# SUPER-HYPER FATTORIALE E SUA ESTENSIONE: IL NUMERO DEI RECORD

Marco Ripà

http://spiqrsociety.webs.com/

E-mail: marcokrt1984@yahoo.it

***Questo articolo è ispirato all'ottavo capitolo del libro "La strana coda della serie n^n^…^n" (ISBN 987-88-6178-789-6).***

$$\boxed{G\pounds\uparrow^{(k_{k_1})}G\pounds}$$

**Si andrà qui di seguito a costruire un iperoperatore (a partire dalla nozione di superfattoriale) di magnitudo inimmaginabile. Esso, per ogni intero strettamente maggiore dell'unità, fornirà come *output* un valore ben maggiore del numero di Graham (il più grande numero mai utilizzato per una dimostrazione matematica)** [1]**.**

Il titolo adatto, per questa elucubrazione ad alta voce, potrebbe essere "Verso l'infinito e oltre" [1], o magari "Viaggio allucinante". Certo è che i numeri di cui parlerò tra poco sono qualcosa di trascendente per la mente umana, tale è la crescita che produce un incremento unitario della base.

Nel 1995, nel suo libro "Keys to Infinity", Clifford Pickover definì come *superfattoriali* i numeri del tipo n$=(n!)↑↑(n!) (dove ↑↑ rappresenta l'operatore "tetration" – o "tetrazione" -, espresso come $n\uparrow\uparrow m={}^{m}n$=n^n^n^…^n "m volte").

In questo modo si ha che, ad esempio, $3\$={}^{6}6$=6^6^6^6^6^6 e in generale $n\$={}^{n!}(n!)$.

Altra nozione simile (anche se meno "potente") è quella di *ultrafattoriale*, definito come $U(n)=(n!)^{n!}$ (per n=0,1,2,…).

Se volessimo ottenere una crescita ancora più vertiginosa, all'aumentare di n, potremmo calcolare la produttoria dei primi n superfattoriali: $\prod_{k=1}^{n} k\$ = 1\$ * 2\$ * \ldots * (n-1)\$ * n\$$.

La progressione è la seguente: $\prod_{k=1}^{n} k\$ = 1*(2\hat{}2)*(6\hat{}6\hat{}6\hat{}6\hat{}6\hat{}6)*\ldots.*{}^{(n-1)!}((n-1)!)*{}^{n!}(n!)$.

Questo risultato potrebbe essere ancora migliorato costruendo degli operatori derivati.

Definisco (per n≥1)

$n\yen := {}^{n!}n\$\hat{}\,{}^{(n-1)!}((n-1)\$)\hat{}\ \ldots\hat{}\,{}^{3!}(6\hat{}6\hat{}6\hat{}6\hat{}6\hat{}6)\hat{}\,{}^{2!}(2\hat{}2)\hat{}\,{}^{1!}1 = {}^{n}n\$\hat{}\,{}^{(n-1)!}((n-1)\$)\hat{}\ \ldots\hat{}\,{}^{6}(6\hat{}6\hat{}6\hat{}6\hat{}6\hat{}6)\hat{}256\hat{}1.$

Volendo, potremmo apportare anche una piccola correzione a quanto appena detto, modificando l'operatore hyper-4 usato nel relativo fattoriale. Avremmo in questo modo la successione di potenze seguente:

$n\tilde{\yen} := {}^{n\$}n\$\hat{}\,{}^{(n-1)\$}((n-1)\$)\hat{}\ \ldots\ \hat{}\,{}^{3\$}3\$\hat{}\,{}^{2\$}2\$\hat{}\,{}^{1\$}1\$ = {}^{n\$}n\$\hat{}\,{}^{(n-1)\$}((n-1)\$)\hat{}\ \ldots\hat{}\,{}^{3\$}3\$\hat{}\,{}^{4}4\hat{}1.$

Per rendere l'idea, già solo il terzultimo termine della torre di potenze è ${}^{(6\hat{}6\hat{}6\hat{}6\hat{}6\hat{}6)}3\$$, pari a 6^6^6^6^6^6^… il tutto ripetuto ben 6^(6^(6^(6^(6^6)))) volte.

Ma allora sarebbe persino lecito postulare l'esistenza di $n\pounds := {}^{n\tilde{\yen}}n\tilde{\yen}\hat{}\,{}^{(n-1)\tilde{\yen}}((n-1)\tilde{\yen})\hat{}\ldots\hat{}\,{}^{3\tilde{\yen}}3\tilde{\yen}\hat{}\,{}^{2\tilde{\yen}}2\tilde{\yen}\hat{}\,{}^{1\tilde{\yen}}1\tilde{\yen}$.

Non essendo ancora soddisfatti, potremmo superare l'ultimo, incommensurabile, gradino della scalata verso l'Olimpo dei grandi numeri e definire una successione $(A_1,A_2,\ldots,A_{n\pounds},\ldots)$, in cui:

[1] In matematica, il concetto di *infinito* non è univoco, bensì declinabile in vari "livelli" [2-3].

$\mathbf{A_1=n\pounds}$, $\mathbf{A_2={}^{A_1}A_1={}^{n\pounds}n\pounds}$, $\mathbf{A_3={}^{A_2}(A_2)={}^{({}^{n\pounds}n\pounds)}({}^{n\pounds}n\pounds)}$, e così via [2]; vale a dire che k, il generico termine della successione, sarà pari ad ${}^{A_{k-1}}(A_{k-1})$. Cavalcandola, non dovremmo pazientare molto prima di riuscire a fissare il simbolo "∞" diritto nelle sue due orbite gigantesche [3].

