bar{\kappa}a^2(t)p - \bar{\kappa}a^2(t)p &= 0 \Rightarrow \\
a(t)\ddot{a}(t) + 2\dot{a}^2(t) + 2k - \Lambda a^2(t) - \frac{1}{2}\bar{\kappa}a^2(t)\rho + \frac{1}{2}\bar{\kappa}a^2(t)p &= 0 \Rightarrow \\
a(t)\ddot{a}(t) + 2\dot{a}^2(t) + 2k = \Lambda a^2(t) + \frac{1}{2}\bar{\kappa}a^2(t)\rho - \frac{1}{2}\bar{\kappa}a^2(t)p &= \Lambda a^2(t) + \frac{1}{2}\bar{\kappa}a^2(t)(\rho - p) \therefore \\
a(t)\ddot{a}(t) + 2\dot{a}^2(t) + 2k = \Lambda a^2(t) + \frac{1}{2}\bar{\kappa}a^2(t)(\rho - p). \tag{305}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& R_{22} + 2\Lambda g_{22} + \frac{1}{2}\bar{\kappa}g_{22}(\rho - 3p) - \Lambda g_{22} = \bar{\kappa}(\rho + p)\delta_2^0\delta_2^0 - \bar{\kappa}pg_{22} \Rightarrow \\
& r^2 [a(t)\ddot{a}(t) + 2\dot{a}^2(t) + 2k] + 2\Lambda [-a^2(t)r^2] + \frac{1}{2}\bar{\kappa} [-a^2(t)r^2] (\rho - 3p) - \Lambda [-a^2(t)r^2] = -\bar{\kappa}p [-a^2(t)r^2] \Rightarrow \\
& r^2 \left\{ [a(t)\ddot{a}(t) + 2\dot{a}^2(t) + 2k] - 2\Lambda a^2(t) - \frac{1}{2}\bar{\kappa}a^2(t)(\rho - 3p) + \Lambda a^2(t) - \bar{\kappa}pa^2(t) \right\} = 0 \stackrel{\forall r}{\Rightarrow} \\
& a(t)\ddot{a}(t) + 2\dot{a}^2(t) + 2k - 2\Lambda a^2(t) - \frac{1}{2}\bar{\kappa}a^2(t)(\rho - 3p) + \Lambda a^2(t) - \bar{\kappa}pa^2(t) = 0 \\
& a(t)\ddot{a}(t) + 2\dot{a}^2(t) + 2k - \Lambda a^2(t) - \frac{1}{2}\bar{\kappa}a^2(t)\rho + \frac{3}{2}\bar{\kappa}a^2(t)p - \bar{\kappa}pa^2(t) = 0 \Rightarrow \\
& a(t)\ddot{a}(t) + 2\dot{a}^2(t) + 2k - \Lambda a^2(t) - \frac{1}{2}\bar{\kappa}a^2(t)\rho + \frac{1}{2}\bar{\kappa}a^2(t)p = 0 \Rightarrow \\
& a(t)\ddot{a}(t) + 2\dot{a}^2(t) + 2k = \Lambda a^2(t) + \frac{1}{2}\bar{\kappa}a^2(t)\rho - \frac{1}{2}\bar{\kappa}a^2(t)p = \Lambda a^2(t) + \frac{1}{2}\bar{\kappa}a^2(t)(\rho - p) \therefore \\
& a(t)\ddot{a}(t) + 2\dot{a}^2(t) + 2k = \Lambda a^2(t) + \frac{1}{2}\bar{\kappa}a^2(t)(\rho - p). \quad (306)
\end{aligned}$$

Aqui, começamos a verificar a simetria estabelecida pelo princípio cosmológico, uma simetria tridimensional, uma vez que se relaciona ao setor espacial do substrato cosmológico. I.e., as Eqs. (305) e (306) são idênticas. Es-

peramos que a próxima Eq. de campo advinda da componente  $R_{33}$  do tensor de Ricci e da componente  $g_{33}$  da métrica também gere Eq. idêntica às Eqs. (305) e (306). De fato:

$$\begin{aligned}
& R_{33} + 2\Lambda g_{33} + \frac{1}{2}\bar{\kappa}g_{33}(\rho - 3p) - \Lambda g_{33} = \bar{\kappa}(\rho + p)\delta_3^0\delta_3^0 - \bar{\kappa}pg_{33} \Rightarrow \\
& r^2 [a(t)\ddot{a}(t) + 2\dot{a}^2(t) + 2k] \sin^2 \theta + 2\Lambda [-a^2(t)r^2 \sin^2 \theta] + \frac{1}{2}\bar{\kappa} [-a^2(t)r^2 \sin^2 \theta] (\rho - 3p) - \Lambda [-a^2(t)r^2 \sin^2 \theta] = \\
& = -\bar{\kappa}p [-a^2(t)r^2 \sin^2 \theta] \Rightarrow \\
& r^2 \sin^2 \theta \left\{ [a(t)\ddot{a}(t) + 2\dot{a}^2(t) + 2k] - 2\Lambda a^2(t) - \frac{1}{2}\bar{\kappa}a^2(t)(\rho - 3p) + \Lambda a^2(t) - \bar{\kappa}pa^2(t) \right\} = 0 \stackrel{\forall r^2 \sin^2 \theta}{\Rightarrow} \\
& a(t)\ddot{a}(t) + 2\dot{a}^2(t) + 2k - \Lambda a^2(t) - \frac{1}{2}\bar{\kappa}a^2(t)\rho + \frac{3}{2}\bar{\kappa}a^2(t)p - \bar{\kappa}pa^2(t) = 0 \Rightarrow \\
& a(t)\ddot{a}(t) + 2\dot{a}^2(t) + 2k - \Lambda a^2(t) - \frac{1}{2}\bar{\kappa}a^2(t)\rho + \frac{1}{2}\bar{\kappa}a^2(t)p = 0 \Rightarrow \\
& a(t)\ddot{a}(t) + 2\dot{a}^2(t) + 2k = \Lambda a^2(t) + \frac{1}{2}\bar{\kappa}a^2(t)\rho - \frac{1}{2}\bar{\kappa}a^2(t)p \therefore \\
& a(t)\ddot{a}(t) + 2\dot{a}^2(t) + 2k = \Lambda a^2(t) + \frac{1}{2}\bar{\kappa}a^2(t)(\rho - p), \quad (307)
\end{aligned}$$

como queríamos verificar, i.e., as Eqs. (305), (306) e (307) são idênticas. 3 Eqs. idênticas em virtude da simetria 3-dimensional posta pelo princípio cosmológico - homogeneidade e isotropia para o setor espacial do substrato cosmológico num dado instante  $t$ ,  $\forall$  instantes  $t$ . A Eq. (304) pode ser reescrita sob o seguinte forma [multiplicando ambos os lados por  $a^2(t)/3$ ]:

$$\begin{aligned}
& -a(t)\ddot{a}(t) + \frac{\Lambda a^2(t)}{3} = \frac{\bar{\kappa}\rho a^2(t)}{6} + \frac{\bar{\kappa}p a^2(t)}{2} \Rightarrow \\
& -a(t)\ddot{a}(t) + \frac{\Lambda}{3}a^2(t) - \frac{\bar{\kappa}\rho a^2(t)}{6} - \frac{\bar{\kappa}p a^2(t)}{2} = 0. \quad (308)
\end{aligned}$$

Somando as Eqs. (307) e (308), temos:

$$\begin{aligned}
a\ddot{a}(t) + 2\dot{a}^2(t) + 2k - a(t)\ddot{a}(t) + \frac{\Lambda}{3}a^2(t) - \frac{\bar{\kappa}\rho a^2(t)}{6} - \frac{\bar{\kappa}pa^2(t)}{2} &= \Lambda a^2(t) + \frac{1}{2}\bar{\kappa}a^2(t)\rho - \frac{1}{2}\bar{\kappa}a^2(t)p \Rightarrow \\
2\dot{a}^2(t) + 2k + \frac{\Lambda}{3}a^2(t) - \frac{\bar{\kappa}\rho a^2(t)}{6} &= \Lambda a^2(t) + \frac{1}{2}\bar{\kappa}a^2(t)\rho \Rightarrow \\
2\dot{a}^2(t) + 2k + a^2(t)\left(\frac{\Lambda}{3} - \Lambda\right) &= \frac{\bar{\kappa}\rho a^2(t)}{6} + \frac{1}{2}\bar{\kappa}\rho a^2(t) \Rightarrow \\
2\dot{a}^2(t) + 2k + a^2(t)\left(-\frac{2\Lambda}{3}\right) &= \frac{\bar{\kappa}\rho a^2(t) + 3\bar{\kappa}\rho a^2(t)}{6} = \frac{4\bar{\kappa}\rho a^2(t)}{6} = \frac{2\bar{\kappa}\rho a^2(t)}{3} \Rightarrow \\
2\dot{a}^2(t) + 2k - \frac{2}{3}\Lambda a^2(t) &= \frac{2}{3}\bar{\kappa}\rho a^2(t) \stackrel{\times a^{-2}(t) \neq \infty}{\Rightarrow} \\
\frac{2\dot{a}^2(t) + 2k}{a^2(t)} - \frac{2}{3}\Lambda &= \frac{2}{3}\bar{\kappa}\rho \Rightarrow \\
\frac{2[\dot{a}^2(t) + k]}{a^2(t)} - \frac{2}{3}\Lambda &= \frac{2}{3}\bar{\kappa}\rho \Rightarrow \\
\frac{\dot{a}^2(t) + k}{a^2(t)} - \frac{1}{3}\Lambda &= \frac{1}{3}\bar{\kappa}\rho \therefore \\
3\frac{\dot{a}^2(t) + k}{a^2(t)} - \Lambda &= \bar{\kappa}\rho, \quad (309)
\end{aligned}$$

donde, finalmente, alcançamos a nossa primeira Eq. diferencial ordinária para a dinâmica cosmológica:

$$3\frac{\dot{a}^2(t) + k}{a^2(t)} - \Lambda = \bar{\kappa}\rho. \quad (310)$$

Notemos que as Eqs. (305), (306) e (307) têm dependência em  $\rho$  no lado direito dessas Eqs.. A idéia é escrever a dependência em  $p$  separadamente. Tal argumento emerge heurísticamente, a partir de heurística física. De fato. A Eq. (310) não tem dependência em  $\ddot{a}(t)$ . Todavia, essa Eq. (310) tem dependência em  $\dot{a}(t)$ , que é a integral de  $\ddot{a}(t)$ . Assim, a Eq. (310) pode ser [heurísticamente] considerada como sendo uma integral de movimento das Eqs. (305), (306) e (307), no sentido de ser a Eq. (310) de ordem diferencial ordinária [uma vez] inferior. Na dinâmica newtoniana, chamaríamos a

Eq. (310) de equação de energia. Não levemos essa interpretação muito longe, pois caminhamos no terreno da relatividade geral. Todavia, tal heurística pode ser levada adiante em termos da densidade  $\rho$ , uma vez que a Eq. (310) depende da densidade de energia  $\rho$ , encapsulando informação sobre energia. As Eqs. (305), (306) e (307) podem ser [heurísticamente] pensadas como encapsulando a causa e o efeito dinâmico relacionado à  $\ddot{a}(t)$ , sendo a causa dada pela transferência de momento linear sobre uma fronteira imersa no substrato cosmológico, donde escrevemos as Eqs. (305), (306) e (307) com lado direito dependente somente da pressão. Obviamente, não se alterarão essas Eqs., pois elas simplesmente serão reescritas. Para tal, multiplicamos ambos os lados da Eq. (304) por  $a^2(t)$ :

$$\begin{aligned}
-3\ddot{a}(t)a(t) + \Lambda a^2(t) &= \frac{\bar{\kappa}\rho a^2(t)}{2} + \frac{3\bar{\kappa}pa^2(t)}{2} \Rightarrow \\
\frac{1}{2}\bar{\kappa}\rho a^2(t) &= -3\ddot{a}(t)a(t) + \Lambda a^2(t) - \frac{3\bar{\kappa}pa^2(t)}{2}. \quad (311)
\end{aligned}$$

Substituindo o resultado da Eq. (311) nas Eqs. (305), (306) e (307):

$$\begin{aligned}
a(t)\ddot{a}(t) + 2\dot{a}^2(t) + 2k &= \Lambda a^2(t) + \left[ -3\ddot{a}(t)a(t) + \Lambda a^2(t) - \frac{3\bar{\kappa}pa^2(t)}{2} \right] - \frac{1}{2}\bar{\kappa}a^2(t)p \Rightarrow \\
a(t)\ddot{a}(t) + 3a(t)\ddot{a}(t) + 2\dot{a}^2(t) + 2k &= 2\Lambda a^2(t) - \frac{4}{2}\bar{\kappa}pa^2(t) \Rightarrow \\
4a(t)\ddot{a}(t) + 2\dot{a}^2(t) + 2k &= 2\Lambda a^2(t) - 2\bar{\kappa}pa^2(t) \Rightarrow \\
2a(t)\ddot{a}(t) + \dot{a}^2(t) + k &= \Lambda a^2(t) - \bar{\kappa}pa^2(t) \stackrel{\times a^{-2}(t) \neq \infty}{\Rightarrow} \\
\frac{2a(t)\ddot{a}(t) + \dot{a}^2(t) + k}{a^2(t)} &= \Lambda - \bar{\kappa}p,
\end{aligned} \tag{312}$$

temos a segunda Eq. diferencial para a dinâmica cosmológica:

$$\frac{2a(t)\ddot{a}(t) + \dot{a}^2(t) + k}{a^2(t)} - \Lambda = -\bar{\kappa}p. \tag{313}$$

Para que determinemos a constante de acoplamento  $\bar{\kappa}$ , precisamos passar ao limite de campo fraco, i.e., ao limite newtoniano, uma vez que queremos, conforme dissemos, acoplar as Eqs. de campo de Einstein ao caso newtoniano. Em outras palavras, uma vez que o princípio de superposição é aplicável à gravitação Newtoniana, começaremos por determinar as Eqs. de campo de Einstein linearizadas, determinando os objetos que fazem parte das Eqs. de campo, todavia linearizados: o tensor métrico, a conexão métrica afim [símbolos de Christoffel de segundo tipo], o tensor de curvatura de Riemann - para que se determinem o tensor de Ricci e o escalar de curvatura (escalar de Ricci) -, esses para que se determine o tensor de Einstein e, assim, as Eqs. de campo linearizadas. Esse procedimento, no limite de campo fraco deve levar à gravitação clássica, donde poderemos determinar, por acoplamento a esse limite, a constante de acoplamento  $\bar{\kappa}$ . Para tal, em relação à métrica de Minkowski nas coordenadas de Minkowski, i.e., no sistema de coordenadas em que, em relatividade especial, a métrica desnuda-se como plana, i.e., somente com ele-

mentos diagonais:

$$\eta_{\alpha\beta} = \text{diag} [+1, -1, -1, -1], \tag{314}$$

efetue-se a perturbação  $\epsilon h_{\alpha\beta}$ :

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \epsilon h_{\alpha\beta}, \tag{315}$$

até primeira ordem no parâmetro real adimensional tal que  $|\epsilon| \approx 0$ . É natural que se imponha uma condição de contorno condizente com um espaço-tempo que seja assintoticamente plano, i.e., longe da presença de matéria e energia:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} h_{\alpha\beta} = 0. \tag{316}$$

Pela contração pelo tensor métrico inverso de Minkowski,  $\eta^{\alpha\beta}$ , escreve-se o tensor métrico inverso perturbado:

$$g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} - \epsilon h^{\alpha\beta}, \tag{317}$$

uma vez que a contração:

$$\eta^{\alpha\gamma}\eta^{\beta\delta}h_{\gamma\delta} = h^{\alpha\beta}, \tag{318}$$

fornece:

$$\begin{aligned}
(\eta_{\alpha\beta} + \epsilon h_{\alpha\beta})(\eta^{\beta\gamma} - \epsilon h^{\beta\gamma}) &= \eta_{\alpha\beta}\eta^{\beta\gamma} - \epsilon\eta_{\alpha\beta}h^{\beta\gamma} + \epsilon h_{\alpha\beta}\eta^{\beta\gamma} - \epsilon^2 h_{\alpha\beta}h^{\beta\gamma} \stackrel{\text{Eq. (318)}}{=} \\
&= \delta_{\alpha}^{\gamma} - \epsilon\eta_{\alpha\beta}(\eta^{\beta\delta}\eta^{\gamma\epsilon}h_{\delta\epsilon}) + \epsilon h_{\alpha\beta}\eta^{\beta\gamma} - \epsilon^2 h_{\alpha\beta}h^{\beta\gamma} \\
&= \delta_{\alpha}^{\gamma} - \epsilon(\eta_{\alpha\beta}\eta^{\beta\delta})\eta^{\gamma\epsilon}h_{\delta\epsilon} + \epsilon h_{\alpha\beta}\eta^{\beta\gamma} - \epsilon^2 h_{\alpha\beta}h^{\beta\gamma} \\
&= \delta_{\alpha}^{\gamma} - \epsilon\delta_{\alpha}^{\delta}\eta^{\gamma\epsilon}h_{\delta\epsilon} + \epsilon h_{\alpha\beta}\eta^{\beta\gamma} - \epsilon^2 h_{\alpha\beta}h^{\beta\gamma} \\
&= \delta_{\alpha}^{\gamma} - \epsilon\eta^{\gamma\epsilon}h_{\alpha\epsilon} + \epsilon h_{\alpha\beta}\eta^{\beta\gamma} - \epsilon^2 h_{\alpha\beta}h^{\beta\gamma} \stackrel{\text{dummy } \epsilon \rightarrow \beta}{=} \\
&= \delta_{\alpha}^{\gamma} - \epsilon\eta^{\gamma\beta}h_{\alpha\beta} + \epsilon h_{\alpha\beta}\eta^{\beta\gamma} - \epsilon^2 h_{\alpha\beta}h^{\beta\gamma} \\
&= \delta_{\alpha}^{\gamma} + \epsilon(h_{\alpha\beta}\eta^{\beta\gamma} - h_{\alpha\beta}\eta^{\gamma\beta}) - \epsilon^2 h_{\alpha\beta}h^{\beta\gamma}, \quad (\eta^{\beta\gamma} = \eta^{\gamma\beta}, \epsilon^2 \rightarrow 0) \quad \therefore \\
(\eta_{\alpha\beta} + \epsilon h_{\alpha\beta})(\eta^{\beta\gamma} - \epsilon h^{\beta\gamma}) &= \delta_{\alpha}^{\gamma} \stackrel{\text{Eq. (315)}}{\Rightarrow} \\
g_{\alpha\beta}(\eta^{\beta\gamma} - \epsilon h^{\beta\gamma}) &= \delta_{\alpha}^{\gamma} \Rightarrow \\
g^{\delta\alpha}g_{\alpha\beta}(\eta^{\beta\gamma} - \epsilon h^{\beta\gamma}) &= g^{\delta\alpha}\delta_{\alpha}^{\gamma} \Rightarrow \\
\delta_{\beta}^{\delta}(\eta^{\beta\gamma} - \epsilon h^{\beta\gamma}) &= g^{\delta\gamma} \Rightarrow \\
(\eta^{\delta\gamma} - \epsilon h^{\delta\gamma}) &= g^{\delta\gamma},
\end{aligned} \tag{319}$$

donde concluimos que o tensor métrico inverso perturbado é dado por:

$$g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} - \epsilon h^{\alpha\beta}. \tag{320}$$

Assim, determinando a conexão métrica afim, os símbolos de Christoffel de segundo tipo dados pela Eq. (120) e (127):

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} &= \frac{1}{2}g^{\alpha\delta}\{\beta\gamma, \delta\} \\
&= \frac{1}{2}g^{\alpha\delta}\{\partial_{\beta}g_{\gamma\delta} + \partial_{\gamma}g_{\beta\delta} - \partial_{\delta}g_{\beta\gamma}\},
\end{aligned}$$

para a métrica linearmente perturbada:

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \epsilon h_{\alpha\beta},$$

sendo a métrica inversa linearmente perturbada:

$$g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} - \epsilon h^{\alpha\beta}, \tag{321}$$

temos:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} &= \frac{1}{2}(\eta^{\alpha\delta} - \epsilon h^{\alpha\delta})[\partial_{\beta}(\eta_{\gamma\delta} + \epsilon h_{\gamma\delta}) + \partial_{\gamma}(\eta_{\beta\delta} + \epsilon h_{\beta\delta}) - \partial_{\delta}(\eta_{\beta\gamma} + \epsilon h_{\beta\gamma})] \\
&= \frac{1}{2}(\eta^{\alpha\delta} - \epsilon h^{\alpha\delta})[\epsilon\partial_{\beta}h_{\gamma\delta} + \epsilon\partial_{\gamma}h_{\beta\delta} - \epsilon\partial_{\delta}h_{\beta\gamma}] \\
&= \frac{1}{2}\eta^{\alpha\delta}\epsilon\partial_{\beta}h_{\gamma\delta} + \frac{1}{2}\eta^{\alpha\delta}\epsilon\partial_{\gamma}h_{\beta\delta} - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\delta}\epsilon\partial_{\delta}h_{\beta\gamma} - \frac{1}{2}h^{\alpha\delta}\epsilon^2\partial_{\beta}h_{\gamma\delta} - \frac{1}{2}h^{\alpha\delta}\epsilon^2\partial_{\gamma}h_{\beta\delta} + \frac{1}{2}h^{\alpha\delta}\epsilon^2\partial_{\delta}h_{\beta\gamma} \\
&= \frac{1}{2}\epsilon\eta^{\alpha\delta}(\partial_{\beta}h_{\gamma\delta} + \partial_{\gamma}h_{\beta\delta} - \partial_{\delta}h_{\beta\gamma}) - \frac{1}{2}\epsilon^2h^{\alpha\delta}(\partial_{\beta}h_{\gamma\delta} + \partial_{\gamma}h_{\beta\delta} - \partial_{\delta}h_{\beta\gamma}) \stackrel{\epsilon^2 \rightarrow 0}{\therefore} \\
\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} &= \frac{1}{2}\epsilon\eta^{\alpha\delta}(\partial_{\beta}h_{\gamma\delta} + \partial_{\gamma}h_{\beta\delta} - \partial_{\delta}h_{\beta\gamma}).
\end{aligned} \tag{322}$$

Calculamos o tensor de Riemann, Eq. (147):

$$R_{\beta\gamma\delta}^{\alpha} = \partial_{\gamma}\Gamma_{\beta\delta}^{\alpha} - \partial_{\delta}\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} + \Gamma_{\epsilon\gamma}^{\alpha}\Gamma_{\beta\delta}^{\epsilon} - \Gamma_{\beta\gamma}^{\epsilon}\Gamma_{\delta}^{\alpha\epsilon}, \tag{323}$$

para a conexão métrica afim linearmente perturbada dada pela Eq. (322). Pela Eq. (322), vemos que os dois

últimos termos no lado direito da Eq. (323) conterão o fator  $\epsilon^2$ , os quais serão desprezados pois estamos interessados em termos de primeira ordem em  $\epsilon$ , i.e.,  $\epsilon^2 \rightarrow 0$ .

Assim, o tensor de Riemann será dado somente por:

$$R_{\beta\gamma\delta}^{\alpha} = \partial_{\gamma}\Gamma_{\beta\delta}^{\alpha} - \partial_{\delta}\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}, \quad (324)$$

donde, em virtude da Eq. (322) para a conexão linearmente perturbada, temos:

$$\begin{aligned} R_{\beta\gamma\delta}^{\alpha} &= \partial_{\gamma} \left[ \frac{1}{2} \epsilon \eta^{\alpha\varphi} (\partial_{\beta} h_{\delta\varphi} + \partial_{\delta} h_{\beta\varphi} - \partial_{\varphi} h_{\beta\delta}) \right] - \partial_{\delta} \left[ \frac{1}{2} \epsilon \eta^{\alpha\mu} (\partial_{\beta} h_{\gamma\mu} + \partial_{\gamma} h_{\beta\mu} - \partial_{\mu} h_{\beta\gamma}) \right] \\ &= \frac{1}{2} \epsilon \eta^{\alpha\varphi} \left( \frac{\partial^2 h_{\delta\varphi}}{\partial x^{\gamma} \partial x^{\beta}} + \frac{\partial^2 h_{\beta\varphi}}{\partial x^{\gamma} \partial x^{\delta}} - \frac{\partial^2 h_{\beta\delta}}{\partial x^{\gamma} \partial x^{\varphi}} \right) - \frac{1}{2} \epsilon \eta^{\alpha\mu} \left( \frac{\partial^2 h_{\gamma\mu}}{\partial x^{\delta} \partial x^{\beta}} + \frac{\partial^2 h_{\beta\mu}}{\partial x^{\delta} \partial x^{\gamma}} - \frac{\partial^2 h_{\beta\gamma}}{\partial x^{\delta} \partial x^{\mu}} \right) \xrightarrow{\text{dummy } \mu \rightarrow \varphi} \\ R_{\beta\gamma\delta}^{\alpha} &= \frac{1}{2} \epsilon \eta^{\alpha\varphi} \left( \frac{\partial^2 h_{\delta\varphi}}{\partial x^{\gamma} \partial x^{\beta}} + \frac{\partial^2 h_{\beta\varphi}}{\partial x^{\gamma} \partial x^{\delta}} - \frac{\partial^2 h_{\beta\delta}}{\partial x^{\gamma} \partial x^{\varphi}} \right) - \frac{1}{2} \epsilon \eta^{\alpha\varphi} \left( \frac{\partial^2 h_{\gamma\varphi}}{\partial x^{\delta} \partial x^{\beta}} + \frac{\partial^2 h_{\beta\varphi}}{\partial x^{\delta} \partial x^{\gamma}} - \frac{\partial^2 h_{\beta\gamma}}{\partial x^{\delta} \partial x^{\varphi}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \epsilon \eta^{\alpha\varphi} \left[ \frac{\partial^2 h_{\delta\varphi}}{\partial x^{\gamma} \partial x^{\beta}} + \frac{\partial^2 h_{\beta\gamma}}{\partial x^{\delta} \partial x^{\varphi}} + \left( \frac{\partial^2 h_{\beta\varphi}}{\partial x^{\gamma} \partial x^{\delta}} - \frac{\partial^2 h_{\beta\varphi}}{\partial x^{\delta} \partial x^{\gamma}} \right) - \frac{\partial^2 h_{\beta\delta}}{\partial x^{\gamma} \partial x^{\varphi}} - \frac{\partial^2 h_{\gamma\varphi}}{\partial x^{\delta} \partial x^{\beta}} \right] \\ \therefore \\ R_{\beta\gamma\delta}^{\alpha} &= \frac{1}{2} \epsilon \eta^{\alpha\varphi} \left( \frac{\partial^2 h_{\delta\varphi}}{\partial x^{\gamma} \partial x^{\beta}} + \frac{\partial^2 h_{\beta\gamma}}{\partial x^{\delta} \partial x^{\varphi}} - \frac{\partial^2 h_{\beta\delta}}{\partial x^{\gamma} \partial x^{\varphi}} - \frac{\partial^2 h_{\gamma\varphi}}{\partial x^{\delta} \partial x^{\beta}} \right). \end{aligned} \quad (325)$$

Calculemos o tensor de Ricci linearmente perturbado. Dado que o tensor de Ricci é dado pela Eq. (149), temos, em virtude da Eq. (325) para o tensor de curvatura de

Riemann linearmente perturbado, que o tensor de Ricci linearmente perturbado é dado por:

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta} &= R_{\alpha\gamma\beta}^{\gamma} = \frac{1}{2} \epsilon \eta^{\gamma\varphi} \left( \frac{\partial^2 h_{\beta\varphi}}{\partial x^{\gamma} \partial x^{\alpha}} + \frac{\partial^2 h_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta} \partial x^{\varphi}} - \frac{\partial^2 h_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma} \partial x^{\varphi}} - \frac{\partial^2 h_{\gamma\varphi}}{\partial x^{\beta} \partial x^{\alpha}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \epsilon \eta^{\gamma\varphi} \frac{\partial^2 h_{\beta\varphi}}{\partial x^{\gamma} \partial x^{\alpha}} + \frac{1}{2} \epsilon \eta^{\gamma\varphi} \frac{\partial^2 h_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta} \partial x^{\varphi}} - \frac{1}{2} \epsilon \eta^{\gamma\varphi} \frac{\partial^2 h_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma} \partial x^{\varphi}} - \frac{1}{2} \epsilon \eta^{\gamma\varphi} \frac{\partial^2 h_{\gamma\varphi}}{\partial x^{\beta} \partial x^{\alpha}}. \end{aligned} \quad (326)$$

Defina-se o operador d'Alambertiano:

$$\begin{aligned} \square &\equiv \eta^{\gamma\varphi} \partial_{\gamma} \partial_{\varphi} = \partial^{\varphi} \partial_{\varphi} \\ &= \eta^{00} \partial_0 \partial_0 + \eta^{11} \partial_1 \partial_1 + \eta^{22} \partial_2 \partial_2 + \eta^{33} \partial_3 \partial_3. \end{aligned} \quad (327)$$

Uma vez que o tensor métrico de Minkowski é diagonal, temos que o tensor métrico inverso de Minkowski é dado

por:

$$\begin{aligned} \eta^{\alpha\alpha} &= \frac{1}{\eta_{\alpha\alpha}} \\ \therefore \\ \eta^{\alpha\beta} &= \text{diag} \left[ \frac{1}{\eta_{00}}, \frac{1}{\eta_{11}}, \frac{1}{\eta_{22}}, \frac{1}{\eta_{33}} \right] = \text{diag} [+1, -1, -1, -1], \end{aligned} \quad (328)$$

em virtude da Eq. (314). Assim, a Eq. (327) torna-se:

$$\begin{aligned} \square &\equiv \eta^{\gamma\varphi} \partial_{\gamma} \partial_{\varphi} = \partial^{\varphi} \partial_{\varphi} \\ &= \eta^{00} \partial_0 \partial_0 + \eta^{11} \partial_1 \partial_1 + \eta^{22} \partial_2 \partial_2 + \eta^{33} \partial_3 \partial_3 \\ &= \partial_0 \partial_0 - \partial_1 \partial_1 - \partial_2 \partial_2 - \partial_3 \partial_3 \\ &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \quad (329)$$

Pela Eq. (329), o terceiro termo do lado direito da Eq. (326) é reescrito:

$$-\frac{1}{2} \epsilon \eta^{\gamma\varphi} \frac{\partial^2 h_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma} \partial x^{\varphi}} = -\frac{1}{2} \epsilon \square h_{\alpha\beta}. \quad (330)$$

Substituindo o resultado dado pela Eq. (330) na Eq. (326), temos que se reescreve o tensor de Ricci linear-

mente perturbado:

$$R_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\epsilon \left[ \eta^{\gamma\varphi} \left( \frac{\partial^2 h_{\beta\varphi}}{\partial x^\gamma \partial x^\alpha} + \frac{\partial^2 h_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta \partial x^\varphi} - \frac{\partial^2 h_{\gamma\varphi}}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} \right) - \square h_{\alpha\beta} \right]. \quad (331)$$

Determinemos o escalar de curvatura, i.e., o escalar de Ricci, dado pelo traço do tensor de Ricci, viz., pela contração dada pela Eq. (255):

$$\begin{aligned} R &= g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} = R^\beta_\beta \\ &= (\eta^{\alpha\beta} - \epsilon h^{\alpha\beta}) R_{\alpha\beta} \\ &= \eta^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} - \epsilon h^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (332)$$

fator  $\epsilon^2$ , que temos desprezado por ser de segunda ordem. Assim, a Eq. (332) torna-se simplesmente:

$$R = R^\beta_\beta = \eta^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}, \quad (333)$$

em virtude da Eq. (320). Vemos pela Eq. (331) que o segundo termo no lado direito da Eq. (332) conterà o

com  $R_{\alpha\beta}$  sendo dado pela Eq. (331). Assim, o escalar de Ricci é dado por:

$$\begin{aligned} R &= \eta^{\alpha\beta} \cdot \frac{1}{2}\epsilon \left[ \eta^{\gamma\varphi} \left( \frac{\partial^2 h_{\beta\varphi}}{\partial x^\gamma \partial x^\alpha} + \frac{\partial^2 h_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta \partial x^\varphi} - \frac{\partial^2 h_{\gamma\varphi}}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} \right) - \square h_{\alpha\beta} \right] \\ &= \frac{1}{2}\epsilon \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^\gamma \partial x^\alpha} (\eta^{\alpha\beta} \eta^{\gamma\varphi} h_{\beta\varphi}) + \frac{\partial^2}{\partial x^\beta \partial x^\varphi} (\eta^{\alpha\beta} \eta^{\gamma\varphi} h_{\alpha\gamma}) - \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} (\eta^{\gamma\varphi} h_{\gamma\varphi}) - \square (\eta^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}) \right] \\ &= \frac{1}{2}\epsilon \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^\gamma \partial x^\alpha} h^{\alpha\gamma} + \frac{\partial^2}{\partial x^\beta \partial x^\varphi} h^{\beta\varphi} - \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} h^\varphi_\varphi - \square h^\alpha_\alpha \right]. \end{aligned} \quad (334)$$

Renomendo os índices mudos na Eq. (334):  $\gamma \rightarrow \beta$ ,  $\varphi \rightarrow \alpha$ , temos

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{2}\epsilon \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} h^{\alpha\beta} + \frac{\partial^2}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} h^{\beta\alpha} - \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} h^\alpha_\alpha - \square h^\alpha_\alpha \right] \\ &= \frac{1}{2}\epsilon \left[ 2 \frac{\partial^2}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} h^{\alpha\beta} - \square h^\alpha_\alpha - \square h^\alpha_\alpha \right] \\ &= \frac{1}{2}\epsilon \left[ 2 \frac{\partial^2}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} h^{\alpha\beta} - 2 \square h^\alpha_\alpha \right] \\ &= \epsilon \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} h^{\alpha\beta} - \square h^\alpha_\alpha \right], \end{aligned} \quad (335)$$

onde utilizamos a Eq. (329). Chamando o traço:

$$h \equiv h^\alpha_\alpha, \quad (336)$$

temos que o escalar de Ricci, Eq. (335), pode ser reescrito:

$$R = R^\alpha_\alpha = \epsilon \left( \frac{\partial^2}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} h^{\alpha\beta} - \square h \right). \quad (337)$$

Com as Eqs. (254), (315), (331) e (337), escrevemos o tensor de Einstein:

$$\begin{aligned}
G_{\alpha\beta} &= R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R \\
&= \frac{1}{2}\epsilon \left[ \eta^{\gamma\varphi} \left( \frac{\partial^2 h_{\beta\varphi}}{\partial x^\gamma \partial x^\alpha} + \frac{\partial^2 h_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta \partial x^\varphi} - \frac{\partial^2 h_{\gamma\varphi}}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} \right) - \square h_{\alpha\beta} \right] - \frac{1}{2}(\eta_{\alpha\beta} + \epsilon h_{\alpha\beta}) \epsilon \left( \frac{\partial^2}{\partial x^\gamma \partial x^\varphi} h^{\gamma\varphi} - \square h \right) \\
&= \frac{1}{2}\epsilon \left[ \eta^{\gamma\varphi} \left( \frac{\partial^2 h_{\beta\varphi}}{\partial x^\gamma \partial x^\alpha} + \frac{\partial^2 h_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta \partial x^\varphi} - \frac{\partial^2 h_{\gamma\varphi}}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} \right) - \square h_{\alpha\beta} \right] - \frac{1}{2}\epsilon \eta_{\alpha\beta} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^\gamma \partial x^\varphi} h^{\gamma\varphi} - \square h \right), \tag{338}
\end{aligned}$$

onde desprezamos o termo de segunda ordem em  $\epsilon$ . Agora, definimos o traço reverso em função de  $h_{\alpha\beta}$ , cuja denominação ficará clara a seguir:

$$\psi_{\alpha\beta} \equiv h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}h, \tag{339}$$

onde  $h_{\alpha\beta}$  e  $h = h^\alpha_\alpha$  foram definidos anteriormente, sendo  $\eta_{\alpha\beta}$  o tensor métrico da relatividade especial nas coordenadas de Minkowski. Efetuando a contração pelo tensor métrico de Minkowski, temos as quantidades  $\psi^\gamma_\beta$  e  $h^\gamma_\beta$ , i.e.:

$$\psi_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\gamma}\psi^\gamma_\beta; \tag{340}$$

$$h_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\gamma}h^\gamma_\beta. \tag{341}$$

Também, podemos escrever:

$$\eta_{\alpha\beta}h = \eta_{\alpha\gamma}\delta^\gamma_\beta h. \tag{342}$$

Pelas Eqs. (339), (340), (341) e (342), temos:

$$\begin{aligned}
\psi_{\alpha\beta} &= \\
&= \eta_{\alpha\gamma}\psi^\gamma_\beta = h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}h \\
&= \eta_{\alpha\gamma}h^\gamma_\beta - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\gamma}\delta^\gamma_\beta h \\
&= \eta_{\alpha\gamma} \left( h^\gamma_\beta - \frac{1}{2}\delta^\gamma_\beta h \right), \tag{343}
\end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned}
\eta_{\alpha\gamma} \left( \psi^\gamma_\beta - h^\gamma_\beta + \frac{1}{2}\delta^\gamma_\beta h \right) &= 0 \Rightarrow \\
\eta^{\delta\alpha}\eta_{\alpha\gamma} \left( \psi^\gamma_\beta - h^\gamma_\beta + \frac{1}{2}\delta^\gamma_\beta h \right) &= 0 \Rightarrow \\
\delta^\delta_\gamma \left( \psi^\gamma_\beta - h^\gamma_\beta + \frac{1}{2}\delta^\gamma_\beta h \right) &= 0 \Rightarrow \\
\psi^\delta_\beta - h^\delta_\beta + \frac{1}{2}\delta^\delta_\beta h &= 0 \Rightarrow \\
\delta^\beta_\delta \psi^\delta_\beta - \delta^\beta_\delta h^\delta_\beta + \frac{1}{2}\delta^\beta_\delta \delta^\delta_\beta h &= 0 \Rightarrow \\
\psi^\beta_\beta - h^\beta_\beta + \frac{1}{2}\delta^\beta_\beta h &= 0 \Rightarrow \\
\psi - h + \frac{1}{2} \cdot 4h &= 0 \Rightarrow \\
\psi - h + 2h = 0 \Rightarrow \psi + h = 0 \Rightarrow \psi = -h \quad \therefore \\
\psi^\beta_\beta = -h^\beta_\beta, \tag{344}
\end{aligned}$$

donde se desnuda a denominação de traço reverso. Usando as Eqs. (339) e (344) na Eq. (338), temos que o tensor de Einstein torna-se:

$$G_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\epsilon \left[ \eta^{\gamma\varphi} \left( \frac{\partial^2 h_{\beta\varphi}}{\partial x^\gamma \partial x^\alpha} + \frac{\partial^2 h_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta \partial x^\varphi} - \frac{\partial^2 h_{\gamma\varphi}}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} \right) - \square h_{\alpha\beta} \right] - \frac{1}{2}\epsilon \eta_{\alpha\beta} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^\gamma \partial x^\varphi} h^{\gamma\varphi} - \square h \right). \tag{345}$$

Um vez que:

$$h_{\beta\varphi} = \psi_{\beta\varphi} + \frac{1}{2}\eta_{\beta\varphi}h; \tag{346}$$

$$h_{\alpha\gamma} = \psi_{\alpha\gamma} + \frac{1}{2}\eta_{\alpha\gamma}h; \tag{347}$$

$$h_{\gamma\varphi} = \psi_{\gamma\varphi} + \frac{1}{2}\eta_{\gamma\varphi}h, \tag{348}$$

temos que:

$$\begin{aligned}
\eta^{\gamma\varphi}h_{\beta\varphi} &= \eta^{\gamma\varphi} \left( \psi_{\beta\varphi} + \frac{1}{2}\eta_{\beta\varphi}h \right) \\
&= \eta^{\gamma\varphi}\psi_{\beta\varphi} + \frac{1}{2}\eta^{\gamma\varphi}\eta_{\beta\varphi}h \\
&= \eta^{\gamma\varphi}\psi_{\beta\varphi} + \frac{1}{2}\delta^\gamma_\beta h; \tag{349}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta^{\gamma\varphi} h_{\alpha\gamma} &= \eta^{\gamma\varphi} \left( \psi_{\alpha\gamma} + \frac{1}{2} \eta_{\alpha\gamma} h \right) \\
&= \eta^{\gamma\varphi} \psi_{\alpha\gamma} + \frac{1}{2} \eta^{\gamma\varphi} \eta_{\alpha\gamma} h \\
&= \eta^{\gamma\varphi} \psi_{\alpha\gamma} + \frac{1}{2} \delta_{\alpha}^{\varphi} h; \tag{350}
\end{aligned}$$

Ainda, note-se que:

$$\begin{aligned}
\eta^{\gamma\varphi} h_{\gamma\varphi} &= \eta^{\gamma\varphi} \left( \psi_{\gamma\varphi} + \frac{1}{2} \eta_{\gamma\varphi} h \right) \\
&= \eta^{\gamma\varphi} \psi_{\gamma\varphi} + \frac{1}{2} \eta^{\gamma\varphi} \eta_{\gamma\varphi} h \\
&= \eta^{\gamma\varphi} \psi_{\gamma\varphi} + \frac{1}{2} \delta_{\gamma}^{\gamma} h \\
&= \eta^{\gamma\varphi} \psi_{\gamma\varphi} + \frac{1}{2} (\delta_0^0 + \delta_1^1 + \delta_2^2 + \delta_3^3) h \\
&= \eta^{\gamma\varphi} \psi_{\gamma\varphi} + \frac{1}{2} \cdot 4h \\
&= \eta^{\gamma\varphi} \psi_{\gamma\varphi} + 2h \\
&= \psi_{\varphi} + 2h \\
&= \psi + 2h. \tag{351}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_{\alpha\beta} &= \psi_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} h \Rightarrow \\
\eta^{\gamma\alpha} h_{\alpha\beta} &= \eta^{\gamma\alpha} \psi_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \eta^{\gamma\alpha} \eta_{\alpha\beta} h \Rightarrow \\
h^{\gamma}_{\beta} &= \psi^{\gamma}_{\beta} + \frac{1}{2} \delta_{\beta}^{\gamma} h \Rightarrow \\
\eta^{\varphi\beta} h^{\gamma}_{\beta} &= \eta^{\varphi\beta} \psi^{\gamma}_{\beta} + \frac{1}{2} \eta^{\varphi\beta} \delta_{\beta}^{\gamma} h \Rightarrow \\
h^{\gamma\varphi} &= \psi^{\gamma\varphi} + \frac{1}{2} \eta^{\varphi\gamma} h. \tag{353}
\end{aligned}$$