Ho deciso di scrivere queste righe, per indurre il lettore a riflettere (seppur superficialmente) su cosa significhi analizzare proprietà generali che possano valere per <u>tutti</u> i numeri, senza disporre di dimostrazioni rigorose e complete. Procedere per tentativi è come provare a prosciugare l'oceano con un cucchiaino da tè; per questo motivo consiglio di leggere, a chi si fosse realmente appassionato ai grandi numeri, qualche testo sulle *hyperoperations*.

Volendo *unire il sacro al profano*, potremmo costruire un iperoperatore del tipo $\mathbf{n\uparrow^{(M_{n\pounds}(A_{n\pounds}))!}n}$ (vedi nota 3) e sforzarci di visualizzarne l'indicibile progressione. Inutile aggiungere che persino un siffatto candidato dovrà inchinarsi alla maggiore velocità di crescita posseduta da infiniti altri suoi colleghi e un tale artificio si ridurrebbe semplicemente a una burla del tipo: "Dimmi un numero naturale e io te ne troverò immediatamente uno più grande".

Spero in ogni caso che possiate apprezzare l'essenza intrinseca dei risultati mostrati, soprassedendo sul labile procedimento induttivo adottato.

# CONFRONTO CON IL NUMERO DI GRAHAM ($G:=g_{64}$)

Appare evidente che, affinché $\mathbf{n\uparrow^{(M_{n\pounds}(A_{n\pounds}))!}n}$ risulti (spropositatamente) maggiore di G, il valore di "n" non deve essere affatto "grande" (n:=1984, la mia data di nascita, sarebbe ok). Tuttavia, potremmo scegliere un numero molto più piccolo del precedente (ad esempio n=64 − mi ricorda il mio primo computer -), senza alterare le gerarchie.

---

[2] In questo caso le parentesi sono fondamentali, essendo la tetrazione non commutativa e vigendo la convenzione che, come per le potenze, a#a#a=(a#a)#a=${}^{(a\uparrow\uparrow a)}a$ – in generale diverso da a#(a#a) -.
Nel 2004, A. Rubstov e G. F. Romerio, hanno definito una sequenza di operazioni aritmetiche che inizia con la *zerazione*, poi passa attraverso somma, moltiplicazione ed elevamento a potenza, per sfociare quindi in tetrazione, pentazione, e così via. Se $k\in\aleph_0$, da k=3 risulta: $H_k(n\pounds)=n\pounds\uparrow^{(k-2)}n\pounds$.

L'n£-esimo elemento della serie è dato da $H_{n\pounds}(n\pounds)=n\pounds\uparrow^{(n\pounds-2)}n\pounds$, mentre l'elemento iniziale è $H_0=n\pounds\,{}^{o}\,n\pounds=n\pounds+n\pounds=2*n\pounds$ (cfr. *Ackermann's function and new arithmetical operations* – Web PDF version 2004-09-15 [4]).

[3] E anche laddove fallissimo, di sicuro avremmo già abbondantemente oltrepassato il concetto di "incommensurabile". Una titanica successione, scaturente da questa impostazione (limitandoci ai valori positivi di n), potrebbe essere la seguente: $M_1(n\pounds)=n\pounds\uparrow^{(n\pounds)}n\pounds$, $M_2(n\pounds)=n\pounds\uparrow^{(n\pounds\uparrow^{(n\pounds)}n\pounds)}n\pounds$,… o magari addirittura $M_n(An)$, dove An è la successione definita poc'anzi tramite sostituzioni successive.

Operiamo ora il seguente cambio di notazione: **(Mn£(An£))!:=$k_1$** .

Risolviamo $n\uparrow^{(k_1)}n$, per il valore di n fissato, e chiamiamo il risultato $k_2$; sostituiamo quindi $k_2$ al posto di $k_1$. Continuiamo a sostituire $n\uparrow^{(k_{i-1})}n$ con $k_i$ (esattamente come descritto poc'anzi nel caso di i=2) e ci fermiamo non appena il contatore "i" raggiunge il valore "$k_1$".

Abbiamo così costruito il (super-)iperoperatore $\mathbf{n\uparrow^{(k_{k_1})}n}$.

**Ebbene, adesso poniamo <u>n=2</u> (il più piccolo intero positivo tale che n^n>n) e osserviamo con il telescopio (dalla nostra quota siderale) G, il numero di Graham.**

Volendo, potremmo porre n (a monte delle precedenti relazioni) pari a G… o magari a G£... Il numero che ne scaturirebbe dovrebbe soddisfare la voglia di "incommensurabile" della stragrande maggioranza dei lettori.

**Osservazione:** Da notare, infine, che si tratta di una nuova gerarchia di iperoperatori, della quale ho definito solo quello di rango 1. Agendo sul pedice "1" di $k_k$ e aumentandolo, i valori impennano.
Per non parlare poi di k(k(...(k(i))))).

# RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI


[1] http://en.wikipedia.org/wiki/Graham's_number

[2] http://www.vialattea.net/pagine/infinito/transfiniti.htm

[3] http://www.xamuel.com/the-higher-infinite/

[4] http://www.rotarysaluzzo.it/filePDF/Iperoperazioni%20(1).pdf