Substituindo as Eqs. (346), (347), (348), (349), (350) e (351) na Eq. (345), tem-se:

$$\begin{aligned}
G_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \epsilon \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^{\gamma} \partial x^{\alpha}} \left( \eta^{\gamma\varphi} \psi_{\beta\varphi} + \frac{1}{2} \delta_{\beta}^{\gamma} h \right) + \right. \\
&+ \frac{\partial^2}{\partial x^{\beta} \partial x^{\varphi}} \left( \eta^{\gamma\varphi} \psi_{\alpha\gamma} + \frac{1}{2} \delta_{\alpha}^{\varphi} h \right) + \\
&- \frac{\partial^2}{\partial x^{\beta} \partial x^{\alpha}} (\psi + 2h) - \square \left( \psi_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} h \right) \left. \right] + \\
&- \frac{1}{2} \epsilon \eta_{\alpha\beta} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^{\gamma} \partial x^{\varphi}} h^{\gamma\varphi} - \square h \right). \tag{352}
\end{aligned}$$

Substituindo o resultado da Eq. (353) na Eq. (352), e reescrevendo alguns termos trivialmente, temos:

$$\begin{aligned}
G_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \epsilon \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^{\gamma} \partial x^{\alpha}} \psi^{\gamma}_{\beta} + \frac{1}{2} \delta_{\beta}^{\gamma} \frac{\partial^2}{\partial x^{\gamma} \partial x^{\alpha}} h + \frac{\partial^2}{\partial x^{\beta} \partial x^{\varphi}} \psi^{\varphi}_{\alpha} + \frac{1}{2} \delta_{\alpha}^{\varphi} \frac{\partial^2}{\partial x^{\beta} \partial x^{\varphi}} h - \frac{\partial^2}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} h - \square \psi_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \square h \right] + \\
&- \frac{1}{2} \epsilon \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial x^{\gamma} \partial x^{\varphi}} \left( \psi^{\gamma\varphi} + \frac{1}{2} \eta^{\gamma\varphi} h \right) + \frac{1}{2} \epsilon \eta_{\alpha\beta} \square h \\
&= \frac{1}{2} \epsilon \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^{\gamma} \partial x^{\alpha}} \psi^{\gamma}_{\beta} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} h + \frac{\partial^2}{\partial x^{\beta} \partial x^{\varphi}} \psi^{\varphi}_{\alpha} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} h - \frac{\partial^2}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} h - \square \psi_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \square h \right] + \\
&- \frac{1}{2} \epsilon \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial x^{\gamma} \partial x^{\varphi}} \psi^{\gamma\varphi} - \frac{1}{4} \epsilon \eta_{\alpha\beta} \underbrace{\eta^{\gamma\varphi} \frac{\partial^2}{\partial x^{\gamma} \partial x^{\varphi}} h}_{\square h} + \frac{1}{2} \epsilon \eta_{\alpha\beta} \square h \\
&= \frac{1}{2} \epsilon \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\gamma}} \psi^{\gamma}_{\beta} + \frac{\partial^2}{\partial x^{\beta} \partial x^{\gamma}} \psi^{\gamma}_{\alpha} - \square \psi_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \square h \right] - \frac{1}{2} \epsilon \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial x^{\gamma} \partial x^{\varphi}} \psi^{\gamma\varphi} - \frac{1}{4} \epsilon \eta_{\alpha\beta} \square h + \frac{1}{2} \epsilon \eta_{\alpha\beta} \square h \\
&= \frac{1}{2} \epsilon \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\gamma}} \psi^{\gamma}_{\beta} + \frac{\partial^2}{\partial x^{\beta} \partial x^{\gamma}} \psi^{\gamma}_{\alpha} - \square \psi_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \square h - \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial x^{\gamma} \partial x^{\varphi}} \psi^{\gamma\varphi} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \square h + \eta_{\alpha\beta} \square h \right] \\
&\vdots \\
G_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \epsilon \left( \frac{\partial^2}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\gamma}} \psi^{\gamma}_{\beta} + \frac{\partial^2}{\partial x^{\beta} \partial x^{\gamma}} \psi^{\gamma}_{\alpha} - \square \psi_{\alpha\beta} - \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial x^{\gamma} \partial x^{\varphi}} \psi^{\gamma\varphi} \right). \tag{354}
\end{aligned}$$

A Eq. (354) sugere que a imposição da condição:

$$\eta^{\alpha\gamma} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \psi_{\gamma\beta} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\eta^{\alpha\gamma} \psi_{\gamma\beta}) = \psi_{\beta,\alpha}^\alpha = 0, \quad (355)$$

reduzirá as Eqs. de campo a Eqs. de onda, que, em virtude da Eq. (339) para o traço reverso, fornece:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\eta^{\alpha\gamma} \psi_{\gamma\beta}) &= \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left[ \eta^{\alpha\gamma} \left( h_{\gamma\beta} - \frac{1}{2} \eta_{\gamma\beta} h \right) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\alpha} h_{\beta}^\alpha - \frac{1}{2} \eta^{\alpha\gamma} \eta_{\gamma\beta} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} h \\ &= h_{\beta,\alpha}^\alpha - \frac{1}{2} \delta_\beta^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} h \\ &= h_{\beta,\alpha}^\alpha - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\beta} h \\ &= h_{\beta,\alpha}^\alpha - \frac{1}{2} h_{,\beta} \\ &= 0 \quad \therefore \\ h_{\beta,\alpha}^\alpha - \frac{1}{2} h_{,\beta} &= 0, \end{aligned} \quad (356)$$

que é conhecido como *gauge de Einstein*. O gauge de Einstein pode ser obtido pela imposição de uma transformação de gauge, i.e., uma transformação de coordenadas:

$$x^\alpha \rightarrow x^\alpha + \epsilon V^\alpha \quad (357)$$

que mantém o tensor de curvatura de Riemann e suas contrações [o tensor de Ricci e o escalar de curvatura] invariantes até primeira ordem em  $\epsilon$ . Como o nosso objetivo é obter o acoplamento à gravitação newtoniana, no momento, não nos interessa os pormenores de obtenção do gauge de Einstein, mas que se aponte que a transformação de gauge acima leva à Eqs. de onda com fonte para o campo dual  $V_\alpha$ :

$$\square V_\alpha = \psi_{\alpha,\beta}^\beta, \quad (358)$$

que é suficiente para que se satisfaça o gauge de Einstein, viz., escolhendo-se  $V_\alpha$  satisfazendo a Eq. (358). Para que determinemos o acoplamento à gravitação newtoniana, é natural que se faça uma aproximação para campo fraco. Também se espera que o campo gravitacional tenha variação lenta, i.e., que as variações do campo não sejam extremamente bruscas. O aparato perturbativo para a métrica foi desenvolvido há pouco, i.e., esperamos que a métrica de fundo seja uma perturbação pequena em relação à métrica de Minkowski, o que se ratificou pela Eq. (315), sendo que se põe a métrica de Minkowski no referencial de Minkowski para a cobertura:

$$(x^\alpha) = (x^0, x^a) = (x^0, x^1, x^2, x^3), \quad (359)$$

com:

$$x^0 \equiv t; \quad (360)$$

$$x^1 \equiv x; \quad (361)$$

$$x^2 \equiv y; \quad (362)$$

$$x^3 \equiv z, \quad (363)$$

por requisito de cobertura para a métrica de Minkowski:

$$\eta_{\alpha\beta} = \text{diag} [+1, -1, -1, -1]. \quad (364)$$

Para que ponhamos mais claramente a Eq. (315) no contexto Newtoniano, faz-se necessário o estabelecimento de critério físico que caracterize esse limite. No domínio newtoniano, esperamos que qualquer deslocamento componente escalar tridimensional  $\delta x^a$  num intervalo de tempo  $\delta t$  seja pequeno no seguinte sentido:

$$\frac{\delta x^a}{\delta t} = \frac{\delta x^a}{\delta x^0} \equiv v \approx \epsilon \ll 1, \quad (365)$$

em unidas geométricas, i.e., ainda não estamos preocupados com unidades físicas, apenas com a coerência matemática que proveja o critério para baixas velocidades no sentido da Eq. (365), de modo a ser esse o significado perturbativo para  $\epsilon$  na Eq. (315). A Eq. (365) permite que escrevamos:

$$\frac{\delta x^\alpha}{\delta x^0} \approx \epsilon \frac{\delta \phi}{\delta \phi}, \quad (366)$$

donde:

$$\frac{\delta \phi}{\delta x^0} \approx \epsilon \frac{\delta \phi}{\delta x^a}, \quad (367)$$

onde  $\phi$  é uma função qualquer tal que:

$$\phi \equiv \phi(x^\alpha), \quad (368)$$

i.e., uma função das coordenadas, com  $\epsilon \ll 1$ . Ademais, o comprimento elementar da trajetória 4-dimensional de uma partícula teste:

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \\ &\approx \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \\ &= dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \\ &= dt^2 - dr^2, \end{aligned}$$

donde:

$$\left( \frac{ds}{dt} \right)^2 \approx 1 - (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \approx 1 - \epsilon^2. \quad (369)$$

tomando a raiz quadrada em ambos os lados da Eq. (369), temos:

$$\left| \frac{ds}{dt} \right| \approx 1 - \frac{1}{2} \epsilon^2 \approx 1 - \epsilon^2. \quad (370)$$

Assim, até primeira ordem em  $\epsilon$ , a parametrização da trajetória 4-dimensional de uma partícula teste massiva, partícula que se propaga numa geodésica do tipo tempo, pode ser tomada pela parametrização afim:

$$s \equiv u = t. \quad (371)$$

Tal resultado é obviamente plausível do ponto de vista Newtoniano, uma vez que não se verificam efeitos de dilatação temporal em tal domínio dinâmico de baixas velocidades. Assim, uma vez que a trajetória 4-dimensional de partículas-teste massivas serão geodésicas do tipo tempo, temos que as trajetórias dessas partículas serão descritas pela Eq. (134) que, em virtude da parametrização dada pela Eq. (371), torna-se:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{dt} \frac{dx^\gamma}{dt} = 0. \quad (372)$$

A conexão será dada pela conexão métrica afim, dada pelas Eqs. (127) e (120). Dentro da aproximação que fazemos, aplicamos as Eqs. (315) para o tensor métrico perturbado e a Eq. (320) para o tensor inverso perturbado à Eq. (120), levando esse resultado à Eq. (127), i.e.:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha &= \frac{1}{2} g^{\alpha\delta} (\partial_\beta g_{\gamma\delta} + \partial_\gamma g_{\beta\delta} - \partial_\delta g_{\beta\gamma}) \\ &= \frac{1}{2} (\eta^{\alpha\delta} - \epsilon h^{\alpha\delta}) [\partial_\beta (\eta_{\gamma\delta} + \epsilon h_{\gamma\delta}) + \partial_\gamma (\eta_{\beta\delta} + \epsilon h_{\beta\delta}) - \partial_\delta (\eta_{\beta\gamma} + \epsilon h_{\beta\gamma})] \\ &= \frac{1}{2} (\eta^{\alpha\delta} - \epsilon h^{\alpha\delta}) \epsilon (\partial_\beta h_{\gamma\delta} + \partial_\gamma h_{\beta\delta} - \partial_\delta h_{\beta\gamma}) \\ &= \frac{1}{2} \epsilon \eta^{\alpha\delta} (\partial_\beta h_{\gamma\delta} + \partial_\gamma h_{\beta\delta} - \partial_\delta h_{\beta\gamma}) + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (373)$$

$$\begin{aligned} &\therefore \\ \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha &= O(\epsilon), \end{aligned} \quad (374)$$

uma vez que o tensor métrico de Minkowski, Eq. (364), é um tensor constante nas coordenadas de Minkowski

dadas pelas Eqs. de (360) até (363). Expandindo a Eq. das geodésicas, Eq. (372), temos:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} + \Gamma_{00}^\alpha \frac{dx^0}{dt} \frac{dx^0}{dt} + \Gamma_{0\gamma}^\alpha \frac{dx^0}{dt} \frac{dx^\gamma}{dt} + \Gamma_{\beta 0}^\alpha \frac{dx^\beta}{dt} \frac{dx^0}{dt} + \Gamma_{bc}^\alpha \frac{dx^b}{dt} \frac{dx^c}{dt} &= 0 \Rightarrow \\ \frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} + \Gamma_{00}^\alpha \frac{dx^0}{dt} \frac{dx^0}{dt} + \Gamma_{0\gamma}^\alpha \frac{dx^0}{dt} \frac{dx^\gamma}{dt} + \Gamma_{0\beta}^\alpha \frac{dx^0}{dt} \frac{dx^\beta}{dt} + \Gamma_{bc}^\alpha \frac{dx^b}{dt} \frac{dx^c}{dt} &= 0 \Rightarrow \\ \frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} + \Gamma_{00}^\alpha \frac{dx^0}{dt} \frac{dx^0}{dt} + \Gamma_{0\beta}^\alpha \frac{dx^0}{dt} \frac{dx^\beta}{dt} + \Gamma_{0\beta}^\alpha \frac{dx^0}{dt} \frac{dx^\beta}{dt} + \Gamma_{bc}^\alpha \frac{dx^b}{dt} \frac{dx^c}{dt} &= 0 \Rightarrow \\ \frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} + \Gamma_{00}^\alpha \frac{dx^0}{dt} \frac{dx^0}{dt} + 2\Gamma_{0\beta}^\alpha \frac{dx^0}{dt} \frac{dx^\beta}{dt} + \Gamma_{bc}^\alpha \frac{dx^b}{dt} \frac{dx^c}{dt} &= 0, \end{aligned} \quad (375)$$

onde aplicamos a simetria da conexão e exploramos a presença de índices mudos. Aplicando a Eq. (360), temos que a Eq. (375) torna-se:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} + \Gamma_{00}^\alpha + 2\Gamma_{0\beta}^\alpha \frac{dx^\beta}{dt} + \Gamma_{bc}^\alpha \frac{dx^b}{dt} \frac{dx^c}{dt} = 0. \quad (376)$$

Em virtude da Eq. (376) e (374), temos para a Eq. (376):

$$\frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} + \Gamma_{00}^\alpha + O(\epsilon^2) = 0. \quad (377)$$

Pela Eq. (373), temos:

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^\alpha &= \frac{1}{2} \epsilon \eta^{\alpha\delta} (\partial_0 h_{0\delta} + \partial_0 h_{0\delta} - \partial_\delta h_{00}) + O(\epsilon^2) \\ &= \frac{1}{2} \epsilon \eta^{\alpha\delta} (2\partial_0 h_{0\delta} - \partial_\delta h_{00}) + O(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (378)$$

Estamos apenas interessados nas Eqs. das geodésicas relacionadas às componentes puramente espaciais, uma vez que estamos no limite newtoniano, donde reescrevemos as Eqs. (377) e (378) para essas componentes, trocando simplesmente a notação  $\alpha \rightarrow a$ , como temos feito para os índices latinos que tomam somente os valores no

conjunto  $a \in \{1, 2, 3\}$ :

$$\frac{d^2 x^a}{dt^2} + \Gamma_{00}^a + O(\epsilon^2) = 0; \quad (379)$$

$$\Gamma_{00}^a = \frac{1}{2} \epsilon \eta^{\alpha\delta} (2\partial_0 h_{0\delta} - \partial_\delta h_{00}) + O(\epsilon^2). \quad (380)$$

Uma vez que a métrica de Minkowski  $\eta^{\alpha\beta}$  é diagonal, Eq. (364),  $\eta_{\alpha\beta} = 0$  se  $\alpha \neq \beta$ , com as componentes espaciais  $\eta_{aa} = -1$ , temos que a Eq. (380) torna-se:

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^a &= -\frac{1}{2} \epsilon (2\partial_0 h_{0a} - \partial_a h_{00}) + O(\epsilon^2) \\ &= -\frac{1}{2} \epsilon \left( 2 \frac{\partial}{\partial x^0} h_{0a} - \frac{\partial}{\partial x^a} h_{00} \right) + O(\epsilon^2), \end{aligned} \quad (381)$$

uma vez que a métrica inversa de Minkowski,  $\eta^{\alpha\beta}$ , é idêntica à métrica em si,  $\eta_{\alpha\beta}$ , conforme obtivemos na Eq. (328). Pela Eq. (367), temos que:

$$\frac{\partial h_{0a}}{\partial x^0} = O(\epsilon), \quad (382)$$

donde a Eq. (381) torna-se:

$$\Gamma_{00}^a = \frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial h_{00}}{\partial x^a} + O(\epsilon^2). \quad (383)$$

Substituindo a Eq. (383) na Eq. (379), tendo em vista a Eq. (315), temos:

$$\frac{d^2 x^a}{dt^2} \approx -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^a}. \quad (384)$$

Comparando com a segunda lei de Newton no contexto da gravitação Newtoniana:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x^a}{dt^2} &= F^a = -m (\nabla\phi)^a \Rightarrow \\ \frac{d^2 x^a}{dt^2} &= -\frac{\partial\phi}{\partial x^a}, \end{aligned} \quad (385)$$

onde  $\phi$  é o potencial gravitacional,  $m$  a massa de uma partícula-teste posta no campo gravitacional, temos que:

$$\frac{1}{2} g_{00} \approx \phi + C, \quad (386)$$

onde  $C$  é uma constante. Uma vez que  $r \rightarrow \infty$  deve implicar  $\phi \rightarrow 0$  e  $g_{00} \rightarrow 1$ , uma vez que se espera que o tensor métrico reduza-se ao tensor métrico de Minkowski na ausência ou longe de fontes de campo gravitacional, temos que  $C = 1/2$ . Assim, a Eq. (386) torna-se:

$$g_{00} = 1 + 2\phi + O(\epsilon). \quad (387)$$

Aplicando o gauge de Einstein dado pela Eq. (355) na Eq. (354) temos que o tensor de Einstein perturbado torna-se:

$$G_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \epsilon \square \psi_{\alpha\beta} + O(\epsilon^2), \quad (388)$$

que com a Eq. (339) para o traço reverso fornece:

$$G_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \epsilon \square \left( h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} h \right) + O(\epsilon^2). \quad (389)$$

A aproximação que estamos fazendo para o acoplamento com a gravitação Newtoniana não está necessariamente no contexto cosmológico, donde podemos tomar as Eqs. de campo de Einstein, dadas pela Eq. (253), com constante cosmológica nula,  $\Lambda = 0$ , uma vez que a constante de acoplamento  $\bar{\kappa}$  subsiste em qualquer caso em que se apliquem as Eqs. de campo. Assim, substituindo a Eq. (389) na Eq. (253), com  $\Lambda = 0$ , temos as Eqs. de campo perturbadas:

$$\frac{1}{2} \epsilon \square \left( h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} h \right) = -\bar{\kappa} T_{\alpha\beta} + O(\epsilon^2). \quad (390)$$

Contraindo com o tensor métrico inverso de Minkowski,  $\eta^{\alpha\beta}$ , temos que a Eq. (390) leva à Eq.:

$$\begin{aligned}
& \eta^{\alpha\beta} \frac{1}{2} \epsilon \square \left( h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \eta^{\gamma\delta} h_{\gamma\delta} \right) = -\bar{\kappa} \eta^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} \Rightarrow \\
& \frac{1}{2} \epsilon \square \left( \eta^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \eta_{\alpha\beta} \eta^{\gamma\delta} h_{\gamma\delta} \right) = -\bar{\kappa} \eta^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} \Rightarrow \\
& \frac{1}{2} \epsilon \square \left( \eta^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \delta_{\beta}^{\beta} \eta^{\gamma\delta} h_{\gamma\delta} \right) = -\bar{\kappa} \eta^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} \Rightarrow \\
& \frac{1}{2} \epsilon \square \left[ \eta^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} (\delta_0^0 + \delta_2^1 + \delta_2^2 + \delta_3^3) \eta^{\gamma\delta} h_{\gamma\delta} \right] = -\bar{\kappa} \eta^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} \Rightarrow \\
& \frac{1}{2} \epsilon \square \left[ \eta^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} (4) \eta^{\gamma\delta} h_{\gamma\delta} \right] = -\bar{\kappa} \eta^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} \Rightarrow \\
& \frac{1}{2} \epsilon \square \left[ \underbrace{\eta^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}}_{\text{dummy}} - 2 \eta^{\gamma\delta} h_{\gamma\delta} \right] = -\bar{\kappa} \eta^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} \Rightarrow \\
& \frac{1}{2} \epsilon \square \left[ \eta^{\gamma\delta} h_{\gamma\delta} - 2 \eta^{\gamma\delta} h_{\gamma\delta} \right] = -\bar{\kappa} \eta^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} \Rightarrow \\
& \frac{1}{2} \epsilon \square \left[ -\eta^{\gamma\delta} h_{\gamma\delta} \right] = -\bar{\kappa} \eta^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} \Rightarrow \\
& -\frac{1}{2} \epsilon \left[ \square (\eta^{\gamma\delta} h_{\gamma\delta}) \right] = -\bar{\kappa} \eta^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} \xrightarrow{\text{Eq. (329)}} \\
& -\frac{1}{2} \epsilon \left[ \eta^{\mu\nu} \partial_{\mu} \partial_{\nu} (\eta^{\gamma\delta} h_{\gamma\delta}) \right] = -\frac{1}{2} \epsilon \left\{ \left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right] (\eta^{\gamma\delta} h_{\gamma\delta}) \right\} = -\bar{\kappa} \eta^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} \Rightarrow \\
& -\frac{1}{2} \epsilon \left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\eta^{\gamma\delta} h_{\gamma\delta}) - \nabla^2 (\eta^{\gamma\delta} h_{\gamma\delta}) \right] = -\bar{\kappa} \eta^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} \Rightarrow \\
& -\frac{1}{2} \epsilon \left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} (h^{\delta}_{\delta}) - \nabla^2 (\eta^{\gamma\delta} h_{\gamma\delta}) \right] = -\bar{\kappa} \eta^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} \Rightarrow \\
& -\frac{1}{2} \epsilon \left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} h - \nabla^2 (\eta^{\gamma\delta} h_{\gamma\delta}) \right] = -\bar{\kappa} \eta^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} \xrightarrow{\text{Eq. (367)}} \\
& -\frac{1}{2} \epsilon \left[ O(\epsilon^2) - \nabla^2 (\eta^{\gamma\delta} h_{\gamma\delta}) \right] = -\bar{\kappa} \eta^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} \Rightarrow \\
& \frac{1}{2} \epsilon \nabla^2 (\eta^{\gamma\delta} h_{\gamma\delta}) = -\bar{\kappa} \eta^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} \Rightarrow \\
& \eta^{\gamma\delta} \frac{1}{2} \epsilon \nabla^2 (h_{\gamma\delta}) = -\bar{\kappa} \eta^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta}, \tag{391}
\end{aligned}$$

donde concluimos que temos de ter necessariamente:

$$\epsilon \nabla^2 h_{\gamma\delta} = -\frac{1}{2} \bar{\kappa} \eta_{\gamma\delta} \eta^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta}, \tag{392}$$

uma vez que  $\eta^{\gamma\delta} \eta_{\gamma\delta} = \delta_{\gamma}^{\gamma} = 4$ . Todavia, também se note que, em virtude da Eq. (390), que a contração pelo tensor métrico inverso de Minkowski fornece:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\epsilon \square \left( h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}h \right) &= -\bar{\kappa}T_{\alpha\beta} \quad \overset{\times \eta^{\alpha\beta}}{\therefore} \Rightarrow \\
\eta^{\alpha\beta} \frac{1}{2}\epsilon \square \left( h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}h \right) &= -\bar{\kappa}\eta^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta} \Rightarrow \\
\frac{1}{2}\epsilon \square \left( \eta^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\eta_{\alpha\beta}h \right) &= -\bar{\kappa}\eta^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta} \Rightarrow \\
\frac{1}{2}\epsilon \square \left( h^\beta_\beta - \frac{1}{2}\delta^\beta_\beta h \right) &= -\bar{\kappa}T^\beta_\beta \Rightarrow \\
\frac{1}{2}\epsilon \square \left( h - \frac{1}{2} \cdot 4h \right) &= -\bar{\kappa}T \Rightarrow \\
\frac{1}{2}\epsilon \square (h - 2h) &= -\bar{\kappa}T \Rightarrow \\
\frac{1}{2}\epsilon \square (-h) &= -\bar{\kappa}T \Rightarrow \\
\frac{1}{2}\epsilon \square h &= \bar{\kappa}T \quad \overset{\text{Eqs. (329), (367)}}{\Rightarrow} \\
\frac{1}{2}\epsilon [O(\epsilon^2) - \nabla^2 h] &= \bar{\kappa}T \Rightarrow \\
\frac{1}{2}\epsilon \nabla^2 h &= -\bar{\kappa}T \Rightarrow \\
\frac{1}{2}\epsilon \nabla^2 h^\beta_\beta &= -\bar{\kappa}T^\beta_\beta \Rightarrow \\
\frac{1}{2}\epsilon \nabla^2 (\eta^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}) &= -\bar{\kappa}(\eta^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta}) \Rightarrow \\
\eta^{\alpha\beta} \left( \frac{1}{2}\epsilon \nabla^2 h_{\alpha\beta} + \bar{\kappa}T_{\alpha\beta} \right) &= 0. \tag{393}
\end{aligned}$$

Para que se verifique a Eq. (393), é suficiente que:

$$-\frac{1}{2}\epsilon \nabla^2 h_{\alpha\beta} = \bar{\kappa}T_{\alpha\beta}. \tag{394}$$

Assim, pelas Eqs. (392) [renomeando os índices] e (394):

$$\epsilon \nabla^2 h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\epsilon \nabla^2 h_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\epsilon \nabla^2 h_{\alpha\beta} = -\bar{\kappa} \left( \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\eta^{\gamma\delta}T_{\gamma\delta} - T_{\alpha\beta} \right) + O(\epsilon^2). \tag{395}$$

Consideremos o tensor de energia e momento para o substrato, i.e., dado pela Eq. (266) na representação contravariante:

$$T^{\alpha\beta} = (\rho_0 + p) u^\alpha u^\beta - pg^{\alpha\beta}, \tag{396}$$

e sua representação covariante dada pela Eq. (267):

$$T^{\alpha\beta} = (\rho_0 + p) u_\alpha u_\beta - pg_{\alpha\beta}. \tag{397}$$

Para o acoplamento com a gravitação Newtoniana, esperamos que a quantidade de movimento transferida pelo substrato seja relativamente baixa, no sentido da Eq.

(365), i.e., que o substrato no domínio de baixas velocidades tenha energia e momento linear encapsulados tão somente em sua densidade de energia própria,  $\rho_0$ , e em sua densidade de momento linear próprio  $\rho_0 u^a$ , viz., efeitos relativísticos de dilatação, bem como efeitos de pressão em:

$$T^{00} = (\rho_0 + p) \frac{dx^0}{du} \frac{dx^0}{du} - p(\eta^{00} - \epsilon h^{00}), \tag{398}$$

que se torna:

$$\begin{aligned}
T^{00} &\approx (\rho_0 + p) - p(1 - \epsilon h^{00}) \\
&= \rho_0 + \epsilon p h^{00}, \tag{399}
\end{aligned}$$

em virtude das Eqs. (321), (328), (370) e (371), tornam-se desprezíveis no sentido de que a gravitação Newtoniana não distingue a descrição própria para a energia, i.e.:

$$T^{00} \approx \rho_0, \quad (400)$$

no domínio newtoniano. Isso posto pelo que a densidade local que gera campo gravitacional local no domínio newtoniano sempre será a densidade de massa própria, esteja essa massa em movimento ou não, a despeito do espaço tridimensional em que esteja inserida. Em outras palavras, é natural que observadores locais nos pontos do substrato estejam em um sistema de coordenadas comóvel, uma vez que, newtonianamente, movimentam-se os próprios pontos do substrato gravitacional em repouso em relação a si mesmos com fonte local  $\rho_0$  para o campo gravitacional, viz.:

$$u^0 = \frac{dx^0}{du} = \frac{dt}{du} \stackrel{\text{Eqs. (370), (371)}}{\approx} 1; \quad (401)$$

$$u^a = \frac{dx^a}{du} \stackrel{\text{Eqs. (370), (371)}}{\approx} \frac{dx^a}{dt} = v^a = 0, \quad (402)$$

tendo em vista o domínio newtoniano de validade e a não movimentação tridimensional de pontos do substrato em relação a si mesmos. Assim, as Eqs. (401) e (402) podem ser postas sob a forma compacta:

$$u^\alpha \approx \delta_0^\alpha. \quad (403)$$

É extremamente importante que se comparem a Eq. (296) [ou (297)] e a Eq. (403). As razões e os contextos que levaram a essas Eqs. são distintos. A Eq. (296) foi obtida no contexto do substrato cosmológico e a razão para que tenhamos uma igualdade nessa Eq. é a de que a coordenada  $x^0 = t$  lá fornecia os instantes cosmológicos que eram medidos pelos observadores comóveis, sendo assim que essa coordenada parametrizou as trajetórias 4-dimensionais desses observadores, os quais eram os próprios pontos do substrato. Já a Eq. (403) ocorre de forma aproximada, pois a parametrização das geodésicas que descrevem os pontos desse substrato não são parametrizadas pelo tempo newtoniano absoluto  $t$ , somente sendo possível essa parametrização se os efeitos relativísticos forem desprezados, i.e., de forma aproximada no contexto newtoniano. Também, o tensor métrico que aqui analisamos é uma perturbação sobre o tensor métrico de Minkowski, sendo que lá, no contexto cosmológico, estávamos sob o elemento de linha cosmológico de Robertson-Walker. Assim, não se confundam esses contextos, uma vez que estamos engajados com o acoplamento newtoniano ordinário sendo que, cosmológicamente, isso ocorre quase que numa mesma hipersuperfície de simultaneidade cosmológica, pois a física ordinária se processa em intervalos de tempo que são pequenos em relação à idade do universo. Ademais, a Eq. (403) leva à Eq. para as

4-velocidades covariantes, em virtude da contração pelo tensor métrico perturbado, viz.:

$$\begin{aligned} u_\alpha &= g_{\alpha\beta} u^\beta \stackrel{\text{Eq. (315)}}{=} (\eta_{\alpha\beta} + \epsilon h_{\alpha\beta}) u^\beta \\ &= (\eta_{\alpha\beta} + \epsilon h_{\alpha\beta}) \frac{dx^\beta}{du} \stackrel{\text{Eqs. (370), (371)}}{\approx} (\eta_{\alpha\beta} + \epsilon h_{\alpha\beta}) \frac{dx^\beta}{dt} \\ &= \eta_{\alpha\beta} \frac{dx^\beta}{dt} + O(\epsilon^2) \\ &\approx \eta_{\alpha\beta} \delta_0^\beta = \eta_{\alpha 0} \end{aligned} \quad (404)$$

onde também utilizamos a Eqs. (365) e (403). Em virtude da Eq. (314), i.e., uma vez que o tensor métrico de Minkowski é diagonal, com  $\eta_{00} = 1$  e  $\eta_{a0} = 0$ , temos que a Eq. (404) torna-se:

$$u_\alpha \approx \delta_\alpha^0, \quad (405)$$

no limite Newtoniano. Assim, em virtude de nossas considerações, temos que, no limite Newtoniano, o substrato gravitacional possui tensor de energia e momento tal que as Eqs. (396) e (397) tornam-se:

$$T^{\alpha\beta} \approx \rho_0 \delta_0^\alpha \delta_0^\beta; \quad (406)$$

$$T_{\alpha\beta} \approx \rho_0 \delta_\alpha^0 \delta_\beta^0. \quad (407)$$

Assim, a Eq. (395) fornece para o 00-termo, termo de energia:

$$\frac{1}{2} \epsilon \nabla^2 h_{00} \approx -\bar{\kappa} \left( \frac{1}{2} \eta_{00} \eta^{\gamma\delta} T_{\gamma\delta} - T_{00} \right) \quad (408)$$

Pela Eq. (407), temos que a Eq. (408) torna-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \epsilon \nabla^2 h_{00} &\approx -\bar{\kappa} \left( \frac{1}{2} \eta_{00} \eta^{\gamma\delta} \rho_0 \delta_\gamma^0 \delta_\delta^0 - \rho_0 \delta_0^0 \delta_0^0 \right) \\ &= -\bar{\kappa} \left( \frac{1}{2} \eta_{00} \eta^{00} \rho_0 \delta_0^0 \delta_0^0 - \rho_0 \delta_0^0 \delta_0^0 \right) \\ &= -\bar{\kappa} \left( \frac{1}{2} \rho_0 - \rho_0 \right) \\ &= -\bar{\kappa} \left( -\frac{1}{2} \rho_0 \right) \\ &\therefore \\ \epsilon \nabla^2 h_{00} &= \bar{\kappa} \rho_0 + O(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (409)$$

Pelas Eqs. (314) e (315):

$$\begin{aligned} g_{00} &= \eta_{00} + \epsilon h_{00} + O(\epsilon^2), \\ &= 1 + \epsilon h_{00} + O(\epsilon^2), \end{aligned} \quad (410)$$

donde:

$$\nabla^2 g_{00} = \epsilon \nabla^2 h_{00} + O(\epsilon^2). \quad (411)$$

Assim, substituindo o resultado da Eq. (409) na Eq. (411), temos:

$$\nabla^2 g_{00} = \bar{\kappa} \rho_0 + O(\epsilon^2). \quad (412)$$

Pela Eq. (387), temos:

$$\begin{aligned}\nabla^2 g_{00} &= \nabla^2 [1 + 2\phi + O(\epsilon)] \\ &= 2\nabla^2 \phi + O(\epsilon^2).\end{aligned}\quad (413)$$

Substituindo o resultado dado pela Eq. (413) na Eq. (412):

$$2\nabla^2 \phi + O(\epsilon) = \bar{\kappa} \rho_0 + O(\epsilon^2),$$

donde:

$$\begin{aligned}\nabla^2 \phi &= \frac{1}{2} \bar{\kappa} \rho_0 + O(\epsilon) \\ &\approx \frac{1}{2} \bar{\kappa} \rho_0.\end{aligned}\quad (414)$$

Já a gravitação Newtoniana estabelece que:

$$\mathbf{F}_g = -\nabla V_g, \quad (415)$$

onde  $\mathbf{F}_g$  é a força gravitacional num ponto do espaço tridimensional a que uma massa de prova  $m_0$  nesse ponto está submetida em virtude de uma distribuição de matéria, sendo  $V_g$  a energia potencial gravitacional da distribuição total de matéria, uma vez que  $\nabla \times \mathbf{F}_g = \mathbf{0}$ , i.e., o trabalho realizado pela força gravitacional entre dois pontos do espaço tridimensional é independente do caminho, uma vez que a interação gravitacional entre pares de elementos de matéria é central. Defina-se o campo gravitacional [vide Eq. (385)]  $\mathbf{g}$  tal que:

$$\mathbf{g} = -\frac{\mathbf{F}_g}{m_0}, \quad (416)$$

com  $m_0 \rightarrow 0$ , para que a massa de prova não perturbe a distribuição de matéria, de modo ao campo  $\mathbf{g}$  ser atribuído à distribuição de matéria complementar à massa  $m_0$ , perfazendo a distribuição total de matéria. Define-se o potencial gravitacional  $\phi$ , como a razão entre a energia potencial  $V_g$  da distribuição total de matéria e a massa de prova  $m_0 \rightarrow 0$ :

$$\phi = \frac{V_g}{m_0}. \quad (417)$$

Assim, a Eq. (415) é escrita em termos do campo gravitacional:

$$\mathbf{g} = \nabla \phi. \quad (418)$$

Considerando uma fonte elementar de campo gravitacional de massa  $m$ , calcula-se o fluxo  $\mathcal{F}$  das linhas de campo gravitacional  $\mathbf{g}$ , i.e., o fluxo de  $\mathbf{g}$  [uma vez que  $\mathbf{g}$  é tangente a essas linhas por definição], através de uma superfície  $S$  fechada englobando  $m$ , i.e.:

$$\mathcal{F} = \oint_S \mathbf{g} \cdot \hat{n} dS. \quad (419)$$

Seja  $r$  a distância entre  $m$  [uma vez que  $m$  é elementar, que seja um ponto material] e uma superfície elementar  $dS$  de  $S$ . Seja  $\alpha$  o ângulo entre a normal unitária dada pelo vetor  $\hat{n}$  exterior à  $S$  e o vetor de  $m$  até  $dS$ . Como o campo  $\mathbf{g}$  é central e repulsivo [ $\mathbf{F}$  é atrativa, mas definimos  $\mathbf{g}$  pela Eq. (416), sendo este, portanto, repulsivo, o que se torna vantajoso para calcular fluxo através de superfície, pois  $\mathbf{g}$  apontará segundo versores normais exteriores a superfícies fechadas que venham a englobar fontes de  $\mathbf{g}$ ], temos que o ângulo entre  $\mathbf{g}$  e  $\hat{n}$  será  $\alpha$ . Assim, a Eq. (419) torna-se:

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= \oint_S |\mathbf{g}| |\hat{n}| \cos \alpha dS \\ &= \oint_S \frac{mG}{r^2} \cos \alpha dS.\end{aligned}\quad (420)$$

A projeção da área  $\hat{n} dS$  ao longo do vetor  $\mathbf{g}/|\mathbf{g}|$ ,  $dS \cos \alpha$ , fornece um elemento de área esférico centrado em  $m$ , viz.:

$$r^2 \sin \theta d\theta d\phi = r^2 d\Omega = \cos \alpha dS, \quad (421)$$

onde o lado esquerdo da Eq. (421) é o elemento esférico de área nas coordenadas esféricas usuais com centro em  $m$  e raio de  $m$  até  $dS$ . Em virtude da Eq. (421), a Eq. (420) torna-se:

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= \oint_S mG \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} mG \sin \theta d\theta d\phi \\ &= 2\pi mG \int_0^\pi \sin \theta d\theta \\ &= 2\pi mG (-\cos \theta|_0^\pi) \\ &= 2\pi mG (-\cos \pi + \cos 0) \\ &= 4\pi mG.\end{aligned}\quad (422)$$

Como  $m$  é elementar, seja  $\rho_0 dV$ , onde  $\rho_0$  é a sua densidade local e  $dV$  seu volume elementar. Aplicando o teorema de Gauss para a divergência de um campo vetorial à Eq. (419):

$$\mathcal{F} = \oint_S \mathbf{g} \cdot \hat{n} ds = \int_V \nabla \cdot \mathbf{g} dV. \quad (423)$$

Em sendo  $V$  elementar, as Eqs. (422) e (423) levam à aplicação local:

$$\nabla \cdot \mathbf{g} dV = 4\pi G \rho_0 dV. \quad (424)$$

Uma vez que o particionamento de um *continuum* de matéria é arbitrário, temos necessariamente que:

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = 4\pi G \rho_0. \quad (425)$$

Aplicando a Eq. (418) à Eq. (425), temos:

$$\nabla \cdot \nabla \phi = \nabla^2 \phi = 4\pi G \rho_0. \quad (426)$$

Pelas Eqs. (414) e (426), vemos que a Eq. (414) provê o acoplamento à gravitação Newtoniana, desde que:

$$\frac{1}{2}\bar{\kappa} = 4\pi G \Leftrightarrow \bar{\kappa} = 8\pi G. \quad (427)$$

Assim, o acoplamento à gravitação Newtoniana, leva às Eqs. diferenciais ordinárias para a dinâmica cosmológica, Eqs. (310) e (313):

$$3\frac{\dot{a}^2(t) + k}{a^2(t)} - \Lambda = 8\pi G\rho; \quad (428)$$

$$\frac{2a(t)\ddot{a}(t) + \dot{a}^2(t) + k}{a^2(t)} - \Lambda = -8\pi Gp, \quad (429)$$

em virtude da Eq. (427), sendo que as Eqs. (428) e (429) ainda se encontram em unidades geométricas naturais. Antes de resolvermos as Eqs. (428) e (429), i.e., de passarmos às considerações relacionadas ao objeto deste trabalho, que é uma nova solução para as Eqs. de campo de Einstein no contexto cosmológico, com os aspectos quânticos que consideraremos para o substrato cosmológico, bem como à termodinâmica inerente à dinâmica cosmológica segundo essa nova solução, ponham-se essas Eqs. (428) e (429) em unidades físicas. Para tal, note-se que o elemento de linha de Robertson-Walker, dado pela Eq. (213), em unidades físicas é dado por:

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2 d\tau^2 \\ &= c^2 dt^2 - S^2(t) \left( \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right), \end{aligned} \quad (430)$$

onde se adota a parametrização única:

$$s \equiv u = c\tau, \quad (431)$$

para uma geodésica qualquer, onde  $\tau$  é o tempo próprio medido por relógio em repouso em relação à partícula que descreva tal geodésica qualquer, fixo nessa partícula. Conforme discutido anteriormente, mormente na discussão que levou à Eq. (210), o tempo próprio para os observadores comóveis cosmológicos, i.e., para os pontos do substrato cosmológico, é o tempo cosmológico  $t$ , viz., relógios fixos nos pontos do substrato cosmológico, i.e., que evoluam segundo a própria dinâmica cosmológica, medirão o tempo cosmológico  $t$ . Como as coordenadas espaciais desses pontos são fixas [cada ponto  $P$  do substrato cosmológico possui valores fixos  $(r_P, \theta_P, \phi_P)$ ], temos que  $\tau = \tau_P = t$ , para esses pontos, sendo que a Eq. (429) leva à Eq.:

$$c^2 d\tau^2 = c^2 d\tau_P^2 = c^2 dt^2, \quad (432)$$

para esses pontos. Num universo permeado por radiação eletromagnética, o fluido cosmológico será composto por

fótons, mas isso não requer que os pontos do substrato cosmológico descrevam trajetórias 4-dimensionais do tipo luz, i.e., geodésicas com  $c^2 d\tau^2 = 0$ , pois essa condição é aplicada às trajetórias 4-dimensionais dos fótons em si, i.e., às geodésicas dos fótons em si. Viz., em dois instantes cosmológicos diferentes, um ponto do substrato cosmológico que evoluiu segundo sua trajetória comóvel ortogonal às hipersuperfícies de simultaneidade pelas quais perpassa tal ponto nesses instantes estará interseccionando fótons distintos nesses instantes, i.e., duas trajetórias do tipo luz distintas nesses instantes, ainda que o substrato permaneça composto por radiação. A cada instante cosmológico, um domínio elementar tridimensional de hipersuperfície de simultaneidade conterá uma geodésica comóvel cruzando esse domínio em tal instante e ortogonal à hipersuperfície, sendo a energia eletromagnética encapsulada em tal domínio elementar tridimensional de hipersuperfície de simultaneidade a energia que instantaneamente se atribui à vizinhança da geodésica comóvel em tal ponto  $(ct, r_P, \theta_P, \phi_P)$  do substrato cosmológico num universo permeado por radiação eletromagnética. Ademais, tal descrição energética instantânea deve ser a mesma em todos os locais de uma hipersuperfície de simultaneidade, pois isso é requerido pelo princípio cosmológico. Em outras palavras, a radiação cósmica de fundo deve ser, instante por instante, homogênea e isotrópica em escala suficientemente extensa, i.e., em sendo válidos os argumentos que levam à geometria encapsulada no tensor métrico de Robertson-Walker. Voltaremos a considerar esses aspectos relacionados à energia e à descrição observacional dessa distribuição de energia, pois há consequências profundas nessa característica que permeia o universo, i.e., devemos nos questionar até que ponto a homogeneidade e isotropia para a radiação cósmica de fundo mantêm-se verazes quando passamos a considerar que a não linearidade das Eqs. de campo de Einstein não permite a equivalência entre uma solução obtida de uma distribuição média e a média obtida de uma solução completa, viz., devemos levantar questionamento sobre qual a influência que uma perturbação sobre a métrica de Robertson-Walker terá sobre a homogeneidade e isotropia aprioristicamente postas e que levam a uma radiação cósmica de fundo necessariamente homogênea e isotrópica em virtude do princípio cosmológico. Seguindo os mesmos passos que levaram da Eq. (213) à Eq. (228), i.e., à Eq.:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right), \quad (433)$$

com a transformação:

$$r = \frac{\bar{r}}{\sqrt{|K|}} \frac{R_0}{R_0} = \frac{\bar{r}}{\sqrt{|K|}}, \quad (434)$$

onde  $\bar{r}$  é um número real puro, supondo, primeiramente,  $K \neq 0$ , a Eq. (430) torna-se:

$$ds^2 = d(ct)^2 - \left( \frac{S(t)}{R_0 \sqrt{|K|}} R_0 \right)^2 \left( \frac{d\bar{r}^2}{1 - k\bar{r}^2} + \bar{r}^2 d\theta^2 + \bar{r}^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right), \quad (435)$$

onde  $K$  é a curvatura gaussiana,  $k = K/|K|$  é a curvatura normalizada e  $R_0$  um comprimento arbitrário; (!) enfatize-se que  $d(ct)^2 = [d(ct)]^2$ , sendo que apenas se economiza a notação. Definindo:

$$S'(t) = \frac{S(t)}{R_0 \sqrt{|K|}}, \quad (436)$$

$$R(t) = S'(t)R_0, \quad (437)$$

a Eq. (435) torna-se:

$$ds^2 = d(ct)^2 - R^2(t) \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right), \quad (438)$$

onde abandonamos a barra superposta em  $\bar{r}$ , ficando claro que  $R(t)$  tem dimensão de comprimento, sendo  $R(t)$  a magnificação do comprimento arbitrário  $R_0$  pelo fator de escala adimensional  $S'(t)$ , conforme se depreende das Eqs. (436) e (437), uma vez que  $K$ , a curvatura gaussiana, tem dimensão  $L^{-2}$ , sendo  $L$  comprimento,  $R_0$  dimensão de comprimento e  $S(t)$  é originalmente adimensional na Eq. que o originou, Eq. (430). A coordenada  $r$  na Eq. (430) é comprimento radial usual, mas  $\bar{r}$ , portanto o novo  $r$  na Eq. (438), conforme o definimos pela Eq. (434), continua sendo, na Eq. (438), esse número real puro definido na Eq. (434). Assim, se um comprimento inicial  $S'(t_0)R_0 = R_0$  for localmente definido, ou requerido por força de necessidade física, numa hipersuperfície de simultaneidade num instante cosmológico  $t_0 = 0$ , portanto devendo ser  $R_0$  definido em todas as direções, em virtude de isotropia, e em todos os pontos dessa hipersuperfície, em virtude de homogeneidade, em  $t_0 = 0$ , passado o tempo cosmológico  $t$ ,  $R(t)$  será  $R_0$  magnificado por  $S'(t)$ , ou seja, um novo comprimento definido em  $t$ , o qual deve ser definido em todas as direções e em todos os locais na  $t$ -hipersuperfície de simultaneidade, pois, a cada instante, homogeneidade e isotropia são requisitos do princípio cosmológico, o qual sempre se aplicará a qualquer hipersuperfície de simultaneidade que venha a ser considerada, conforme exaustivamente discutido de início. Comparando as Eqs. (433) e (438), vemos que devemos fazer as substituições:

$$t \rightarrow ct \quad (439)$$

$$a(t) \rightarrow R(t), \quad (440)$$

nas Eqs. diferenciais cosmológicas (428) e (429) obtidas do elemento de linha de Robertson-Walker em unidades geométricas naturais, para que essas Eqs. passem a deprever quantidades físicas, com  $R(t)$  significando a magnificação [esticamento ou encurtamento] do comprimento

$R_0$ , pelo que passaremos a chamar  $R(t)$  de comprimento de magnificação de escala que, conforme acabamos de discutir, para  $k \neq 0$  [ $k = +1$  (setor espacial com geometria fechada) ou  $k = -1$  (setor espacial com geometria aberta)], significa a magnificação de domínios espaciais locais isotrópicos de magnitude inicial ainda arbitrária  $R_0$ . Note-se também, que  $\nabla^2 \phi$ , na Eq. (414), está em unidades geométricas naturais. Em unidades SI, esse laplaciano tem as seguintes unidades:

$$[\nabla^2 \phi]_{\text{SI}} = \frac{\text{J}}{\text{m}^2 \text{kg}} = \text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \text{m} \frac{1}{\text{m}^2 \text{kg}} = \frac{1}{\text{s}^2}, \quad (441)$$

em virtude da Eq. (417) e do operador laplaciano:

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (442)$$

Em unidades naturais, temos que a velocidade da luz no espaço vazio, viz., no vácuo, é dada por  $c = 1$ , donde:

$$c \approx 3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 1 \Rightarrow 1\text{s} = 3 \times 10^8 \text{m} = c \cdot \text{s}. \quad (443)$$

Assim, ao transformarmos  $\nabla^2 \phi$  de unidades SI para unidades geométricas naturais  $\mathcal{N}$ , temos, pelas Eqs. (441) e (443), a partir da Eq. (441):

$$\begin{aligned} [\nabla^2 \phi]_{\mathcal{N}} &= \frac{1}{(\text{s}^2)_{\mathcal{N}}} = \frac{1}{(c \cdot \text{s})^2} = \frac{1}{c^2 \text{s}^2} \\ &= \frac{1}{c^2} [\nabla^2 \phi]_{\text{SI}}. \end{aligned} \quad (444)$$

Assim, pela Eq. (444), vemos que a relação entre  $(\nabla^2 \phi)_{\mathcal{N}}$  [ $\nabla^2 \phi$  em unidades geométricas naturais] e  $(\nabla^2 \phi)_{\text{SI}}$  [ $\nabla^2 \phi$  em unidades SI] é dada por:

$$(\nabla^2 \phi)_{\mathcal{N}} = \frac{1}{c^2} (\nabla^2 \phi)_{\text{SI}}. \quad (445)$$

A densidade própria  $\rho_0$  no lado direito da Eq. (414) adveio do tensor de energia e momento, sendo que a densidade nesse tensor é a densidade de energia. Assim os lados esquerdo e direito da Eq. (414) devem ter as seguintes transformações respectivas:

$$\nabla^2 \phi \rightarrow \frac{1}{c^2} \nabla^2 \phi, \quad (446)$$

$$\rho_0 \rightarrow c^2 \rho_0, \quad (447)$$

para que a Eq. (414) envolva as mesmas grandezas que a Eq. (426) num mesmo sistema de unidades. Assim, a Eq. (414) torna-se:

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{2} \bar{\kappa} c^4 \rho_0, \quad (448)$$

onde  $\rho_0$  é a densidade de massa para o substrato gravitacional utilizado na marcha que levou à Eq. (414) no contexto de acoplamento à gravitação Newtoniana que lá desenvolvemos. Pelas Eqs. (426) e (448), obtemos a condição de acoplamento à gravitação Newtoniana em unidades físicas usuais:

$$4\pi G\rho_0 = \frac{1}{2}\bar{\kappa}c^4\rho_0 \Leftrightarrow \bar{\kappa} = \frac{8\pi G}{c^4}. \quad (449)$$

Portanto, se partíssemos do elemento de linha em unidades físicas usuais [SI], sendo, então, que os cálculos

levariam em conta a forma dada pela Eq. (438) para o elemento de linha, sendo, também, o tensor de energia e momento tendo sido usado em unidades físicas usuais, o que leva ao acoplamento à gravitação Newtoniana pela condição posta na Eq. (449) para  $\bar{\kappa}$ , encontraríamos as seguintes Eqs. para a dinâmica cosmológica análogas às Eqs. (428) e (429) [ou, o que é a mesma coisa, às Eqs. (310) e (313), uma vez que as Eqs. (428) e (429) são as Eqs. (310) e (313) com o acoplamento em unidades geométricas naturais  $\bar{\kappa} = 8\pi G$ ]:

$$\left[ 3 \frac{\dot{a}^2(t) + k}{a^2(t)} \right]_{\text{SI}} - [\Lambda]_{\text{SI}} = \frac{8\pi G}{c^4} [\rho]_{\text{SI}}; \quad (450)$$

$$\left[ \frac{2a(t)\ddot{a}(t) + \dot{a}^2(t) + k}{a^2(t)} \right]_{\text{SI}} - [\Lambda]_{\text{SI}} = -\frac{8\pi G}{c^4} [p]_{\text{SI}}, \quad (451)$$

uma vez que  $[\bar{\kappa}]_{\text{SI}} = [8\pi G]_{\text{SI}} = 8\pi G/c^4$ , em referência ao acoplamento por  $\bar{\kappa}$  já posto em unidades físicas usuais em virtude do que acabamos de obter na Eq. (451). Primeiramente, usamos as transformações dadas pelas

Eqs. (439) e (440) no conteúdo entre colchetes no primeiro termo no lado esquerdo da Eq. (450), para que esse conteúdo que adveio da Eq. (310) em unidades geométricas naturais esteja em unidades físicas usuais:

$$\begin{aligned} 3 \frac{\dot{a}^2(t) + k}{a^2(t)} &= \frac{3}{a^2(t)} \left\{ \left[ \frac{da(t)}{dt} \right]^2 + k \right\} \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{3}{R^2(t)} \left\{ \left[ \frac{dR(t)}{d(ct)} \right]^2 + k \right\} \\ &= \frac{3}{R^2(t)} \left\{ \left[ \frac{dR(t)}{cdt} \right]^2 + k \right\} \\ &= \frac{3}{R^2(t)} \left\{ \frac{1}{c^2} \left[ \frac{dR(t)}{dt} \right]^2 + k \right\} \\ &= \frac{3}{R^2(t)} \left[ \frac{1}{c^2} \dot{R}^2(t) + k \right] \\ &= \frac{3}{R^2(t)} \left[ \frac{1}{c^2} \dot{R}^2(t) + \frac{kc^2}{c^2} \right] \\ &= \frac{3}{R^2(t)} \left[ \frac{\dot{R}^2(t) + kc^2}{c^2} \right] \\ &= 3 \frac{\dot{R}^2(t) + kc^2}{c^2 R^2(t)}, \end{aligned} \quad (452)$$

donde:

$$\left[ 3 \frac{\dot{a}^2(t) + k}{a^2(t)} \right]_{\text{SI}} = 3 \frac{\dot{R}^2(t) + kc^2}{c^2 R^2(t)}. \quad (453)$$

Analogamente, usamos as transformações dadas pelas Eqs. (439) e (440) no conteúdo entre colchetes no

primeiro termo no lado esquerdo da Eq. (451), para que esse conteúdo que adveio da Eq. (313) em unidades

geométricas naturais esteja em unidades físicas usuais:

$$\begin{aligned}
\frac{2a(t)\ddot{a}(t) + \dot{a}^2(t) + k}{a^2(t)} &= \frac{1}{a^2(t)} \left\{ 2a(t) \frac{d}{dt} \left[ \frac{da(t)}{dt} \right] + \left[ \frac{da(t)}{dt} \right]^2 + k \right\} \rightarrow \\
&\rightarrow \frac{1}{R^2(t)} \left\{ 2R(t) \frac{d}{d(ct)} \left[ \frac{dR(t)}{d(ct)} \right] + \left[ \frac{dR(t)}{d(ct)} \right]^2 + k \right\} \\
&= \frac{1}{R^2(t)} \left\{ 2R(t) \frac{d}{cdt} \left[ \frac{dR(t)}{cdt} \right] + \left[ \frac{dR(t)}{cdt} \right]^2 + k \right\} \\
&= \frac{1}{R^2(t)} \left\{ \frac{2R(t)}{c^2} \frac{d^2 R(t)}{dt^2} + \frac{1}{c^2} \left[ \frac{dR(t)}{dt} \right]^2 + k \right\} \\
&= \frac{1}{R^2(t)} \left[ \frac{2R(t)\ddot{R}(t)}{c^2} + \frac{\dot{R}^2(t)}{c^2} + \frac{kc^2}{c^2} \right] \\
&= \frac{1}{R^2(t)} \left[ \frac{2R(t)\ddot{R}(t) + \dot{R}^2(t) + kc^2}{c^2} \right] \\
&= \frac{2R(t)\ddot{R}(t) + \dot{R}^2(t) + kc^2}{c^2 R^2(t)}, \tag{454}
\end{aligned}$$

donde:

$$\left[ \frac{2a(t)\ddot{a}(t) + \dot{a}^2(t) + k}{a^2(t)} \right]_{\text{SI}} = \frac{2R(t)\ddot{R}(t) + \dot{R}^2(t) + kc^2}{c^2 R^2(t)}. \tag{455}$$

Definamos:

$$[\Lambda]_{\text{SI}} \equiv \frac{8\pi G}{c^4} \tilde{\rho}; \tag{456}$$

$$\tilde{\rho} \equiv -\tilde{p}, \tag{457}$$

que são meras definições para que reescrevamos as Eqs. (450) e (451) mais convenientemente; obviamente  $\tilde{\rho}$  e  $\tilde{p}$  são constantes, uma vez que a constante cosmológica  $\Lambda$ , portanto  $[\Lambda]_{\text{SI}}$ , é, por definição, como o próprio nome sugere, constante. Também, uma vez que  $[\rho]_{\text{SI}}$  é simplesmente a densidade de energia do substrato cosmológico [o princípio cosmológico, obviamente, impõe que a densidade de energia do substrato cosmológico seja apenas função de  $t$ , uma vez que, para um dado  $t$ , todos os pontos de uma  $t$ -hipersuperfície de simultaneidade, i.e., de um setor espacial  $t$ -instantâneo, devem ser igualmente descritos pelos observadores nesses pontos], sabendo que agora trabalharemos com unidades físicas usuais, renomeie-se:

$$[\rho]_{\text{SI}} \equiv \rho, \tag{458}$$

e, de mesma lide, uma vez que  $[p]_{\text{SI}}$  é simplesmente a pressão no substrato cosmológico [o princípio cosmológico, obviamente, impõe que a pressão no substrato

cosmológico seja apenas função de  $t$ , uma vez que, para um dado  $t$ , todos os pontos de uma  $t$ -hipersuperfície de simultaneidade, i.e., de um setor espacial  $t$ -instantâneo, devem ser igualmente descritos pelos observadores nesses pontos], sabendo que agora trabalharemos com unidades físicas usuais, renomeie-se:

$$[p]_{\text{SI}} \equiv p. \tag{459}$$

Assim, finalmente, em virtude das Eqs. (453), (455), (456), (457), (458) e (459), as Eqs. diferenciais para a dinâmica cosmológica, Eqs. (450) e (451), são dadas por:

$$\frac{\dot{R}^2 + kc^2}{R^2} = \frac{8\pi G}{3c^2} (\rho + \tilde{\rho}); \tag{460}$$

$$\frac{2R\ddot{R} + \dot{R}^2 + kc^2}{R^2} = -\frac{8\pi G}{c^2} (p + \tilde{p}), \tag{461}$$

onde, enfatizando, incorporamos a constante cosmológica através das ditas densidade de energia e pressão do vácuo:  $\tilde{\rho}$  and  $\tilde{p}$ , respectivamente. Uma vez que não estamos mais trabalhando com unidades geométricas naturais, conforme discutido, o fator de escala torna-se  $R(t)$ , sendo interpretado, também conforme discutido, como o comprimento de magnificação de escala da dinâmica cosmológica, medindo como um comprimento de referência inicial  $R_0$  no substrato cosmológico em  $t_0$  torna-se magnificado, esticado ou comprimido, conforme o universo evolua cronologicamente de  $t_0$  até  $t$ . Tal não deve

ser literalmente interpretado como sendo um aumento de distância entre dois pontos no sentido de que, num caso de expansão, e.g., um comprimento de onda estacionário esticado conectando dois pontos cosmológicos numa  $t_0$ -hipersuperfície de simultaneidade permaneceria estacionariamente conectando os mesmos dois pontos após o esticamento cronologicamente evolutivo para uma respectiva  $t$ -hipersuperfície de simultaneidade subsequente do substrato cosmológico, porém menos energeticamente. Ainda que tenhamos acabado de obter as Eqs. (460) e (461) em unidades físicas com o desenvolvimento que fizemos a partir da Eq. (430) em unidades físicas, porém supondo  $K \neq 0$  a partir da Eq. (434), as Eqs. (460) e (461) são válidas para  $K = 0$ , bastando que se faça  $k = 0$  nas Eqs. (460) e (461). O motivo é que já demonstramos a validade da Eq. (433) para o caso em que  $k = 0$ , quando da marcha que levou à obtenção da Eq. (228) [vide Eqs. (222), (224) e (227) e a discussão inerente]. O procedimento é trivial, onde, no caso em que  $K = 0$ , temos que  $R(t)$  nas Eqs. (460) e (461) será dado por  $S(t)R_0$ , bastando que se escreva  $r = R_0\bar{r}$  na Eq. (430), com  $R_0$  também sendo um comprimento inicial arbitrário, com  $\bar{r}$  sendo um número real puro. Todavia, conforme veremos, a solução que obtemos requererá  $k = -1$ .

## A SOLUÇÃO ALTERNATIVA - ARTIGOS ANEXOS

O conteúdo que se segue segue num ordenamento de três artigos sucessivos e está revisado [10], aceito e publicado [3] [4]. Resolvemos as equações de campo da relatividade geral (GR) no contexto cosmológico, primeiramente com um postulado extra [sendo que tal postulado é demonstrado posteriormente num segundo artigo também publicado [4], sobre o qual também discorreremos oportunamente]. A plausibilidade do postulado reside dentro do princípio de indeterminação de Heisenberg aplicado aos pontos do substrato cosmológico, como veremos, sendo, numa primeira análise [pois, conforme acabamos de enfatizar, o que se postulou tornou-se demonstrável], heurísticamente analisado dentro do apêndice deste primeiro artigo. Sob este desenvolvimento que aqui faremos, veremos que uma densidade de energia negativa pode prover conteúdo de energia positiva para o substrato cosmológico via flutuação, uma vez que a conservação de energia em relatividade geral no contexto cosmológico acaba por se tornar enfraquecida, ou trivial, uma vez que tal conservação leva à primeira lei da termodinâmica localmente, uma vez que o transporte paralelo contravariante do tensor de energia e momento pode depender do caminho escolhido quando não elementar, i.e., para caminhos finitos não diferencialmente locais. A questão de se interpretar a trivialidade da conservação de energia como sendo caracterizada por uma falha de

objetivo na aplicação do teorema de Noether precisa ser profundamente investigada, porém uma não conservação global de energia em cosmologia relativística pode ser uma condição mais fraca em virtude da não integrabilidade da variedade Riemanniana, sendo que a trivialidade para a conservação passaria a residir em condição mais geral ainda satisfeita. A condição inicial para o universo primordial, em nossa solução, passa a ter, naturalmente, um *cutoff*, tal que a temperatura do substrato cosmológico converge para o zero absoluto, contrariamente a uma divergência estabelecida por modelos vigentes para o início do universo. Nosso modelo provê, além de outras características e explicações, uma explicação para a questão da energia escura, uma questão cosmologicamente importante e sem interpretação satisfatória atualmente. Ademais, nosso modelo provê naturalmente a temperatura atual da radiação cósmica de fundo, viz., nossa solução concorda com as observações cosmológicas, incluindo a previsão de 2.7K para a CMBT.

Na discussão que fizemos em relação à obtenção da Eq. (100) [anteriormente, obtida a Eq. (97)], vimos que o transporte do tensor métrico pela variedade tornara-se uma condição geométrica importante para que se pudessem medir comprimentos elementares por toda a variedade com a utilização de uma mesma regra específica, i.e., uma vez que se equipa uma variedade com um tensor métrico para que medidas métricas, tempo e comprimento, sejam levadas a cabo, caracterizando uma variedade de tal forma equipada como sendo Riemanniana. Poderíamos efetuar tal procedimento com o tensor de energia e momento, i.e., poderíamos dizer que o transporte paralelo do tensor de energia e momento  $T^{\alpha\beta}$ , viz.:

$$\frac{dx^\gamma}{du} \nabla_\gamma T^{\alpha\beta} = 0, \quad (462)$$

por construção análoga àquela que fizemos na marcha que levou da Eq. (92) à Eq. (97) para a métrica, deva ser veraz independentemente da congruência de geodésicas tomada cujos vetores tangentes são  $dx^\gamma/du$ , levando à nulidade da derivada covariante do tensor de energia e momento? I.e., há alguma plausibilidade em se atestar aprioristicamente a necessidade:

$$\nabla_\gamma T^{\alpha\beta} = 0, \quad (463)$$

em virtude de se ter que impor a conservação global de energia e momento? Do ponto de vista geométrico, se a Eq. (462) fosse verdadeira, estaríamos por afirmar que a construção do tensor de energia e momento num ponto  $O$  arbitrário de uma variedade Riemanniana poderia ser transportada por toda a variedade, ou seja, teríamos uma conservação global do tensor de energia e momento. Do ponto de vista físico, torna-se fácil verificarmos que isso não pode ser verdadeiro no cenário cosmológico de um modo geral, uma vez que o princípio cosmológico não necessariamente se aplica a instantes

diferentes do universo, viz., um ponto que descreve uma geodésica comóvel não descreve o universo com as mesmas características em instantes cosmológicos diferentes, pois, caso contrário, jamais perceberíamos uma expansão do universo, por exemplo, ao observarmos pontos sobre uma mesma geodésica comóvel. Assim, devemos esperar que o transporte do tensor de energia e momento ao longo de uma geodésica comóvel [trajetórias 4-dimensionais dos pontos do substrato cosmológico] não seja necessariamente nulo. De fato, se calcularmos [os 4-vetores tangentes às geodésicas comóveis são dados por  $\delta_0^\gamma$ , conforme anteriormente discutido na marcha que levou da Eq. (295) à Eq. (297)]:

$$\delta_0^\gamma \nabla_\gamma T^{\alpha\beta} = \nabla_0 T^{\alpha\beta}, \quad (464)$$

para a componente  $T^{00}$ , vemos claramente que, em virtude da Eq. (39):

$$\nabla_0 T^{00} = \partial_0 T^{00} + \Gamma_{\delta 0}^0 T^{\delta 0} + \Gamma_{\delta 0}^0 T^{0\delta}, \quad (465)$$

que, em virtude das Eqs. (266) e (297), fornece:

$$\nabla_0 T^{00} = \partial_0 [(\rho + p) \delta_0^0 \delta_0^0 - p g^{00}] = \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (466)$$

uma vez que a métrica é diagonal, assim como o tensor de energia e momento,  $g^{00} = 1$  e  $\Gamma_{00}^0 = 0$  [vide Eqs. de (268) até (280)]. Assim, a Eq. (466) torna o critério de conservação dado pela Eq. (463) impossível se  $\rho = \rho(t)$ , e.g., diferentemente do que necessariamente ocorreu para o tensor métrico. Ademais, o Prof. Albert Einstein não requereu tal critério de conservação, ainda que um critério global de conservação venha ser fundamentalmente o que se coloca pela Eq. (462) com  $dx^\gamma/du$  arbitrário. A Eq. (466) mostra claramente que o background físico não é necessariamente o mesmo, i.e., os eventos se colocam num substrato que é incluído como parte do sistema físico para que se calcule a energia do sistema, viz., não há como se isolar uma parte do universo no sentido clássico de se colocar um sistema físico num background imutável. Ademais, diferentemente do que ocorre com sistemas clássicos, o tempo  $t$  é uma coordenada e não um parâmetro, somente sendo, no caso cosmológico, que  $t$  se confunde [não no sentido de confusão, desordem, mas no sentido de fusão convergente de significados] com o parâmetro afim das geodésicas comóveis eventualmente, sendo que, para quaisquer outros movimentos não comóveis,  $t$  é fundamentalmente uma das 4 coordenadas espaço-temporais. Note-se a presença fundamental de  $t$  na Eq. (230); como poderia ser tal coordenada analiticamente cíclica? Assim, não se espera a arbitrariedade de caminhos, i.e., que a conservação do tensor de energia e momento obedeça o critério de conservação posto pela Eq. (462) para caminhos quaisquer, levando necessariamente à Eq. (463), mas que haja um filtro relacionado à construção do tensor de energia e momento em si via produto de dois campos vetoriais con-

travariantes, de modo a ser a invariância segundo qualquer um desses campos [o tensor de energia e momento é simétrico, uma vez que o é o tensor de Einstein, vide Eqs. (253) e (254)] pertencentes ao espaço tangente no ponto de construção [ou ao espaço cotangente, numa representação covariante], i.e.:

$$\delta_\mu^\alpha \nabla_\alpha T^{\mu\nu} = \nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad (467)$$

que é, naturalmente, a generalização da Eq. (263) [em relatividade especial, a divergência nula do tensor de energia e momento leva à conservação de energia e momento]. Tal programa de generalização segue o que o Prof. Einstein chamou de mínimo acoplamento gravitacional, que nada mais é do que um princípio de simplicidade, uma aplicação da navalha de Occam no sentido de que termos adicionais não venham a ser desnecessariamente adicionados numa transição da relatividade especial à geral, estabelecendo que não se insiram, nessa transição, termos que contêm o tensor de curvatura de Riemann [não se insiram de forma deliberada, uma vez que o tensor de energia e momento, pelas Eqs. (253) e (254), contém o tensor de curvatura através do tensor e do escalar de Ricci]. Poder-se-ia aqui fazer referência à trivialidade da Eq. (467) como consequência da nulidade da derivada covariante do tensor métrico e também em virtude das identidades contraídas de Bianchi, mas estamos com o objetivo tácito de manter sempre o senso heurístico o mais proximamente possível. Ademais, no nascedouro epistemológico da relatividade geral, pelo Prof. Einstein, o princípio do mínimo acoplamento gravitacional, ainda que possa ser criticado por alguns, foi fundamento para a construção de sua teoria geral da relatividade, constando que desconhecia as identidades de Bianchi [ver Pais, Abraham, *Subtle is the Lord*, fls. 222]. Uma vez que a derivada covariante do tensor métrico é nula [vide obtenção da Eq. (100)], podemos contrair ambos os lados da Eq. (467) pela métrica  $g_{\lambda\nu}$ , de modo a podermos inserir a métrica para dentro do operador derivada covariante:

$$g_{\lambda\nu} \nabla_\mu T^{\mu\nu} = \nabla_\mu (g_{\lambda\nu} T^{\mu\nu}) = \nabla_\mu T^\mu_\lambda = 0, \quad (468)$$

donde obtemos o seguinte critério de conservação relativo à coordenada  $\lambda = t \equiv x^0$ :

$$\nabla_\mu T^\mu_t = \partial_\mu T^\mu_t + \Gamma^\mu_{\nu\mu} T^\nu_t - \Gamma^\nu_{t\mu} T^\mu_\nu = 0, \quad (469)$$

em virtude da Eq. (39). Assim:

$$\begin{aligned} T^\mu_\lambda &= g_{\lambda\nu} T^{\mu\nu} \\ &= g_{\lambda\nu} [(\rho + p) \delta_0^\mu \delta_0^\nu - p g^{\mu\nu}] \\ &= (\rho + p) \delta_0^\mu \delta_0^\nu g_{\lambda\nu} - p g_{\lambda\nu} g^{\mu\nu} \\ &= (\rho + p) \delta_0^\mu \delta_0^\nu g_{\lambda\nu} - p \delta_\lambda^\mu \\ &= (\rho + p) \delta_0^\mu g_{\lambda 0} - p \delta_\lambda^\mu, \end{aligned} \quad (470)$$

onde se utilizaram as Eqs. (266) e (297). Concluimos facilmente a partir da Eq. (470) que:

$$T^\mu{}_\nu = 0, \mu \neq \nu; T^0{}_0 = \rho; T^\mu{}_\mu = -p, \mu \in \{1; 2; 3\}, \quad (471)$$

onde, enfatize-se,  $T^\mu{}_\mu$  não é traço, i.e., não tem soma implícita, sendo somente índices de mesmo valor dentro do conjunto especificado para componentes puramente espaciais [poderíamos ter usado índices latinos, mas o contexto está claríssimo]. Concluimos facilmente a partir das Eqs. de (268) até (280), conforme necessário para as componentes da conexão a serem aplicadas à Eq. (469), bem como a partir da Eq. (471), também conforme necessário à aplicação na Eq. (469):

$$\nabla_\mu T^\mu{}_t = \nabla_0 T^0{}_0 + \nabla_1 T^1{}_0 + \nabla_2 T^2{}_0 + \nabla_3 T^3{}_0 = 0, \quad (472)$$

que:

$$\begin{aligned} \nabla_0 T^0{}_0 &= \partial_0 T^0{}_0 + \Gamma_{\nu 0}^0 T^\nu{}_0 - \Gamma_{00}^\nu T^0{}_\nu \\ &= \partial_0 T^0{}_0 \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial t}; \end{aligned} \quad (473)$$

$$\begin{aligned} \nabla_1 T^1{}_0 &= \partial_1 T^1{}_0 + \Gamma_{\nu 1}^1 T^\nu{}_0 - \Gamma_{01}^\nu T^1{}_\nu \\ &= \Gamma_{01}^1 T^0{}_0 - \Gamma_{01}^1 T^1{}_1 = \Gamma_{01}^1 (T^0{}_0 - T^1{}_1) \\ &= \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} (\rho + p); \end{aligned} \quad (474)$$

$$\begin{aligned} \nabla_2 T^2{}_0 &= \partial_2 T^2{}_0 + \Gamma_{\nu 2}^2 T^\nu{}_0 - \Gamma_{02}^\nu T^2{}_\nu \\ &= \Gamma_{02}^2 T^0{}_0 - \Gamma_{02}^2 T^2{}_2 = \Gamma_{02}^2 (T^0{}_0 - T^2{}_2) \\ &= \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} (\rho + p); \end{aligned} \quad (475)$$

$$\begin{aligned} \nabla_3 T^3{}_0 &= \partial_3 T^3{}_0 + \Gamma_{\nu 3}^3 T^\nu{}_0 - \Gamma_{03}^\nu T^3{}_\nu \\ &= \Gamma_{03}^3 T^0{}_0 - \Gamma_{03}^3 T^3{}_3 = \Gamma_{03}^3 (T^0{}_0 - T^3{}_3) \\ &= \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} (\rho + p). \end{aligned} \quad (476)$$

Aplicando as Eqs. (473), (474), (475) e (476) à Eq. (472):

$$\nabla_\mu T^\mu{}_t = \frac{\partial \rho}{\partial t} + 3 \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} (\rho + p) = 0. \quad (477)$$

Como as Eqs. de (268) até (280) foram obtidas em unidades naturais, aplicamos as transformações dadas pelas Eqs. (439) e (440) à Eq. (477), sendo que a densidade de energia e a pressão passam a ser dadas pelas Eqs. (458) e (459), sendo novamente renomeadas para  $\rho$  e para  $p$ , respectivamente, para que escrevamos, em unidades físicas usuais, i.e., encontramos trivialmente [o fator comum  $c$  que aparece em virtude da transformação dada pela Eq. (439), quando aplicada à Eq. (477), desaparecerá ao multiplicarmos ambos os lados da Eq. transformada por  $c$ ]:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho + \tilde{\rho}) + 3 \frac{\dot{R}}{R} (\rho + \tilde{\rho} + p + \tilde{p}) = 0, \quad (478)$$

onde incorporamos a constante  $\tilde{\rho}$  definida pela Eq. (456) sob o sinal de derivação, uma vez que em nada altera a Eq. (478), bem como a soma,  $\tilde{\rho} + \tilde{p} = 0$ , definida pela Eq. (457), que também não altera a Eq. (478).

A Eq. (478) é a primeira lei da termodinâmica aplicada ao substrato cosmológico (incluindo o vácuo), aplicada a um domínio de comprimento radial magnificado  $R(t)$  num instante  $t$ , uma vez que, qualquer que seja a geometria, num fatiamento espacial a  $t$  constante do substrato cosmológico [numa  $t$ -hipersuperfície de simultaneidade], um tal domínio magnificado terá volume  $\alpha(k) [R(t)]^3$ , densidade  $[\rho(t) + \tilde{\rho}] [11]$  e energia  $[\rho(t) + \tilde{\rho}] \alpha(k) [R(t)]^3$ , implicando que  $dE + p dV = 0$  torna-se a Eq. (478).  $\alpha(k)$  é a constante que depende da geometria (aberta,  $k = -1$ ; plana,  $k = 0$ ; fechada,  $k = 1$ ) para fornecer a expressão correta para o volume do domínio mencionado pertencente a um  $t$ -fatiamento do substrato cosmológico. Tais domínios estão centrados em uma origem arbitrária pertencente a um fatiamento considerado, uma vez que, em virtude de homogeneidade, há arbitrariedade possível para a escolha de uma origem, i.e., qualquer origem em um  $t$ -fatiamento é equivalente a qualquer outra, bem como sendo isotropicamente tridimensional um tal domínio em virtude de isotropia. Ass

Finda-se aqui esta breve digressão sobre os objetos matemáticos e conceitos básicos relacionados à relatividade geral, necessários à análise que ensejou um novo modelo cosmológico dentro da cosmologia relativística. Passemos agora à solução proposta que se encontra no seguimento, desenvolvida nos artigos anexos, assim como outros desenvolvimentos pertinentes.

$$\frac{a}{b} = \int_0^\infty dx. \quad (479)$$

## ACKNOWLEDGMENTS

A.V.D.B.A is grateful to Y.H.V.H and CNPq for financial support.

---

\* Electronic address: [armando.assis@pgfsc.ufsc.br](mailto:armando.assis@pgfsc.ufsc.br)

- [1] Bondi H. *Cosmology*. Dover Publications, Inc., New York, 2010.
- [2] Bondi H. Negative mass in General Relativity. *Review of Modern Physics*, 1957, v. 29 (3), 423–428.
- [3] Assis AVDB. On the Cold Big Bang Cosmology *Progress in Physics*, 2011, v. 2 (2011), 58–63.
- [4] Assis AVDB. A Note on the Quantization Mechanism within the Cold Big Bang Cosmology *Progress in Physics*, 2011, v. 4 (2011), 40–41.
- [5] Carrol S. *Spacetime and Geometry. An Introduction to General Relativity*. Addison Wesley, San Francisco, 2004.
- [6] Copérnico que nos ensinou, que nos mostrou que a Terra não é o centro do nosso sistema solar, levando ao colapso do outrora estabelecido *status quo* antropocêntrico.

- [7] Deve-se atentar para o fato: isotropia e homogeneidade são referidas espacialmente, para fatias  $t$ -sliced de tempo constante do substrato cosmológico. Assim, enfatizam-se essas duas propriedades logicamente emergentes a partir do princípio cosmológico como sendo verificadas por todo o fluido cosmológico num dado instante  $t$ , instante por instante, valendo espacialmente em um dado instante  $t$ , qualquer que seja esse instante  $t$ : homogeneidade e isotropia são propriedades *espaciais* do fluido cosmológico.
- [8] De fato, um campo vetorial contravariante, pois se transforma segundo  $dx^\alpha = (\partial x^\alpha / \partial x'^\beta) dx'^\beta$ , i.e., conforme um vetor contravariante [conforme um tensor de valência (1,0)], em virtude da Eq. (7), sendo exatamente essa a transformação para o vetor [contravariante] tangente a uma curva  $x^\alpha$  da congruência considerada:  $dx^\alpha / du = (\partial x^\alpha / \partial x'^\beta) dx'^\beta / du$ .
- [9] Ou, em caso de falha de domínio de cobertura para esse patch  $x^\gamma$  específico, variedade supostamente coberta por um atlas de sistemas coordenados
- [10] Zentralblatt MATH Database 1931-2011 - European Mathematical Society, FIZ Karlsruhe and Springer-Verlag, Zbl 1225.83086, Assis, Armando V.D.B., On the cold Big Bang cosmology. (English) Prog. Phys. 2, 58-63 (2011). ISSN 1555-5534; ISSN 1555-5615. O Prof. Dr. Hans Jurgen Schmidt, Potsdam, que chefiou o periódico GRG (General Relativity and Gravitation, Springer, o qual agora está sob a chefia do Prof. Dr. George Ellis) revisou o artigo supracitado: *The author presents a new variant of big bang cosmology, where the initial phase of the Universe is cold and not hot as in all other models discussed presently. Hans Jurgen Schmidt (Potsdam)*. Classificou o artigo: (\*) 83F05 Relativistic cosmology; 83C75 Space-time singularities; 83D05 Relativistic gravitational theories other than Einstein's; 85A40 Nonrelativistic cosmology.
- [11] Lembre-se, em virtude do princípio cosmológico: em média, para escalas suficientemente extensas, num  $t$ -fatiamiento do substrato cosmológico, o universo terá o mesmo aspecto a despeito da localização espacial do observador nesse  $t$ -fatiamiento  $\Rightarrow \rho = \rho(t)$ . Também, uma vez que  $\Lambda$ , a constante cosmológica, é constante,  $\tilde{\rho}$  e  $\tilde{p}$  são constantes tais que  $\tilde{\rho} + \tilde{p} = 0$ , conforme discutido.
-

Zbl 1225.83086

**Assis, Armando V.D.B.**

**On the cold Big Bang cosmology.** (English)

Prog. Phys. 2, 58-63 (2011). ISSN 1555-5534; ISSN 1555-5615

[http://www.ptep-online.com/index\\_files/issues.html](http://www.ptep-online.com/index_files/issues.html)

The author presents a new variant of big bang cosmology, where the initial phase of the Universe is cold and not hot as in all other models discussed presently.

*Hans-Jürgen Schmidt (Potsdam)*

*Classification :*

\***83F05** Relativistic cosmology

**83C75** Space-time singularities, etc.

**83D05** Relativistic gravitational theories other than Einstein's

**85A40** Nonrelativistic cosmology

# On the Cold Big Bang Cosmology

Armando V.D.B. Assis

Departamento de Física, Universidade Federal de Santa Catarina — UFSC, Trindade 88040-900, Florianópolis, SC, Brazil.  
E-mail: armando.assis@pgfsc.ufsc.br

We solve the general relativity (GR) field equations under the cosmological scope via one extra postulate. The plausibility of the postulate resides within the Heisenberg indeterminacy principle, being heuristically analysed throughout the appendix. Under this approach, a negative energy density may provide the positive energy content of the universe via fluctuation, since the question of conservation of energy in cosmology is weakened, supported by the known lack of scope of the Noether's theorem in cosmology. The initial condition of the primordial universe turns out to have a natural cutoff such that the temperature of the cosmological substratum converges to the absolute zero, instead of the established divergence at the very beginning. The adopted postulate provides an explanation for the cosmological dark energy open question. The solution agrees with cosmological observations, including a 2.7K CMBT prediction.

## 1 Revisiting the Theoretical Assumptions

The study of the dynamics of the entire universe is known as Cosmology [1–3]. The inherent simplicity in the mathematical treatment of the Cosmology, although the entire universe must be under analysis, should be recognized as being due to Copernicus. Indeed, since the primordial idea permeating the principle upon which the simplicity arises is just an extension of the copernican revolution\*: the cosmological principle. This extension, the cosmological principle, just asseverates we are not in any sense at a privileged position in our universe, implying that the average large enough scale<sup>†</sup> *spatial* properties of the physical universe are the same from point to point at a given cosmological instant. Putting these in a mathematical jargon, one says that the large enough scale spatial geometry at a given cosmological instant  $t$  is exactly the same in spite of the position of the observer at some point belonging to this  $t$ -sliced three-dimensional universe or, equivalently, that the spatial part of the line element of the entire universe is the same for all observers. Hence, the simplicity referred above arises from the very two principal aspects logically encrusted in the manner one states the cosmological principle:

- The lack of a privileged physical description of the universe at a  $t$ -sliced large enough scale  $\Rightarrow$  large enough scale  $\Rightarrow$  one neglects all kind of known physical interactions that are unimportant on the large enough scales  $\Rightarrow$  remains gravity;
- The lack of a privileged physical description of the universe at a  $t$ -sliced large enough scale  $\Rightarrow$  large enough scale  $\Rightarrow$  one neglects local irregularities of a global  $t$ -sliced substratum representing the  $t$ -sliced universe  $\forall$

cosmological instants  $t \Rightarrow$  substratum modelled as a fluid without  $t$ -sliced spatially localized irregularities  $\Rightarrow$  homogeneous and isotropic  $t$ -sliced<sup>‡</sup> fluid.

One shall verify the  $t$ -local characteristic of the the cosmological principle, i.e., that non-privileged description does not necessarily hold on the global time evolution of that  $t$ -sliced spacelike hypersurfaces. In other words, two of such  $t$ -sliced hypersurfaces at different instants would not preserve the same aspect, as experimentally asseverated by the expansion of the universe. Hence, some further assumption must be made regarding the time evolution of the points belonging to the  $t$ -sliced spacelike hypersurfaces:

- The particles of the cosmological fluid are encrusted in spacetime on a congruence of timelike geodesics from a point in the past, i.e., the substratum is modelled as a perfect fluid.

Hence, the following theoretical ingredients are available regarding the above way in which one mathematically construct a cosmological model:

Gravity modeled by Einstein's General Relativity field equations (in natural units):

$$G_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (1)$$

Homogeneity is mathematically translated by means of a geometry (metric) that is the same from point to point, spatially speaking. Isotropy is mathematically translated by means of a lack of privileged directions, also spatially speaking. These two characteristics easily allow one to consider spaces equipped with constant curvature  $K$ . From a differential geometry theorem, Schur's, a  $n$ -dimensional space  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$ , in which a  $\eta$ -neighbourhood has isotropy  $\forall$  points

\*Copernicus told us that the Earth is not the center of our planetary system, namely the solar system, pushing down the historical button leading to the collapse of the established *anthropocentric status quo*.

†One must understand large enough scale as being that of cluster of galaxies.

‡One shall rigorously attempt to the fact: the isotropy and homogeneity are  $t$ -sliced referred, i.e., these two properties logically emerging from the cosmological principle hold upon the entire fluid at  $t$ , holding spatially at  $t$ , i.e., homogeneity and isotropy are spatial properties of the fluid. Regarding the time, one observer can be at an own proper  $\tau$ -geodesic...

belonging to it, has constant curvature  $K$  throughout  $\eta$ . Since we are considering, spatially, global isotropy, then  $K$  is constant everywhere. Hence, one defines the Riemann tensor:

$$R_{abcd} = K (g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}), \quad (2)$$

spatially speaking.

As indicated before, homogeneity and isotropy are spatial properties of the geometry. Time evolution, e.g.: expansion, can be conformally agreed with these two spatial properties logically emerging from the cosmological principle in terms of Gaussian normal coordinates. Mathematically, the space-time cosmological metric has the form:

$$ds^2 = dt^2 - [a(t)]^2 d\sigma^2. \quad (3)$$

Since spatial coordinates for a spatially fixed observer do not change,  $ds^2 = dt^2 \Rightarrow g_{tt} = 1$ .

Regarding the spatial part of the line element, the Schwarzschild metric is spherically symmetric, a guide to our purposes. From the Scharzschild metric (signature  $+ - - -$ ):

$$ds^2 = e^{2\nu(r)} dt^2 - e^{2\lambda(r)} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (4)$$

one easily writes down the spatial part of the spacetime cosmological metric:

$$d\sigma^2 = e^{2f(r)} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (5)$$

One straightforwardly goes through the tedious calculation of the Christoffel symbols and the components of the Ricci tensor, finding:

$$e^{2f(r)} = \frac{1}{1 - Kr^2}. \quad (6)$$

Absorbing constants\* by the scale factor in eqn. (3), one normalizes the curvature constant  $K$ , namely  $k \in \{-1; 0; +1\}$ . Hence, the cosmological spacetime metric turns out to be in the canonical form:

$$ds^2 = dt^2 - [a(t)]^2 \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right). \quad (7)$$

Now, regarding the fluid substratum, one sets in co-moving coordinates ( $dt/d\tau = 1$ ,  $u^\mu = (1; 0; 0; 0)$ ):

$$T^\mu{}_\nu = 0, \quad \mu \neq \nu; \quad T^0{}_0 = \rho; \quad T^\mu{}_\mu = -p, \quad \text{for } \mu \in \{1; 2; 3\} \quad (8)$$

since the particles in the fluid are clusters of galaxies falling together with small averaged relative velocities compared with the cosmological dynamics, where the substratum turns out to be averaged described by an average substratum density  $\rho$  and by an average substratum pressure  $p$ .

The Einstein tensor in eqn. (1),  $G_{\mu\nu}$ , is related to the Ricci tensor  $R_{\mu\nu} = R^\gamma{}_{\mu\gamma\nu}$  (the metric contraction of the curvature tensor (Riemann tensor)), to the Ricci scalar  $R = R^\mu{}_\mu$  (the

\*Defining  $r' = \sqrt{|K|}r$ , one straightforwardly goes through...

metric contraction of the Ricci tensor) and to the metric  $g_{\mu\nu}$  itself:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}. \quad (9)$$

The curvature tensor  $R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}$  is obtained via a metric connection, the Christoffel  $\Gamma^\alpha{}_{\beta\delta}$  symbols in our case of non-torsional manifold:

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = \partial_\gamma \Gamma^\alpha{}_{\beta\delta} - \partial_\delta \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} + \Gamma^\epsilon{}_{\beta\delta} \Gamma^\alpha{}_{\epsilon\gamma} - \Gamma^\epsilon{}_{\beta\gamma} \Gamma^\alpha{}_{\epsilon\delta}, \quad (10)$$

where the metric connection is obtained, in the present case, from the Robertson-Walker cosmological spacetime geometry given by eqn. (7) (from which one straightforwardly obtains the metric coefficients of the diagonal metric tensor in the desired covariant or contravariant representations) via:

$$\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} = g^{\alpha\delta} \Gamma_{\delta\beta\gamma}, \quad (11)$$

being the metric connection (Christoffel symbols) of the first kind  $\Gamma_{\delta\beta\gamma}$  given by:

$$\Gamma_{\delta\beta\gamma} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\delta} + \frac{\partial g_{\gamma\delta}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial x^\gamma} \right). \quad (12)$$

These set of assumptions under such mathematical apparatus lead one to the tedious, but straightforward, derivation, via eqn. (1), of the ordinary differential cosmological equations emerging from the relation between the Einstein's tensor,  $G_{\mu\nu}$ , the Robertson-Walker spacetime cosmological metric of the present case,  $g_{\mu\nu}$  via eqn. (7), and the stress-energy tensor,  $T_{\mu\nu}$  via metric contraction of the eqn. (8) (signature  $+ - - -$ ):

$$\frac{\dot{R}^2 + kc^2}{R^2} = \frac{8\pi G}{3c^2} (\rho + \bar{p}); \quad (13)$$

$$\frac{2R\ddot{R} + \dot{R}^2 + kc^2}{R^2} = -\frac{8\pi G}{c^2} (p + \bar{p}), \quad (14)$$

where we are incorporating the cosmological constant  $\Lambda$  through the energy density and the pressure of the vacuum:  $\bar{\rho}$  and  $\bar{p}$ , respectively. One also must infer we are no more working with natural units. The scale factor becomes  $R(t)$ , and one must interpret it as the magnification length scale of the cosmological dynamics, since  $R(t)$  turns out to be length. This measures how an unitary length of the pervading cosmological substratum at  $t_0$  becomes stretched as the universe goes through a time evolution from  $t_0$  to  $t$ . One should not literally interpret it as an increase of the distance between two points, e.g., in a case of expansion, a stretched stationary wavelength connecting two cosmological points at a  $t_0$ -sliced spacelike substratum would remain stationarily connecting the very same two points after the stretched evolution to the respective  $t$ -sliced spacelike substratum, but less energetically.

## 2 A Cold Beginning?

Applying the following conservation criteria:

$$\nabla_{\mu} T^{\mu}_{\ t} = \partial_{\mu} T^{\mu}_{\ t} + \Gamma^{\mu}_{\ \mu\nu} T^{\nu}_{\ t} - \Gamma^{\nu}_{\ \mu t} T^{\mu}_{\ \nu} = 0, \quad (15)$$

one finds via the diagonal stress-energy tensor (see eqn. (8)), the metric connection (see eqs. (11) and (12)) and the space-time cosmological geometry of the present case (eqn. (7)):

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho + \tilde{\rho}) + 3 \frac{\dot{R}}{R} (\rho + \tilde{\rho} + p + \tilde{p}) = 0. \quad (16)$$

eqn. (16) is the first law of thermodynamics applied to our substratum (including vacuum), since, despite of geometry, a spatial slice of the substratum has volume  $\alpha(k) [R(t)]^3$ , density  $(\rho(t) + \tilde{\rho})^*$  and energy  $(\rho(t) + \tilde{\rho}) \alpha(k) [R(t)]^3$ , implying that  $dE + p dV = 0$  turns out to be eqn. (16).  $\alpha(k)$  is the constant that depends on geometry (open,  $k = -1$ ; flat,  $k = 0$ ; closed,  $k = 1$ ) to give the correct volume expression of the mentioned spatial slice of the  $t$ -sliced cosmological substratum.

Now, we go further, considering the early universe as being dominated by radiation. In the ultrarelativistic limit, the equation of state is given by:

$$\rho - 3p = 0. \quad (17)$$

Putting this equation of state in eqn. (16) and integrating, one obtains the substratum pressure as a function of the magnification scale  $R$ :

$$4 \ln \|R\| + \ln \|p\| = C' \Rightarrow \|p\| = \frac{e^{C'}}{R^4} \Rightarrow p = \pm \frac{C^+}{R^4}, \quad (18)$$

where  $C^+ \geq 0$  is a constant of integration. In virtue of eqn. (18), eqn. (14) is rewritten in a total differential form:

$$2R\dot{R}d\dot{R} + \left( \dot{R}^2 + kc^2 \pm \frac{8\pi G}{c^2} \frac{C^+}{R^2} + \frac{8\pi G}{c^2} \tilde{p}R^2 \right) dR = 0. \quad (19)$$

Indeed, eqn. (19) is a total differential of a constant  $\lambda(R, \dot{R}) = \text{constant}$ :

$$d\lambda(R, \dot{R}) = \frac{\partial \lambda(R, \dot{R})}{\partial \dot{R}} d\dot{R} + \frac{\partial \lambda(R, \dot{R})}{\partial R} dR = 0, \quad (20)$$

since:

$$\frac{\partial \lambda(R, \dot{R})}{\partial \dot{R}} = 2R\dot{R} \Rightarrow \frac{\partial^2 \lambda(R, \dot{R})}{\partial R \partial \dot{R}} = 2\dot{R}; \quad (21)$$

$$\frac{\partial \lambda(R, \dot{R})}{\partial R} = \dot{R}^2 + kc^2 \pm \frac{8\pi G}{c^2} \frac{C^+}{R^2} + \frac{8\pi G}{c^2} \tilde{p}R^2 \Rightarrow \quad (22)$$

\*One shall remember the cosmological principle: on average, for large enough scales, at  $t$ -sliced substratum, the universe has the same aspect in spite of the spatial localization of the observer in the  $t$ -slice  $\Rightarrow \rho = \rho(t)$ . Also, since  $\Lambda$  is constant,  $\tilde{\rho}$  and  $\tilde{p}$  are constants such that  $\tilde{\rho} + \tilde{p} = 0$ .

$$\frac{\partial^2 \lambda(R, \dot{R})}{\partial \dot{R} \partial R} = 2\dot{R} \therefore \frac{\partial^2 \lambda(R, \dot{R})}{\partial R \partial \dot{R}} = \frac{\partial^2 \lambda(R, \dot{R})}{\partial \dot{R} \partial R} = 2\dot{R}. \quad (23)$$

Integrating, one has:

$$\int \partial \lambda(R, \dot{R}) = \int 2R\dot{R} \partial \dot{R} = 2R \int \dot{R} d\dot{R} + h(R) \therefore \quad (24)$$

$$\lambda(R, \dot{R}) = R\dot{R}^2 + h(R), \quad (25)$$

where  $h(R)$  is a function of  $R$ . From eqs. (22) and (25):

$$\frac{\partial}{\partial R} \lambda(R, \dot{R}) = \dot{R}^2 + kc^2 \pm \frac{8\pi G}{c^2} \frac{C^+}{R^2} + \frac{8\pi G}{c^2} \tilde{p}R^2 \Rightarrow$$

$$h(R) = \int \left( kc^2 \pm \frac{8\pi G}{c^2} \frac{C^+}{R^2} + \frac{8\pi G}{c^2} \tilde{p}R^2 \right) dR \therefore \quad (26)$$

$$h(R) = kc^2 R \mp \frac{8\pi G}{c^2} \frac{C^+}{R} + \frac{8\pi G}{3c^2} \tilde{p}R^3. \quad (27)$$

Putting this result from eqn. (27) in eqn. (25):

$$\lambda(R, \dot{R}) = R\dot{R}^2 + kc^2 R \mp \frac{8\pi G}{c^2} \frac{C^+}{R} + \frac{8\pi G}{3c^2} \tilde{p}R^3 = \text{constant} \quad (28)$$

is the general solution of the total differential equation eqn. (19). Dividing both sides of eqn. (28) by  $R^3 \neq 0$ :

$$\frac{\lambda(R, \dot{R})}{R^3} = \frac{\dot{R}^2 + kc^2}{R^2} \mp \frac{8\pi G}{c^2} \frac{C^+}{R^4} + \frac{8\pi G}{3c^2} \tilde{p}, \quad (29)$$

using the eqn. (13), one obtains:

$$\frac{\lambda(R, \dot{R})}{R^3} = \frac{8\pi G}{c^2} \left( \frac{\rho}{3} \mp \frac{C^+}{R^4} \right) + \frac{8\pi G}{3c^2} (\tilde{\rho} + \tilde{p}) \therefore \quad (30)$$

$$\lambda(R, \dot{R}) = \text{constant} = 0, \quad (31)$$

in virtue of eqns. (17), (18) and  $\tilde{\rho} + \tilde{p} = 0$  for the background vacuum. Of course, the same result is obtained from eqn. (13), since this equation is a constant of movement of eqn. (14), being eqn. (16) the connection between the two. Neglecting the vacuum contribution in relation to the ultrarelativistic substratum, one turns back to the eqn. (28), set the initial condition  $R = R_0$ ,  $\dot{R} = 0$ , at  $t = 0$ , obtaining for the substratum pressure:

$$p(R) = k \frac{c^4 R_0^2}{8\pi G R^4}, \quad (32)$$

and for the magnification scale velocity:

$$\dot{R}^2 = -kc^2 \left( 1 - \frac{R_0^2}{R^2} \right). \quad (33)$$

Now, robustness<sup>†</sup> requires an open universe with  $k = -1$ . Hence, the locally flat substratum energy is given by<sup>‡</sup>:

$$E^+ = -4\pi R^3 p(R) \Rightarrow R_0 = -\frac{2GE_0^+}{kc^4}, \quad (34)$$

<sup>†</sup>For,  $\dot{R}^2 \in \mathbb{R}$  in eqn. (33) with  $R \geq R_0$ .

<sup>‡</sup>The Hawking-Ellis dominant energy condition giving the positive energy, albeit the expansion dynamics obtained via eqn. (32).

in virtue of eqn. (32) and the initial condition  $E^+ = E_0^+$ ,  $R = R_0$  at  $t = 0$ . Returning to eqn. (33), one obtains the magnification scale velocity:

$$\dot{R} = c \sqrt{1 - \frac{4G^2 (E_0^+)^2}{c^8 R^2}}, \quad (35)$$

giving  $\dot{R} \rightarrow c$  as  $R \rightarrow \infty$ . Rewriting eqn. (35), one obtains the dynamical Schwarzschild horizon:

$$R = \frac{2G}{c^4} \frac{E_0^+}{\sqrt{1 - \dot{R}^2/c^2}}. \quad (36)$$

We will not use the eqn. (34) (now you should read the appendix to follow the following argument) to obtain the energy from the energy density and volume for  $t \neq 0$ , since we do not handle very well the question of the conservation of energy in cosmology caused by an inherent lack of application of the Noether's theorem. In virtue of the adopted initial conditions, an initial uncertainty  $R_0$  related to the initial spatial position of an arbitrary origin will be translated to a huge uncertainty  $R$  at the actual epoch. Indeed, one never knows the truth about the original position of the origin, hence the uncertainty grows as the universe enlarge. The primordial energy from which the actual energy of the universe came from was taken as  $E_0^+$  at the beginning. This amount of energy is to be transformed over the universe evolution, giving the present amount of the universe, i.e., the energy of an actual epoch  $t$ -sliced hypersurface of simultaneity. But this energy at each instant  $t$  of the cosmological evolution turns out to be the transformed primordial indeterminacy  $E_0^+$ , since  $E_0^+$  is to be obtained via the Heisenberg indeterminacy principle. In other words, we argue that the energetic content of the universe at any epoch is given by the inherent indeterminacy caused by the primordial indeterminacy. At any epoch, one may consider a copy of all points pertaining to the same hypersurface of simultaneity but at rest, i.e., an instantaneous non-expanding copy of the expanding instantaneous hypersurface of simultaneity. Related to an actual  $R$  indeterminacy of an origin in virtue of its primordial  $R_0$  indeterminacy, one has the possibility of an alternative shifted origin at  $R$ . This shifted origin expands with  $\dot{R}$  in relation to that non-expanding instantaneous copy of the universe at  $t$ . Since the primordial origin was considered to encapsulate the primordial energy  $E_0^+$ , this energy at the shifted likely alternative origin should be  $E_0^+ / \sqrt{1 - \dot{R}^2/c^2}$ , since, at  $R$ , a point expands with  $\dot{R}$  in relation to its non-expanding copy. We postulate:

- The actual energy content of the universe is a consequence of the increasing indeterminacy of the primordial era. Any origin of a co-moving reference frame within the cosmological substratum has an inherent indeterminacy. Hence, the indeterminacy of the energy content of the universe may create the impression that

the universe has not enough energy, raising illusions as dark energy and dark matter speculations. In other words, since the original source of energy emerges as an indeterminacy, we postulate this indeterminacy continues being the energy content of the observational universe:  $\delta E(t) = E^+(t) = E_0^+ / \sqrt{1 - \dot{R}^2/c^2}$ .

This result is compatible with the Einstein field equations. The compatibility is discussed within the appendix. In virtue of this interpretation, eqn. (36) has the aspect of the Schwarzschild radius, hence the above designation. The  $t$ -instantaneous locally flat spreading out rate of dynamical energy at  $t$ -sliced substratum is given by the summation over the  $\nu$ -photon frequencies:

$$\begin{aligned} \dot{R} \frac{d}{dR} \left( \frac{E_0^+}{\sqrt{1 - \dot{R}^2/c^2}} \right) &= \\ &= \frac{8\pi^2 R^2 h}{c^2} \int_0^\infty \frac{\nu^3}{\exp(h\nu/k_B T) - 1} d\nu = \frac{8\pi^6 k_B^4 R^2}{15c^2 h^3} T^4, \quad (37) \end{aligned}$$

where  $k_B$  is the Boltzmann constant,  $h$  the Planck constant and  $T$  the supposed rapid thermodynamically equilibrated  $t$ -sliced locally flat instantaneous cosmological substratum temperature. Now, setting, in virtue of the Heisenberg principle:

$$\frac{E_0^+ R_0}{c} \approx h \stackrel{(34)}{\Rightarrow} (E_0^+)^2 = \frac{hc^5}{2G}, \quad (38)$$

one obtains, in virtue of eqn. (37):

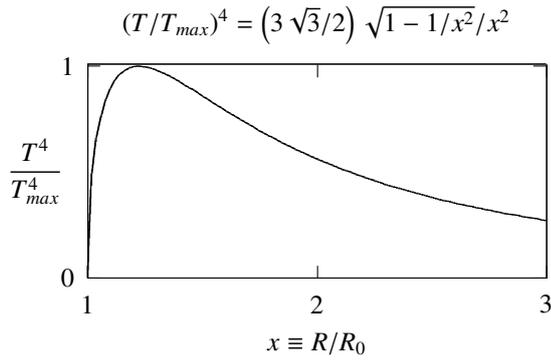
$$T^4 = \frac{15c^7 h^3}{16\pi^6 G k_B^4} \frac{1}{R^2} \sqrt{1 - \frac{2Gh}{c^3 R^2}}. \quad (39)$$

Hence, the temperature of the cosmological substratum vanishes\* at  $t = 0$ , rapidly reaching the maximum  $\approx 10^{32} K$ , and asymptotically decreasing to zero again as  $t \rightarrow \infty$ .

Indeed,  $R_0 = R(t = 0) = \sqrt{2Gh/c^3}$ , in virtue of eqs. (34) and (38), giving  $T^4(R_0) = T^4(t = 0) = 0$ . Also, the maximum temperature is  $T \approx 10^{32} K$ , from eqn. (39), occurring when  $R = R_{max} = \sqrt{3/2} R_0 = \sqrt{3Gh/c^3}$ , as one obtains by  $dT^4/dR = 0$  with  $d^2T^4/dR^2 < 0$ . Below<sup>†</sup>, one infers these properties of eqn. (39).

\*We argue there is no violation of the third law of thermodynamics, since one must go from the future to the past when trying to reach the absolute zero, violating the second law of thermodynamics. At  $t = 0$ , one is not reaching the absolute zero since there is no past before the beginning of the time. To reach the absolute zero, in an attempt to violate the Nernst principle, one must go from the past to the future.

<sup>†</sup>The eqn. (39) is simply rewritten to plot the graph, i.e.:  $T_{max}^4 = (5\sqrt{3}c^{10}h^2)/(48\pi^6 G^2 k_B^4)$  and, as obtained before,  $R_0 = \sqrt{2Gh/c^3}$ .



Now, one puts the result of eqn. (38) in eqn. (35) and integrates:

$$\int_{(2Gh/c^3)^{1/2}}^R \frac{R}{\sqrt{R^2 - 2Gh/c^3}} dR = c \int_0^t d\tau, \quad (40)$$

obtaining:

$$t = \frac{1}{c} \sqrt{R^2 - 2Gh/c^3} \Rightarrow t(R_{max}) = \sqrt{\frac{Gh}{c^5}} \approx 10^{-43} \text{ s}, \quad (41)$$

for the elapsed time from  $t = 0$  to the instant in which the substratum temperature reaches the maximum value  $T \approx 10^{32}$  K. The initial acceleration, namely the explosion/ignition acceleration at  $t = 0$  of the substratum is obtained from eqn. (35):

$$\ddot{R} = \dot{R} \frac{d\dot{R}}{dR} = \frac{4G^2 (E_0^+)^2}{c^6 R^3} \stackrel{(38)}{=} \frac{2Gh}{cR^3} \therefore \quad (42)$$

$$\ddot{R}(R = R_0 = \sqrt{2Gh/c^3}) = \sqrt{\frac{c^7}{2Gh}} \approx 10^{51} \text{ m/s}^2. \quad (43)$$

An interesting calculation is the extension of the eqn. (39) formula to predict the actual temperature of the universe. Since  $2Ghc^{-3}R^{-2} \ll 1$  for actual stage of the universe, eqn. (39) is approximately given by:

$$T^4 \approx \frac{15c^7 h^3}{16\pi^6 G k_B^4} \frac{1}{R^2} \Rightarrow R^2 \approx \frac{15c^7 h^3}{16\pi^6 G k_B^4} \frac{1}{T^4}. \quad (44)$$

Also, for actual age of the universe, eqn. (41) is approximately given by:

$$t \approx \frac{R}{c} \stackrel{(44)}{=} \sqrt{\frac{15c^5 h^3}{16\pi^6 G k_B^4} \frac{1}{T^2}} \therefore \quad (45)$$

$$T_{\text{Now}}^2 = \sqrt{\frac{15c^5 h^3}{16\pi^6 G k_B^4}} t_{\text{Now}}^{-1} = 5.32 \times 10^{20} t_{\text{Now}}^{-1} (\text{K}^2 \text{s}). \quad (46)$$

Before going further on, one must remember we are not in a radiation dominated era. Hence, the left-hand side and the right-hand side of eqn. (37) must be adapted for this situation.

The left-hand accomplishes the totality of spreading out energy in virtue of cosmological dynamics. It equals the right-hand side in an ultrarelativistic scenario. But, as the universe evolves, the right-hand side becomes a fraction of the totality of spreading out energy. Rigorously, as the locally flatness of the  $t$ -sliced substratum increases, one multiplies both sides of eqn. (37) by  $(4/c) \times (1/4\pi R^2)$  and obtains the  $t$ -sliced instantaneously spreading out enclosed energy density. Hence the right-hand side of eqn. (37) turns out to be multiplied by the ratio between the total cosmological density\*  $\rho_c$  and the radiation density  $\rho_r$ . Hence, eqn. (46) is rewritten:

$$\sqrt{\frac{\rho_c}{\rho_r}} T_{\text{Now}}^2 = 5.32 \times 10^{20} t_{\text{Now}}^{-1} (\text{K}^2 \text{s}). \quad (47)$$

The actual photonic density is  $\rho_r = 4.7 \times 10^{-31} \text{ kg/m}^3$  and the actual total cosmological density is  $\rho_c = 1.3 \times 10^{-26} \text{ kg/m}^3$ . For the reciprocal age of universe,  $t_{\text{Now}}^{-1}$  in eqn. (47), one adopts the Hubble's constant, for open universe,  $H = t_{\text{Now}}^{-1} = 2.3 \times 10^{-18} \text{ s}^{-1}$ . Hence, by eqn. (47), one estimates the actual temperature of the universe:

$$T_{\text{Now}}^2 = \sqrt{\frac{4.7 \times 10^{-31}}{1.3 \times 10^{-26}}} \times 5.32 \times 10^{20} \times 2.3 \times 10^{-18} \text{ K}^2 \therefore \quad (48)$$

$$T_{\text{Now}} = 2.7 \text{ K}, \quad (49)$$

very close to the CMB temperature.

### 3 Appendix

From eqns. (17) and (32):

$$\rho = 3p = -\frac{3c^4 R_0^2}{8\pi G} \frac{1}{R^4} \Rightarrow E_\rho = -\frac{c^4 R_0^2}{2G} \frac{1}{R}, \quad (50)$$

since  $k = -1$ ;  $E_\rho$  is the energy (negative) obtained from volume and  $\rho$ . From eqn. (34),  $R_0^2 = 4G^2 (E_0^+)^2 / c^8$ . Hence, eqn. (50) is rewritten:

$$E_\rho = -\frac{2G}{c^4} (E_0^+)^2 \frac{1}{R}. \quad (51)$$

With the eqn. (36), we reach:

$$E_\rho = -E_0^+ \sqrt{1 - \dot{R}^2/c^2}. \quad (52)$$

This negative energy arises from the adopted negative pressure solution. But, its fluctuation is positive:

$$\delta E_\rho = \frac{E_0^+}{\sqrt{1 - \dot{R}^2/c^2}} \frac{\dot{R} \delta \dot{R}}{c^2}, \quad (53)$$

since both,  $\dot{R}$  and  $\delta \dot{R}$ , are positive within our model (see eqn. (40)). Let  $\delta t$  be the time interval within this fluctuation process. Multiplying both sides of the eqn. (53) by  $\delta t$ , we obtain:

$$\delta E_\rho \delta t = \frac{E_0^+}{\sqrt{1 - \dot{R}^2/c^2}} (\dot{R} \delta \dot{R} / c^2) \delta t. \quad (54)$$

\*Actually, the critical one, since observations asseverate it.

The above relation must obey the Heisenberg indeterminacy principle, and one may equivalently interpret it under the following format:

$$\delta E_\rho \delta t = \frac{E_0^+}{\sqrt{1 - \dot{R}^2/c^2}} (\delta t)^* \approx h, \quad (55)$$

An energy indeterminacy having the magnitude of the actual cosmological energy content carries an indeterminacy  $\delta \dot{R} \approx c$  about the magnification scale velocity  $\dot{R}$  with  $\dot{R} \approx c$ . For such an actual scenario in which  $\dot{R} \approx c$  (see eqn. (35) with  $R \rightarrow \infty$ ), we have:

$$\delta t \approx (\delta t)^* \Rightarrow \delta E_\rho|_{R_0}^\infty = E^+ = \frac{E_0^+}{\sqrt{1 - \dot{R}^2/c^2}}, \quad (56)$$

if\*  $\dot{R} \rightarrow c$ . Now, let's investigate the primordial time domain  $t \approx 0$ . To see this, we rewrite  $\dot{R}\delta\dot{R}$  within the eqn. (54). Firstly, from eqn. (35):

$$\dot{R} = c \sqrt{1 - R_0^2/R^2} \Rightarrow \dot{R} \delta\dot{R} = \frac{c^2 R_0^2}{R^3} \delta R, \quad (57)$$

where  $R_0 = \sqrt{2Gh/c^3}$  as obtained before. Within the primordial time domain  $t \approx 0$ , we have  $R \approx R_0$  and  $\delta R \approx R_0$ , as discussed before. Hence, the eqn. (57) reads:

$$\dot{R} \delta\dot{R} \approx c^2. \quad (58)$$

if  $t \approx 0$ . Back to the eqn. (54) we obtain again:

$$\delta t \approx (\delta t)^* \Rightarrow \delta E_\rho|_{\approx R_0} = E^+ = \frac{E_0^+}{\sqrt{1 - \dot{R}^2/c^2}}, \quad (59)$$

if  $t \approx 0$ . This justify the use of  $E^+ = E_0^+ / \sqrt{1 - \dot{R}^2/c^2}$  within our postulate, emerging from the positive fluctuation of the negative energy  $E_\rho$  obtained from volume and the negative energy density  $\rho$  stated via the fluid state equation, eqn. (17), and entering within the field equations.

### Acknowledgements

A.V.D.B.A is grateful to Y.H.V.H and CNPq for financial support.

Submitted on April 10, 2011 / Accepted on April 13, 2011

### References

1. Bondi H. *Cosmology*. Dover Publications, Inc., New York, 2010.
2. Bondi H. Negative mass in General Relativity. *Review of Modern Physics*, 1957, v. 29 (3), 423–428.
3. Carrol S. *Spacetime and Geometry. An Introduction to General Relativity*. Addison Wesley, San Francisco, 2004.

\*Eqn. (56) holds from  $t > 10^{-43}$  seconds, as one easily verify from eqn. (35).

# A Note on the Quantization Mechanism within the Cold Big Bang Cosmology

Armando V. D. B. Assis

Departamento de Física, Universidade Federal de Santa Catarina — UFSC, Trindade 88040-900, Florianópolis, SC, Brazil.  
E-mail: armando.assis@pgfsc.ufsc.br

In my paper [3], I obtain a Cold Big Bang Cosmology, fitting the cosmological data, with an absolute zero primordial temperature, a natural cutoff for the cosmological data to a vanishingly small entropy at a singular microstate of a comoving domain of the cosmological fluid. This solution resides on a negative pressure solution from the general relativity field equation and on a postulate regarding a Heisenberg indeterminacy mechanism related to the energy fluctuation obtained from the solution of the field equations under the Robertson-Walker comoving elementar line element context in virtue of the adoption of the Cosmological Principle. In this paper, we see the, positive, differential energy fluctuation, purely obtained from the general relativity cosmological solution in [3], leads to the quantum mechanical argument of the postulate in [3], provided this energy fluctuation is quantized, strongly supporting the postulate in [3]. I discuss the postulate in [3], showing the result for the energy fluctuation follows from a discreteness hypothesis.

## 1 To the Heisenberg Indeterminacy Relation

Recalling the eqn. (53) in [3], purely derived from the general relativity field equations under the cosmological context:

$$\delta E_\rho = \frac{E_0^+}{\sqrt{1 - \dot{R}^2/c^2}} \frac{\dot{R} \delta \dot{R}}{c^2}, \quad (1)$$

the  $\delta E_\rho$ , given by the eqn. (1), seems to be exclusively valid when  $\delta \dot{R}$  is infinitesimal, since this expression is a first order expansion term, where we do tacitly suppose the vanishing of high order terms. But its form will remain valid in a case of finite variation, as derived in this paper, under the same conditions presented in [3]. The eqn. (1), in terms of indeterminacy, says:

- There is an indeterminacy  $\delta E_\rho$ , at a given  $t$ , hence at a given  $R(t)$  and  $\dot{R}(t)$ , related to a *small* indeterminacy  $\delta \dot{R}(t)$ .

A given spherical shell within a  $t$ -sliced hypersurface of simultaneity must enclose the following indeterminacy, if the least possible infinitesimal continuous variation given by the field equations in [3], eqn.(1) here, presents discreteness, viz., if the  $\delta E_\rho$  cannot be an infinitesimal in its entire meaning, albeit maintaining its very small value, as a vanishingly small quantity, but reaching a minimum, reaching a discrete quantum of energy fluctuation,

$$\sum_{l=1}^k (\delta E_\rho)_l = \frac{E_0^+ \dot{R}/c^2}{\sqrt{1 - \dot{R}^2/c^2}} \Big|_t \sum_{l=1}^k (\delta \dot{R})_l. \quad (2)$$

The eqn. (2) is obtained from eqn. (1) by the summation over the simultaneous fluctuations within the spherical shell (since the quantum minimal energy is a spatially localized object, and the  $t$ -sliced spherical shell, a  $R(t)$ -spherical subset

of simultaneous cosmological points pertaining to a  $t$ -sliced hypersurface of simultaneity, is full of cosmological substratum), where  $k$  denotes a partition,  $k$  fundamental fluctuating pieces of the simultaneous spacelike spherical shell within a  $t$ -sliced hypersurface. This sum gives the entire fluctuation within the shell. Since these pieces are within a hypersurface of simultaneity, they have got the same cosmological instant  $t$ . Hence, they have the same  $R(t)$  and the same  $\dot{R}(t)$  (points within the  $t$ -sliced spherical shell cannot have different  $R(t)$ , since  $R(t)$  is a one-to-one function  $R(t) : t \mapsto R(t)$ , and does not depend on spacelike variables; the  $t$ -sliced spherical shell is a set of instantaneous points pertaining to a  $t$ -sliced hypersurface of simultaneity such that these points are spatially distributed over an  $t$ -instantaneous volume enclosed by a  $t$ -instantaneous spherical surface with radius  $R(t)$ ), the reason why the summation index  $l$  does not take into account the common factor at the right-hand side of the eqn. (2). From eqn. (57) in [3], we rewrite the eqn. (2):

$$\sum_{l=1}^k (\delta E_\rho)_l = \frac{E_0^+ R_0^2}{R^3 \sqrt{1 - \dot{R}^2/c^2}} \Big|_t \sum_{l=1}^k (\delta R)_l. \quad (3)$$

Now, we reach the total instantaneous fluctuations within the spherical shell at the cosmological instant  $t$ , a sum of spacelike localized instantaneous fundamental fluctuations within the spherical shell, giving the total instantaneous fluctuation within this shell. Being the instantaneous spherical shell full of cosmological fluid at  $t$ , at each fundamental position within the spherical shell we have got a fundamental energy fluctuation with its intrinsic and fundamental quantum  $R_0 = \sqrt{2Gh/c^3}$  of indeterminacy [3], an inherent spherically symmetric indeterminacy at each position within the  $t$ -sliced spacelike shell.

Hence, the total fluctuation is now quantized:

$$N_t \delta E_\rho = \frac{E_0^+ R_0^2}{R^3 \sqrt{1 - \dot{R}^2/c^2}} \Big|_{t} N_t R_0, \quad (4)$$

where  $N_t$  is the number of instantaneous fundamental domains, the number of fundamental fluctuations within the instantaneous spherical shell contained within a  $t$ -sliced hypersurface of simultaneity. Since  $R_0$  is a fundamental quantum of local indeterminacy, the same  $R_0$  is common to all the instantaneous spacelike points within the shell, the same  $(\delta R)_t = R_0$  quantum of fluctuation at its respective point within the  $t$ -instantaneous spherical shell contained in a  $t$ -sliced surface of simultaneity for all the points in this shell,  $\forall l$ .<sup>\*</sup> But  $N_t$  is given by:

$$N_t = \frac{R^3}{R_0^3}. \quad (5)$$

Using the eqn. (5) in the eqn. (4), we obtain:

$$N_t \delta E_\rho = \frac{E_0^+}{\sqrt{1 - \dot{R}^2/c^2}}. \quad (6)$$

The eqn. (6) gives the total positive fluctuation within the  $t$ -instantaneous spherical shell, the result used in my postulate in [3]. Furthermore, comparing the eqns. (1) and (6), we see the infinitesimal relation given by the eqn. (1) is valid in the finite fluctuation process given by the eqn. (6), provided  $\dot{R}\delta\dot{R} \approx c^2$ , a result used in the appendix of [3] to obtain its eqn. (56).

The Heisenberg indeterminacy principle reads, for the entire fluctuation at a given  $t$ :

$$(N_t \delta E_\rho) \delta t = \frac{E_0^+ \delta t}{\sqrt{1 - \dot{R}^2/c^2}} \geq \frac{h}{4\pi}. \quad (7)$$

The increasing smearing out indeterminacy over the cosmological fluid, related to the primordial indeterminacy in virtue of the Universe expansion as postulated in [3]:

- The actual energy content of the universe is a consequence of the increasing indeterminacy of the primordial era. Any origin of a comoving reference frame within the cosmological substratum has an inherent indeterminacy. Hence, the indeterminacy of the energy content of the universe may create the impression that the universe has not enough energy, raising illusions as dark energy and dark matter speculations. In other words, since the original source of energy emerges as an indeterminacy, we postulate this indeterminacy continues being the energy content of the observational universe:  $\delta E(t) = E^+(t) = E_0^+ / \sqrt{1 - \dot{R}^2/c^2}$ ,

follows from the increasing  $N_t$ , as one infers from the eqns. (5) and (7).

<sup>\*</sup>See [3]. We are in a context of validity of the Cosmological Principle.

## Acknowledgments

A.V.D.B.A is grateful to Y.H.V.H and CNPq for financial support.

Submitted on June 21, 2011 / Accepted on June 21, 2011

## References

1. Bondi H. *Cosmology*. Dover Publications, Inc., New York, 2010.
2. Bondi H. Negative mass in General Relativity. *Review of Modern Physics*, 1957, v.29 no. 3, 423–428.
3. Assis A.V.D.B. On the Cold Big Bang Cosmology. *Progress in Physics*, 2011, v.2 58–63.
4. Carroll S. *Spacetime and Geometry. An Introduction to General Relativity*. Addison Wesley, San Francisco, 2004.

# On the Cold Big Bang Cosmology and the Flatness Problem

Armando V.D.B. Assis\*, \*Departamento de Física, Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC, Trindade 88040-900, Florianópolis, SC, Brazil.  
armando.assis@pgfsc.ufsc.br

In my papers [3] and [4], I obtain a Cold Big Bang Cosmology, fitting the cosmological data, with an absolute zero primordial temperature, a natural cutoff for the cosmological data to a vanishingly small entropy at a singular microstate of a comoving domain of the cosmological fluid. Now, in this brief paper, we show the energy density of the  $t$ -sliced universe must actually be the critical one, following as consequence of the solution in [3] and [4]. It must be pointed out that the result obtained here in this paper on the flatness problem does not contradict the solution in [3], viz., does not contradict the open universe, with  $k = -1$ , obtained in [3], since the solution in [3] had negative pressure and negative total cosmological energy density, hence lesser than the critical positive density. The critical density we obtain here is due to the positive fluctuations I previously discussed regarding the Heisenberg mechanism in [4]. Hence, the energy density due to fluctuation turns out to be positive, the critical one, this being calculated in [4] from the fluctuations within the  $t$ -sliced spherical shell at its  $t$ -sliced hypersurface, being the total energy density that generates the fluctuations, actually, negative in [3] and [4], hence, again, lesser than the critical one and supporting  $k = -1$ . These results are complementary and support my previous results.

## 1 Explaining the observed critical energy density for the cosmological substratum

The proof is straightforward. Recalling the  $t$ -sliced spherical shell defined in [4], we proved its energy at the instant  $t$  of the cosmological time is given by:

$$N_t \delta E_\rho = E^+(t) = \frac{E_0^+}{\sqrt{1 - \dot{R}^2/c^2}}, \quad (1)$$

being the Eq. (6) in [4] and the Eqs. (56) and (59) in [3]. From the Eq. (36) in [3], the Eq. (1) is simply rewritten:

$$E^+ = \frac{c^4 R}{2G}, \quad (2)$$

from which the energy density of the  $t$ -sliced spherical shell pertaining to its  $t$ -sliced hypersurface of simultaneity, being full of its  $t$ -simultaneous cosmological points of the substratum, turns out to be given by:

$$\rho_t = \frac{c^4 R}{2G} \frac{3}{4\pi R^3} = \frac{3c^4}{8\pi G} \frac{1}{R^2}. \quad (3)$$

Now, once defined the Hubble parameter for the spherical shell of the  $t$ -sliced hypersurface, centered at its comoving origin, namely  $H_t$ :

$$H_t = \frac{\dot{R}}{R}, \quad (4)$$

one obtains the energy density of the  $t$ -sliced spherical shell pertaining to its  $t$ -sliced hypersurface of simultaneity from the Eqs. (3) and (4):

$$\rho_t = \frac{3c^2 H_t^2}{8\pi G} \frac{c^2}{\dot{R}^2}. \quad (5)$$

Now, Eq. (35) in [3] shows  $\dot{R}$  very rapidly reaches  $c$ . Hence, the energy density  $\rho_t$  of the  $t$ -sliced spherical shell pertaining to its  $t$ -sliced hypersurface of simultaneity actually is the very critical energy, viz.:

$$\rho_t \rightarrow \rho_{\text{crit}} = \frac{3c^2 H_t^2}{8\pi G}, \quad (6)$$

very rapidly, and it will continue being the critical energy density  $\rho_{\text{crit}}$  forever\*. The time domain within which  $\rho_t$  deviates from the critical is  $t \approx 0$ , at which it reads:

$$\rho_0 = \frac{3c^7}{16\pi G^2 h} \approx 10^{111} \text{Jm}^{-3}, \quad (7)$$

provided the energy density  $\rho_t$  of the  $t$ -sliced spherical shell being given by the Eq. (3) and with the  $R_0 = \sqrt{2Gh/c^3}$  obtained in [3]. The Hubble parameter vanishes at  $t = 0$  in our model†.

## Universe is initially fine-tuned, naturally, due to its initially vanished entropy

Under the solution in [3], there is just an unique initial state for the cosmological substratum with its initial null entropy. As discussed in [3], Eq. (39), the temperature  $T$  of the cosmological substratum at each comoving domain vanishes at  $t = 0$ . Once permeated by radiation, the local entropy turns out to be proportional to  $T^3$ , with a local volume  $V$  of the  $t$ -sliced substratum proportional to  $R_0^3 \neq 0$ , with  $R_0 = \sqrt{2Gh/c^3}$  as

\*It will continue being given by the Eq. (6), but its value tends to vanish, as one easily infers from the Eq. (3). See [3] and [4].

†See [3] and [4].

discussed in [3]. Hence, the initial local entropy, at  $t = 0$ , at each comoving domain reads:

$$S|_{t=0} = \frac{32\pi^5 k_B^4}{45h^3 c^3} VT^3 \Big|_{t=0} = 0, \quad (8)$$

Hence, the solution in [3] naturally provides the required flatness, given by the Eq. (6) here, with an unique initial condition for the cosmological substratum, the minimal, initially vanished, entropy.

### Conclusion

We conclude the cosmological model obtained in [3] and [4] provides the critical energy density for the  $t$ -sliced spherical shell pertaining to its  $t$ -sliced hypersurface of simultaneity of the cosmological substratum. One may explain the initial condition *ex post* in [3], since the vanished entropy explains the unicity for the solution in [3]. It is interesting the indeterminacy principle turns out to provide such an unicity for the solution.

### Acknowledgments

A.V.D.B.A is grateful to Y.H.V.H and CNPq for financial support.

Submitted on June 21, 2011 / Accepted on June 21, 2011

### References

1. Bondi H. *Cosmology*. Dover Publications, Inc., New York, 2010.
2. Bondi H. Negative mass in General Relativity. *Review of Modern Physics*, 1957, v. 29 (3), 423–428.
3. Assis AVDB. On the Cold Big Bang Cosmology *Progress in Physics*, 2011, v. 2 (2011), 58–63.
4. Assis AVDB. A Note on the Quantization Mechanism within the Cold Big Bang Cosmology *Progress in Physics*, 2011, v. 4 (2011), 40–41.
5. Carrol S. *Spacetime and Geometry. An Introduction to General Relativity*. Addison Wesley, San Francisco, 2004.